

# **Wärme- und Stofftransport Skriptum zur Vorlesung**

Wolfgang Ring

Sommersemester 2004



# Inhaltsverzeichnis

<b>1. Einleitung</b>	<b>5</b>
1.1. Physikalische Beschreibung kontinuierliche Medien . . . . .	5
1.1.1. Dichte und Temperatur . . . . .	5
1.1.2. Kraft . . . . .	8
1.1.3. Mechanische Spannung . . . . .	9
<b>2. Strömungsphänomene</b>	<b>21</b>
<b>A. Differenzialoperatoren</b>	<b>23</b>
<b>B. Integrale</b>	<b>25</b>
<b>C. Vektoranalysis</b>	<b>27</b>



# 1. Einleitung

## 1.1. Physikalische Beschreibung kontinuierliche Medien

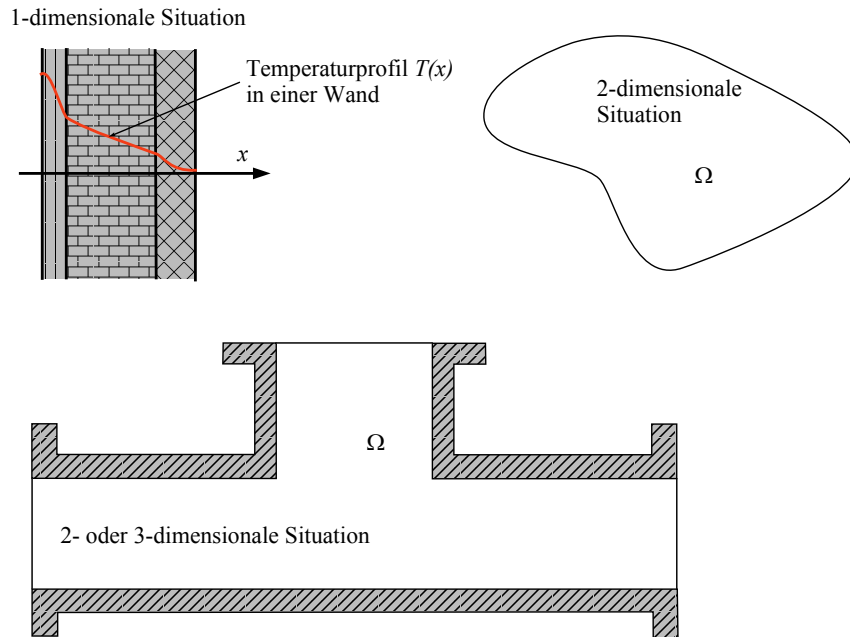
Wir beschäftigen uns mit der mathematischen Beschreibung *kontinuierlicher Medien*. Das heißt, wir vernachlässigen die Tatsache, dass Materie aus einzelnen Molekülen aufgebaut ist. Wir nehmen statt dessen an, dass das Medium, das wir betrachten einen gewissen Bereich  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  kontinuierlich (ohne Lücken) ausfüllt. Wenn wir physikalische Phänomene im realen dreidimensionalen Raum beschreiben wollen, dann wird im Allgemeinen  $n = 3$  sein. In gewissen einfachen Situationen, wenn z.B. eine symmetrische Situation vorliegt, oder wenn eine oder mehrere Raumrichtungen gegenüber anderen in der Ausdehnung vernachlässigt werden können, dann kann der Bereich  $\Omega$  auch als Teilmenge des zweidimensionalen Euklidischen Raums  $\mathbb{R}^2$  oder der eindimensionalen Geraden  $\mathbb{R}$  gewählt werden (siehe Abbildung 1.1). Eine Teilmenge  $\mathcal{E} \subset \Omega$  des Bereichs  $\Omega$  nennen wir im folgenden ein *Element*. (Vorsicht! „Element“ wird hier nicht im Sinn der Mengenlehre verwendet).

In der Kontinuumsmechanik verwendet man Funktionen der Form  $f : \Omega \rightarrow \mathbf{R}^d$  um physikalische Größen, die in jedem einzelnen Punkt  $\mathbf{x} \in \Omega$  des Mediums definiert sind, zu beschreiben. Diese Funktionen sind oft die eigentlichen physikalischen Größen, die den Zustand des Mediums beschreiben. Die Dimension des Bildraums  $d$  kann eine beliebige natürliche Zahl sein. Die häufigsten Varianten sind  $d = 1$  (skalare Felder),  $d = n$  (Vektorfelder) und  $d = n \times n$  (Tensorfelder 2. Stufe).

Im Folgenden werden wir einige der wichtigsten physikalischen Größen der Kontinuumsmechanik einführen und besprechen.

### 1.1.1. Dichte und Temperatur

Die (Massen-) Dichte gibt das Verhältnis von Masse zu Volumen in einem Punkt  $\mathbf{x} \in \Omega$  an. In dieser Form ist die Definition allerdings sinnlos, weil wir für Kontinua annehmen, dass die Masse eines einzelnen Punktes Null ist (anders als in der klassischen Punktmechanik!) und auch das Volumen einer einpunktigen Menge ist Null. Wir verwenden die folgende (mathematische) Definition:

Abbildung 1.1.: Verschiedene Raumbereiche  $\Omega$ , die von einem Kontinuum ausgefüllt sind

**Definition 1.** Angenommen  $\mathcal{E}_r$  ist eine Familie von kleinen Elementen (offenen Teilmengen von  $\Omega$ ) des Mediums mit  $\mathbf{x} \in \mathcal{E}_r$ ,  $r > 0$  und  $\text{Vol}(\mathcal{E}_r) \rightarrow 0$ , wenn  $r \rightarrow 0$ . Hier ist  $\text{Vol}(\mathcal{E}_r)$  das Volumen von  $\mathcal{E}_r$ . Die *Masse* des Mediums innerhalb von  $\mathcal{E}_r$  sei gegeben durch  $m(\mathcal{E}_r)$ . Wir definieren die **Massendichte** des Mediums im Punkt  $\mathbf{x}$  als

$$\rho(\mathbf{x}) = \lim_{r \downarrow 0} \frac{m(\mathcal{E}_r)}{\text{Vol}(\mathcal{E}_r)} \text{ in } \left[ \frac{\text{kg}}{\text{m}^n} \right]. \quad (1.1.1)$$

Wir haben hier die Dimension  $n$  des Raumes variabel gelassen. Manchmal werden wir „Flächendichten“ in  $\left[ \frac{\text{kg}}{\text{m}^2} \right]$  betrachten, manchmal „Volumendichten“ in  $\left[ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \right]$ , etc.

Die mathematische Definition hat nur bis zu einem gewissen Grad einen physikalischen Sinn. Wenn wir tatsächlich den Limes für  $r \rightarrow 0$  durchführen, dann kommen wir irgendwann mit dem Durchmesser von  $\mathcal{E}_r$  in den molekularen und submolekularen Bereich. Dort macht es aber keinen Sinn mehr von einer kontinuierlichen Massenverteilung zu sprechen. Wir dürfen „physikalisch“ also den Grenzwert nur bis zu einer Größe von  $\mathcal{E}_r$  durchführen, die noch deutlich über der Größe eines typischen Moleküls liegt. Andererseits muss die Größenskala klein genug gewählt werden, so dass das Verhältnis  $m(\mathcal{E}_r)$  zu  $\text{Vol}(\mathcal{E}_r)$  nicht mehr besonders variiert, wenn  $r$  verändert wird. Die Größenskala, die für typische Betrachtungen in der Kontinuumsmechanik verwendet wird, ist also *mikroskopisch*, aber noch *nicht molekular*. Die mathematische (exakte) Definition ist also nur eine näherungsweise Beschreibung der Wirklichkeit.

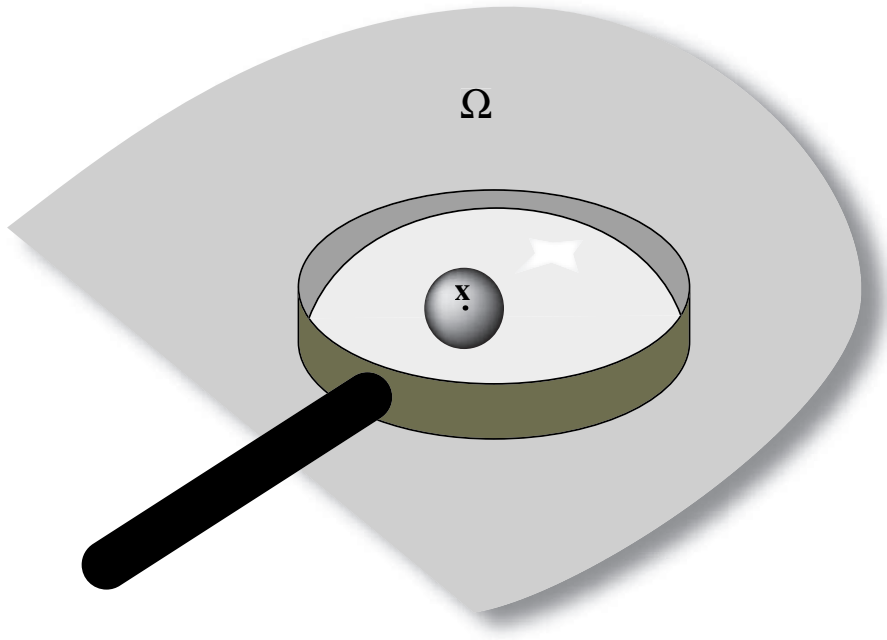


Abbildung 1.2.: Mikroskopische Betrachtung eines Volumenelements.

Implizit haben wir auch angenommen, dass der Limes in Definition 1 existiert und auch unabhängig von der geometrischen Form von  $\mathcal{E}_r$  ist. Man könnte dann in der Definition auch ganz spezielle Elemente, wie Kugeln oder Würfel, nehmen.

Die Dichte in homogenen Flüssigkeiten ist typischerweise konstant (d.h. nicht von  $\mathbf{x}$  abhängig). Für Gase gilt das nicht, dort besteht ein proportionaler Zusammenhang zwischen Druck und Dichte. Im Allgemeinen denken wir uns die Dichte als stetige Funktion von  $\mathbf{x}$ . Es kann aber auch Situationen geben, wo die Dichte unstetig ist, wie zum Beispiel bei Gemischen von mehreren Medien (z.B. Öl und Wasser) oder bei Überschallströmungen (Stoßwelle beim Durchbrechen der Schallmauer).

### Zusammenhang Masse - Dichte

Angenommen wir kennen die Dichte eines Mediums als Funktion von  $\mathbf{x}$ , d.h.  $\rho : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  ist gegeben. Wir greifen eine beliebige Teilmenge  $D \subset \Omega$  heraus und wollen die Gesamtmasse  $m(D)$  des Mediums in  $D$  bestimmen. Es gilt dann

$$m(D) = \int_D \rho(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}. \quad (1.1.2)$$

*Beweis.* Eine (unexakte) Beweisskizze geht ungefähr so: Wir zerlegen die gegebene Menge  $D$  in disjunkte *kleine* Elemente (Teilmengen)  $\mathcal{E}_k$  mit  $k = 1, \dots, N$  und wir wählen

jeweils einen Punkt  $\mathbf{x}_k \in \mathcal{E}_k$ . Dann ist

$$m(D) \sim \sum_{k=1}^N m(\mathcal{E}_k) \sim \sum_{k=1}^N \rho(\mathbf{x}_k) \text{Vol}(\mathcal{E}_k) \sim \int_D \rho(\mathbf{x}) d\mathbf{x}.$$

In diesem „Beweis“ ist natürlich noch einiges offen: Wie zerlegen wir  $D$  in einzelne Elemente, existieren die Grenzwerte und sind sie so wie angeschrieben? In welchem Sinn muss der Grenzwert überhaupt gebildet werden?

Ein exakter Beweis würde Methoden aus der *Maßtheorie* verwenden. Man müsste die Abbildung  $m : M \subset 2^\Omega \rightarrow \mathbb{R}^+$  als *Maß* auffassen und  $m$  müsste absolut stetig sein. Die Funktion  $\rho$  ist dann die Radon-Nikodym Ableitung von  $m$  und als solche eine integrierbare ( $L^1$ -)Funktion. Die Aussage in (1.1.2) folgt dann unmittelbar aus dem Satz von Radon-Nikodym [1, Seite 140, Theorem 7.8].  $\square$

## Temperatur

Die Temperatur  $T(\mathbf{x})$  eines Körpers oder Mediums in einem Punkt  $x \in \Omega$  ist ein weiteres Beispiel für eine Funktion  $T : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , die den physikalischen Zustand des Mediums beschreibt. Die Temperatur in einem Punkt ist rein physikalisch definiert. Der Wert, den wir erhalten, wenn wir ein (winziges) Thermometer an den Punkt  $\mathbf{x}$  halten, ist die Temperatur des Mediums in diesem Punkt.

Dichte und Temperatur sind beide *skalare Felder*, ihre Werte sind reelle Zahlen (Skalare).

### 1.1.2. Kraft

Wir betrachten einerseits Kräfte, wie die Gravitation oder ein elektromagnetische Kräfte, die auf ein Medium wirken ohne dass physischer Kontakt zwischen dem Medium und einer Vorrichtung, welche die Kraft überträgt vorliegt. Solche Kräfte nennen wir *Volumenkräfte* (body forces, bulk forces). Sie wirken auf Volumina. Wir zählen auch Beschleunigungskräfte zu den Volumenkräften. Kräfte, die durch Kontakt zwischen Oberflächen übertragen werden (Druckkräfte, Reibungskräfte), nennen wir *Oberflächenkräfte* (surface forces).

Ähnlich wie für die Masse wollen wir eine *Kraftdichte* definieren. Wir betrachten wieder eine Folge von kleinen Elementen  $\mathcal{E}_r \subset \Omega$  mit  $\mathbf{x} \in \mathcal{E}_r$  und  $\text{Vol}(\mathcal{E}_r) \rightarrow 0$  für  $r \rightarrow 0$ . Angenommen, wir können die gesamte Kraft die auf jedes der Elemente  $\mathcal{E}_r$  wirkt bestimmen und wir nennen diese Kraft  $\hat{\mathbf{f}}(\mathcal{E}_r)$ . Wir definieren die Kraft(dichte) im Punkt  $\mathbf{x}$  als

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \lim_{r \downarrow 0} \frac{\hat{\mathbf{f}}(\mathcal{E}_r)}{\text{Vol}(\mathcal{E}_r)}, \quad (1.1.3)$$

wobei wir wieder annehmen, dass der Limes existiert und unabhängig von der speziellen Wahl der Mengen  $\mathcal{E}_r$  ist.

Nachdem die Kraft  $\hat{\mathbf{f}}(\mathcal{E}_r)$  eine vektorielle Größe ist, ist auch der Grenzwert  $\mathbf{f}(\mathbf{x})$  ein Vektor. Die Abbildung  $\mathbf{f} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  ist also vektorwertig. Wir sagen  $\mathbf{f}$  ist ein *Vektorfeld* auf  $\Omega$ .



Wie für die Massendichte gilt auch für die Kraft der folgende Zusammenhang zwischen der Gesamtkraft  $\hat{\mathbf{f}}(D)$ , die auf ein Element  $D$  wirkt und der Kraftdichte:

$$\hat{\mathbf{f}}(D) = \int_D \mathbf{f}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}. \quad (1.1.4)$$

### Beispiel: Gravitationskraft

Die Schwerkraft, die auf ein Element  $\mathcal{E}$  eines Mediums wirkt, ist gegeben durch

$$\hat{\mathbf{g}}(\mathcal{E}) = -m(\mathcal{E}) g \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

wobei wir annehmen, dass durch den dritten kanonischen Basisvektor  $\mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  die Richtung zum Erdmittelpunkt gegeben ist. Die Konstante  $g$  ist gegeben durch die Erdbeschleunigung  $g = 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ . Für die Dichte der Gravitationskraft erhalten wir:

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) = - \left( \lim_{\text{Vol}(\mathcal{E}) \downarrow 0} \frac{m(\mathcal{E})}{\text{Vol}(\mathcal{E})} \right) g \mathbf{e}_3 = -g \rho(\mathbf{x}) \mathbf{e}_3. \quad (1.1.5)$$

Die Kraftdichte für die Gravitationskraft ist also über die Erdbeschleunigung  $g$  mit der Massendichte verknüpft.

### 1.1.3. Mechanische Spannung

Wir betrachten ein Element  $\mathcal{E} \subset \Omega$  eines Mediums. Wir stellen die folgende Frage: Wie können wir die Kräfte beschreiben, die vom umgebenden Medium auf das Element übertragen werden? Diese Kräfte wirken auf die *Oberfläche*  $\partial\mathcal{E}$  des Elements. Dazu machen wir das folgende Gedankenexperiment: Wir denken uns:

1. Das umgebende Medium wird weggeschnitten.
2. Dadurch, dass das umgebende Medium wegfällt, würde das Element in einen ganz anderen mechanischen Zustand übergehen. Wir kompensieren den Wegfall der Umgebung dadurch, dass wir eine Kraftdichte an der Oberfläche von  $\mathcal{E}$  anbringen.

Die Frage ist also: Welches Kraftfeld  $\mathbf{t} : \partial\mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}^3$  müssen wir an der Oberfläche von  $\mathcal{E}$  anbringen, um das umliegende Medium zu simulieren, d.h. um den gleichen mechanischen Zustand in  $\mathcal{E}$  zu erzeugen, wie das Medium. Die Kraft  $\mathbf{t}$  ist eine Kraftdichte auf einer Oberfläche, d.h. sie hat die Dimension  $\frac{\text{N}}{\text{m}^2}$  (Kraft pro Fläche).

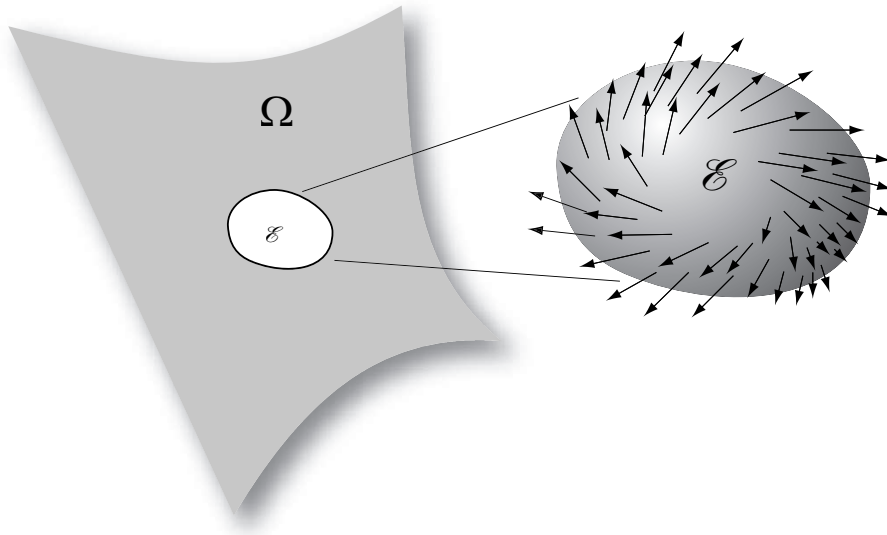


Abbildung 1.3.: Spannungskraftfeld auf ein Element.

### Kräftegleichgewicht

Nach dem 2. Newtonschen Gesetz erzeugen Kräfte, die auf einen Körper einwirken eine Bewegung. Wenn ein Körper sich in Ruhe befindet (wir sagen, der Körper ist im *statischen Gleichgewicht*) dann kann auf diesen Körper keine (resultierende) Kraft einwirken.

**1. statisches Gleichgewichtsprinzip.** Wenn ein Körper im statischen Gleichgewicht ist, dann ist die Summe aller am Körper angreifenden Kräfte gleich Null.

Das statische Gleichgewichtsprinzip kann verwendet werden um eine Beziehung für die mechanische Spannung herzuleiten. Wir formulieren die Wirkung des umliegenden Mediums auf das Element  $\mathcal{E}$  als Gleichgewichtsprinzip. In einer statischen Gleichgewichtssituation nehmen wir also an, dass die Oberflächenkräfte (Spannungskräfte) die Volumenkräfte im Gleichgewicht halten.

**Kräftegleichgewicht für ein Element eines Kontinuums.** Wir formulieren das *Kräftegleichgewicht* für ein Element  $\mathcal{E}$  in der folgenden Form:

$$\int_{\mathcal{E}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} + \int_{\partial\mathcal{E}} \mathbf{t}(\mathbf{x}) \, dS(\mathbf{x}) = 0. \quad (1.1.6)$$

Hier ist die  $\mathbf{f} : \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}^3$  die Dichte der Volumenkräfte die auf das Element  $\mathcal{E}$  wirken. Die Gleichung (1.1.6) sagt, dass die resultierende Volumenkraft (siehe (1.1.4)) und die resultierende Oberflächenkraft sich auf Null aufsummieren.

Später werden wir auch noch annehmen, dass die Drehmomente die von den Volumenkräften ausgeübt werden von den Drehmomenten der Oberflächenkräfte kompensiert

werden. Dadurch und durch eine Annahme über den Zusammenhang zwischen Spannung und Deformation des Körpers kann die mechanische Spannung bestimmt werden. Im Kapitel über *Hydrodynamik* werden wir für bewegte Elementen die Beschleunigungskräfte zu den Volumenkräften hinzufügen und ein dynamisches Gleichgewichtsprinzip formulieren.

Wir nennen das Vektorfeld  $\mathbf{t} : \partial\mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}^3$  die *Cauchyspannung* (Cauchy stress) auf  $\mathcal{E}$ . Das Spannungsvektorfeld hängt vom betrachteten Punkt  $\mathbf{x}$  und auch vom Element  $\mathcal{E}$  ab. Wir nehmen aber an, dass  $\mathbf{t}$  nur von den lokalen Eigenschaften von  $\mathcal{E}$  in einer kleinen Umgebung von  $\mathbf{x}$  auf  $\partial\mathcal{E}$  abhängt. Genauer gesagt nehmen wir an, dass

$$\mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathcal{E}) = \mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{n}(\mathbf{x})), \quad (1.1.7)$$

wobei  $\mathbf{n}(\mathbf{x})$  der *äußere Normaleneinheitsvektor* auf  $\mathcal{E}$  im Punkt  $\mathbf{x} \in \partial\mathcal{E}$  ist. Wir nehmen an, dass die Cauchyspannung *stetig* in den Variablen  $\mathbf{x}$  und  $\mathbf{n}$  ist.

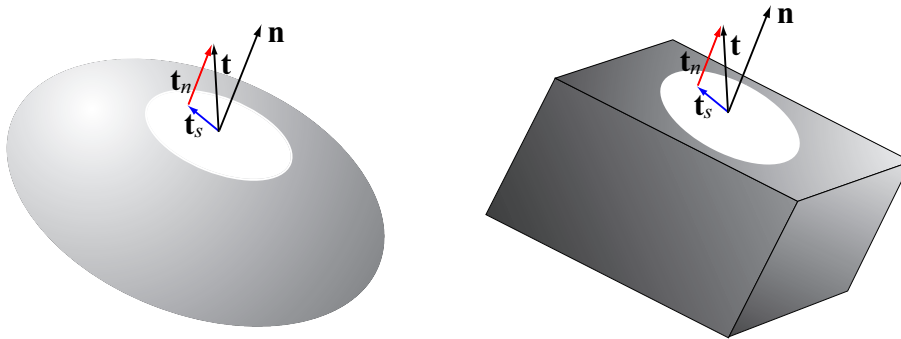


Abbildung 1.4.: Lokale Abhängigkeit der Spannung von der Normalenrichtung

**Satz 1 (Cauchy).** Die Cauchyspannung  $\mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{n})$  ist linear in der Variablen  $\mathbf{n}$ , d.h. falls  $\mathbf{n} = n_1\mathbf{e}_1 + n_2\mathbf{e}_2 + n_3\mathbf{e}_3$ , dann gilt

$$\mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{n}) = n_1 \mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{e}_1) + n_2 \mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{e}_2) + n_3 \mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{e}_3) =: T(\mathbf{x}) \mathbf{n}, \quad (1.1.8)$$

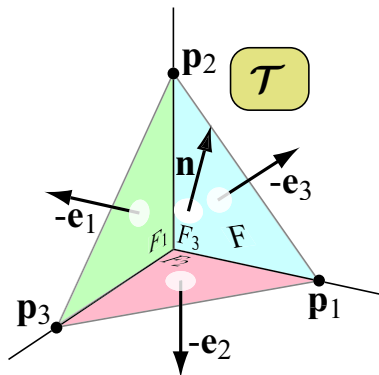
wobei die Matrix  $T(\mathbf{x})$  gegeben ist durch die Spaltenvektoren

$$T(\mathbf{x}) = [\mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{e}_1), \mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{e}_2), \mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{e}_3)] = \begin{pmatrix} \sigma_{1,1} & \sigma_{1,2} & \sigma_{1,3} \\ \sigma_{2,1} & \sigma_{2,2} & \sigma_{2,3} \\ \sigma_{3,1} & \sigma_{3,2} & \sigma_{3,3} \end{pmatrix}. \quad (1.1.9)$$

$T(\mathbf{x})$  heißt Cauchyscher Spannungstensor in  $\mathbf{x}$ . Die Abbildung  $T : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{3 \times 3}$  ist ein Tensorfeld.

*Beweis.* Wir wählen einen (fast) beliebigen Einheitsvektor  $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3)^t \in \mathbb{R}^3$ . O.B.d.A. nehmen wir an, dass alle Komponenten  $n_j$  positiv sind. Wir betrachten einen

Punkt  $\mathbf{x} \in \Omega$  und legen den Ursprung unseres Koordinatensystem in  $\mathbf{x}$ . Mit  $\mathbf{n}$  konstruieren wir uns ein Tetraeder  $\mathcal{T}$  mit den Ecken  $\mathbf{x} = (0, 0, 0)^t$ ,  $\mathbf{p}_1 = (\frac{\epsilon}{n_1}, 0, 0)$ ,  $\mathbf{p}_2 = (0, \frac{\epsilon}{n_2}, 0)$  und  $\mathbf{p}_3 = (0, 0, \frac{\epsilon}{n_3})$ . Wir nennen die Seitenfläche des Tetraeders, die normal auf den Koordinatenvektor  $\mathbf{e}_j$  steht  $F_j$ . Die vierte Seitenfläche nennen wir  $F$ . Der Normalvektor der vierten Seitenfläche ist genau der gegebene Vektor  $\mathbf{n}$ . (Das Tetraeder ist genau so konstruiert worden; Die Ebene durch die drei Punkte  $\mathbf{p}_j$  legen und nachrechnen, ob der Normalvektor tatsächlich mit  $\mathbf{n}$  zusammenfällt.) Die anderen Seitenflächen  $F_j$  haben genau die negativen Koordinatenvektoren  $-\mathbf{e}_j$  als äußere Normalenvektoren.

Abbildung 1.5.: Das Tetraeder  $\mathcal{T}$ .

*Behauptung:* Es gilt

$$|F_j| = n_j |F|, \text{ für } j = 1, 2, 3.$$

Hier ist  $|\cdot|$  der Inhalt der jeweiligen Fläche. Wir rechnen zuerst den Inhalt von  $F$  aus:

$$\begin{aligned} |F| &= \frac{1}{2} |(\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1) \times (\mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_1)| \\ &= \frac{1}{2} \left| \begin{pmatrix} -\frac{\epsilon}{n_1} \\ \frac{\epsilon}{n_2} \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -\frac{\epsilon}{n_1} \\ \frac{\epsilon}{n_3} \\ 0 \end{pmatrix} \right| = \frac{\epsilon^2}{2} \sqrt{\frac{1}{n_2^2 n_3^2} + \frac{1}{n_1^2 n_3^2} + \frac{1}{n_1^2 n_2^2}} \\ &= \frac{\epsilon^2}{2} \frac{\sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}}{n_1 n_2 n_3} = \frac{\epsilon^2}{2 n_1 n_2 n_3}. \end{aligned}$$

Die letzte Gleichung gilt, weil  $\mathbf{n}$  ein Einheitsvektor ist. Für die (rechtwinkligen) Dreiecksflächen  $|F_j|$  haben wir

$$|F_j| = \frac{1}{2} \frac{\epsilon}{n_k} \frac{\epsilon}{n_l}$$

mit  $k, l \neq j$ . Das heißt, es gilt  $|F_j| = n_j |F|$ .

Wir schauen uns jetzt die Kraftbilanzgleichung (1.1.6) für das Tetraeder  $\mathcal{T}$  an:

$$\int_{\mathcal{T}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = - \left( \sum_{j=1}^3 \int_{F_j} \mathbf{t}(\mathbf{x}, -\mathbf{e}_j) dS + \int_F \mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{n}) dS \right).$$

Komponentenweise betrachtet hat diese Gleichung die Form

$$\int_{\mathcal{T}} f_i(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = - \left( \sum_{j=1}^3 \int_{F_j} t_i(\mathbf{x}, -\mathbf{e}_j) dS + \int_F t_i(\mathbf{x}, \mathbf{n}) dS \right).$$

Hier ist  $\mathbf{f} = (f_1, f_2, f_3)^t$  und  $\mathbf{t} = (t_1, t_2, t_3)^t$ . Nach dem Mittelwertsatz der Integralrechnung gibt es Punkte  $\mathbf{z}_i \in \mathcal{T}$ ,  $\mathbf{x}_{i,j} \in F_j$  und  $\mathbf{x}_i \in F$ , so dass  $\int_{\mathcal{T}} f_i(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = f_i(\mathbf{z}_i) \text{Vol}(\mathcal{T})$ ,  $\int_{F_j} t_i(\mathbf{x}, -\mathbf{e}_j) dS = t_i(\mathbf{x}_{i,j}, -\mathbf{e}_j) n_j |F|$  und  $\int_F t_i(\mathbf{x}, \mathbf{n}) dS = t_i(\mathbf{x}_i, \mathbf{n}) |F|$ . Hier haben wir das Hilfsergebnis  $|F_j| = n_j |F|$  verwendet. Damit gilt

$$f_i(\mathbf{z}_i) \text{Vol}(\mathcal{T}) = - \sum_{j=1}^3 t_i(\mathbf{x}_{i,j}, -\mathbf{e}_j) n_j |F| - t_i(\mathbf{x}_i, \mathbf{n}) |F|. \quad (1.1.10)$$

Wir betrachten nun nicht nur ein Tetraeder, sondern eine Folge von ähnlichen Tetraedern  $\mathcal{T}^n$ , deren Durchmesser gegen Null konvergiert. Die Seitenflächen bezeichnen wir mit  $F_j^n$  und  $F$ , die Interpolationspunkte mit  $\mathbf{z}_i^n$  etc. Für diese Folge gilt

$$\frac{\text{Vol}(\mathcal{T}^n)}{|F^n|} \rightarrow 0; \quad \mathbf{z}_i^n \rightarrow \mathbf{x}; \quad \mathbf{x}_{i,j}^n \rightarrow \mathbf{x}; \quad \mathbf{x}_i^n \rightarrow \mathbf{x}$$

für  $n \rightarrow \infty$ . Die erste Beziehung folgt aus der Tatsache, dass die Fläche  $F^n$  quadratisch und das Volumen  $\text{Vol}(\mathcal{T}^n)$  mit der dritten Potenz des Durchmessers gegen Null konvergiert. Wenn wir also die Gleichung (1.1.10) für die Folge  $\mathcal{T}^n$  anschreiben, durch  $|F^n|$  dividieren und  $n$  gegen Unendlich gehen lassen, bekommen wir

$$t_i(\mathbf{x}, \mathbf{n}) = - \sum_{i=1}^3 n_j t_i(\mathbf{x}, -\mathbf{e}_j). \quad (1.1.11)$$

Wir sind damit fast fertig. Wir müssen nur noch zeigen, dass sich die beiden negative Vorzeichen auf der rechten Seite der Gleichung (1.1.11) aufheben. Dazu verwenden wir (1.1.11) (die Formel ist ja schon für beliebige Vektoren  $\mathbf{n}$  bewiesen) für eine spezielle Folge von Vektoren  $\mathbf{n}_j^k \rightarrow \mathbf{e}_j$  für  $k \rightarrow \infty$ . Bemerkung: Für die drei Komponenten  $n_{j,i}^k$  ( $i = 1, 2, 3$ ) von  $\mathbf{n}_j^k$  gilt dann natürlich  $n_{j,i}^k \rightarrow \delta_{i,j}$  für  $k \rightarrow \infty$ . Wenn wir annehmen, dass die Funktionen  $t_i$  stetig sind und auf beiden Seiten von (1.1.11) den Grenzübergang  $k \rightarrow \infty$  durchführen, dann erhalten wir  $t_i(\mathbf{x}, \mathbf{e}_j) = -t_i(\mathbf{x}, -\mathbf{e}_j)$ . Wenn wir das in (1.1.11) einsetzen, erhalten wir das gewünschte Ergebnis.  $\square$

Die Spalten des Cauchyschen Spannungstensors sind die Spannungsvektoren die auf Flächenelemente wirken, deren Normalvektoren jeweils durch die kanonischen Basisvektoren  $\mathbf{e}_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  gegeben sind. Die Normalkomponenten  $\mathbf{t}_n^i(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{e}_i), \mathbf{e}_i \rangle \mathbf{e}_i$  nennen wir die *Normalspannungen* in Richtung  $\mathbf{e}_i$ , die tangentialen Komponenten  $\mathbf{t}_s^i(\mathbf{x}) = \mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{e}_i) - \mathbf{t}_n^i(\mathbf{x})$  nennen wir *Tangentialspannungen* oder *Scherspannungen* in Richtung der Normalen  $\mathbf{e}_i$ . Die Koeffizienten der Normalspannungen bezüglich der kanonischen Basis stehen in der Diagonale des Cauchyschen Spannungstensors.

Normalspannungen — in einer bestimmten Richtung — entstehen, wenn die äußeren Kräfte versuchen, das Medium in dieser Richtung zusammen zu drücken oder auseinander zu ziehen. Scherspannungen — in einer vorgegebenen Richtung — entstehen, wenn die äußeren Kräfte versuchen Schichten, die normal auf diese Richtung stehen, gegeneinander zu verschieben. Vorsicht! Auch reine Zug- oder Druckbelastungen erzeugen Scherspannungen. Es kommt auf die Normalenrichtung des Elements an, das betrachtet wird. (Siehe Abbildung 1.6.)

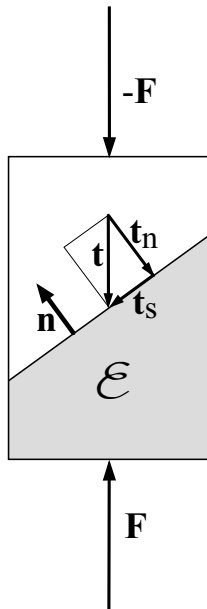


Abbildung 1.6.: Normal- und Scherspannung in einer schrägen Ebene bei reiner äußerer Druckbelastung.

### Hydrostatischer Druck

Wir betrachten ein Fluid in Ruhe. Angenommen, es wirkt nur die Gravitation (oder eine andere konstante Kraft) auf das Medium ein. In einem Fluid in Ruhe können keine Scherspannungen wirken. Wenn Scherspannungen in einer Richtung vorhanden wären, würden die Moleküle des Fluids anfangen sich gegeneinander, in tangentialer Richtung, zu verschieben (in einem Fluid sind die Moleküle ja nicht in ein festes Gitter eingebunden, sondern können sich relativ zueinander bewegen). Dann würde das Fluid aber nicht in Ruhe sein können. Ein weiteres Argument für die Abwesenheit von Scherspannungen ist, dass in einem Fluid tangentiale Kräfte vom umliegenden Medium auf ein Element *durch Reibung* übertragen werden. In einem Fluid in Ruhe ist aber keine Reibung vorhanden.

Jedenfalls gilt

$$T(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \sigma_{1,1} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{2,2} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{3,3} \end{pmatrix}.$$

Wir betrachten das Element in Abbildung 1.7. Die Spannungskraft auf die Seitenfläche

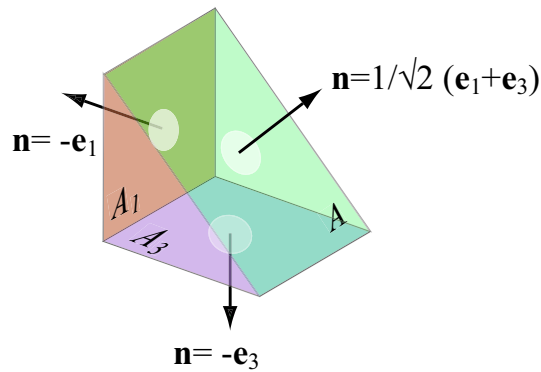


Abbildung 1.7.: Das Prisma  $\mathcal{P}$ .

$A$  hat die Form (Satz von Cauchy 1)

$$\mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{n}) = T(\mathbf{x}) \mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \sigma_{1,1} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{2,2} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{3,3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \sigma_{1,1} \\ 0 \\ \sigma_{3,3} \end{pmatrix}.$$

Weil auch in der Ebene  $A$  keine Scherspannungen vorhanden sind gilt

$$\mathbf{t}(\mathbf{x}, \mathbf{n}) = \mathbf{t}_n(\mathbf{x}, \mathbf{n}) = \lambda \mathbf{n}$$

mit einem geeigneten  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Das heißt aber

$$\sigma_{1,1} = \sigma_{3,3} = \lambda.$$

Analog zeigt man  $\sigma_{1,1} = \sigma_{2,2}$ .

**Definition 2.** Im hydrostatischen (reibungsfreien) Fall definieren wir den hydrostatischen Druck  $p(\mathbf{x})$  in einem Punkt  $\mathbf{x}$  als

$$p(\mathbf{x}) = -\sigma_{i,i} \text{ für } i = 1, 2, 3. \quad (1.1.12)$$

Es gilt dann

$$T(\mathbf{x}) = -p(\mathbf{x})\mathbb{E} \quad (1.1.13)$$

für den Spannungstensor  $T$ .

Wenn Scherspannungen vorhanden sind, dann wird der (hydrostatische) Druck als Mittelwert der Normalspannungen definiert:

$$p(\mathbf{x}) = -\frac{1}{3}(\sigma_{1,1} + \sigma_{2,2} + \sigma_{3,3}) = -\frac{1}{3}\text{spur}(T(\mathbf{x})). \quad (1.1.14)$$

**Hydrostatik**

Wir bestimmen die Druckverteilung in einem statischen Fluid unter Einfluss der Gravitationskraft. Wir werden zwei verschiedene Herleitungen für das Resultat

$$-g \rho(\mathbf{x}) \mathbf{e}_3 = \nabla p(\mathbf{x}). \quad (1.1.15)$$

präsentieren. Die erste Herleitung verwendet eine *infinitesimale* Betrachtung, das heißt Ausgangspunkt der Überlegungen ist eine Folge von Elementen, deren Durchmesser gegen Null geht. (Ausserdem ist die Argumentation ein bisschen unexakt). Die Grundlage der zweiten Herleitung ist eine integrale Betrachtung, die für alle beliebigen Elemente angestellt wird und die den Divergenzansatz von Gauß (Satz 3 in Anhang C) verwendet.

1. *Herleitung*: Betrachten wir ein quaderförmiges Element

$$W = [x, x + \Delta x] \times [y, y + \Delta y] \times [z, z + \Delta z].$$

Wir betrachten die Kräftebilanz (1.1.6) für den Würfel  $W$ , wenn die äußere Kraft durch die Gravitation gegeben ist. Wenn wir (für den hydrostatischen Fall) die Beziehung (1.1.13) verwenden, dann gilt

$$- \int_W g \rho(\mathbf{x}) \mathbf{e}_3 d\mathbf{x} - \int_{\partial W} p(\mathbf{x}) \mathbf{n}(\mathbf{x}) dS(\mathbf{x}) = 0.$$

Für einen kleinen Quader  $W$  können wir die Integrale auf der rechten und linken Seite durch „Funktionswert an einer Stelle im Integrationsbereich  $\times$  Volumen (Fläche) des Integrationsbereichs“ ersetzen. Damit erhalten wir mit  $\mathbf{x} = (x, y, z)^t$  (näherungsweise)

$$\begin{aligned} -g \rho(\mathbf{x}) \mathbf{e}_3 \Delta x \Delta y \Delta z &= (p(x + \Delta x, y, z) - p(x, y, z)) \mathbf{e}_1 \Delta y \Delta z \\ &+ (p(x, y + \Delta y, z) - p(x, y, z)) \mathbf{e}_2 \Delta x \Delta z \\ &+ (p(x, y, z + \Delta z) - p(x, y, z)) \mathbf{e}_3 \Delta x \Delta y. \end{aligned}$$

Wenn wir durch  $\Delta x \Delta y \Delta z$  dividieren und die Größe des Quaders gegen Null gehen lassen erhalten wir

$$-g \rho(\mathbf{x}) \mathbf{e}_3 = \frac{\partial p}{\partial x}(\mathbf{x}) \mathbf{e}_1 + \frac{\partial p}{\partial y}(\mathbf{x}) \mathbf{e}_2 + \frac{\partial p}{\partial z}(\mathbf{x}) \mathbf{e}_3 = \nabla p(\mathbf{x}).$$

Die äußere Kraftdichte ist also gleich dem Gradient des hydrostatischen Drucks.

2. *Herleitung*: Sei  $\mathcal{E}$  ein beliebiges Element in  $\Omega$ . Wegen (1.1.6) und (1.1.13) gilt

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{E}} g \rho(\mathbf{x}) \mathbf{e}_3 d\mathbf{x} &= - \int_{\partial \mathcal{E}} p(\mathbf{x}) \mathbf{n}(\mathbf{x}) dS(\mathbf{x}) \\ &= - \left[ \int_{\partial \mathcal{E}} p(\mathbf{x}) \langle \mathbf{e}_i, \mathbf{n}(\mathbf{x}) \rangle dS(\mathbf{x}) \right]_{i=1}^3. \end{aligned}$$

Für jede der Komponenten des Vektors auf der rechten Seite können wir den Divergenzansatz von Gauß (Satz 3 im Anhang C) anwenden:

$$\begin{aligned} \int_{\partial \mathcal{E}} p(\mathbf{x}) \langle \mathbf{e}_i, \mathbf{n}(\mathbf{x}) \rangle dS(\mathbf{x}) &= \int_{\mathcal{E}} \operatorname{div} (p(\mathbf{x}) \mathbf{e}_i) d\mathbf{x} \\ &= \int_{\mathcal{E}} \langle \nabla p(\mathbf{x}), \mathbf{e}_i \rangle d\mathbf{x} = \int_{\mathcal{E}} \frac{\partial p}{\partial x_i}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}. \end{aligned}$$



Wenn wir die Komponenten wieder zu einem Vektor zusammenfassen, erhalten wir

$$\int_{\mathcal{E}} g \rho(\mathbf{x}) \mathbf{e}_3 d\mathbf{x} = - \int_{\mathcal{E}} \nabla p(\mathbf{x}) d\mathbf{x}. \quad (1.1.16)$$

Weil diese Beziehung für beliebige Elemente  $\mathcal{E} \subset \Omega$  gilt, müssen die Integranden auf der rechten und linken Seite gleich sein. Es gilt also

$$-g \rho(\mathbf{x}) \mathbf{e}_3 = \nabla p(\mathbf{x}).$$

für alle  $\mathbf{x} \in \Omega$ .

Das Ergebnis (1.1.15) können wir verwenden um das Pascalsche Prinzip für statische Fluide herzuleiten.

**Satz 2 (Pascalsches Prinzip).** *In einem statischen Fluid mit konstanter Dichte  $\rho = \text{const}$  haben Punkte mit der selben Höhe den selben Druck. Das heißt für  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)^t$  und  $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3)^t$  mit  $x_3 = y_3$  gilt*

$$p(\mathbf{x}) = p(\mathbf{y}). \quad (1.1.17)$$

*Beweis.* Nehmen wir an, dass  $\mathbf{x}$  und  $\mathbf{y}$  zwei Punkte mit der selben  $\mathbf{e}_3$ -Koordinate, also  $x_3 = y_3$ . Wir wählen außerdem eine differenzierbare Kurve  $\gamma : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^3$  mit  $\mathbf{x} = \gamma(\alpha)$  und  $\mathbf{y} = \gamma(\beta)$ . Nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung und (1.1.15) gilt

$$\begin{aligned} p(\mathbf{x}) - p(\mathbf{y}) &= \int_{\alpha}^{\beta} \frac{d}{dt} (p(\gamma(t))) dt = \int_{\alpha}^{\beta} \langle \nabla p(\gamma(t)), \dot{\gamma}(t) \rangle dt \\ &= -\rho g \int_{\alpha}^{\beta} \langle \mathbf{e}_3, \dot{\gamma}(t) \rangle dt = -\rho g \int_{\alpha}^{\beta} \dot{\gamma}_3(t) dt \\ &= -\rho g (\gamma_3(\beta) - \gamma_3(\alpha)) = -\rho g (y_3 - x_3) = 0. \end{aligned}$$

□

*Beispiel 1.* Der Druck in einem Behälter soll durch ein Quecksilbermanometer gemessen werden. Im Behälter befindet sich ein Medium mit der Dichte  $\rho_2$ . Zur Messung des Druckes im Punkt  $D$  im Behälter wird das U-Rohr mit einer (schweren) Flüssigkeit mit Dichte  $\rho_1$  (etwa Quecksilber) gefüllt. Gesucht ist der Druck im Punkt  $D$ . Gegeben sind als Messgröße die Längen  $d_2$  und  $d_1$ . (Siehe Abbildung 1.8.)

Wir wissen schon, dass in den beiden (hydrostatischen) Medien die Beziehung  $p_{x_3} = -\rho_i g$  für  $i = 1, 2$  gilt. Die Druckdifferenz im Medium 2 zwischen  $D$  und  $C$  ist gegeben durch

$$p(D) - p(C) = \int_C^D p_{x_3}(\xi) d\xi = -\rho_2 g d_2.$$

Analog erhält man für die Druckdifferenz zwischen den Punkten  $A$  und  $B$ :

$$p(A) - p(B) = -\rho_1 g d_1.$$

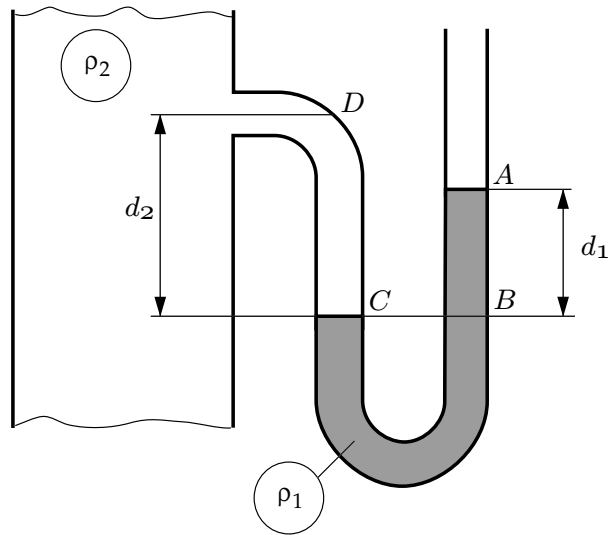


Abbildung 1.8.: Quecksilbermanometer zur Druckmessung im Behälter

Aufgrund des Pascalschen Prinzips ist der Druck in den Punkten  $B$  und  $C$  gleich groß, da sie auf gleicher Höhe liegen. Wir bekommen damit (die beiden obigen Gleichungen subtrahieren)

$$p(D) - p(A) = g(\rho_1 d_1 - \rho_2 d_2)$$

für die Druckdifferenz zwischen dem Punkt  $D$  im Behälter und dem Aussendruck im Punkt  $A$ .

*Beispiel 2.* Ein Tankwagen wird gleichmäßig beschleunigt

### Gleichgewicht der Drehmomente

**Definition 3 (Drehmoment).** Angenommen, eine Kraft  $\mathbf{f}$  greift in einem Punkt  $\mathbf{x}$  eines Körpers  $\Omega$  an. Wir definieren das Drehmoment, das von  $\mathbf{f}$  im Bezug auf den Punkt  $\mathbf{y} \in \Omega$  ausgeübt wird als

$$\mathbf{m} = (\mathbf{x} - \mathbf{y}) \times \mathbf{f}, \quad (1.1.18)$$

wobei  $\times$  das (äußere) Kreuzprodukt von Vektoren im  $\mathbb{R}^3$  bezeichnet.

*Interpretation:* Das Drehmoment  $\mathbf{m}$  ist eine vektorielle Größe, die normal auf die Ebene steht, die von dem Kraftvektor  $\mathbf{f}$  und dem Differenzvektor  $\mathbf{x} - \mathbf{y}$  aufgespannt wird. Wenn wir uns vorstellen, dass wir den Körper im Punkt  $\mathbf{y}$  auf ein in alle Richtungen drehbares Kugelgelenk aufhängen, dann verdreht die Kraft  $\mathbf{f}$  den Körper um eine Achse deren Richtung durch  $\mathbf{m}$  gegeben ist. Die Länge des Drehmomentenvektors ist (nach den Eigenschaften des Kreuzproduktes) gegeben als der Flächeninhalt des Parallelogramms, das von  $\mathbf{f}$  und  $\mathbf{x} - \mathbf{y}$  erzeugt wird. Diesen Flächeninhalt  $A$  können wir auch in der Form  $A = (\text{Länge von } \mathbf{f}) \cdot (\text{Abstand der Geraden durch } \mathbf{x} \text{ mit Richtungsvektor } \mathbf{f} \text{ vom Punkt } \mathbf{y})$

schreiben. Diese Beziehung entspricht dem bekannten „Moment = Kraft mal Kraftarm“ aus dem elementaren Physikunterricht. Die Orientierung von  $\mathbf{m}$  wird so gewählt, dass  $(\mathbf{x} - \mathbf{y}, \mathbf{f}, \mathbf{m})$  ein Rechtssystem bilden.



## 2. Strömungsphänomene



# A. Differenzialoperatoren

Gradient





# B. Integrale

## Gebietsintegrale

Bei einem *Gebietsintegral*

$$\int_{\Omega} f(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \text{ mit } f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \tag{B.0.1}$$

ist der Integrationsbereich  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  eine offene Teilmenge des  $\mathbb{R}^n$ . Das Integral ist der Grenzwert von Integralen einfacher Funktionen  $f_i = \sum_{j=1}^{N(i)} \alpha_j \chi_{\Omega_j}$  für die  $f_i(\mathbf{x}) \rightarrow f(\mathbf{x})$  für (fast) alle  $\mathbf{x} \in \Omega$  gilt.

Falls  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  durch  $\mathbf{f} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$  ersetzt wird, werden einfach

Integral	Einfache Funktionen	Berechnung
Gebietsintegral $\int f(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$		Iterierte Integrale
Oberflächenintegral $\int_{\Gamma} f(\mathbf{x}) dS(\mathbf{x})$		$\int_G f(\boldsymbol{\xi}(\mathbf{y})) \det(D\mathbf{f}^* D\mathbf{f}) d\mathbf{y}$
Kurvenintegrale		

## Gebietsintegrale

### Transformationsformel



## C. Vektoranalysis

**Satz 3 (Divergenzsatz von Gauß).** Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  offen und glatt begrenzt und sei  $\mathbf{f} : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^n$  ein stetig differenzierbares Vektorfeld auf  $\overline{\Omega}$ . Dann gilt

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \int_{\partial\Omega} \langle \mathbf{f}(\mathbf{x}), \mathbf{n}(\mathbf{x}) \rangle \, dS(\mathbf{x}). \quad (\text{C.0.1})$$

Hier ist  $\mathbf{n}(\mathbf{x})$  der äußere Einheitsnormalenvektor auf  $\Omega$  im Punkt  $\mathbf{x}$ .

*Beweis.*

□



# Literaturverzeichnis

[1] W. Rudin. *Real and Complex Analysis*. McGraw-Hill, New York, third edition, 1987.