# Höhere Mathematik I

Gunther Peichl, Barbara Kaltenbacher

gunther.peichl@uni-graz.at barbara.kaltenbacher@uni-graz.at

Wintersemester 2010/11

Reelle und . . .
Funktionen
Grenzwerte . . .
Elementare . . .
Diff.Rech.
Int.Rech.

# Inhalt

- Reelle und komplexe Zahlen
- Funktionen
- Grenzwerte und Stetigkeit
- Elementare Funktionen
- Differenzialrechnung
- Integralrechnung

# 1. Reelle und komplexe Zahlen

## 1.1. Mengen

**Definition 1.** .

(i) **Menge** …Zusammenfassung von Objekten zu einer Gesamtheit

(ii) **Element** …in der Menge enthaltenes Objekt

(iii) $a \in M$ …„$a$ ist Element der Menge $M$" („$a$ ist in $M$ enthalten")

(iv) $a \notin M$ …„$a$ ist nicht Element der Menge $M$" („$a$ ist nicht in $M$ enthalten")

(v) Zwei Mengen sind gleich, wenn sie die gleichen Elemente enthalten.

(vi) $\emptyset$ …leere Menge (manchmal: $\{\}$)

<u>*Bemerkung:*</u> *Wir gehen davon aus, dass für jedes Objekt $x$ entscheidbar ist, ob es zu einer Mengen gehört oder nicht.*

## Beschreibung von Mengen

(a) Durch vollständige oder offenkundig fortsetzbare Aufzählung:
z.B. $M = \{2, 4, 6, 8\}$, $M = \{1, 3, 5, 7, \ldots\}$

Reihenfolge unwichtig, Mehrfachnennung spielt keine Rolle!
z.B. $M = \{2, 4, 6, 8\} = \{4, 8, 2, 6\} = \{4, 4, 4, 2, 2, 2, 2, 2, 6, 8\}$

(b) Durch Angabe von Eigenschaften $P$ aus einer festen Grundgesamtheit (Menge) $X$: $M = \{x \in X \ : \ P(x)\}$
z.B. $X \ldots$ positive gerade Zahlen,
$M = \{x \in X \ : x < 10\} = \{2, 4, 6, 8\}$,

(c) Durch Funktionen $f(x, y, \ldots)$ von Elementen aus festen Grundgesamtheiten $X, Y, \ldots$: z.B. $M = \{f(x, y, z) \ : \ x \in X, y \in Y, z \in Z\}$
z.B. $X \ldots$ positive ganze Zahlen,
$M = \{2x \ : x \in X\} = \{2, 4, 6, 8, \ldots\}$,
z.B. $X \ldots$ positive ganze Zahlen, $Y = \{2, 4, 6\}$
$M = \{xy \ : x \in X, y \in Y\} = \{2, 4, 6, 8, \ldots\}$,

# Beispiele von Mengen

| | |
|---|---|
| $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ | Menge der natürlichen Zahlen |
| $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots\}$ | Menge der ganzen Zahlen |
| $\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q} \ : \ p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\}$ | Menge der rationalen Zahlen |
| $\mathbb{R}$ | Menge der reellen Zahlen |
| $\mathbb{C} = \{a + \imath b \ : \ a, b \in \mathbb{R}\}$ | Menge der komplexen Zahlen |

*Bemerkung: Manchmal* $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$, $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$

# Beziehungen zwischen Mengen

**Definition 2.** Es seien $A$ und $B$ Mengen.

(i) $A \subset B$ („$A$ ist **Teilmenge** von $B$"), wenn jedes Element von $A$ auch in $B$ enthalten ist.

(ii) $A \supset B$ („$A$ ist **Obermenge** von $B$"), wenn jedes Element von $B$ auch in $A$ enthalten ist.

(iii) $\mathcal{P}(A) = \{M \ : M \subset A\}$ (**Potenzmenge** von $A$)…die Menge aller Teilmengen von $A$

## Operationen mit Mengen

**Definition 3.** Es seien $A$ und $B$ Teilmengen einer Grundmenge $X$

(i) $A \cap B = \{x \in X \;:\; x \in A \text{ und } x \in B\}$ **Durchschnitt(smenge)** von $A$ und $B$

(ii) $A \cup B = \{x \in X \;:\; x \in A \text{ oder } x \in B\}$ **Vereinigung(smenge)** von $A$ und $B$

(iii) $A \setminus B = \{x \in X \;:\; x \in A \text{ und } x \notin B\}$ **Differenzmenge** von $A$ und $B$

(iv) $\mathcal{C}A = X \setminus A = \{x \in X \;:\; x \notin A\}$ **Komplement** von $A$ in $X$

(v) $A \cap B = \emptyset$ . . . „$A$ und $B$ sind **disjunkt**"

# Cartesisches Produkt von Mengen

**Definition 4.** Es seien $M_1, M_2 \ldots M_n$ Mengen

(i) $(x_1, x_2 \ldots, x_n)$ mit $x_1 \in M_1$, $x_2 \in M_2, \ldots,$ $x_n \in M_n$
… **geordnetes $n$-Tupel**
Reihenfolge wichtig, Mehrfachnennung spielt eine Rolle!
z.B. $(2,4,6,8) \neq (4,8,2,6)$, $(4,2,6,8) \neq (4,4,4,2,2,2,2,2,6,8)$

Spezialfall $n = 2$: (geordnetes) Paar
Spezialfall $n = 3$: (geordnetes) Tripel
Spezialfall $n = 4$: (geordnetes) Quadrupel

(ii) $M_1 \times \cdots \times M_n = \{(x_1, \ldots, x_n) \ : \ x_1 \in M_1, \ldots, \ x_n \in M_n\}$
… **Produktmenge (Cartesisches Produkt)** der Mengen $M_1, \ldots M_n$
Spezialfall $M_1 = \cdots = M_n = M$ (kurz: $M_i = M$, $i = 1, \ldots, n$):
$M_1 \times \cdots \times M_n = M^n$.

# Mächtigkeit von Mengen

**Definition 5.** Enthält eine Menge nur endlich viele Elemente, $M = \{a_1, \ldots, a_m\}$, so heißt die Anzahl der Elemente **Mächtigkeit (Kardinalität)** von $M$.

$$\sharp M = m$$

Es gilt klarerweise $\sharp\emptyset = 0$.

**Satz 1.** *Es seien $A$ und $B$ endliche Mengen. Dann gilt*

$$\sharp(A \cup B) = \sharp A + \sharp B - \sharp(A \cap B)$$

$$\sharp(A \times B) = \sharp A \cdot \sharp B$$

$$\sharp\mathcal{P}(A) = 2^{\sharp A}$$

## 1.2. Reelle Zahlen

Natürliche Zahlen $\mathbb{N}$: Abzählen, Nummerieren von Objekten;

$\mathbb{N}$ ist abgeschlossen bezüglich Addition und Multiplikation

Ganze Zahlen $\mathbb{Z}$: Abschluss der Zahlenmenge bezüglich der Subtraktion

Rationale Zahlen $\mathbb{Q}$: Abschluss der Zahlenmenge bezüglich der Division

Motivation der reellen Zahlen $\mathbb{R}$:
Die rationalen Zahlen füllen die Zahlengerade nicht vollständig aus,
d.h. nicht alle in der Natur auftretenden Längen können als rationale Zahlen angegeben werden.
z.B. $\sqrt{2}$ = Diagonale des Quadrats mit Seitenlänge $1$
z.B. $\pi$ = Umfang des Einheitskreises

Axiomatische Einführung nicht in dieser Vorlesung, hier einfach:
$\mathbb{R}$ . . . „Zahlengerade"
$a$ kleiner als $b$ . . . „$a$ liegt auf der Zahlengerade links von $b$"
$a$ größer als $b$ . . . „$a$ liegt auf der Zahlengerade rechts von $b$"

# Ordnung der reellen Zahlen

Es seien $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$

$x = y$ ... $x$ ist gleich $y$

$x \neq y$ ... $x$ ist ungleich $y$

$x < y$ ... $x$ ist (echt) kleiner als $y$ ($x$ kleiner als $y$ und $x \neq y$)

$x \leq y$ ... $x$ ist kleiner oder gleich $y$ ($x < y$ oder $x = y$)

$x > y$ ... $x$ ist (echt) größer als $y$ ($x$ größer als $y$ und $x \neq y$)

$x \geq y$ ... $x$ ist größer oder gleich $y$ ($x > y$ oder $x = y$)

$x > 0$ ... $x$ hat positives Vorzeichen

$x < 0$ ... $x$ hat negatives Vorzeichen

**Satz 2.** .

(i) *Wenn* $x \leq y$, *dann gilt für alle* $z \in \mathbb{R}$: $x + z \leq y + z$

(ii) *Wenn* $x \leq y$, *dann gilt für alle* $\lambda > 0$: $\lambda x \leq \lambda y$

(iii) *Wenn* $x \leq y$, *dann gilt für alle* $\lambda < 0$: $\lambda x \geq \lambda y$

(iv) $xy > 0$ *genau dann wenn* $x$ *und* $y$ *gleiches Vorzeichen haben*

(v) $xy < 0$ *genau dann wenn* $x$ *und* $y$ *verschiedenes Vorzeichen haben*



Reelle und . . .
Funktionen
Grenzwerte . . .
Elementare . . .
Diff.Rech.
Int.Rech.
Seite 10 von 100
Zurück
Vollbild
Schließen
Beenden

# Intervalle

**Definition 6.** Es seien $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
[a, b] &= \{x \in \mathbb{R} \,:\, a \le x \le b\} \ldots \text{ abgeschlossenes Intervall}\\
(a, b) &= \{x \in \mathbb{R} \,:\, a < x < b\} \ldots \text{ offenes Intervall}\\
(a, b] &= \{x \in \mathbb{R} \,:\, a < x \le b\}\\
[a, b) &= \{x \in \mathbb{R} \,:\, a \le x < b\}\\
[a, \infty) &= \{x \in \mathbb{R} \,:\, a \le x\}\\
(a, \infty) &= \{x \in \mathbb{R} \,:\, a < x\}\\
(-\infty, b] &= \{x \in \mathbb{R} \,:\, x \le b\}\\
(-\infty, b) &= \{x \in \mathbb{R} \,:\, x < b\}
\end{aligned}$$

*Bemerkung:* $\infty$ *ist eigentlich keine reelle Zahl (daher würde auch z.B.* $[a, \infty]$ *nicht Sinn machen) aber als Symbol für „unendlich" gebräuchlich.*



Reelle und . . .
Funktionen
Grenzwerte . . .
Elementare . . .
Diff.Rech.
Int.Rech.

## Betrag

**Definition 7.** Es sei $x \in \mathbb{R}$.
Der Betrag von $x$ ist definiert durch $|x| = \begin{cases} x & \text{falls } x \geq 0 \\ -x & \text{falls } x < 0 \end{cases}$.

*Bemerkung:* *Auf der Zahlengerade ist der Betrag der Abstand vom 0-Punkt (Ursprung).*
*Bezeichnung:* *Es seien $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$:*

$$\begin{aligned} (a-\varepsilon, a+\varepsilon) &= \{x \in \mathbb{R} \ : \ a-\varepsilon < x < a+\varepsilon\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \ : |a-x| < \varepsilon\} \ \ldots \varepsilon - \textit{Umgebung von } a \end{aligned}$$

**Satz 3.** .

*(i)* $|x| = 0$ *genau dann wenn* $x = 0$. *(Definitheit)*
*(ii)* $|\lambda x| = |\lambda| \ |x|$ *für alle* $\lambda \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}$ *(Homogenität)*
*(iii)* $|x+y| \leq |x| + |y|$ *für alle* $x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}$ *(Dreiecksungleichung)*

*Bemerkung:* *Der Begriff des Betrags läßt sich vom Eindimensionalen ins Mehrdimensionale (Vektoren) verallgemeinern und führt auf den Begriff der Norm.*

## 1.3. Komplexe Zahlen

Motivation der komplexen Zahlen $\mathbb{C}$:
Lösbarkeit von quadratischen Gleichungen:

$$x^2 + px + q = 0 \qquad \text{z.B. } x^2 + 1 = 0$$

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} \quad \text{falls } \frac{p^2}{4} - q \geq 0$$

Vieta'scher Wurzelsatz: $\quad x_1 + x_2 = -p, \quad x_1 x_2 = q$

gilt formal auch wenn $\dfrac{p^2}{4} - q < 0$,

z.B. $\sqrt{-1} + (-\sqrt{-1}) = 0$ und $\sqrt{-1}(-\sqrt{-1}) = -\sqrt{-1}^2 = -(-1) = 1$.



Reelle und . . .
Funktionen
Grenzwerte . . .
Elementare . . .
Diff.Rech.
Int.Rech.

**Definition 8.** .

(i) Symbol $\imath$... **imaginäre Einheit** definiert durch $\imath^2 = -1$

(ii) $\mathbb{C} = \{a + \imath b \ : \ a, b \in \mathbb{R}\}$... Menge der **komplexen Zahlen**

(iii) Es sei $z = a + \imath b$ eine komplexe Zahl.

   (a) $a = \Re(z)$... **Realteil** von $z$

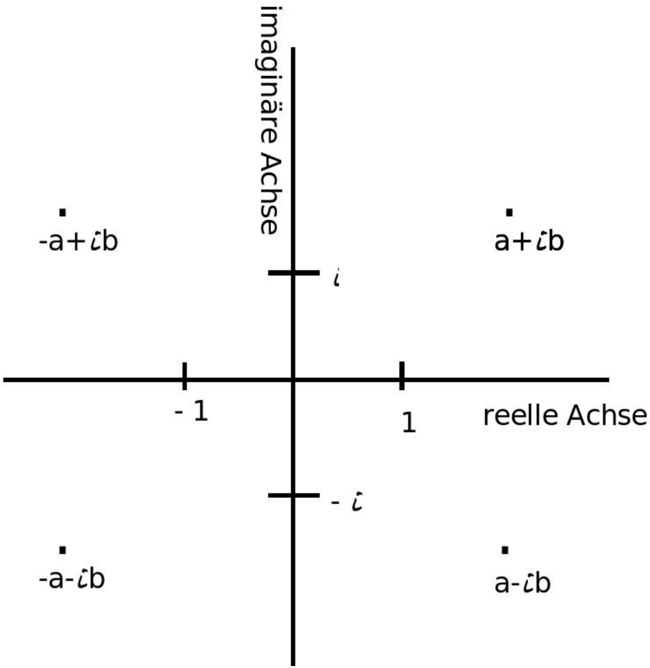
   (b) $b = \Im(z)$... **Imaginärteil** von $z$

   (c) $\sqrt{a^2 + b^2} = |z|$... **(Absolut-)Betrag** von $z$

   (d) $\bar{z} = a - \imath b$ zu $z$ **konjugiert komplexe Zahl**

(iv) $\{\imath b \ : \ b \in \mathbb{R}\} = \{z \in \mathbb{C} \ : \ \Re(z) = 0\}$... Menge der (rein) **imaginären Zahlen**

# Gauß'sche Zahlenebene




Realteil . . .

Projektion auf die reelle Achse

Imaginärteil . . .

Projektion auf die imaginäre Achse

Betrag . . .

Abstand vom Nullpunkt

konjugiert komplexe Zahl . . .

Spiegelung an der reellen Achse

# Rechnen mit komplexen Zahlen

$+$, $-$, $\cdot$ analog zu $\mathbb{R}$, mit zusätzlich $\imath^2 = -1$, also für $z = a + \imath b$, $y = c + \imath d$:

$$\begin{aligned} z + y &= (a + \imath b) + (c + \imath d) = a + c + \imath(b + d) \\ z - y &= (a + \imath b) - (c + \imath d) = a - c + \imath(b - d) \\ z \cdot y &= (a + \imath b) \cdot (c + \imath d) = ac + \imath ad + \imath bc + \imath^2 bd = ac - bd + \imath(ad + bc) \end{aligned}$$

**Satz 4.** *Es seien $z, y \in \mathbb{C}$. Dann gilt*

*(i)* $\Re(z) = \frac{1}{2}(z + \bar{z})\,, \qquad \Im(z) = \frac{1}{2\imath}(z - \bar{z})$

*(ii)* $z \cdot \bar{z} = |z|^2\,,$ *und damit* $\dfrac{1}{z} = \dfrac{\bar{z}}{|z|^2}$ *und* $z : y = z \cdot \dfrac{1}{y} = \dfrac{z \cdot \bar{y}}{|y|^2}$

Also für $z = a + \imath b$, $y = c + \imath d$:

$$\begin{aligned} z \pm y &= a \pm c + \imath(b \pm d) \\ z \cdot y &= ac - bd + \imath(ad + bc) \\ z : y &= \frac{ac + bd + \imath(-ad + bc)}{c^2 + d^2} \end{aligned}$$

Im Spezialfall $\Im(z) = b = 0$, $\Im(y) = d = 0$, entspricht das dem Rechnen mit den reellen Zahlen $a = \Re(z)$, $b = \Re(y)$.



Reelle und ...
Funktionen
Grenzwerte ...
Elementare ...
Diff.Rech.
Int.Rech.
Seite 16 von 100
Zurück
Vollbild
Schließen
Beenden

## Eigenschaften der Konjugation und des Betrags

**Satz 5.** *Es seien $z, y \in \mathbb{C}$.*

$$\begin{aligned} (i)\quad & \overline{z+y} = \bar{z} + \bar{y} \\ (ii)\quad & \overline{z \cdot y} = \bar{z} \cdot \bar{y} \\ (iii)\quad & \bar{\bar{z}} = z \end{aligned}$$

**Satz 6.** *Es seien $z, y \in \mathbb{C}$.*

*(i)* $|z| = 0$ *genau dann wenn* $z = 0$. *(Definitheit)*
*(ii)* $|\lambda z| = |\lambda|\ |z|$ *für alle* $\lambda \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{C}$ *(Homogenität)*
*(iii)* $|z + y| \leq |z| + |y|$ *für alle* $z \in \mathbb{C}, y \in \mathbb{C}$ *(Dreiecksungleichung)*

*Bemerkung:* *Ungleichungen* $\geq, \leq$ *machen zwischen komplexen Zahlen keinen Sinn.*

# 2. Funktionen

**Definition 9.** Es seien $D$ und $W$ Mengen.

(i) **Funktion** (Abbildung) $f$ von $D$ nach $W$... Vorschrift, die jedem Element $x$ aus $D$ genau ein Element $y$ aus $W$ zuordnet.

$$\begin{aligned} f : D &\to W \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

(ii) Wenn $y = f(x)$, dann heißt $y$... Bild von $x$ und $x$... Urbild von $y$.

(iii) $D$... **Definitionsbereich** von $f$

$W$... **Wertevorrat** von $f$

$f(D) = \{f(x) \ : \ x \in D\} = \{y \in W \ : \ y = f(x) \text{ für mind. ein } x \in D\}$
... **Bild** von $D$ unter $f$

(iv) $G(f) = \{(x, f(x)) \ : \ x \in D\} \subset D \times W$... **Graph** von $f$.



Reelle und ...
Funktionen
Grenzwerte ...
Elementare ...
Diff.Rech.
Int.Rech.
Seite 18 von 100
Zurück
Vollbild
Schließen
Beenden

Bemerkungen:

- Im Folgenden betrachten wir vor allem reelle Funktionen, d.h., $D \subset \mathbb{R}$, $W \subset \mathbb{R}$
- Für $D \subset \mathbb{R}$ ist $G(f) \subset \mathbb{R}^2$, für $D \subset \mathbb{R}^n$ ist $G(f) \subset \mathbb{R}^{n+1}$
- Der Graph einer Funktion kann zur Veranschaulichung verwendet werden: Schneidet jede Gerade parallel zur $y$-Achse den Graphen höchstens ein Mal, so liegt eine Funktion vor.
- Zwei Funktionen $f$ und $g$ stimmen genau dann überein, $f = g$, wenn ihre Definitionsbereiche und die Wertevorrrate übereinstimmen und für alle $x \in D$ gilt: $f(x) = g(x)$
- Eine Funktion schöpft im Allgemeinen ihren Wertevorrat nicht aus, es gilt nur $f(D) \subset W$
- Ein Element im Bild einer Funktion kann auch mehrfach angenommen werden.
- Der Definitionsbereich wird oft nicht direkt angegeben. Dann verwendet man den natürlichen Definitionsbereich $D(f)$, also die größte Menge, auf der $f$ sinnvoll definiert ist (z.B. $f(x) = \frac{1}{x}$, $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$).

- Es sei $F\colon D \to W$ eine Funktion und $E \subset D$. Man nennt $f\colon E \to W$, $f(x) = F(x)$ für $x \in E$, **Einschränkung** von $f$ auf $E$, $f = F|_E$. Es ist üblich die Einschränkung einer Funktion mit demselben Symbol zu bezeichnen.

## Injektivität, Surjektivität, Bijektivität

**Definition 10.** Es sei $f : D \to W$ eine Funktion.

(i) $f$ heißt **surjektiv**, wenn zu jedem $y \in W$ mindestens ein $x \in D$ existiert, sodass $f(x) = y$;
also wenn $f(D) = W$;
also wenn jede Gerade parallel zur $x$-Achse den Graphen mindestens ein Mal schneidet.

(ii) $f$ heißt **injektiv**, wenn zu jedem $y \in W$ höchstens ein $x \in D$ existiert, sodass $f(x) = y$;
also wenn jede Gerade parallel zur $x$-Achse den Graphen höchstens ein Mal schneidet.

(iii) $f$ heißt **bijektiv**, wenn zu jedem $y \in W$ genau ein $x \in D$ existiert, sodass $f(x) = y$;
also wenn $f$ surjektiv und injektiv ist.

Bemerkungen:

- $f : D \to W$ ist $\left\{\begin{array}{l}\text{surjektiv}\\ \text{injektiv}\\ \text{bijektiv}\end{array}\right\}$ wenn die Gleichung $f(x) = y$ für jedes $y \in W$ $\left\{\begin{array}{l}\text{mindestens}\\ \text{höchstens}\\ \text{genau}\end{array}\right\}$ eine Lösung $x \in D$ hat.
- Eine Funktion $f : D \to f(D)$ (Einschränkung des Wertevorrats auf das Bild) ist immer surjektiv.
- Für eine injektive Funktion $f : D \to W$ definiert $f : D \to f(D)$ eine bijektive Funktion (Diese sollte eigentlich mit einem neuen Symbol bezeichnet werden. Zur Vereinfachung der Notation verzichtet man meist auf diese Unterscheidung).

## Beispiele von Funktionen

- Es sei $c \in \mathbb{R}$, $M$ eine Menge. Die **konstante Funktion** (mit Wert $c$) ist

$$\begin{aligned} \mathrm{const}_c : M &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto c \end{aligned}$$

- Es sei $M$ eine Menge. Die **Identität** auf $M$ ist

$$\begin{aligned} \mathrm{id}_M : M &\to M \\ x &\mapsto x \end{aligned}$$

- Die **Betragsfunktion** auf $\mathbb{R}$ ist

$$\begin{aligned} |\cdot| : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto |x| \end{aligned}$$

- Eine **Folge** in $\mathbb{R}$ ist eine Abbildung

$$\begin{aligned} y : \mathbb{N} &\to \mathbb{R} \\ n &\mapsto y(n) = y_n \end{aligned}$$

# Rechnen mit Funktionen

- Es seien $f, g$ reelle Funktionen mit gleichem Definitionsbereich $D$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} f \pm g \; : D &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) \pm g(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f \cdot g \; : D &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) \cdot g(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lambda \cdot f \; : D &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \lambda \cdot f(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f^n : D &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x)^n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{f}{g} \; : D \setminus D_0 &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{f(x)}{g(x)} \end{aligned}$$

mit $D_0 = \{x \in D \, : \, g(x) = 0\}$

- Seien $n \in \mathbb{N}$, $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$. Damit ist

$$P = \mathrm{const}_{a_0} + a_1 \mathrm{id} + a_2 \mathrm{id}^2 + \cdots + a_n \mathrm{id}^n \; = \sum_{i=0}^{n} a_i \mathrm{id}^i$$

ein **Polynom** auf $\mathbb{R}$.

- Seien $P, Q$ Polynome auf $\mathbb{R}$. Dann ist $\frac{P}{Q}$ mit $D(\frac{P}{Q}) = \mathbb{R} \setminus \{x \in D \, : \, Q(x) = 0\}$ eine **rationale Funktion**

Reelle und . . .
Funktionen
Grenzwerte . . .
Elementare . . .
Diff.Rech.
Int.Rech.
Seite 24 von 100
Zurück
Vollbild
Schließen
Beenden

## Verkettung von Funktionen

**Definition 11.** Es seien $A, B, C, D$ Mengen, $f : A \to B$, $g : C \to D$ Funktionen mit $f(A) \subset C$. Dann ist die **Verkettung** (Hintereinanderausführung, Komposition) von $g$ nach $f$ definiert durch:

$$\begin{aligned} g \circ f : A &\to D \\ x &\mapsto g(f(x)) \end{aligned}$$

<u>*Beachte:*</u> *Im Allgemeinen gilt* **nicht** $g \circ f = f \circ g$*!*

## Umkehrfunktion

**Definition 12.** Es sei $f : D \to W$ eine injektive Funktion. Eine Funktion $g : f(D) \to D$, für die $f \circ g = \text{id}$ gilt, heißt **Umkehrfunktion**; Bezeichnung $f^{-1} : f(D) \to D$.

- Für eine injektive Funktion $f : D \to W$ ist der Wert der Umkehrfunktion in einem Punkt $y \in f(D)$ gegeben durch die eindeutige Lösung der Gleichung $f(x) = y$.
- Der Graph $G(f^{-1})$ der Umkehrfunktion $f^{-1}$ einer injektiven Funktion $f$ ist die Spiegelung an der Mediane des Graphen $G(f)$ von $f$.

**Satz 7.** *Eine injektive Funktion $f : D \to W$ besitzt genau eine Umkehrfunktion $f^{-1} : f(D) \to D$. Die Umkehrfunktion ist surjektiv und es gelten die Identitäten $f \circ f^{-1} = id_{f(D)}$ und $f^{-1} \circ f = id_D$.*

## Qualitative Eigenschaften von Funktionen

**Definition 13.** Eine Funktion $f : D \to R$ mit $D \subset \mathbb{R}$ heißt

(i) **monoton wachsend**, wenn für $x, \tilde{x} \in D$ aus $x \leq \tilde{x}$ folgt dass $f(x) \leq f(\tilde{x})$.

(ii) **monoton fallend**, wenn für $x, \tilde{x} \in D$ aus $x \leq \tilde{x}$ folgt dass $f(x) \geq f(\tilde{x})$.

(iii) **streng monoton wachsend (fallend)**, wenn für $x, \tilde{x} \in D$ aus $x < \tilde{x}$ folgt dass $f(x) < f(\tilde{x})$ $(f(x) > f(\tilde{x}))$.

(iv) **monoton** auf $D$, wenn $f$ monoton wachsend auf $D$ oder monoton fallend auf $D$ ist.

(v) **streng monoton** auf $D$, wenn $f$ streng monoton wachsend auf $D$ oder streng monoton fallend auf $D$ ist.

- Monotonieeigenschaften lassen sich gut am Graphen ablesen.
- Eine streng monotone Funktion ist immer injektiv.

**Definition 14.** Eine Funktion $f : D \to R$ mit $D \subset \mathbb{R}$ mit $D$ symmetrisch bzgl. $0$ heißt

(i) **gerade**, wenn für $x \in D$ gilt: $f(-x) = f(x)$.

(ii) **ungerade**, wenn für $x \in D$ gilt: $f(-x) = -f(x)$.

Der Graph einer geraden Funktion ist spiegelsymmetrisch bzgl. der $y$-Achse.

## Einige Transformationen von Funktionen

Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion, $c > 0$.

- $g(x) = f(x + c)$... Verschiebung nach links um $c$ Einheiten
- $g(x) = f(x - c)$... Verschiebung nach rechts um $c$ Einheiten
- $g(x) = f(-x)$... Spiegelung an der $y$-Achse
- $g(x) = f(x) + c$... Verschiebung nach oben um $c$ Einheiten
- $g(x) = f(x) - c$... Verschiebung nach unten um $c$ Einheiten
- $g(x) = -f(x)$... Spiegelung an der $x$-Achse

# 3. Grenzwerte und Stetigkeit

## 3.1. Grenzwerte von Funktionen

Motivation: Der Grenzwertbegriff wird gebraucht bei

- der Bestimmung des Anstiegs einer Kurve (Tangente)
- der Berechnung von Flächen- und Volumeninhalten
- der Berechnung der Länge von Kurven
- der Bestimmung von momentanen Änderungsraten (Geschwindigkeit, Reaktions- und Wachstumsraten,...)
- der Berechnung von Ruhelagen eines Systems
- der Optimierung eines Systems
- der Beurteilung des qualitativen Verhaltens einer Funktion an den Randpunkten oder in Lücken des Definitionsbereichs

Reelle und ...
Funktionen
Grenzwerte ...
Elementare ...
Diff.Rech.
Int.Rech.

## $\delta$-Umgebung und Häufungspunkte

**Definition 15.** .

1. Es seien $x_0 \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$. Ein Intervall der Form $K(x_0, \delta) = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ heißt **$\delta$-Umgebung von $x_0$**

2. Es sei $\xi \in \mathbb{R}$. Ein Intervall der Form $K(\infty, \xi) = (\xi, \infty)$ (oder $K(-\infty, \xi) = (-\infty, \xi)$) heißt **$\xi$-Umgebung von $\infty$ (oder von $-\infty$)**.

*Beachte:* $\infty \notin \mathbb{R}$, $-\infty \notin \mathbb{R}$!

**Definition 16.** Es sei $D \subset \mathbb{R}$.
Ein $x_0 \in \mathbb{R}$ heißt **Häufungspunkt** von $D$, wenn für jede (noch so kleine) $\delta$-Umgebung von $x_0$ gilt:

$$D \cap (K(x_0, \delta) \setminus \{x_0\}) \neq \emptyset$$

- $x_0$ selbst braucht nicht in $D$ zu liegen.
- Beliebig nahe bei einem Häufungspunkt gibt es Punkte aus $D$.

- Beispiele: Randpunkte von Intervallen:
  $(a, x_0)$, $(x_0, b)$, $(a, x_0) \cup (x_0, b)$
  $(a, x_0]$, $[x_0, b)$, $(a, x_0] \cup [x_0, b) = (a, b)$

**Definition 17.** .
Es sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $x_0 \in \mathbb{R}$ Häufungspunkt von $D$. Eine reelle Zahl $L$ heißt Grenzwert von $f$ für $x$ gegen $x_0$,

$$L = \lim_{x \to x_0} f(x)$$

wenn es zu jeder $\varepsilon$-Umgebung von $L$ eine $\delta$-Umgebung von $x_0$ gibt, sodass

$$f(K(x_0, \delta) \setminus \{x_0\} \cap D) \subset K(L, \varepsilon)$$

Äquivalent dazu:

**Definition 18.** .
Es sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $x_0 \in \mathbb{R}$ Häufungspunkt von $D$.

$$L = \lim_{x \to x_0} f(x)$$

wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, sodass

$$\text{aus } (x \in D \ \wedge \ 0 < |x - x_0| < \delta) \text{ folgt } |f(x) - L| < \varepsilon$$

*Bemerkungen:*

- $x_0$ *wird hier ausgenommen, selbst wenn es in* $D$ *liegt. Es könnte ja sein, dass der Funktionswert von* $f$ *in* $x_0$ *nicht gleich* $L$ *ist.*
- $\delta$ *hängt von* $\varepsilon$ *ab:* $\delta = \delta(\varepsilon)$.
- $\delta$ *ist nicht eindeutig bestimmt: hat man ein passendes* $\delta(\varepsilon)$ *gefunden, dann funktioniert auch jedes kleinere* $\delta$ *für dasselbe* $\varepsilon$.
- *Es ist nicht notwendig, das beste (größte)* $\delta$ *zu finden.*
- *Nicht in jedem Häufungpunkt existiert auch ein Grenzwert!*

**Satz 8.** *Der Grenzwert einer Funktion* $f : D \to W$ *in einem Häufungspunkt von* $D$ *ist eindeutig bestimmt.*

Das Berechnen von Grenzwerten wird oft erheblich vereinfacht, wenn man komplizierte Ausdrücke in ihre elementaren Bestandteile zerlegt und folgende Rechenregeln für Grenzwerte benutzt.

## Rechenregeln für Grenzwerte

**Satz 9.** *Es seien $f : D \to \mathbb{R}$, $g : D \to \mathbb{R}$ mit $x_0$ Häufungspunkt von $D$. Wenn die Grenzwerte $F = \lim_{x\to x_0} f(x)$ und $G = \lim_{x\to x_0} g(x)$ existieren, dann gilt*

(i) *Es existieren die Grenzwerte von $f \pm g$ und $f \cdot g$ und es gilt*

$$\lim_{x\to x_0}(f \pm g)(x) = \lim_{x\to x_0} f(x) \pm \lim_{x\to x_0} g(x) = F \pm G$$

$$\lim_{x\to x_0}(f \cdot g)(x) = \lim_{x\to x_0} f(x) \cdot \lim_{x\to x_0} g(x) = F \cdot G$$

(ii) *Wenn zusätzlich $G \neq 0$, dann existiert auch der Grenzwert von $\frac{f}{g}$ und es gilt*

$$\lim_{x\to x_0}\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{\lim_{x\to x_0} f(x)}{\lim_{x\to x_0} g(x)} = \frac{F}{G}$$

**Satz 10.** *Es seien $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $Q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Polynome. Dann gilt*

(i) *Jeder Punkt $x_0$ ist Häufungspunkt von $D = \mathbb{R}$, es existiert der Grenzwert $\lim_{x \to x_0} P(x)$ und es gilt*

$$\lim_{x \to x_0} P(x) = P(x_0)$$

(ii) *Wenn zusätzlich $Q(x_0) \neq 0$, dann existiert auch der Grenzwert der rationalen Funktion $\frac{P}{Q}$ und es gilt*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{P}{Q}(x) = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)}$$

Polynome und rationale Funktionen haben an jedem Häufungspunkt ihres Definitionsbereichs einen Grenzwert und dieser stimmt mit dem Funktionswert an dieser Stelle überein. $\rightsquigarrow$ „stetige" Funktionen.

## Grenzwerte und Monotonie

**Satz 11.** *Es seien* $f : D \to \mathbb{R}$, $g : D \to \mathbb{R}$ *mit* $x_0$ *Häufungspunkt von* $D$*. Wenn die Grenzwerte* $F = \lim_{x \to x_0} f(x)$ *und* $G = \lim_{x \to x_0} g(x)$ *existieren und*

$$f(x) \leq g(x) \text{ für alle } x \in D$$

*oder*

$$f(x) < g(x) \text{ für alle } x \in D$$

*dann gilt*

$$F = \lim_{x \to x_0} f(x) \;\leq\; \lim_{x \to x_0} g(x) = G$$

*Beachte:*
*Die strikte Ungleichung bleibt beim Grenzübergang nicht erhalten!*
*(z.B.* $f = const_0$, $g = id_{(0,1]}$, $x_0 = 0$*)*

**Satz 12.** *(Sandwichsatz)*
*Es seien* $f : D \to \mathbb{R}$, $g : D \to \mathbb{R}$, $h : D \to \mathbb{R}$ *mit* $x_0$ *Häufungspunkt von* $D$*.*
*Wenn die Grenzwerte* $F = \lim_{x\to x_0} f(x)$ *und* $G = \lim_{x\to x_0} g(x)$ *existieren und*

$$f(x) \leq h(x) \leq g(x) \text{ für alle } x \in D$$

*und*

$$F = \lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = G$$

*dann existiert auch der Grenzwert* $\lim_{x\to x_0} h(x)$ *und es gilt*

$$F = \lim_{x\to x_0} h(x) = G$$

Sehr nützlich ist auch folgende Schlußweise für Grenzwerte bei verknüpften Funktionen:

**Satz 13.** *(Substitutionsprinzip) Es seien* $f\colon A \to \mathbb{K}$, $g\colon B \to \mathbb{K}$, $A$ *und* $B \subset \mathbb{K}$, $f(A) \subset B$, *und* $x_0$ *ein Häufungspunkt von* $A$, $y_0$ *ein Häufungspunkt von* $B$. *Ferner sei* $f(x) \neq y_0$ *für* $x \neq x_0$. *Dann folgt aus* $\lim_{x\to x_0} f(x) = y_0$ *und* $\lim_{y\to y_0} g(y) = z_0$ *auch* $\lim_{x\to x_0} g(f(x)) = z_0$.

**Satz 14.** *Es seien $f : D \to \mathbb{R}$, $g : D \to \mathbb{R}$, mit $x_0$ Häufungspunkt von $D$. Wenn*

ein $C > 0$ existiert, sodass für alle $x \in D$: $|f(x)| \leq C$ („$f$ beschränkt")

*und*

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = 0$$

*dann existiert auch der Grenzwert von $f \cdot g$ in $x_0$ und es gilt*

$$\lim_{x \to x_0} (f \cdot g)(x) = 0$$

**Satz 15.** *Es seien $f : D \to \mathbb{R}$, $g : D \to \mathbb{R}$, mit $x_0$ Häufungspunkt von $D$. Wenn die Grenzwerte $\lim_{x \to x_0} f(x)$ und $\lim_{x \to x_0} g(x)$ existieren und*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) \neq 0 \quad \textit{und} \quad \lim_{x \to x_0} g(x) = 0$$

*dann hat $\frac{f}{g}$ keinen Grenzwert in $x_0$.*



Reelle und . . .
Funktionen
Grenzwerte . . .
Elementare . . .
Diff.Rech.
Int.Rech.

## 3.2. Einseitige Grenzwerte

Ersetze Umgebung $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ in der Definition des Grenzwerts durch linksseitige Umgebung $(x_0-\delta, x_0)$ oder rechtsseitige Umgebung $(x_0, x_0+\delta)$:

**Definition 19.** .
Es sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $x_0 \in \mathbb{R}$ Häufungspunkt von $D$. Eine reelle Zahl $L$ heißt **rechtsseitiger Grenzwert** von $f$ für $x$ gegen $x_0$,

$$L = f(x_0^+) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0,\ x > x_0} f(x)$$

wenn es zu jeder $\varepsilon$-Umgebung von $L$ eine rechtsseitige $\delta$-Umgebung von $x_0$ gibt, sodass

$$f((x_0, x_0 + \delta) \cap D) \subset K(L, \varepsilon)$$

Äquivalent dazu:

**Definition 20.** .
Es sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $x_0 \in \mathbb{R}$ Häufungspunkt von $D$.

$$L = f(x_0^+) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0,\ x > x_0} f(x)$$

wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, sodass

$$\text{aus } (x \in D \ \wedge \ 0 < x - x_0 < \delta) \text{ folgt } |f(x) - L| < \varepsilon$$

Analog definiert man den linksseitigen Grenzwert $f(x_0^-) = \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0,\ x < x_0} f(x)$.

**Satz 16.** *Der Grenzwert von $f$ in $x_0$ existiert genau denn wenn rechts- und linksseitiger Grenzwert existieren und die beiden übereinstimmen. Es gilt dann*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x)$$

Folgende Ursachen kann es also für das Fehlen eines Grenzwerts in $x_0$ geben:

- Die beiden einseitigen Grenzwerte existieren, sind aber ungleich: Sprungstelle
- Einer (oder zwei) der beiden einseitigen Grenzwerte existiert nicht.

## 3.3. Asymptotisches Verhalten: „Grenzwerte im Unendlichen”

Ersetze Umgebung $K(x_0, \delta)$ in der Definition des Grenzwerts durch Umgebung $K(\infty, \xi) = (\xi, \infty)$ (oder $K(-\infty, \xi) = (-\infty, \xi)$) von $\infty$ (oder von $-\infty$). Anstelle der zu Definition 17 äquivalenten Definition 18 erhalten wir dann:

**Definition 21.** .
Es sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion und für alle $\xi \in \mathbb{R}$ gelte $K(\infty, \xi) \cap D \neq \emptyset$. Eine reelle Zahl $L$ heißt Grenzwert von $f$ für $x$ gegen $\infty$,

$$L = \lim_{x \to \infty} f(x)$$

wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\xi > 0$ gibt, sodass

$$\text{aus } (x \in D \;\wedge\; x > \xi) \text{ folgt } |f(x) - L| < \varepsilon$$

Analog (man schreibe sich zur Übung genau auf, wie!) sind Grenzwerte für $x \to -\infty$ definiert.

## 3.4. Uneigentliche Grenzwerte: ,,Unendlich als Grenzwert"

**Definition 22.** .
Es sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $x_0 \in \mathbb{R}$ Häufungspunkt von $D$.
Die Funktion hat in $x_0$ den Grenzwert $\infty$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty$$

wenn es zu jedem $\xi > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, sodass

$$\text{aus } (x \in D \ \wedge \ 0 < |x - x_0| < \delta) \text{ folgt } f(x) > \xi$$

Analog (Übung!) für $-\infty$

**Definition 23.** .
Es sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion und für alle $\xi \in \mathbb{R}$ gelte $K(\infty, \xi) \cap D \neq \emptyset$.
Die Funktion hat in den Grenzwert $\infty$ für $x \to \infty$

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$$

wenn es zu jedem $\xi > 0$ ein $\zeta > 0$ gibt, sodass

$$\text{aus } (x \in D \ \wedge \ x > \zeta) \text{ folgt } f(x) > \xi$$

Übung: Schreiben Sie in Analogie die Definitionen von

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty\,, \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty\,, \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

sowie von den einseitigen Grenzwerten

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \infty\,, \quad \lim_{x\to x_0^+} f(x) = -\infty\,, \quad \lim_{x\to x_0^-} f(x) = \infty\,, \quad \lim_{x\to x_0^-} f(x) = -\infty$$

Damit ist klar: $\infty$ ist nicht als reelle Zahl zu behandeln sondern als möglicher Grenzwert. Aus den Rechenregeln für Grenzwerte ergibt sich daher:

- $\infty + \infty = \infty$
- $x \cdot \infty = \infty$ für alle $x > 0$
- $x \cdot \infty = -\infty$ für alle $x < 0$
- $\frac{x}{\infty} = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$
- $-\infty < x < \infty$ für alle $x \in \mathbb{R}$

Ausdrücke der Form $\infty - \infty$, $0 \cdot \infty$, $\frac{\infty}{\infty}$ bedürfen einer eigenen Analsye.



Reelle und . . .
Funktionen
Grenzwerte . . .
Elementare . . .
Diff.Rech.
Int.Rech.

**Satz 17.** .
*Es seien* $f : D \to \mathbb{R}$, $g : D \to \mathbb{R}$ *Funktionen,* $x_0 \in \mathbb{R}$ *Häufungspunkt von* $D$ *mit* $\lim_{x\to x_0} f(x) = F \neq 0$, $\lim_{x\to x_0} g(x) = 0$ *und* $g(x) \neq 0$, $\frac{f(x)}{g(x)} > 0$ *für* $x \neq x_0$.
*Dann gilt*

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$$

**Satz 18.** .
*Es seien* $f : D \to \mathbb{R}$, $g : D \to \mathbb{R}$ *Funktionen,* $x_0 \in \mathbb{R}$ *Häufungspunkt von* $D$ *mit* $\lim_{x\to x_0} f(x) = F \in \mathbb{R}$, $\lim_{x\to x_0} g(x) = \infty$.
*Dann gilt*

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

## 3.5. Stetige Funktionen

**Definition 24.** .

1. Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt **stetig** in einem Häufungspunkt $x_0 \in D$ von $D$ wenn
   (a) der Grenzwert $\lim_{x\to x_0} f(x)$ existiert und
   (b) $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$
2. Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt **stetig**, wenn $f$ stetig in jedem $x_0 \in D$ ist.

Damit ist $f$ unstetig in $x_0$, wenn einer der folgenden drei Fälle eintritt:

- $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \lim_{x\to x_0^-} f(x) \neq f(x_0)$ **hebbare Unstetigkeit**
- $\lim_{x\to x_0^+} f(x) \neq \lim_{x\to x_0^-} f(x)$ **Sprungstelle**
- $\lim_{x\to x_0^+} f(x)$ oder $\lim_{x\to x_0^-} f(x)$ existiert nicht **Unstetigkeit 2.Art**

Bei stetigen Funktionen dürfen Grenzwertbildung und Funktionsauswertung vertauscht werden:

$$(*) \qquad f \text{ stetig in } x_0 \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0} f(x) = f(\lim_{x\to x_0} x)$$

Reelle und . . .
Funktionen
Grenzwerte . . .
Elementare . . .
Diff.Rech.
Int.Rech.
Seite 45 von 100
Zurück
Vollbild
Schließen
Beenden

**Satz 19.** .
*Eine Funktion* $f : D \to \mathbb{R}$ *ist stetig in einem Häufungspunkt* $x_0 \in D$ *von* $D$ *wenn es zu jedem* $\varepsilon > 0$ *ein* $\delta > 0$ *gibt, sodass*

$$\textit{aus } (x \in D \ \wedge \ |x - x_0| < \delta) \textit{ folgt } |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Der Grenzwert ermöglicht es, eine „Lücke" im Definitionsbereich einer Funktion auf natürliche Weise zu schließen:

**Satz 20.** .
*Es sei* $f : D \to \mathbb{R}$ *eine stetige Funktion,* $x_0 \in \mathbb{R}$ *Häufungspunkt von* $D$ *mit* $x_0 \notin D$ *und es existiere der Grenzwert* $\lim_{x \to x_0} f(x) = F \in \mathbb{R}$.
*Setzt man* $\tilde{D} = D \cup \{x_0\}$, $\tilde{f} : \tilde{D} \to \mathbb{R}$ *mit*

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \textit{für } x \in D \\ \lim_{x \to x_0} f(x) & \textit{für } x = x_0 \end{cases}$$

*dann ist* $\tilde{f}$ *stetig (auch in* $x_0$*). Man nennt* $\tilde{f}$ **stetige Fortsetzung** *von* $f$.

## Verknüpfungen und Hinereinanderausführung stetiger Funktionen

Aus den Rechenregeln für Grenzwerte folgt

**Satz 21.** .
*Es seien* $f : D \to \mathbb{R}$, $g : D \to \mathbb{R}$ *stetig in* $x_0 \in D$ *und* $\lambda \in \mathbb{R}$. *Dann sind auch folgende Funktionen stetig:*

$$\lambda f\,, \quad f \pm g\,, \quad f \cdot g$$

*Falls zusätzlich* $g(x_0) \neq 0$, *dann ist auch die Funktion* $\frac{f}{g}$ *stetig.*

Eine direkte Folgerung der Vertauschbarkeit von Grenzwertbildung und Funktionsauswertung (*) ist

**Satz 22.** .
*Es seien* $f : D_f \to \mathbb{R}$ *stetig in* $x_0 \in D_f$, $g : D_g \to \mathbb{R}$ *stetig in* $f(x_0) \in D$, *und* $f(D_f) \subset D_g$.
*Dann ist* $g \circ f : D_f \to \mathbb{R}$ *stetig in* $x_0$.



Reelle und . . .
Funktionen
Grenzwerte . . .
Elementare . . .
Diff.Rech.
Int.Rech.

## Stetigkeit der Umkehrfunktion

**Satz 23.** .
*Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ streng monoton.*
*Dann existiert die Umkehrfunktion $f^{-1}$ und ist stetig.*

- Man beachte, dass $f$ selbst nicht stetig zu sein braucht.
- Wenn $f$ nicht auf einem Intervall definiert ist, kann $f^{-1}$ auch unstetig sein.

## 3.6. Qualitative Eigenschaften stetiger Funktionen

**Satz 24.** *(**Zwischenwertsatz**, ZWS)*
*Es sei $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig.*
*Dann gibt es für jedes $\lambda$ zwischen $f(a)$ und $f(b)$ (also $f(a) \leq \lambda \leq f(b)$ oder $f(b) \leq \lambda \leq f(a)$) ein $x_\lambda \in [a, b]$ sodass $f(x_\lambda) = \lambda$.*

Anwendung: **Bisektionsverfahren** zur Berechnung der Nullstellen einer stetigen Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ mit $f(a)f(b) < 0$:
(Beachte: die Bedingung $f(a)f(b) < 0$ garantiert nach dem ZWS dass zwischen a und b eine Nullstelle von $f$ liegt)

Schritt 0: Setze $a_0 = a$, $b_0 = b$
Schritt k: Berechne $m_k = \frac{a_{k-1}+b_{k-1}}{2}$ und $f(m_k)$

$$\text{Setze } (a_k, b_k) = \begin{cases} (a_{k-1}, m_k) & \text{falls } f(a_{k-1})f(m_k) < 0 \\ (m_k, b_{k-1}) & \text{falls } f(b_{k-1})f(m_k) < 0 \end{cases}$$

Vorteile: benötigt nur eine Funktionsauswertung pro Schritt
gibt genaue Fehlerschranken
Nachteil: langsam (3 Schritte pro Dezimalstelle)

**Definition 25.** Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion.

1. $f$ nimmt in $x_0 \in D$ das **globale Minimum** an, wenn
$$f(x) \geq f(x_0) \text{ für alle } x \in D$$
2. $f$ nimmt in $x_0 \in D$ das **globale Maximum** an, wenn
$$f(x) \leq f(x_0) \text{ für alle } x \in D$$
3. $f$ nimmt in $x_0 \in D$ ein **lokales Minimum** an, wenn es ein $\delta > 0$ gibt sodass
$$f(x) \geq f(x_0) \text{ für alle } x \in D \cap K(x_0, \delta)$$
4. $f$ nimmt in $x_0 \in D$ ein **lokales Maximum** an, wenn es ein $\delta > 0$ gibt sodass
$$f(x) \leq f(x_0) \text{ für alle } x \in D \cap K(x_0, \delta)$$

Ein Minimum oder Maximum einer Funktion nennt man **Extremum.**

- Das globale Minimum (Maximum) ist eindeutig, kann aber an mehreren Stellen angenommen.
- Es kann mehrere unterschiedliche lokale Minima (Maxima) geben.

**Satz 25.** *(***Satz von Weierstraß***)*
*Eine stetige Funktion nimmt auf einem abgeschlossenen und beschränkten Intervall das globale Minimum und das globale Maximum an.*

## 3.7. Folgen

Eine **Folge** in $\mathbb{R}$ ist eine Abbildung $\begin{cases} x : \mathbb{N} & \to & \mathbb{R} \\ \quad n & \mapsto & x(n) = x_n \end{cases}$.

Schreibweise $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ oder $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ (statt $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$).

**Definition 26.** (Konvergenz einer Folge).

1. Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ heißt **konvergent** gegen $x \in \mathbb{R}$ genau dann, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ einen Index $N(\varepsilon)$ gibt, so dass für alle Folgenglieder $x_n$ mit $n \geq N(\varepsilon)$ gilt: $|x_n - x| < \varepsilon$, also

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \, \forall n \geq N(\varepsilon) \; : \; |x_n - x| < \varepsilon$$

   Man nennt $x$ Grenzwert der Folge und schreibt

$$x = \lim_{n\to\infty} x_n$$

2. Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ heißt **divergent** wenn $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ nicht konvergent ist.

3. Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ mit $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ heißt **Nullfolge**.

**Satz 26.** .
*Wenn der Grenzwert einer Folge existiert, ist er eindeutig bestimmt.*

- Eine Folge konvertiert genau dann, wenn für jedes noch so kleine $\varepsilon > 0$ alle Folgenglieder bis auf endlich viele im Intervall $(x-\varepsilon, x+\varepsilon)$ liegen.
- Die Abänderung von endlich vielen Folgengliedern ändert am Konvergenzverhalten der Folge nichts.

## Monotone und beschränkte Folgen

**Definition 27.** .

1. Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ heißt **beschränkt** genau dann wenn es ein $M > 0$ gibt, so dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$|x_n| < M$$

2. Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ heißt **monoton wachsend (fallend)** wenn für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$x_{n+1} \geq x_n \quad (x_{n+1} \leq x_n)$$

**Satz 27.** .
*Jede monotone und beschränkte Folge reeller Zahlen ist konvergent.*

**Satz 28.** *Es sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ eine Nullfolge und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ beschränkt. Dann ist $(x_n y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ eine Nullfolge.*

## Beispiele konvergenter Folgen

**Satz 29.** .

- *Für* $\alpha > 0$*:* $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^\alpha} = 0$
- *Für* $q \in (-1, 1)$*:* $\displaystyle \lim_{n\to\infty} q^n = 0$
- *Für* $\alpha > 0$*:* $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \alpha^{\frac{1}{n}} = 1$
- $\displaystyle \lim_{n\to\infty} n^{\frac{1}{n}} = 1$
- $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 2.71828182845905\ldots = e$ *(Eulerâsche Zahl)*

# Sandwichsatz für konvergente Folgen

**Satz 30.** .

- *Es seien* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ *und* $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ *konvergente Folgen mit*

$$x_n \leq y_n \text{ für alle } n \in \mathbb{N}$$

  *Dann gilt*

$$\lim_{n\to\infty} x_n \leq \lim_{n\to\infty} y_n .$$

- *Es seien* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ *konvergente Folgen,* $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ *eine weitereFolge mit*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n \text{ und } x_n \leq z_n \leq y_n \text{ für alle } n \in \mathbb{N} .$$

  *Dann ist* $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergent und*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} z_n .$$

## Rechenregeln für konvergente Folgen

**Satz 31.** *Es seien* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ *und* $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ *konvergente Folgen und* $\lambda \in \mathbb{R}$

- *Dann sind auch die Folgen* $(\lambda x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(x_n \pm y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(x_n \cdot y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergent und*

$$\lim_{n\to\infty}(\lambda x_n) = \lambda \lim_{n\to\infty} x_n$$

$$\lim_{n\to\infty}(x_n \pm y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n \pm \lim_{n\to\infty} y_n$$

$$\lim_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n \cdot \lim_{n\to\infty} y_n$$

- *Falls zusätzlich* $\lim_{n\to\infty} y_n \neq 0$, *dann ist auch die Folge* $\left(\frac{x_n}{y_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergent und*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} x_n}{\lim_{n\to\infty} y_n}$$

**Satz 32.** *(**Folgenkriterium** ) Es sei $f\colon I \to \mathbb{K}$ und $x_0 \in I$ ein Häufungspunkt von $I$. Äquivalent sind folgende aussagen:*

1. *$f$ ist stetig in $x_0$*
2. *Für jede Folge $(x_n) \subset I$ mit $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ ist die folge der Bilder $(f(x_n))$ konvergent und es gilt $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$.*

**E**xample: $\lim_{n\to\infty} \sqrt{(1+\frac{1}{n})^{1/n} + (\frac{2}{3})^n} = 1.$
Wegen der Stetigkeit der Wurzelfunktion gilt

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{(1+\frac{1}{n})^{1/n} + (\frac{2}{3})^n} = \sqrt{\lim_{n\to\infty}((1+\frac{1}{n})^{1/n} + (\frac{2}{3})^n)}$$

Aus $1 \leq 1+\frac{1}{n} \leq 2$ folgt $1 \leq (1+\frac{1}{n})^{1/n} \leq 2^{1/n}$ und daraus mit dem Sandwichsatz

$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^{1/n} = 1$$

Wegen Satz 29 gilt $\lim_{n\to\infty}(\frac{2}{3})^n = 0$, daraus folgt leicht die Behauptung (wie?).



Reelle und . . .
Funktionen
Grenzwerte . . .
Elementare . . .
Diff.Rech.
Int.Rech.
Seite 58 von 100
Zurück
Vollbild
Schließen
Beenden

## Uneigentliche Grenzwerte - „Unendlich als Grenzwert"

**Definition 28.** .
Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ heißt **divergent gegen** $\infty$ (bzw. gegen $-\infty$) genau dann, wenn

$$\forall \xi \in \mathbb{R}\, \exists N(\xi) \in \mathbb{N}\, \forall n \geq N(\xi) \;:\; x_n > \xi$$

$$(\text{bzw. } \forall \xi \in \mathbb{R}\, \exists N(\xi) \in \mathbb{N}\, \forall n \geq N(\xi) \;:\; x_n < \xi)$$

Man schreibt $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$ (bzw. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$) und nennt $\infty$ (bzw. $-\infty$) **uneigentlichen Grenzwert** von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

**Satz 33.** .
*Es seien* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ *und* $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ *Folgen und* $\lim_{n\to\infty} x_n = x \in \mathbb{R}$.

- *Wenn* $\lim_{n\to\infty} y_n = \infty$ *dann ist* $\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = 0$.
- *Wenn* $\lim_{n\to\infty} y_n = 0$, $\lim_{n\to\infty} x_n \neq 0$ *und* $\frac{x_n}{y_n} \geq 0$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$, *dann ist* $\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \infty$.
- *Wenn* $\lim_{n\to\infty} y_n = 0$, $\lim_{n\to\infty} x_n \neq 0$ *und* $\frac{x_n}{y_n} \leq 0$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$, *dann ist* $\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = -\infty$.

# 4. Elementare Funktionen

## 4.1. Potenzfunktion, Wurzelfunktion

**Definition 29.** .
Es seien $x \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$. Die **$n$-te Potenz** von $x$ ist definiert durch

$$x^n = \underbrace{x \cdot x \cdot \cdots \cdot x}_{n \text{ Mal}} \qquad x^0 = 1\,.$$

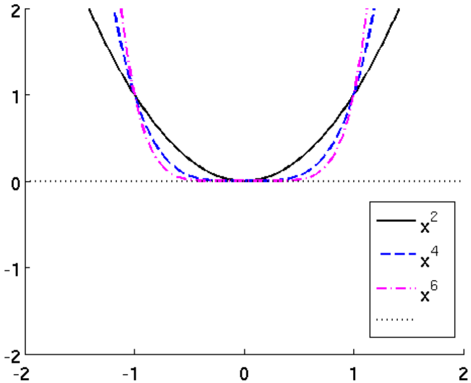
Man nennt $x$ **Basis** und $n$ **Exponent**.

**Satz 34.** *(Rechenregeln für Potenzen) Es seien $x, y \in \mathbb{R}$, $n, m \in \mathbb{N}$.*

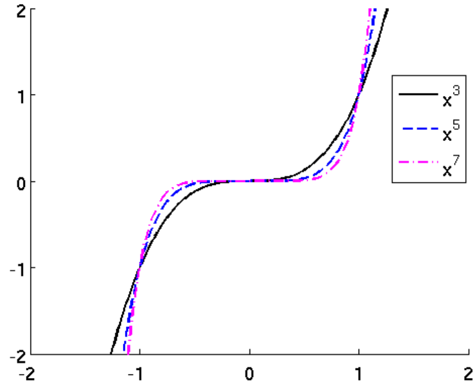
$$\begin{aligned}
&(x^n) \cdot (x^m) = x^{n+m} \\
&(x^n)^m = x^{n \cdot m} \\
&(x \cdot y)^n = x^n \cdot y^n \\
&0 < x < y \quad \Rightarrow \quad 0 < x^n < y^n \\
&(0 < x < 1 \ \wedge \ m > n) \quad \Rightarrow \quad x^m < x^n \\
&(x > 1 \ \wedge \ m > n) \quad \Rightarrow \quad x^m > x^n
\end{aligned}$$



Reelle und . . .
Funktionen
Grenzwerte . . .
Elementare . . .
Diff.Rech.
Int.Rech.
Seite 60 von 100
Zurück
Vollbild
Schließen
Beenden



2
1
0
-1
-2
-2
-1
0
1
2
$x^2$
$x^4$
$x^6$

2
1
0
-1
-2
-2
-1
0
1
2
$x^3$
$x^5$
$x^7$

**Definition 30.** Es sei $n \in \mathbb{N}$.

Die Funktion $p_n : \begin{cases} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & p_n(x) = x^n \end{cases}$ heißt **Potenzfunktion**.

**Satz 35.** *(Eigenschaften der Potenzfunktion).*

1. *$p_n$ ist stetig.*
2. *Für n gerade ist $p_n$ eine gerade Funktion:* $\forall x \in \mathbb{R} : p_n(-x) = p_n(x)$.
3. *Für n ungerade ist $p_n$ eine ungerade Funktion:* $\forall x \in \mathbb{R} : p_n(-x) = -p_n(x)$.
4. *Für n gerade ist $p_n$ strikt monoton wachsend auf* $[0, \infty)$
5. *Für n ungerade ist $p_n$ strikt monoton wachsend auf* $\mathbb{R}$
6. *Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist* $\lim\limits_{x \to \infty} p_n(x) = \infty$.
7. *Für n gerade ist* $\lim\limits_{x \to -\infty} p_n(x) = \infty$.
8. *Für n ungerade ist* $\lim\limits_{x \to -\infty} p_n(x) = -\infty$.

Wegen 4. bzw 5. besitzt $p_n$ eine Umkehrfunktion auf $[0, \infty)$ bzw. $\mathbb{R}$.
Diese ist die Wurzelfunktion:

**Definition 31.** .

Die **Wurzelfunktion** ist definiert auf $D = \begin{cases} [0, \infty) & \text{falls } n \text{ gerade} \\ \mathbb{R} & \text{falls } n \text{ ungerade} \end{cases}$

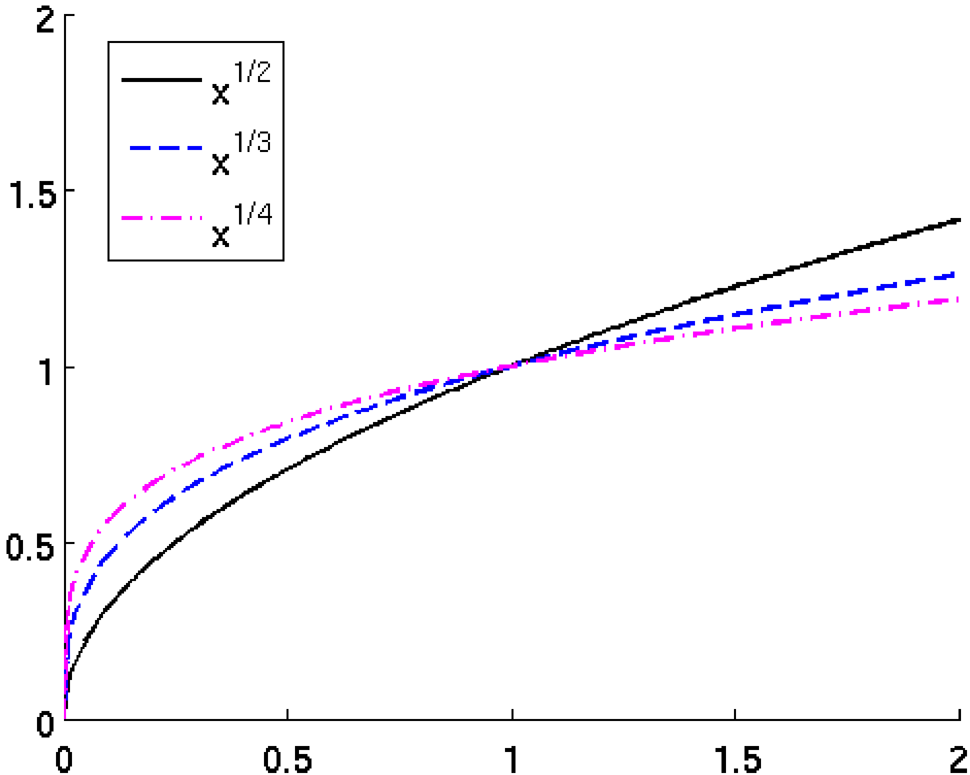
durch

$$x = \sqrt[n]{y} \quad \Leftrightarrow \quad y = x^n$$

Schreibweise: $\sqrt[n]{y} = y^{\frac{1}{n}}$.

**Satz 36.** *(Eigenschaften der Wurzelfunktion).*

1. *$w_n$ ist stetig.*
2. *Für $n$ ungerade ist $w_n$ eine ungerade Funktion:* $\forall x \in \mathbb{R} : \; w_n(-x) = -w_n(x)$.
3. *Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist* $\lim\limits_{x \to \infty} w_n(x) = \infty$.
4. $(0 < y < 1 \;\wedge\; m > n) \quad \Rightarrow \quad y^{\frac{1}{m}} > y^{\frac{1}{n}}$
5. $(y > 1 \;\wedge\; m > n) \quad \Rightarrow \quad y^{\frac{1}{m}} < y^{\frac{1}{n}}$







Reelle und . . .
Funktionen
Grenzwerte . . .
Elementare . . .
Diff.Rech.
Int.Rech.
Seite 64 von 100
Zurück
Vollbild
Schließen
Beenden

**Definition 32.** (Potenzen mit rationalen Exponenten).

1. Für $x \in [0,\infty)$, $p,q \in \mathbb{N}$ setzt man $x^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{x^p} = (\sqrt[q]{x})^p$.

2. Für $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $n \in \mathbb{N}$ setzt man $x^{-n} = \dfrac{1}{x^n}$.

3. Für $x \in (0,\infty)$, $p,q \in \mathbb{N}$ setzt man $x^{-\frac{p}{q}} = \dfrac{1}{x^{\frac{p}{q}}}$.

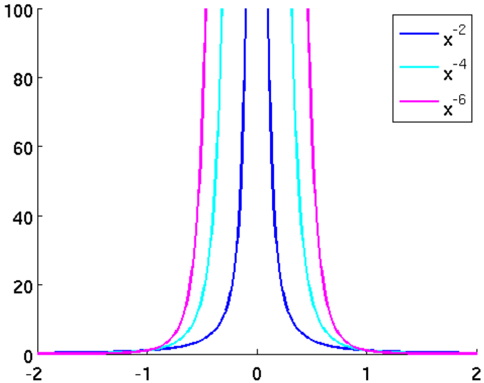
**Satz 37.** *(Eigenschaften der Potenzfunktion mit negativem Exponent)*

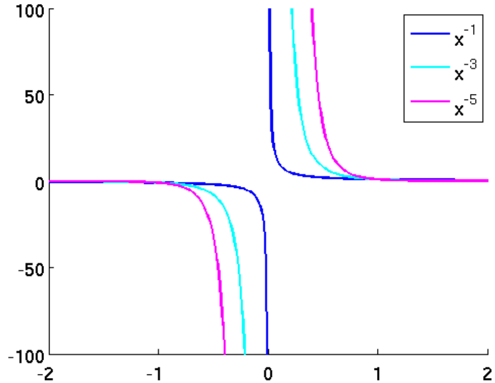
1. *Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $\lim\limits_{x\to\infty} x^{-n} = \lim\limits_{x\to-\infty} x^{-n} = 0$.*

2. *Für $n$ gerade ist $\lim\limits_{x\to 0} x^{-n} = \infty$.*

3. *Für $n$ ungerade ist $\lim\limits_{x\to 0+} x^{-n} = \infty$.*

4. *Für $n$ ungerade ist $\lim\limits_{x\to 0-} x^{-n} = -\infty$.*


100
80
60
40
20
0
-2
-1
0
1
2
x-2
x-4
x-6


100
50
0
-50
-100
-2
-1
0
1
2
x-1
x-3
x-5

**Satz 38.** .

1. *Jede reelle Zahl lässt sich beliebig genau durch eine rationale Zahl approximieren:*
$$\forall a \in \mathbb{R}\, \exists (r_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{Q} : \lim_{n\to\infty} r_n = a$$
2. *Für jedes* $x > 0$ *ist die Folge* $(x^{r_n})_{n\in\mathbb{N}}$ *gemäß Definition* **??** *wohldefiniert*
3. *Für* $a \in \mathbb{R}$, $x > 0$ *und* $(r_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{Q}$ *mit* $\lim_{n\to\infty} r_n = a$ *existiert der Grenzwert der Folge* $(x^{r_n})_{n\in\mathbb{N}}$ *und ist für alle gegen a konvergente Folgen gleich.*
4. *Damit kann man für* $a \in \mathbb{R}$, $x > 0$
$$x^a = \lim_{n\to\infty} x^{r_n}$$
*(mit irgendeiner Folge* $(r_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{Q}$ *sodass* $\lim_{n\to\infty} r_n = a$ *gilt) definieren.*

**Satz 39.** *(Rechenregeln) Es seien $x, y > 0$, $a, b \in \mathbb{R}$.*

$$(x^a) \cdot (x^b) = x^{a+b}$$

$$(x^a)^b = x^{a \cdot b}$$

$$(x \cdot y)^a = x^a \cdot y^a$$

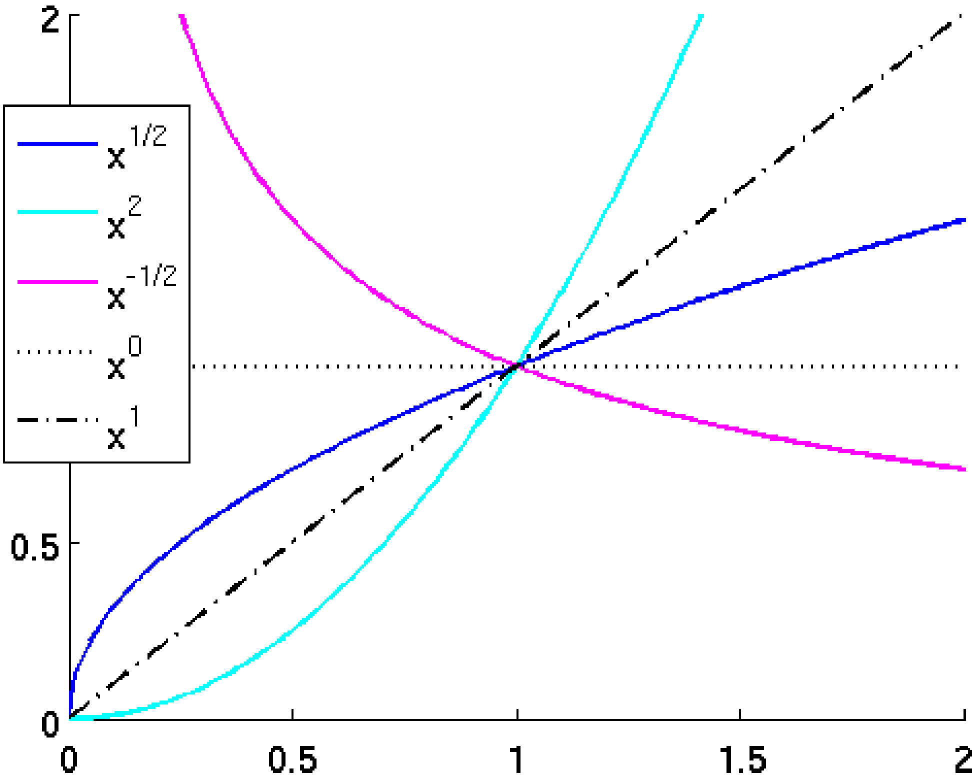
$$x^a > 0 \text{ und } x^{-a} = \frac{1}{x^a}$$

$$\left(\frac{x}{y}\right)^a = x^a y^{-a}$$

$$(0 < x < y \ \wedge \ a > 0) \quad \Rightarrow \quad x^a < y^a$$

$$(0 < x < 1 \ \wedge \ b > a) \quad \Rightarrow \quad x^b < x^a$$

$$(x > 1 \ \wedge \ b > a) \quad \Rightarrow \quad x^b > x^a$$



$x^{1/2}$
$x^{2}$
$x^{-1/2}$
$x^{0}$
$x^{1}$
2
0.5
0
0
0.5
1
1.5
2

**Satz 40.** *Es sei* $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. *Für die allgemeine Potenzfunktion*

$$p_a : \begin{cases} (0,\infty) & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto p_a(x) = x^a \end{cases} \quad \textit{gilt:}$$

1. $p_a$ *ist stetig.*

2. $p_a$ *ist streng monoton wachsend für* $a > 0$ *und streng monoton fallend für* $a < 0$.

3. $p_a$ *ist eine Bijektion von* $(0,\infty)$ *nach* $(0,\infty)$.

## 4.2. Exponentialfunktion, Logarithmusfunktion

**Satz 41.** *Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt*

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \;=\; e^x$$

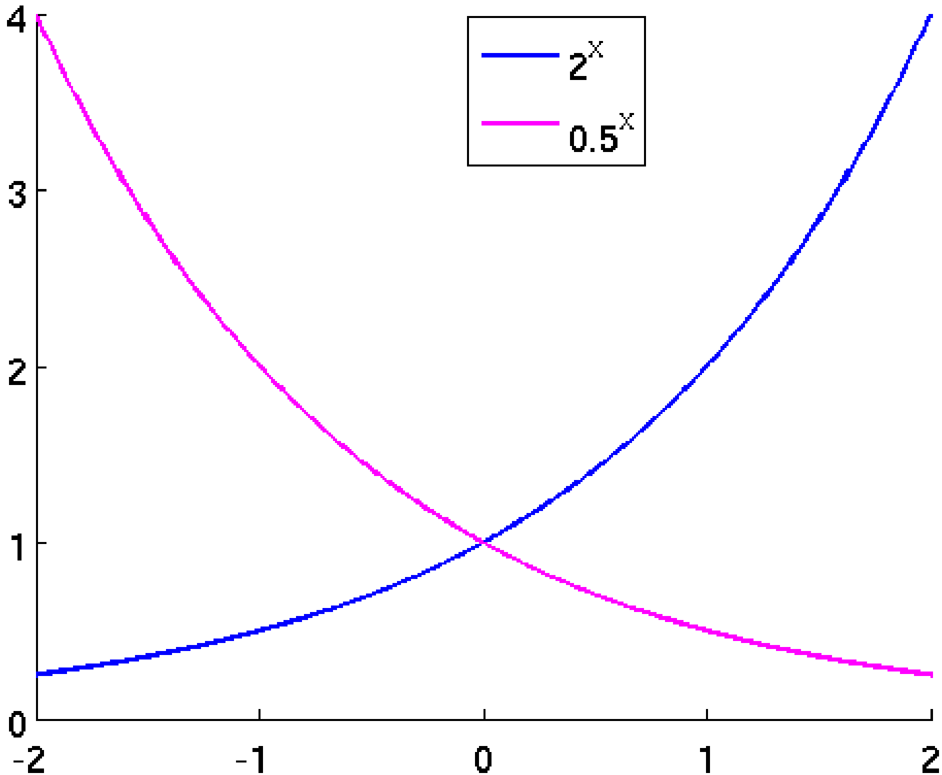
*wobei $e = 2.71828182845905\ldots$ die Eulersche Zahl ist.*

**Definition 33.** Es sei $a > 0$.

1. Die Funktion $\exp : \begin{cases} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & e^x = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \end{cases}$ heißt **Exponentialfunktion**.

2. Die Funktion $\exp_a : \begin{cases} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & a^x \end{cases}$ (gemäß Satz **??** mit vertauschen Rollen von $a$ und $x$) heißt **Exponentialfunktion zur Basis** $a$.

Aus Satz ?? ergeben sich entsprechende Rechenregeln für die Exponentialfunktion.



2^x
0.5^x
4
3
2
1
0
-2
-1
0
1
2

**Satz 42.** .

1. *Für* $\lambda > 0$ *wächst die Funkion* $\begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & e^{\lambda x} = \exp(\lambda x) \end{cases}$ *schneller als jede Potenzfunktion:*

$$\forall \lambda > 0\,, \;\; \alpha > 0 \; : \qquad \lim_{x\to\infty} \frac{x^\alpha}{\exp(\lambda x)} = 0$$

2. *Für* $\lambda < 0$ *fällt die Funkion* $\begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & e^{\lambda x} = \exp(\lambda x) \end{cases}$ *schneller als jede Potenzfunktion anwächst:*

$$\forall \lambda < 0\,, \;\; \alpha > 0 \; : \qquad \lim_{x\to\infty} x^\alpha \exp(\lambda x) = 0$$

**Satz 43.** *Es sei $a > 0$, $a \neq 1$.*

1. $\exp_a$ *ist stetig.*

2. $\exp_a$ *ist streng monoton wachsend für $a > 1$ und streng monoton fallend für $a < 1$.*

3. $\exp_a$ *ist eine Bijektion von $\mathbb{R}$ nach $(0, \infty)$.*

4. $\exp_a(0) = 1$ *und* $\exp_a(x) > 0$ *für alle $x \in \mathbb{R}$.*

5. *Für $a > 1$ ist* $\lim\limits_{x\to\infty} a^x = \infty$, $\lim\limits_{x\to\infty} a^{-x} = 0$

6. *Für $a < 1$ ist* $\lim\limits_{x\to\infty} a^x = 0$, $\lim\limits_{x\to\infty} a^{-x} = \infty$

Wegen 3. hat $\exp_a$ eine Umkehrfunktion auf $(0, \infty)$.
Diese ist die Logarithmusfunktion:

**Definition 34.** . Es sei $a > 0$

Die **Logarithmusfunktion zur Basis** $a$ ist definiert auf $D = (0, \infty)$ durch

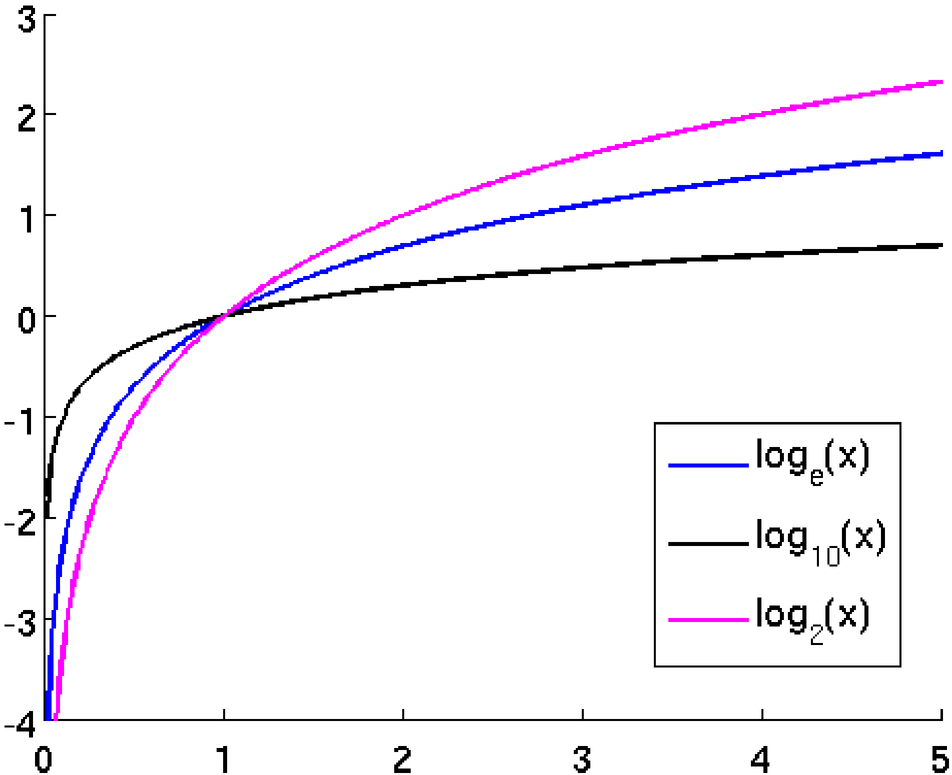
$$x = \log_a(y) \quad \Leftrightarrow \quad y = \exp_a(x)$$

$\log_a(y)$ heißt **Logarithmus von $y$ zur Basis** $a$

- $\log_2$ ... binärer Logarithmus
- $\log_e = \ln$ ... natürlicher Logarithmus
- $\log_{10}$ ... dekadischer Logarithmus

**Satz 44.** *(Rechenregeln) Es seien $x, y \in (0, \infty)$, $a, b > 0$, $a \neq 1$, $b \neq 1$*

$$a^{\log_a(y)} = y$$
$$\log_a(a^x) = x$$
$$\log_a(1) = 0$$
$$\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$$
$$\log_a(\frac{x}{y}) = \log_a(x) - \log_a(y)$$
$$\log_a(x^y) = y \log_a(x)$$
$$\log_b(x) = \log_b(a) \log_a(x) \ \textit{insbesondere} \ \log_{\frac{1}{a}}(x) = -\log_a(x)$$



3
2
1
0
-1
-2
-3
-4
0
1
2
3
4
5
$\log_e(x)$
$\log_{10}(x)$
$\log_2(x)$

**Satz 45.** *Es sei $a > 0$, $a \neq 1$.*

1. $\log_a$ *ist stetig.*

2. $\log_a$ *ist streng monoton wachsend für $a > 1$ und streng monoton fallend für $a < 1$.*

3. $\log_a$ *ist eine Bijektion von $(0, \infty)$ nach $\mathbb{R}$.*

4. $\log_a(1) = 0$.

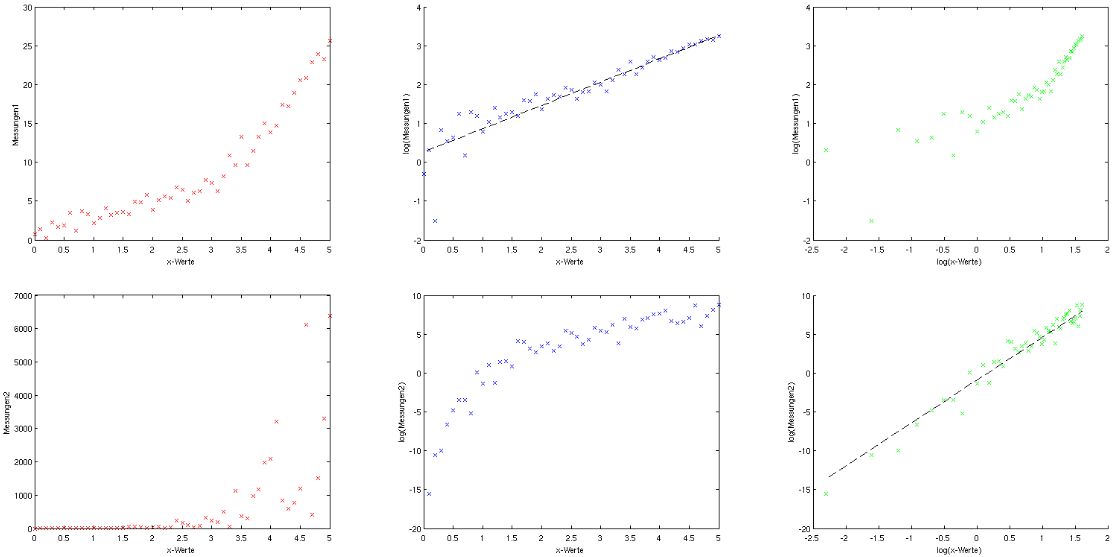
5. *Für $a > 1$ ist* $\lim\limits_{x\to\infty} \log_a(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to 0^+} \log_a(x) = -\infty$

6. *Für $a > 1$ wächst die Logarithmusfunktion langsamer als jede Potenzfunktion:*

$$\forall a > 1\,,\ \alpha > 0\ :\qquad \lim_{x\to\infty} \frac{\log_a(x)}{x^\alpha} = 0 \ \textit{und}\ \lim_{x\to 0^+} x^\alpha \log_a(x) = 0$$

# Anwendung: Datenfit

$$y = a\exp(bx) \;\Leftrightarrow\; \ln(y) = \ln(a) + bx \quad \text{und } y = ax^b \;\Leftrightarrow\; \ln(y) = \ln(a) + b\ln(x)$$





Reelle und . . .
Funktionen
Grenzwerte . . .
Elementare . . .
Diff.Rech.
Int.Rech.
Seite 78 von 100
Zurück
Vollbild
Schließen
Beenden

## 4.3. Winkelfunktionen

### Bogenmaß

**Grad**: Einteilung des vollen Winkels in $360$ Teile
**Neugrad**: Einteilung des vollen Winkels in $400$ Teile
$\rightsquigarrow$ willkürlich

$$\textbf{Radiant}: \frac{\text{Länge des vom Winkel eingeschlossenen Bogens}}{\text{Radius des Kreises}}$$
$$= \text{Länge des vom Winkel eingeschlossenen Einheitskreisbogens}$$

$\rightsquigarrow$ dimensionsloses Maß.

Umrechnung: $\quad 1$ Grad $= \frac{2\pi}{360}$ Radiant $\quad 1$ Radiant $= \frac{360}{2\pi}$ Grad

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Grad | $0$ | $90$ | $180$ | $270$ | $360$ |
| Radiant | $0$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\pi$ | $\frac{3\pi}{2}$ | $2\pi$ |

Achtung auf Einstellung am Taschenrechner!

## Trigonometrische Funktionen: Sinus und Cosinus

Einheitskreis mit Mittelpunkt $(0,0)$

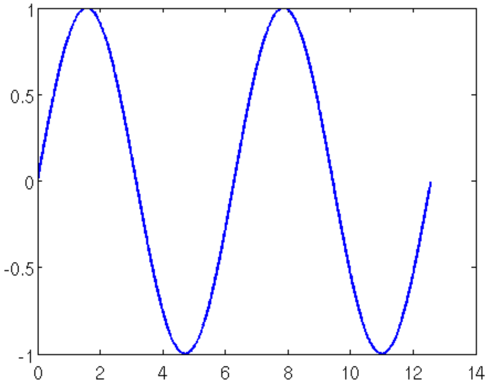
$\alpha \in [0, 2\pi)$ bel. fix:

$P(\alpha)$ = Punkt am Einheitskreis, der – entlang des Einheitskreisbogens gegen den Uhrzeigersinn gemessen – Abstand $\alpha$ von $(1,0)$ hat.

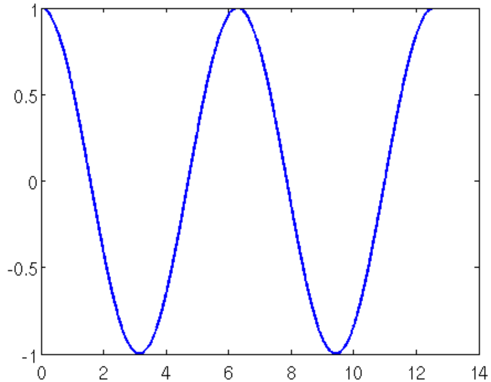
$\cos(\alpha) :=$ $x$-Koordinate von $P(\alpha)$... **Cosinus** von $\alpha$
$\sin(\alpha) :=$ $y$-Koordinate von $P(\alpha)$... **Sinus** von $\alpha$

$\alpha \geq 2\pi$ ... entsprechend mehrfaches Umlaufen des Einheitskreises (im Gegenuhrzeigersinn), um die Bogenlänge $\alpha$ abzuspulen;

$\alpha < 0$ ... Durchlauf einer Distanz von $|\alpha|$ im Uhrzeigersinn entlang des Einheitkreisbogens.



1
0.5
0
-0.5
-1
0
2
4
6
8
10
12
14

1
0.5
0
-0.5
-1
0
2
4
6
8
10
12
14

**Definition 35.** .
Eine Abbildung $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt **periodisch** mit Periode $T > 0$ (kurz: "$T-$ *periodisch*") genau dann wenn für alle $t \in \mathbb{R}$

$$f(t+T) = f(t)$$

Bemerkung: Es genügt, eine periodische Funktion auf einem beliebigen Intervall der Länge $T$ anzugeben.

**Satz 46.** .
*Für die Funktionen* $\sin : \begin{cases} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sin(x) \end{cases}$ $\cos : \begin{cases} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \cos(x) \end{cases}$ *gilt*

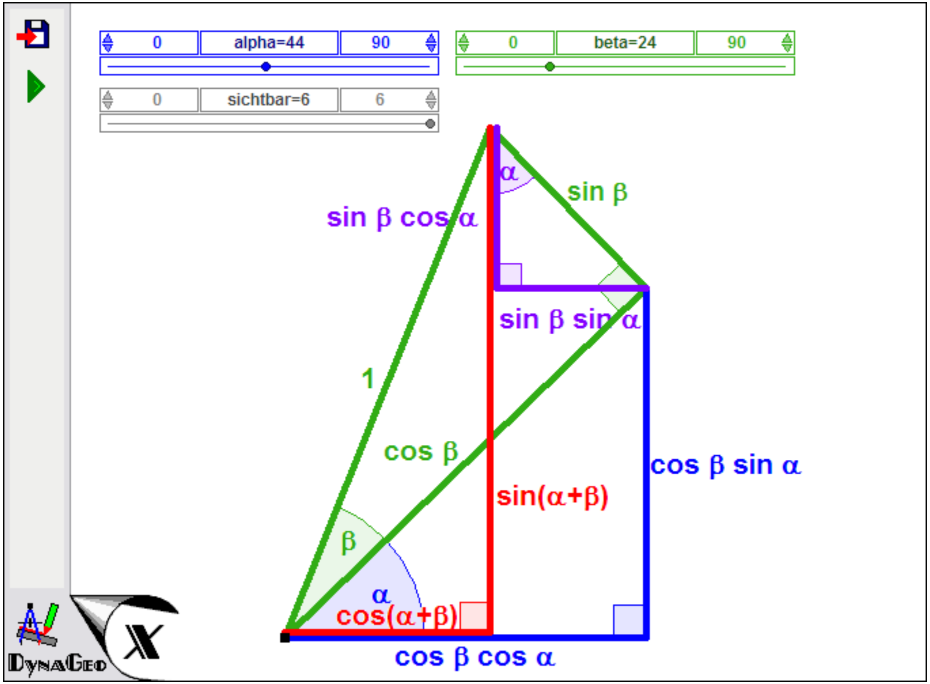
1. *Die Bilder der Funktionen sind* $[-1,1]$*:* $\sin(\mathbb{R}) = [-1,1]$ *und* $\cos(\mathbb{R}) = [-1,1]$.
2. *Die Funktionen* $\sin$ *und* $\cos$ *sind* $2\pi$*-periodisch.*
3. *Die Nullstellen von* $\sin$ *sind* $NS_{\sin} = \{k\pi \;:\; k \in \mathbb{Z}\}$.
4. *Die Nullstellen von* $\cos$ *sind* $NS_{\cos} = \{k\pi + \frac{\pi}{2} \;:\; k \in \mathbb{Z}\}$.
5. *Für alle* $\phi \in \mathbb{R}$ *gilt* $\sin(\phi)^2 + \cos(\phi)^2 = 1$ *(Pythagoras).*

**Satz 47.** *(Symmetrieeigenschaften von Sinus und Cosinus).*
*Für alle* $\phi \in \mathbb{R}$ *gilt:*

$$\begin{aligned}
\sin(\pi - \phi) &= \sin(\phi) & \cos(\pi - \phi) &= -\cos(\phi)\\
\sin(\pi + \phi) &= -\sin(\phi) & \cos(\pi + \phi) &= -\cos(\phi)\\
\sin(\tfrac{\pi}{2} + \phi) &= \cos(\phi) & \cos(\tfrac{\pi}{2} + \phi) &= -\sin(\phi)
\end{aligned}$$

**Satz 48.** *(Additionstheoreme für Sinus und Cosinus).*
*Für alle* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *gilt:*

$$\begin{aligned}
\sin(\alpha + \beta) &= \sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta)\\
\sin(\alpha - \beta) &= \sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta)\\
\cos(\alpha + \beta) &= \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta)\\
\cos(\alpha - \beta) &= \cos(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\alpha)\sin(\beta)
\end{aligned}$$






http://www.juergen-roth.de

## Trigonometrische Funktionen: Tangens und Cotangens

**Definition 36.** .

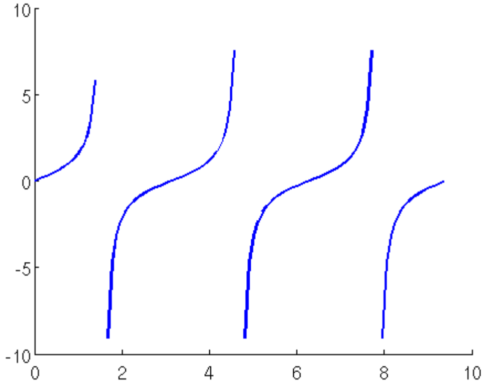
Die Funktionen $\tan : \begin{cases} \mathbb{R} \setminus NS_{\cos} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \tan(x) \end{cases}$

$\cot : \begin{cases} \mathbb{R} \setminus NS_{\sin} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \cot(x) \end{cases}$

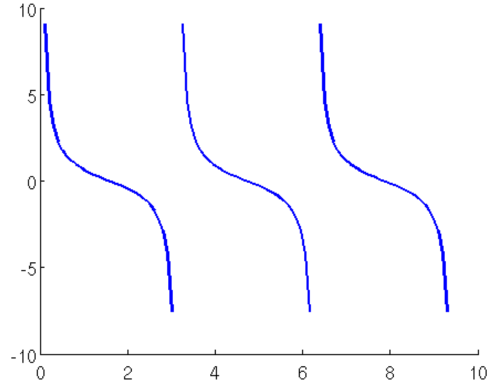
sind definiert durch

$$\tan(\phi) = \frac{\sin(\phi)}{\cos(\phi)}, \quad \cot(\phi) = \frac{\cos(\phi)}{\sin(\phi)}.$$

**Satz 49.** tan *und* cot *sind* $\pi$*-periodische und ungerade Funktionen.*



10
5
0
-5
-10
0
2
4
6
8
10

10
5
0
-5
-10
0
2
4
6
8
10

**Satz 50.** .

1. $\lim_{x\to 0} \sin(x) = 0$
2. $\lim_{x\to 0} \cos(x) = 1$
3. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$
4. $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x} = 0$
5. $\lim_{x\to \pi/2^-} \tan(x) = \infty \qquad \lim_{x\to \pi/2^+} \tan(x) = -\infty$
6. $\lim_{x\to 0^-} \cot(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to 0^+} \cot(x) = \infty$

**Satz 51.** .
*Die Funktionen* sin, cos, tan, cot *sind stetig auf ihren Definitionsmengen.*

**Satz 52.** *In einem rechtwikligen Dreieck gilt für die Winkel* $\neq \frac{\pi}{2}$*:*

$$\sin(\alpha) = \frac{\textit{Gegenkathete}}{\textit{Hypothenuse}} \qquad \cos(\alpha) = \frac{\textit{Ankathete}}{\textit{Hypothenuse}}$$



Reelle und . . .
Funktionen
Grenzwerte . . .
Elementare . . .
Diff.Rech.
Int.Rech.
Seite 87 von 100
Zurück
Vollbild
Schließen
Beenden

# Arcusfunktionen

Die Einschränkungen

$$\sin : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1, 1]\,, \quad \cos : [0, \pi] \to [-1, 1]\,,$$

$$\tan : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}\,, \quad \cot : (0, \pi) \to \mathbb{R}$$

sind strikt monoton, daher existieren die jeweiligen Umkehrfunktionen und sind nach Satz 23 stetig:

**Definition 37.** .

1. Arcussinus: $\arcsin : [-1, 1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] : \; x = \arcsin(y) \;\Leftrightarrow\; y = \sin(x)$
2. Arcuscosinus: $\arccos : [-1, 1] \to [0, \pi] : \; x = \arccos(y) \;\Leftrightarrow\; y = \cos(y)$
3. Arcustangens: $\arctan : \mathbb{R} \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) : \; x = \arctan(y) \;\Leftrightarrow\; y = \tan(x)$
4. Arcuscotangens: $\mathrm{arcot} : \mathbb{R} \to (0, \pi) : \; x = \mathrm{arcot}(y) \;\Leftrightarrow\; y = \cot(y)$

# Polarkoordinaten

**Definition 38.** .
Seien $(x, y)$ die kartesischen Koordinaten eines Punktes in $\mathbb{R}^2$.

$(r, \phi)$ ... **Polarkoordinaten** von $(x, y)$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x &= r\cos(\phi) \\ y &= r\sin(\phi) \end{cases}$

Umrechnung von kartesischen Koordinaten in Polarkoordinaten:

$$
\begin{aligned}
r &= \sqrt{x^2 + y^2} \\
\phi &= \begin{cases} \arctan(\frac{y}{x}) & x > 0 \\ \arctan(\frac{y}{x}) + \pi & x < 0, y \geq 0 \\ \arctan(\frac{y}{x}) - \pi & x < 0, y < 0 \\ \frac{\pi}{2} & x = 0, y > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & x = 0, y < 0 \end{cases}
\end{aligned}
$$

# Schwingungsvorgänge

Schwingungsvorgänge lassen sich oft durch Sinusförmige Funktionen beschreiben:

$$f(t) = c + A\sin(\omega t + \phi)$$

| | |
|---|---|
| $c$ | ... Mittelwert |
| $A$ | ... Amplitude (maximale Schwankung um den Mittelwert) |
| $\omega$ | ... Kreisfrequenz (Anzahl der Perioden in der Zeitspanne $2\pi$) |
| $T = \frac{2\pi}{\omega}$ | ... Periode der Schwingung |
| $v = \frac{1}{T}$ | ... Frequenz (Anzahl der Perioden pro Zeiteinheit) |
| $\phi$ | ... Phasenverschiebung |

## 4.4. Hyperbelfunktionen

Analog zu $\sin$ und $\cos$ mit Kreis ersetzt durch Hyperbel

**Definition 39.**

$$\begin{aligned} \sinh(x) &= \frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right) \quad \text{Sinus Hyperbolicus} \\ \cosh(x) &= \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right) \quad \text{Kosinus Hyperbolicus} \end{aligned}$$

**Satz 53.** .

*Für die Funktionen* $sinh : \begin{cases} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & sinh(x) \end{cases}$ $cosh : \begin{cases} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & cosh(x) \end{cases}$ *gilt*

1. *sinh und cosh sind stetig.*
2. *sinh ist eine ungerade Funktion und cosh ist eine gerade Funktion*
3. *sinh ist streng monoton wachsend und eine Bijektion von* $\mathbb{R}$ *auf* $\mathbb{R}$.
4. *Die Einschränkung von cosh auf* $[0, \infty)$ *ist streng monoton wachsend und eine Bijektion von* $[0, \infty)$ *auf* $[1, \infty)$.
5. $\lim_{x\to\infty} sinh = \infty$ *und* $\lim_{x\to\infty} cosh = \infty$

**Satz 54.** . *Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gelten die Identitäten:*

$$
\begin{aligned}
&cosh(x)^2 - sinh(x)^2 = 1 \\
&sinh(x \pm y) = sinh(x)cosh(y) \pm sinh(y)cosh(x) \\
&cosh(x \pm y) = cosh(x)cosh(y) \pm sinh(y)sinh(x) \\
&sinh(2x) = 2sinh(x)cosh(x) \\
&cosh(2x) = cosh(x)^2 + sinh(x)^2
\end{aligned}
$$

Bemerkung: Aus der ersten Identität wird klar, dass die Punkte $(\cosh(x), \sinh(x))$, $x \in \mathbb{R}$ auf der Hyperbel $X^2 - Y^2 = 1$ liegen.

Reelle und . . .
Funktionen
Grenzwerte . . .
Elementare . . .
Diff.Rech.
Int.Rech.

# 5. Differenzialrechnung

**Definition 40.** Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, $f : I \to \mathbb{R}$ eine Funktion, $h_0 > 0$, $x_0, x_0 + h_0 \in I$

$$\frac{f(x_0 + h_0) - f(x_0)}{h_0}$$

... **Differenzenquotient**

... mittlere Änderungsrate

... Steigung der Sekante an den Graphen von $f$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

... **Ableitung** od. Differenzialquotient

... momentane Änderungsrate

... Steigung der Tangente an den Graphen von $f$

falls dieser Grenzwert existiert!



Reelle und ...
Funktionen
Grenzwerte ...
Elementare ...
Diff.Rech.
Int.Rech.

**Definition 41.** Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, $f : I \to \mathbb{R}$ eine Funktion

1. $f$ heißt **differenzierbar an der Stelle** $x_0 \in I$, wenn der Grenzwert $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ existiert. Der Grenzwert heißt dann **Wert der Ableitung** an der Stelle $x_0$ und wird mit $f'(x_0)$ oder $\frac{df}{dx}$ bezeichnet.
2. $f$ heißt **differenzierbar**, wenn $f$ in allen Punkten $x_0 \in I$ differenzierbar ist. Die Funktion $f' : I \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f'(x)$ heißt **Ableitung**(sfunktion) von $f$.

**Satz 55.** *Eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ ist genau dann differenzierbar in $x_0 \in I$ mit Ableitungswert $f'(x_0)$ wenn folgende lineare Approximationseigenschaft gilt:*

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + r(h) \ \mathit{mit} \ \lim_{h \to 0} \frac{r(h)}{h} = 0$$

**Satz 56.** .

*Eine in $x_0$ differenzierbare Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ ist in $x_0$ stetig.*

Bemerkung: Die Umkehrung von Satz ?? gilt nicht (z.B. $f(x) = |x|$, $x_0 = 0$).



Reelle und . . .
Funktionen
Grenzwerte . . .
Elementare . . .
Diff.Rech.
Int.Rech.
Seite 94 von 100
Zurück
Vollbild
Schließen
Beenden

# Einige elementare Ableitungen

| $f(x)$ | $f'(x)$ |
|---|---|
| $x^\alpha$ | $\alpha x^{\alpha-1}$ |
| $e^x$ | $e^x$ |
| $e^{\lambda x}$ | $\lambda e^{\lambda x}$ |
| $\ln(x)$ | $\frac{1}{x}$ |
| $\sin(x)$ | $\cos(x)$ |
| $\cos(x)$ | $-\sin(x)$ |
| $\tan(x)$ | $\frac{1}{\cos(x)^2}$ |
| $\mathsf{arctan}(x)$ | $\frac{1}{1+x^2}$ |
| $\mathsf{sinh}(x)$ | $\mathsf{cosh}(x)$ |
| $\mathsf{cosh}(x)$ | $\mathsf{sinh}(x)$ |

## Ableitungsregeln I

**Satz 57.** .
*Es seien $f : I \to \mathbb{R}$, $g : I \to \mathbb{R}$ differenzierbar in $x_0 \in I$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann gilt*

(i) *$\lambda f$, $f \pm g$ und $f \cdot g$ sind differenzierbar in $x_0$ und es gilt*

$$\begin{aligned}(\lambda f)'(x_0) &= \lambda f'(x_0)\\ (f \pm g)'(x_0) &= f'(x_0) \pm g'(x_0)\\ (f \cdot g)'(x_0) &= f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0) \quad \textit{(Produktregel)}\end{aligned}$$

(ii) *Wenn zusätzlich $g(x_0) \neq 0$, dann sind auch $\frac{f}{g}$, $\frac{1}{g}$ differenzierbar in $x_0$ und es gilt*

$$\begin{aligned}\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) &= \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2} \quad \textit{(Quotientenregel)}\\ \left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) &= -\frac{g'(x_0)}{g(x_0)^2}\end{aligned}$$

<u>Folgerung:</u> Polynome und rationale Funktionen sind differenzierbar auf ihrem Definitionsbereich.

## Ableitungsregeln II

**Satz 58.** *(Kettenregel)*
*Es seien $f : I \to \mathbb{R}$, $g : J \to \mathbb{R}$ Funktionen mit $f(I) \subset J$ und $f$ differenzierbar in $x_0$, $g$ differenzierbar in $f(x_0)$.*
*Dann ist die Hintereinanderausführung $g \circ f$ differenzierbar in $x_0$ und*

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0)$$

**Satz 59.** *(Ableitung der Umkehrfunktion)*
*Es sei $f : I \to \mathbb{R}$ streng monoton und differenzierbar in $x_0 \in I$.*
*Wenn $f'(x_0) \neq 0$ ist, dann ist $f^{-1}$ differenzierbar in $y_0 = f(x_0)$ und*

$$(f^{-1})'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)} \quad \textit{bzw.} \ (f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$$

## 5.1. Mittelwertsatz

**Satz 60.** *Es sei* $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ *differenzierbar.*
*Wenn* $f$ *in* $x_0$ *ein lokales Extremum annimmt, dann gilt* $f'(x_0) = 0$.

**Satz 61.** *(***Satz von Rolle***)*
*Es sei* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *stetig auf* $[a, b]$ *und differenzierbar auf* $(a, b)$ *mit* $f(a) = f(b)$.
*Dann gibt es eine Zwischenstelle* $\xi \in (a, b)$ *mit*

$$f'(\xi) = 0 \,.$$

**Satz 62.** *(***Mittelwertsatz***, MWS)*
*Es sei* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *stetig auf* $[a, b]$ *und differenzierbar auf* $(a, b)$.
*Dann gibt es eine Zwischenstelle* $\xi \in (a, b)$ *mit*

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a) \,.$$

## 5.2. Monotonie und 1.Ableitung

**Satz 63.** .
*Es sei* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *stetig auf* $[a,b]$ *und differenzierbar auf* $(a,b)$

$$
\begin{aligned}
(\forall x \in (a,b) : f'(x) = 0) &\Leftrightarrow f \text{ konstant auf } [a,b].\\
(\forall x \in (a,b) : f'(x) \geq 0) &\Leftrightarrow f \text{ monoton wachsend auf } [a,b].\\
(\forall x \in (a,b) : f'(x) \leq 0) &\Leftrightarrow f \text{ monoton fallend auf } [a,b].\\
(\forall x \in (a,b) : f'(x) > 0) &\Rightarrow f \text{ streng monoton wachsend auf } [a,b].\\
(\forall x \in (a,b) : f'(x) < 0) &\Rightarrow f \text{ streng monoton fallend auf } [a,b].
\end{aligned}
$$

## 5.3. Lokale Extrema und 1.Ableitung

**Satz 64.** *Es sei $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar.*
*Wenn $f$ in $x_0$ ein lokales Extremum annimmt, dann gilt $f'(x_0) = 0$.*

Bemerkungen

- Satz ?? gibt eine notwendige aber nicht hinreichende Bedingung für das Vorliegen eines lokalen Extremums (Gegenbeispiel: Sattelpunkt)
- Das Intervall $(a, b)$ muss offen sein: Wenn ein Extremum in einem der Randpunkten $a$ bzw $b$ auftritt, braucht dort nicht $f'(x_0) = 0$ zu gelten.



Reelle und . . .
Funktionen
Grenzwerte . . .
Elementare . . .
Diff.Rech.
Int.Rech.
Seite 100 von 100
Zurück
Vollbild
Schließen
Beenden

**Definition 42.** Es sei $f : D \to \mathbb{R}$ mit $D \subseteq \mathbb{R}$ eine Funktion.

1. Ein Punkt $x_0 \in (a, b) \subseteq D$ heißt **stationärer Punkt** von $f$, wenn $f$ in $x_0$ differenzierbar ist und $f'(x_0) = 0$.
2. Ein Punkt $x_0 \in D$ heißt **kritische Stelle**, wenn eine der beiden Bedingungen (a) oder (b) zutrifft:
   (a) $x_0$ ist stationärer Punkt;
   (b) $f$ ist nicht differenzierbar in $x_0$;

**Satz 65.** *Es sei $f : D \to \mathbb{R}$ mit $D \subseteq \mathbb{R}$ in einer Umgebung $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ eines stationären Punktes $x_0 \in D$ differenzierbar. Dann gilt:*

$$(\forall x \in (x_0 - \delta, x_0) : f'(x) \leq 0 \ \wedge \ \forall x \in (x_0, x_0 + \delta) : f'(x) \geq 0)$$
$$\Rightarrow \ f \textit{ hat in } x_0 \textit{ ein lokales Minimum}$$
$$(\forall x \in (x_0 - \delta, x_0) : f'(x) \geq 0 \ \wedge \ \forall x \in (x_0, x_0 + \delta) : f'(x) \leq 0)$$
$$\Rightarrow \ f \textit{ hat in } x_0 \textit{ ein lokales Maximum}$$



Reelle und . . .
Funktionen
Grenzwerte . . .
Elementare . . .
Diff.Rech.
Int.Rech.
Seite 101 von 100
Zurück
Vollbild
Schließen
Beenden

## 5.4. Die Regel von de l'Hospital

**Satz 66.** .
*Es sei $I$ ein offenes (möglicherweise unbeschränktes) Intervall, es seien $f : I \to \mathbb{R}$, $g : I \to \mathbb{R}$ differenzierbar mit $g'(x) \neq 0$, $x \in I$ und es gelte*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = 0 \text{ oder } \lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = \infty\,.$$

*Falls $\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ (im eigentlichen oder uneigentlichen Sinn) existiert, dann existiert auch $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ (im eigentlichen oder uneigentlichen Sinn) und es gilt*

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

*Analoges gilt für das asymptotische Verhalten $\lim_{x\to\pm\infty}$ bzw. für die einseitigen Grenzwerte $\lim_{x\to x_0^\pm}$ anstelle des Grenzwerts $\lim_{x\to x_0}$.*

## 5.5. Das Newtonverfahren

zur Nullstellenberechnung differenzierbarer Funktionen (schneller als Bisektion.)

Motivation:

- Lineare Approximation von $f$ um einen Punkt (Satz ??):
  $f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$;
- Die Nullstelle dieser linearen Funktion lässt sich aber leicht berechnen:
  $\tilde{x} = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$ $(*)$;
- $\tilde{x}$ ist eine bessere Näherung für eine Nullstelle als $x_0$
  $\rightsquigarrow$ iteriere die Vorschrift $(*)$

Schritt 0: Wähle einen Startwert $x_0$ und eine Toleranz *tol*
Schritt k: Berechne $x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$
Abbruch falls $|x_{k+1} - x_k| \leq$ *tol*

Vorteile: schnelle Konvergenz: $|x_{k+1} - x_k| \leq c|x_k - x_{k-1}|^2$
Nachteil: Startwert darf nicht zu weit weg von der Nullstelle liegen

## 5.6. Höhere Ableitungen

**Definition 43.** Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, $f : I \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion

1. Wenn $f'$ differenzierbar an der Stelle $x_0 \in I$ ist, dann heißt $(f')'(x_0)$ **Wert der 2. Ableitung** an der Stelle $x_0$ und wird mit $f''(x_0)$ oder $\frac{d^2 f}{dx^2}(x_0)$ oder $f^{(2)}(x_0)$ bezeichnet.

2. Wenn $f'$ differenzierbar ist, (also wenn $f$ in allen Punkten $x_0 \in I$ differenzierbar ist) nennt man die Funktion $f'' : I \to \mathbb{R}, x \mapsto f''(x)$ **2. Ableitung** von $f$.

3. Analog kann man höhere Ableitungen definieren: Für $n \in \mathbb{N}$:

$$(f^{(n-1)})'(x_0) = f^{(n)}(x_0); \quad \text{Schreibweise: } \frac{d^n f}{dx^n}(x_0)$$

Reelle und . . .
Funktionen
Grenzwerte . . .
Elementare . . .
Diff.Rech.
Int.Rech.
Seite 104 von 100
Zurück
Vollbild
Schließen
Beenden

## Krümmung und 2.Ableitung

**Definition 44.** Es sei $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ eine Funktion.
$f$ heißt **konvex** (**konkav**) $\Leftrightarrow$
$\forall x, \tilde{x} \in (a, b)\, \forall \lambda \in [0, 1] : \; f(\lambda x + (1-\lambda)\tilde{x}) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(\tilde{x})$.
$(\forall x, \tilde{x} \in (a, b)\, \forall \lambda \in [0, 1] : \; f(\lambda x + (1-\lambda)\tilde{x}) \geq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(\tilde{x})$.)

**Satz 67.** *Es sei $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion.*

1. *$f'$ monoton wachsend $\Rightarrow$ $f$ konvex;*
2. *$f'$ monoton fallend $\Rightarrow$ $f$ konkav;*

**Satz 68.** *Es sei $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ eine 2mal differenzierbare Funktion.*

1. *$\forall x \in I : \; f''(x) \geq 0 \Rightarrow f$ konvex;*
2. *$\forall x \in I : \; f''(x) \leq 0 \Rightarrow f$ konkav;*
3. *$x \in I$ Wendepunkt $\Rightarrow f''(x) = 0$;*

Beispiel: logistisches Wachstumsmodell;
$P(t)$... Populationsgröße zum Zeitpunkt $t$

$$P'(t) = \lambda P(t)(K - P(t))$$

## Lokale Extrema und 2.Ableitung

**Satz 69.** *Es sei* $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ *2mal differenzierbar,* $x_0 \in (a, b)$.

1. *Wenn* $f'(x_0) = 0$ *und* $f''(x_0) > 0$, *dann nimmt* $f$ *in* $x_0$ *ein lokales Minimum an.*

2. *Wenn* $f'(x_0) = 0$ *und* $f''(x_0) < 0$, *dann nimmt* $f$ *in* $x_0$ *ein lokales Maximum an.*

Beispiel: Aus einem 4 m langen Stück Draht sollen ein Quadrat und ein Kreis geformt werden so dass die umschlossene Fläche maximal (minimal) ist.

## 5.7. Implizites Differenzieren

Es sei die Funktion $y : I \to \mathbb{R}$ nicht explizit gegeben sondern implizit durch Gleichung

$$F(x, y) = 0 \quad \text{bzw. } F(x, y(x)) = 0$$

Auch wenn die Gleichung nicht nach $y$ auflösbar ist, lassen sich manchmal Ableitungen mit Hilfe dieser Gleichung berechnen.

Beispiel 1: $x^2 + y^2 = 1$, d.h., $x^2 + (y(x))^2 = 1$.
Ableiten liefert: $2x + 2y(x)y'(x) = 0$,
also $y'(x) = -\frac{x}{y(x)}$ für $y(x) \neq 0$;

Beispiel 2: $x^3 - 3xy^2 + y^3 = 1$, d.h., $x^3 - 3x(y(x))^2 + (y(x))^3 = 1$
Ableiten liefert: $3x^2 - 3y(x)^2 - 6xy(x)y'(x) + 3(y(x))^2y'(x) = 0$,
also $y'(x) = \frac{x^2 - y(x)^2}{2xy(x) - (y(x))^2}$ für $y(x) \neq 2x$, $y(x) \neq 0$;

## 5.8. Das Differential

Es sei $f : I \to \mathbb{R}$ eine Funktion, $x \in I$ und $\Delta x \in \mathbb{R}$ klein.

$\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x) \ldots$ Zuwachs von $f$ (zwischen $x$ und $x + \Delta x$)

Falls $f$ differenzierbar ist, gilt (siehe Satz ??)

$$\Delta f = f'(x)\Delta x + r(\Delta x) \text{ mit “} r(\Delta x) \text{ klein} \Rightarrow r(\Delta x) \text{ sehr klein”}$$

$$df = f'(x)\Delta x \ldots \text{ Differential von } f \text{ (in } x \text{ mit Zuwachs } \Delta x\text{)}$$

Es gilt also:

$$\underbrace{df}_{\text{approximative Änderung von } f} \approx \underbrace{\Delta f}_{\text{tatsächliche Änderung von } f}$$

Anwendung z.B. Fehlerfortpflanzung;

Besipiel: Radius einer Kugel mit Messgenauigkeit von $0.001$ cm;
Auswirkung auf Volumenberechnung?

## 5.9. Kurvendiskussion

Ziel: qualitative Aussagen über Verlauf einer Funktion und Gestalt ihres Graphen

- natürlicher Definitionsbereich
- Stetigkeit, Differenzierbarkeit
- Symmetrieeigenschaften (gerade, ungerade)
- Nullstellen von $f$, $f'$, $f''$
- Monotonieeigenschaften und lokale Extrema
- Krümmungseigenschaften und Wendepunkte
- Verhalten in Randpunkten des Definitionsbereichs
- $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)$ (soferne existent), Asymptoten
- Skizze

**Definition 45.** .
Eine **Asymptote** ist eine Gerade $a(x) = kx + d$ mit der Eigenschaft

$$\lim_{x\to\infty} (f(x) - a(x)) = 0 \quad \text{bzw.} \quad \lim_{x\to-\infty} (f(x) - a(x)) = 0$$

Bestimmung von $k$: $0 = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x}(f(x) - kx - d) = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} - k$.

Bestimmung von $d$: $0 = \lim_{x\to\infty}(f(x)-kx-d) = \lim_{x\to\infty}(f(x)-kx) - d$.

# 6. Integralrechnung

## 6.1. Endliche Summen

Es sei $n \in \mathbb{N}$ und $(a_1, \ldots, a_n)$ ein $n$-Tupel.
Schreibweise:

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

$k$ ... Summationsindex
Achtung! Vermeide missverständliche Ausdrücke, z.B.,

$$a_i \sum_{i=1}^{n} a_i, \quad \sum_{k=1}^{n} a_k \sum_{k=1}^{n} a_k$$

stattdessen lieber:

$$a_i \sum_{j=1}^{n} a_j, \quad \sum_{k=1}^{n} a_k \sum_{j=1}^{n} a_j$$

Indexverschiebungen, z.B.:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{j=0}^{n-1} a_{j+1} = \sum_{l=2}^{n+1} a_{l-1} = \sum_{i=0}^{n-1} a_{n-i}$$

sind oft praktisch

**Satz 70.** .

- $\sum_{k=1}^{n} \alpha a_k = \alpha \sum_{k=1}^{n} a_k$ *für* $\alpha \in \mathbb{R}$.
- $\sum_{i=1}^{n} 1 = n$
- $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$
- $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
- $\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$
- $\sum_{i=0}^{n} q^i = \frac{q^{n+1}-1}{q-1}$ *für* $q \neq 1$.

Vereinbarung: $\sum_{i=m}^{n} a_i = 0$ falls $m > n$.

## 6.2. Bestimmtes Integral

Motivation: Berechnung eines Flächeninhalts,
Idee: Approximiere $f$ durch eine stückweise konstante Funktion.
Die Fläche unter der Funktion ist dann eine endliche Summe

**Definition 46.** . Es sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion.

1. Es sei $x_0, x_1, \ldots, x_n$ mit $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$ eine Unterteilung (Partition) des Intervalls $[a, b]$ und $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \ldots, n$ seien jeweils Zwischenstellen.

$$\mathcal{R}_n(f) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$$

heißt **Riemann-Summe**.

2. $f$ heißt **Riemann-integrierbar** wenn der Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} \mathcal{R}_n(f)$$

für alle Folgen von Partitionen mit

$$\lim_{n\to\infty} \max_{i\in\{1,\ldots,n\}} (x_i - x_{i-1}) = 0$$

und Zwischenstellen existiert und für alle Folgen von solchen Partitionen und Zwischenstellen den gleichen Wert liefert.

3. Es sei $f$ Riemann-integrierbar. Der Grenzwert

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \mathcal{R}_n(f)$$

heißt **bestimmtes Integral** (Riemann-Integral);
$a$ ... untere Integrationsgrenze, $b$ ... obere Integrationsgrenze,
$f$ ... Integrand.

**Definition 47.** .
Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt **stückweise stetig** wenn sie bis auf endlich viele Sprungstellen stetig ist.

**Satz 71.** .
*Jede stückweise stetige Funktion ist Riemann-integrierbar.*

**Satz 72.** . *Die Funktionen $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ seien Riemann-integrierbar, $\lambda \in \mathbb{R}$, $c \in [a, b]$.*

1. *Die Funktionen $f \pm g, \lambda f : [a, b] \to \mathbb{R}$ sind Riemann-integrierbar und*
$$\int_a^b (f \pm g)(x)\, dx = \int_a^b f(x)\, dx \pm \int_a^b g(x)\, dx\,,$$
$$\int_a^b (\lambda f)(x)\, dx = \lambda \int_a^b f(x)\, dx$$
2. $\displaystyle\int_a^a f(x)\, dx = 0\,, \quad \int_a^b f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx$
3. $(\forall x \in [a, b] : f(x) \le g(x)) \Rightarrow \left(\displaystyle\int_a^b f(x)\, dx \le \int_a^b g(x)\, dx\right)$

4. $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$

Vereinbarung:

$$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx\,,$$

**Satz 73.** *Das Integral $\int_a^b f(x)\,dx$ einer Riemann-integrierbaren Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ist der Flächneinhalt der Fläche die von*

- *der Geraden $x = a$*
- *der Geraden $x = b$*
- *der $x$-Achse*
- *dem Graphen von $f$*

*begrenzt wird.*
*Flächenstücke unterhalb der $x$-Achse werden dabei negativ gezählt.*



Reelle und . . .
Funktionen
Grenzwerte . . .
Elementare . . .
Diff.Rech.
Int.Rech.
Seite 116 von 100
Zurück
Vollbild
Schließen
Beenden

## 6.3. Unbestimmtes Integral

Motivation: Rekonstruktion einer Funktion aus ihrer Ableitung.

**Definition 48.** Es seien $f, F : [a, b] \to \mathbb{R}$ Funktionen.
$F$ heißt **Stammfunktion** von $f$, wenn $F$ stetig auf $[a, b]$ und differenzierbar auf $(a, b)$ ist und $\quad \forall x \in (a, b) \; : \quad F'(x) = f(x)$.

**Satz 74.** .
*Es seien $f, F, G : [a, b] \to \mathbb{R}$ Funktionen und $F$ Stammfunktion von $f$.*
*$G$ ist genau dann Stammfunktion von $f$, wenn es eine Konstante $c \in \mathbb{R}$ gibt sodass*

$$\forall x \in [a, b] \; : \quad G(x) = F(x) + c$$

*(Stammfunktionen sind bis auf eine additive Konstante eindeutig.)*

Eine Stammfunktion von $f$ nennt man unbestimmtes Integral und schreibt

$$\int f(x)\, dx + c\,.$$

$c$... Integrationskonstante,
"$\int$" gerechtfertigt durch Hauptsatz der Differential-und Integralrechnung (s.u.)



Reelle und ...
Funktionen
Grenzwerte ...
Elementare ...
Diff.Rech.
Int.Rech.
Seite 117 von 100
Zurück
Vollbild
Schließen
Beenden

# Einige elementare Stammfunktionen

| $f(x)$ | $\int f(x)\,dx$ |
|---|---|
| $x^\alpha$ | $\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$ |
| $e^{\lambda x}$ | $\dfrac{1}{\lambda}e^{\lambda x}$ |
| $\dfrac{1}{x}$ | $\ln(x)$ |
| $\sin(\lambda x)$ | $-\dfrac{1}{\lambda}\cos(\lambda x)$ |
| $\cos(\lambda x)$ | $\dfrac{1}{\lambda}\sin(\lambda x)$ |
| $\tan(x)$ | $\dfrac{1}{\cos(x)^2}$ |
| $\dfrac{1}{1+x^2}$ | $\mathsf{arctan}(x)$ |
| $\mathsf{sinh}(x)$ | $\mathsf{cosh}(x)$ |
| $\mathsf{cosh}(x)$ | $\mathsf{sinh}(x)$ |

## Hauptsatz der Differential-und Integralrechnung

**Satz 75.** *Es sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktionen.*

1. *Definiert man $F[a, b] \to \mathbb{R}$ für jedes $t \in [a, b]$ durch das bestimmte Integral*

$$\forall t \in [a, b] \quad : \qquad F(t) = \int_a^t f(x)\, dx$$

*dann ist $F$ differenzierbar auf $(a, b)$ und Stammfunktion von $f$:*

$$\forall x \in [a, b] \quad : \qquad F'(x) = f(x)\,,$$

2. *Ist $\Phi$ eine beliebige Stammfunktion von $f$, so gilt*

$$\int_a^b f(x)\, dx = \Phi(b) - \Phi(a) =: \Phi(x)|_a^b$$

# Mittelwertsatz der Integralrechnung

**Satz 76.** *Es sei* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *eine stetige Funktionen. Dann gibt es eine Zwischenstelle* $\xi \in [a, b]$ *sodass*

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)(b-a)$$

$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \ldots$ Mittelwert.

# 6.4. Integrationstechniken

## Partielle Integration

**Satz 77.** *Es sei $f, G : [a, b] \to \mathbb{R}$ stückweise stetige Funktionen mit:*
*$f$ integrierierbar mit Stammfunktion $F$*
*$G$ differenzierbar auf $(a, b)$ mit Ableitung $G' = g$.*
*Dann gilt für das unbestimmte Integral:*

$$\int f(x)G(x)\,dx = F(x)G(x) - \int F(x)g(x)\,dx$$

*und für das bestimmte Integral:*

$$\int_a^b f(x)G(x)\,dx = F(x)G(x)|_a^b - \int_a^b F(x)g(x)\,dx$$

Merkregel: "$\int u'v\,dx = uv - \int uv'\,dx$".

# Substitutionsregel

**Satz 78.** .
*Es sei $f : I \to \mathbb{R}$ stetig, $G : [a, b] \to \mathbb{R}$ differenzierbar mit $G'$ stetig und strikt monoton auf $(a, b)$ und $G([a, b]) \subseteq I$.*
*Dann gilt für das unbestimmte Integral:*

$$\int f(G(x))G'(x)\,dx = \int f(u)\,du|_{u=G(x)}$$

*und für das bestimmte Integral:*

$$\int_a^b f(G(x))G'(x)\,dx = \int_{G(a)}^{G(b)} f(u)\,du\,.$$

Beispiele:
$\int_a^b f(x+c)\,dx = \int_{a+c}^{b+c} f(u)\,du$
$\int_a^b f(cx)\,dx = \frac{1}{c}\int_{ac}^{bc} f(u)\,du$
$\int_a^b \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln(f(x))$
$\int_a^b \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}\,dx = 2\sqrt{f(x)}$
(soferne die jeweiligen Ausdrücke wohldefiniert sind.)

## Partialbruchzerlegung

- rationale Funktion $f = \frac{P}{Q}$ als Integrand;
- nach Polynomdivision: $f = P_1 + \frac{P_2}{Q}$ mit $\mathrm{grad}(P_2) < \mathrm{grad}(Q)$;
- allg. Form von $Q$: $$Q(x) = a \prod_{i=1}^{I} (x - x_i)^{r_i} \prod_{j=1}^{J} (x^2 + a_j x + b_j)^{s_j}.$$

  wobei (ähnlich wie bei Summen) $\prod_{i=1}^{n} \alpha_i = \alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdots \alpha_n$

- Ansatz: $$\frac{P_2(x)}{Q(x)} = \sum_{i=1}^{I} \left( \sum_{k=1}^{r_i} \frac{A_k^i}{(x - x_i)^k} \right) + \sum_{j=1}^{J} \left( \sum_{l=1}^{s_j} \frac{A_l^j + B_l^j x}{(x^2 + a_j x + b_j)^l} \right)$$

  $\rightsquigarrow$ einfach zu integrieren;

- Methoden zur Bestimmung der Koeffizienten $A_k^i, A_l^j, B_l^j$:
  - Einsetzen von verschiedenen Punkten
  - Koeffizientenvergleich
  - Grenzwertmethode