

# HÖHERE MATHEMATIK II

GUNTHER H. PEICHL

Skriptum zur Vorlesung im WS 2013 / 2014

INSTITUT FÜR MATHEMATIK UND WISSENSCHAFTLICHES RECHNEN  
KARL-FRANZENS-UNIVERSITÄT GRAZ



## CHAPTER 1

# Funktionen in mehreren Veränderlichen

## 1. Grundlagen

Viele grundlegende Konzepte sind für Funktionen in mehreren Veränderlichen und für Funktionen in einer Veränderlichen gleich. Unterschiede ergeben sich in deren Umsetzung durch den unterschiedlichen Umgebungsbegriff:

$$K(x_0, \varepsilon) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - x_0\| < \varepsilon\}$$

wird als  $\varepsilon$ -Umgebung von  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  bezeichnet. Die Entfernung des Punktes  $x$  von  $x_0$  wird mit einer **Norm** gemessen. Allgemein ist eine Norm eine Abbildung  $\|\cdot\|: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  mit folgenden Eigenschaften:

- (N1)  $\|x\| \geq 0$ ,  $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$  für alle  $x \in \mathbb{R}^n$ .
- (N2)  $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$  für alle  $\lambda \in \mathbb{R}$  und  $x \in \mathbb{R}^n$ .
- (N3)  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$  für alle  $x, y \in \mathbb{R}^n$  (Dreiecksungleichung).

Man beachte die Analogie zum Betrag einer reellen oder komplexen Zahl. Das Standardbeispiel einer Norm in  $\mathbb{R}^n$  ist die **euklidische Norm**

$$\|x\| = \left( \sum_{i=1}^n \xi_i^2 \right)^{1/2}$$

( $x = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ ), welche für  $n = 2$  und  $n = 3$  den anschaulichen Abstands begriff in der Ebene bzw. im Raum beschreibt.  $K(x_0, \varepsilon)$  beschreibt daher eine offene Kreisscheibe (Kugel) (d.h. ohne Rand) mit Mittelpunkt  $x_0$  und Radius  $\varepsilon$  in  $\mathbb{R}^2$  (bzw. im  $\mathbb{R}^3$ ). Neben der euklidischen Norm sind auch andere Normen im  $\mathbb{R}^n$  in Gebrauch, auf die wir hier nicht eingehen.

Man beachte, daß dem  $\mathbb{R}^n$  a priori keine Ordnung aufgeprägt ist, sodaß einseitige Konzepte (z.B. links-, rechtsseitige Grenzwerte, etc.) für Funktionen in mehreren Veränderlichen nicht sinnvoll sind. Um den Schwierigkeiten mit dem Verhalten einer Funktion in den Randpunkten ihres Definitionsbereiches auszuweichen, werden wir meist voraussetzen, daß die Abbildung auf einer offenen Teilmenge des  $\mathbb{R}^n$  definiert ist. Der Begriff *offen* hat dabei folgende Bedeutung.

DEFINITION 1.1. Es sei  $D \subset \mathbb{R}^n$  und  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ .

1.)  $x_0 \in D$  heißt **innerer Punkt von  $D$** , wenn es ein  $\varepsilon > 0$  gibt mit

$$K(x_0, \varepsilon) \subset D.$$

2.)  $D$  heißt **offen**, wenn  $D$  nur aus inneren Punkten besteht.  $D$  heißt **abgeschlossen**, wenn  $\bar{D}$  offen ist.

3.)  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  heißt **Häufungspunkt** von  $D$ , wenn in *jeder* Umgebung von  $x_0$  mindestens ein Element von  $D$  liegt, welches von  $x_0$  verschieden ist, also

$$\forall \varepsilon > 0 : (K(x_0, \varepsilon) \setminus \{x_0\}) \cap D \neq \emptyset.$$

4.)  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  heißt **Randpunkt** von  $D$ , wenn in jeder Umgebung von  $x_0$  sowohl Elemente aus  $D$ , als auch Elemente aus  $\complement D$  liegen, also

$$\forall \varepsilon > 0 : K(x_0, \varepsilon) \cap D \neq \emptyset \wedge K(x_0, \varepsilon) \cap \complement D \neq \emptyset.$$

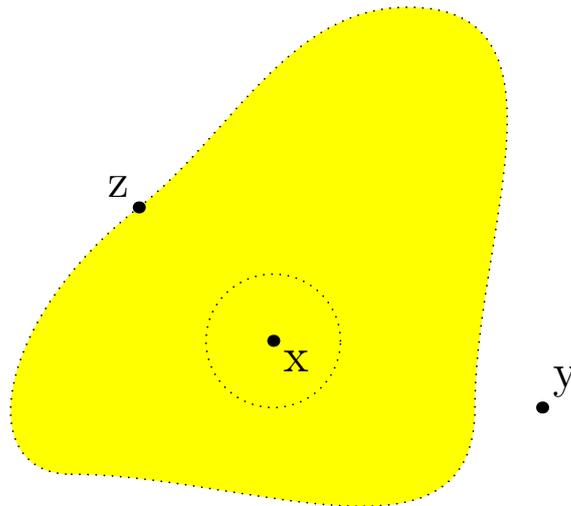


FIGURE 1.1. Topologische Begriffe

In der Abbildung 1 ist  $x$  ein innerer Punkt,  $x$  und  $z$  sind Häufungspunkte und  $y$  und  $z$  sind Randpunkte der dargestellten Menge.

Wir merken an, daß die offenen Kugeln  $K(x_0, \varepsilon)$  offen im Sinne der Definition 1.1 sind. Im  $\mathbb{R}^2$  sind diese Begriffe leicht zu veranschaulichen, ihre volle Tragweite entfalten sie erst im Kontext normierter Räume. Ein Häufungspunkt von  $D$  muß selber nicht Element von  $D$  sein. Wie bei Funktionen in einer Veränderlichen ist es sinnvoll, in einem Häufungspunkt  $x_0$  des Definitionsbereiches  $D$  einer Funktion  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $D \subset \mathbb{R}^n$ , die Existenz eines Grenzwertes zu untersuchen. Analog zur Definition für Funktionen in einer Veränderlichen vereinbaren wir, unter

$$L = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$$

folgendes zu verstehen:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : f((K(x_0, \delta) \setminus \{x_0\}) \cap D) \subset K(L, \varepsilon).$$

Dies ist gleichwertig mit

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in D : 0 < \|x - x_0\| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Man überzeuge sich davon, daß diese Definition mit der entsprechenden Vereinbarung für Funktionen in einer Veränderlichen übereinstimmt. Es wird lediglich ein anderer Abstandsbegriff verwendet (euklidische Norm anstelle des Betrages). Aus diesem Grunde gelten dieselben Rechenregeln. Auf analoge Weise kann auch der Begriff

des uneigentlichen Grenzwertes übertragen werden. Es macht jedoch- wie bereits erwähnt- keinen Sinn, von links- und rechtsseitigen Grenzwerten zu sprechen, da eine einseitige Annäherung an  $x_0$  in höheren Dimensionen nicht sinnvoll ist. Auch der Begriff der Stetigkeit kann direkt übertragen werden:

Eine Abbildung  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $D \subset \mathbb{R}^n$  offen, heißt stetig an der Stelle  $x_0$  aus  $D$ , wenn

- der Grenzwert  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  existiert und
- $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$  ist.

Man nennt  $f$  stetig, wenn  $f$  an allen Stellen  $x \in D$  stetig ist.

Dies ist gleichwertig mit:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in D: \|x - x_0\| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Die Rechenregeln für stetige Funktionen gelten unverändert weiter. In vielen Fällen kann die Stetigkeit einer Funktion in mehreren Veränderlichen zurückgeführt werden auf die Stetigkeit von Funktionen in einer Veränderlichen. Das Prinzip wird für Funktionen in zwei Veränderlichen verdeutlicht:

**SATZ 1.1.** *Es seien  $I$  und  $J$  offene Intervalle und  $\varphi: I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\psi: J \rightarrow \mathbb{R}$  stetige Funktionen. Dann sind auch die Abbildungen  $f, g: I \times J \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f(x, y) = \varphi(x) + \psi(y)$  und  $f(x, y) = \varphi(x)\psi(y)$  stetig.*

Mit Hilfe dieses Resultates ergibt sich beispielsweise die Stetigkeit der Abbildung  $(x, y) \rightarrow f(x, y) = e^{x^2} \sin(x + y)$  mühelos aus der Stetigkeit der Identität, des Sinus, der Exponentialfunktion und der Stetigkeit der Verkettung stetiger Funktionen.

Allgemein ist der Nachweis der Stetigkeit für Funktionen in mehreren Veränderlichen erheblich schwieriger als für Funktionen in einer Veränderlichen. Es ist beispielsweise *nicht* ausreichend, daß eine Funktion in jeder einzelnen Variablen stetig ist.

**BEISPIEL 1.1.** *Die Abbildung  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$*

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

*nimmt auf den Achsen den Wert Null an und ist daher in  $(0, 0)$  stetig jeweils als Funktion von  $x$  bzw.  $y$ . Sie ist aber in  $(0, 0)$  nicht stetig als Funktion zweier Variablen, denn es gilt z. B.*

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t, t) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^2}{2t^2} = \frac{1}{2}$$

und

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x, 0) = 0.$$

*Somit existiert nicht einmal der Grenzwert von  $f$  in  $(0, 0)$ .*

Eine direkte Veranschaulichung ist nur für Funktionen in zwei Veränderlichen möglich. Ihr Graph

$G(f) = \{(x, y, f(x, y)): (x, y) \in D\} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3: z = f(x, y), (x, y) \in D\} \subset \mathbb{R}^3$   
ist ein Beispiel einer **Fläche** im  $\mathbb{R}^3$ .

BEISPIEL 1.2. Der Definitionsbereich der Abbildung  $(x, y) \rightarrow \sqrt{r^2 - x^2 - y^2}$ ,  $r > 0$ , ist die abgeschlossene Kreisscheibe  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq r^2\}$ . Ihr Graph ist die Fläche

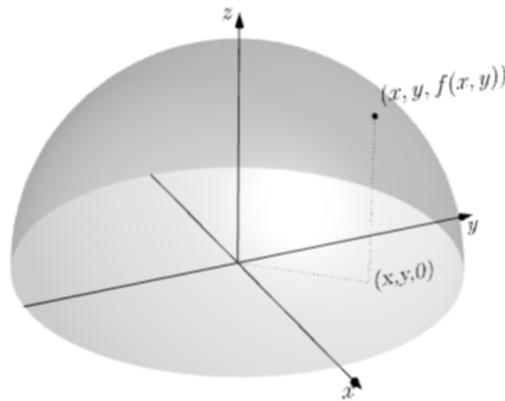


FIGURE 1.2. Beispiel 1.2

Eine weitere, oft leichter interpretierbare Darstellungsmöglichkeit ist aus der Geographie entlehnt. Sie beruht auf dem Konzept der Höhenschichtlinien. Allgemein spricht man von **Niveaulinien** für Funktionen in zwei Veränderlichen bzw. von **Niveauflächen** für Funktionen in drei und mehr Veränderlichen:

$$N_c = \{(x, y) \in D : f(x, y) = c\} = f^{-1}(\{c\}).$$

Die Niveaulinien der Abbildung  $(x, y) \rightarrow \sqrt{r^2 - x^2 - y^2}$  sind gegeben durch

$$N_c = \begin{cases} \emptyset, & c > r, \\ \{(x, y) \in D : x^2 + y^2 = r^2 - c^2\}, & 0 \leq c \leq r \end{cases}$$

also durch eine Familie konzentrischer Kreise mit Mittelpunkt  $(0, 0)$  und Radius  $\sqrt{r^2 - c^2}$ .

## 2. Richtungsableitung, partielle Ableitung

Wir betrachten eine Abbildung  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $D \subset \mathbb{R}^n$  offen,  $x_0 \in D$  und eine Gerade durch  $x_0$  mit Richtungsvektor  $\nu$ ,  $\|\nu\| = 1$ ,

$$g: \gamma(t) = x_0 + t\nu, \quad t \in \mathbb{R}.$$

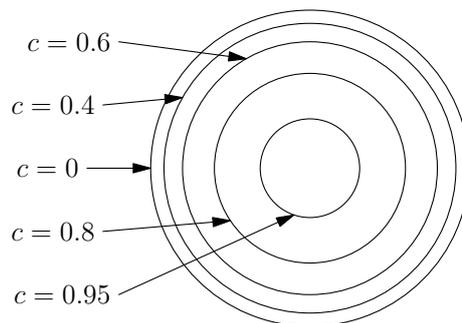


FIGURE 1.3. Niveaulinien im Beispiel 1.2

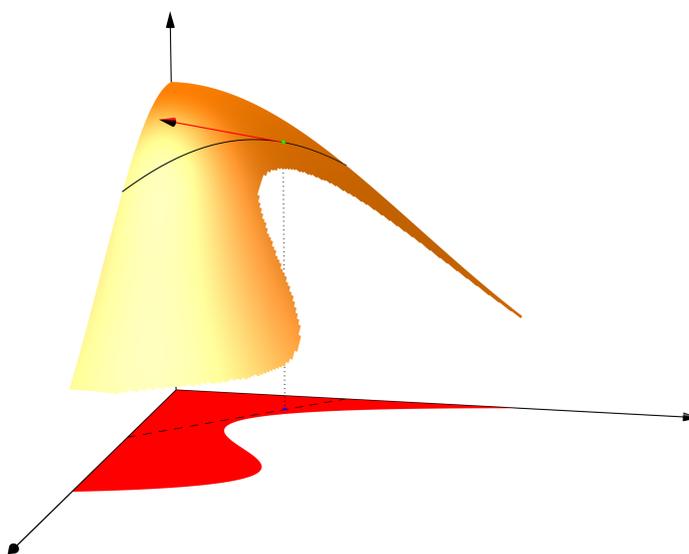


FIGURE 1.4. Richtungsableitung

Da  $D$  offen ist, gilt  $\gamma(t) \in D$  für  $|t| < \delta$ ,  $\delta$  hinreichend klein. Wertet man die Abbildung  $f$  nur auf der Geraden  $g$  aus, ergibt sich eine Funktion  $\varphi$ , die nur mehr vom Geradenparameter  $t$  abhängt und zumindest auf  $(-\delta, \delta)$  definiert ist:

$$\begin{cases} \varphi = f \circ \gamma: (-\delta, \delta) \rightarrow \mathbb{R}, \\ \varphi(t) = f(\gamma(t)) = f(x_0 + t\nu). \end{cases}$$

Es ist sinnvoll, die Differenzierbarkeit von  $\varphi$  an der Stelle  $t = 0$  zu untersuchen. Existiert  $\varphi'(0)$ , d.h. existiert der Grenzwert

$$\varphi'(0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (f(x_0 + t\nu) - f(x_0)),$$

dann bedeutet  $\varphi'(0)$  offenbar die Änderungsrate von  $f$  an der Stelle  $x_0$  in Richtung  $\nu$ . Dies motiviert folgenden Begriff:

DEFINITION 2.1. Es sei  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $D \subset \mathbb{R}^n$  offen,  $x_0 \in D$  und  $\nu \in \mathbb{R}^n$ ,  $\|\nu\| = 1$ .

1.) Die Abbildung  $f$  besitzt in  $x_0$  eine **Richtungsableitung** in Richtung  $\nu$ , wenn

der Grenzwert

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (f(x_0 + t\nu) - f(x_0))$$

existiert. Die Richtungsableitung von  $f$  an der Stelle  $x_0$  in Richtung  $\nu$  wird mit

$$\frac{\partial f}{\partial \nu}(x_0)$$

bezeichnet.

2.) Die speziellen Richtungsableitungen für  $\nu = e_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , heißen **partielle Ableitungen** 1. Ordnung (nach der Variablen  $x_i$ ) an der Stelle  $x_0$ . Man schreibt

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) \quad \text{oder auch} \quad f_{x_i}(x_0).$$

Durch die Normierung des Richtungsvektors wird sichergestellt, daß  $\frac{\partial f}{\partial \nu}(x_0)$  nur von der Richtung und nicht von der Länge von  $\nu$  abhängt. Ersetzt man nämlich  $\nu$  durch  $\nu_s = s\nu$ ,  $s \neq 0$ , ergibt der Grenzwert des Differenzenquotienten

$$\frac{\partial f}{\partial \nu_s}(x_0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (f(x_0 + ts\nu) - f(x_0)) = s \lim_{st \rightarrow 0} \frac{1}{st} (f(x_0 + ts\nu) - f(x_0)) = s \frac{\partial f}{\partial \nu}(x_0)$$

BEISPIEL 2.1. Es sei  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben durch

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^4}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Wir untersuchen die Existenz von Richtungsableitungen von  $f$  in  $(0, 0)$  in eine Richtung  $\nu = (\nu_1, \nu_2)$  mit  $\nu_1^2 + \nu_2^2 = 1$ . Die Gerade  $g$  durch  $(0, 0)$  mit Richtung  $\nu$  ist durch  $\gamma(t) = t\nu$  gegeben. Wertet man  $f$  auf  $g$  aus, erhält man

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= (f \circ \gamma)(t) = f(t\nu_1, t\nu_2) \\ &= \frac{t\nu_1(t\nu_2)^2}{(t\nu_1)^2 + (t\nu_2)^4} = \frac{t\nu_1\nu_2^2}{\nu_1^2 + t^2\nu_2^4}. \end{aligned}$$

Somit ergibt sich für die Richtungsableitung

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \nu}(0, 0) &= \varphi'(0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (\varphi(t) - \varphi(0)) \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\nu_1\nu_2^2}{\nu_1^2 + t^2\nu_2^4} = \begin{cases} \frac{\nu_2^2}{\nu_1}, & \nu_1 \neq 0, \\ 0, & \nu_1 = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Die Funktion  $f$  ist aber nicht stetig in  $(0, 0)$ ! Es gilt nämlich (trivialerweise)

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x, 0) = 0,$$

aber auch

$$\lim_{y \rightarrow 0} f(y^2, y) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y^4}{2y^4} = \frac{1}{2}.$$

(Diese Art der Annäherung an den Ursprung wird nahegelegt, wenn man die Niveaulinie von  $f$  zum Wert  $c = \frac{1}{2}$  betrachtet). Man beachte, daß die Unstetigkeit

von  $f$  in  $(0, 0)$  nicht durch die Annäherung an den Ursprung entlang einer Geraden aufgedeckt werden kann. Es gilt nämlich

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t\nu_1, t\nu_2) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t\nu_1\nu_2^2}{\nu_1^2 + t^2\nu_2^2} = 0 = f(0, 0).$$

Bei der Funktion im obigen Beispiel existieren in  $(0, 0)$  sämtliche Richtungsableitungen, obwohl  $f$  in  $(0, 0)$  nicht einmal stetig ist. Dies deutet darauf hin, daß auf die bloße Existenz der Richtungsableitungen allein kein vernünftiger Differenzierbarkeitsbegriff für Funktionen in mehreren Veränderlichen aufgebaut werden kann. Eine differenzierbare Funktion sollte ja zumindest stetig sein.

Besonders einfach sind die partiellen Ableitungen 1. Ordnung zu berechnen. Es sei  $x_0 = (\xi_1^0, \dots, \xi_n^0)$ . Nach Definition 2.1 gilt für  $1 \leq i \leq n$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (f(x_0 + te_i) - f(x_0)) \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (f(\xi_1^0, \dots, \xi_{i-1}^0, \xi_i^0 + t, \xi_{i+1}^0, \dots, \xi_n^0) - f(\xi_1^0, \dots, \xi_{i-1}^0, \xi_i^0, \xi_{i+1}^0, \dots, \xi_n^0)). \end{aligned}$$

Die partielle Ableitung  $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)$  stimmt also mit der üblichen Ableitung der Funktion in einer Veränderlichen  $x \rightarrow f(\xi_1^0, \dots, \xi_{i-1}^0, x, \xi_{i+1}^0, \dots, \xi_n^0)$  überein (alle Variablen  $\xi_j$  ausgenommen  $\xi_i$  werden bei dem Wert  $\xi_j^0$  "eingefroren").

**BEISPIEL 2.2.** Die partiellen Ableitungen 1. Ordnung der Funktion  $(x, y, z) \rightarrow f(x, y, z) = xy^2 \sin(2x - 3y)$  ergeben sich durch Anwendung der üblichen Differentiationsregeln

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) &= y^2 \sin(2x - 3y) + 2xy^2 \cos(2x - 3y), \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) &= 2xy \sin(2x - 3y) - 3xy^2 \cos(2x - 3y), \\ \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) &= 0. \end{aligned}$$

Die Existenz der partiellen Ableitungen ist eine sehr schwache Forderung an eine Funktion in mehreren Veränderlichen:

**BEISPIEL 2.3.** Es sei  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben durch  $f(x, 0) = f(0, y) = 1$  und sonst beliebig. Da  $f$  auf den Achsen konstant ist, folgt

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0,$$

unabhängig vom Verhalten der Funktion im Inneren der Quadranten.

Der geeignete Differenzierbarkeitsbegriff für Funktionen in mehreren Veränderlichen wird in der Analysis 2 entwickelt. Wir merken hier nur an, daß die Existenz und Stetigkeit aller partiellen Ableitungen 1. Ordnung die (stetige) Differenzierbarkeit von  $f$  nach sich zieht.

### 3. Der Gradient

DEFINITION 3.1. Die Abbildung  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $D \subset \mathbb{R}^n$  offen, besitze in  $x_0 \in D$  sämtliche partielle Ableitungen 1. Ordnung. Man nennt den Spaltenvektor

$$\nabla f(x_0) \equiv \text{grad } f(x_0) := \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0) \end{pmatrix}$$

den **Gradient** von  $f$  an der Stelle  $x_0$ .

Das Symbol  $\nabla f(x_0)$  wird gelegentlich auch "Nabla  $f$ " gelesen.

BEMERKUNG 3.1. Besitzt  $f$  an jeder Stelle  $x \in D$  alle partielle Ableitungen 1. Ordnung, kann man den Gradienten als Abbildung

$$\nabla f: D \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad x \rightarrow \nabla f(x)$$

definieren. Der Gradient von  $f$  ist also ein Beispiel einer **vektorwertigen Funktion**. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit haben wir bisher nur skalare Funktionen betrachtet, da man zeigen kann, daß eine vektorwertige Funktion genau dann einen Grenzwert hat, wenn jede Koordinatenfunktion einen Grenzwert besitzt. Sei also  $D \subset \mathbb{R}^n$  offen und  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  ein Häufungspunkt von  $D$ ,

$$F: D \rightarrow \mathbb{R}^m, \quad F = (f_1, \dots, f_m),$$

dann existiert

$$\lim_{x \rightarrow x_0} F(x)$$

genau dann, wenn für jedes  $1 \leq i \leq m$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f_i(x)$$

existiert. Es gilt dann

$$\lim_{x \rightarrow x_0} F(x) = \begin{pmatrix} \lim_{x \rightarrow x_0} f_1(x) \\ \vdots \\ \lim_{x \rightarrow x_0} f_m(x) \end{pmatrix}$$

Eine vektorwertige Funktion ist daher genau dann stetig, wenn jede ihrer Koordinatenfunktionen stetig ist. Auch der Begriff der Richtungsableitung kann auf vektorwertige Funktionen übertragen werden, indem man ihn auf jede Koordinatenfunktion anwendet.

Ist der Gradient von  $f$  in  $x_0$  stetig, kann man sämtliche Richtungsableitungen von  $f$  an der Stelle  $x_0$  bequem durch den Gradienten ausdrücken:

SATZ 3.1. *Es sei  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $D \subset \mathbb{R}^n$  offen,  $x_0 \in D$ . Ist  $\nabla f$  stetig in  $x_0$ , dann existieren sämtliche Richtungsableitungen an der Stelle  $x_0$  und es gilt*

$$\frac{\partial f}{\partial \nu}(x_0) = \langle \nabla f(x_0), \nu \rangle$$

für jeden Richtungsvektor  $\nu \in \mathbb{R}^n$ .

Das Symbol  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  bezeichnet das Standardskalarprodukt in  $\mathbb{R}^n$ .

PROOF. Wir deuten den Beweis dieser Beziehung im  $\mathbb{R}^2$  an und setzen  $x_0 = (\xi_0, \eta_0)$ ,  $\nu = (h, k)$  ( $h^2 + k^2 = 1$ ). Wir betrachten zuerst die Differenz

$$\begin{aligned} f(x_0 + t\nu) - f(x_0) &= f(\xi_0 + th, \eta_0 + tk) - f(\xi_0, \eta_0) \\ &= (f(\xi_0 + th, \eta_0 + tk) - f(\xi_0, \eta_0 + tk)) + (f(\xi_0, \eta_0 + tk) - f(\xi_0, \eta_0)) \\ &\stackrel{(*)}{=} f_\xi(\xi_t, \eta_0 + tk)th + f_\eta(\xi_0, \eta_t)tk, \end{aligned}$$

wobei in (\*) der Mittelwertsatz angewendet wurde und  $\xi_t$  bzw.  $\eta_t$  geeignete Zwischenstellen bezeichnen, welche zwischen  $\xi_0$  und  $\xi_0 + th$  bzw. zwischen  $\eta_0$  und  $\eta_0 + tk$  liegen. Somit folgt für den Differenzenquotienten

$$\frac{1}{t}(f(x_0 + t\nu) - f(x_0)) = f_\xi(\xi_t, \eta_0 + tk)h + f_\eta(\xi_0, \eta_t)k.$$

Wegen der Stetigkeit der rechten Seite an der Stelle  $x_0$ , ergibt der Grenzwert für  $t \rightarrow 0$

$$\frac{\partial f}{\partial \nu}(x_0) = f_\xi(\xi_0, \eta_0)h + f_\eta(\xi_0, \eta_0)k = \langle \nabla f(x_0), \nu \rangle,$$

(man beachte  $\lim_{t \rightarrow 0} \xi_t = \xi_0$ ,  $\lim_{t \rightarrow 0} \eta_0 + tk = \eta_0$  und  $\lim_{t \rightarrow 0} \eta_t = \eta_0$ ). □

BEISPIEL 3.1. Man berechne die Richtungsableitung von  $(x, y) \rightarrow f(x, y) = ye^x + xe^y$ ,  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , in die Richtung  $\nu = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1)$  im Ursprung.

Wir berechnen zuerst den Gradienten von  $f$  in  $(0, 0)$ :

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} ye^x + e^y \\ e^x + xe^y \end{pmatrix}, \quad \nabla f(0, 0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Man begründe die Existenz der partiellen Ableitungen und die Stetigkeit des Gradienten ohne Rechnung. Wegen der Stetigkeit des Gradienten folgt

$$\frac{\partial f}{\partial \nu}(0, 0) = \langle \nabla f(0, 0), \nu \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \sqrt{2}.$$

Aus Satz 3.1 ergibt sich folgende Interpretation des Gradienten. Mit Hilfe der Ungleichung von Cauchy–Schwarz erhält man

$$\left| \frac{\partial f}{\partial \nu}(x_0) \right| = |\langle \nabla f(x_0), \nu \rangle| \leq \|\nabla f(x_0)\| \|\nu\| = \|\nabla f(x_0)\|,$$

also

$$-\|\nabla f(x_0)\| \leq \frac{\partial f}{\partial \nu}(x_0) \leq \|\nabla f(x_0)\|.$$

Die Änderungsrate der Funktionswerte von  $f$  in  $x_0$  in jede Richtung  $\nu$  wird demnach durch  $\|\nabla f(x_0)\|$  beschränkt. Gleichheit wird offenbar für die Richtung des Gradienten

$$\nu = \frac{\nabla f(x_0)}{\|\nabla f(x_0)\|}$$

angenommen. Für diese Richtung gilt nämlich

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial \nu}(x_0) &= \left\langle \nabla f(x_0), \frac{\nabla f(x_0)}{\|\nabla f(x_0)\|} \right\rangle = \frac{1}{\|\nabla f(x_0)\|} \langle \nabla f(x_0), \nabla f(x_0) \rangle \\ &= \frac{1}{\|\nabla f(x_0)\|} \|\nabla f(x_0)\|^2 = \|\nabla f(x_0)\|.\end{aligned}$$

Wir fassen zusammen

**FOLGERUNG 3.1.** *Der Gradient von  $f$  an der Stelle  $x_0$  gibt die Richtung des stärksten Anstieges der Funktionswerte von  $f$  in  $x_0$  an,  $-\nabla f(x_0)$  weist in die Richtung des stärksten Abstieges.*

Für den Umgang mit Gradienten gelten die üblichen Ableitungsregeln:

**SATZ 3.2.** *Existieren alle partiellen Ableitungen 1. Ordnung der Funktionen  $f, g: D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $D \subset \mathbb{R}^n$  offen, dann gilt*

- (1)  $\nabla(f + g) = \nabla f + \nabla g$ .
- (2)  $\nabla(\lambda f) = \lambda \nabla f$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ .
- (3)  $\nabla(fg) = g \nabla f + f \nabla g$ .
- (4)  $\nabla\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{1}{g^2}(g \nabla f - f \nabla g)$  falls  $g \neq 0$ .

Abschließend gehen wir noch kurz auf den Zusammenhang zwischen Gradient und Ableitung ein: Wir erinnern daran, daß die Differenzierbarkeit einer Funktion  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $I$  ein Intervall, an einer Stelle  $x_0 \in I$  auch dadurch charakterisiert werden kann, daß in der Entwicklung

$$(*) \quad f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + r(h)$$

der Fehler  $r$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{r(h)}{h} = 0$$

erfüllt. Diese Charakterisierung kann auf Funktionen in mehreren Veränderlichen verallgemeinert werden. Da  $h$  ein Vektor ist, muß  $f'(x_0)$  als lineare Abbildung von  $\mathbb{R}^n$  nach  $\mathbb{R}$  aufgefasst werden, sodaß  $f'(x_0)h$  eine reelle Zahl ist. Eine Abbildung  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $D \subset \mathbb{R}^n$  offen, ist daher in  $x_0 \in D$  differenzierbar, wenn es eine lineare Abbildung  $L: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , eine  $\delta$ -Umgebung  $K(x_0, \delta)$  von  $x_0$  und eine Abbildung  $r: K(x_0, \delta) \rightarrow \mathbb{R}$  gibt, sodaß

$$\begin{aligned}f(x_0 + h) &= f(x_0) + Lh + r(h), \\ \lim_{h \rightarrow 0} \frac{r(h)}{\|h\|} &= 0\end{aligned}$$

gelten. Anstelle von  $L$  schreibt man  $f'(x_0)$  oder  $Df(x_0)$ . Die lineare Abbildung  $f'(x_0)$  wird durch eine  $1 \times n$  Matrix beschrieben. Wenn die Funktion  $f$  in  $x_0$  differenzierbar ist, dann existieren die partiellen Ableitungen 1. Ordnung in  $x_0$  und die Matrix der linearen Abbildung  $f'(x_0)$  bezüglich der kanonischen Basis in  $\mathbb{R}^n$  und  $\mathbb{R}$  wird gerade durch den transponierten Gradienten gegeben:

$$f'(x_0) = \nabla f(x_0)^T.$$

Die Entwicklung (\*) bedeutet daher ( $h = (h_1, \dots, h_n)$ )

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) h_i + r(h).$$

Vollkommen analog wird die Differenzierbarkeit einer vektorwertigen Funktion  $f: D \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $f = (f_1, \dots, f_m)$ , definiert. Es ist dann  $f'(x_0)$  eine lineare Abbildung von  $\mathbb{R}^n$  nach  $\mathbb{R}^m$ , die bezüglich der kanonischen Basen in  $\mathbb{R}^n$  bzw.  $\mathbb{R}^m$  durch die  $m \times n$  Matrix

$$f'(x_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_0) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x_0) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(x_0) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(x_0) \end{pmatrix}$$

In den Zeilen von  $f'(x_0)$  stehen also gerade die transponierten Gradienten (also die Ableitungen) der einzelnen Koordinatenfunktionen. Die Matrix von  $f'(x_0)$  wird auch **Jacobimatrix** von  $f$  genannt. Auch hier zeigt sich, daß eine vektorwertige Funktion genau dann differenzierbar ist, wenn jede Koordinatenfunktion differenzierbar ist, vgl Bemerkung 3.1.

Analog zu Funktionen in einer Veränderlichen beschreibt die affin lineare Approximation

$$(\dagger) \quad t(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) = f(x_0) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)(\xi_i - \xi_i^0),$$

$x = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ ,  $x_0 = (\xi_1^0, \dots, \xi_n^0)$ , die Gleichung der Tangentialebene an den Graph von  $f$  in  $(x_0, f(x_0))$ .

**BEISPIEL 3.2.** Wir verwenden  $(\dagger)$  um eine Abschätzung für  $\frac{\sqrt[3]{123}}{\sqrt{37}}$  zu berechnen. Zu diesem Zweck betrachten wir die Funktion  $(x, y) \rightarrow f(x, y) = x^{1/3}y^{-1/2}$  und beachten  $f(125, 36) = \frac{5}{6}$ ,  $f_x(x, y) = \frac{1}{3}x^{-2/3}y^{-1/2}$ ,  $f_y(x, y) = -\frac{1}{2}x^{1/3}y^{-3/2}$ , also  $f_x(125, 36) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{25} \cdot \frac{1}{6}$ ,  $f_y(125, 36) = -\frac{1}{2} \cdot 5 \cdot \frac{1}{6^3}$ . Es folgt

$$f(123, 37) \sim f(125, 36) + f_x(125, 36)(123 - 125) + f_y(125, 36)(37 - 36) = 0.8173.$$

Ein Taschenrechner ergibt das Resultat 0.8176.

#### 4. Mittelwertsatz, Kettenregel

Ohne Beweis zitieren wir folgende Variante des Mittelwertsatzes:

**SATZ 4.1 (Mittelwertsatz).** Es sei  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $D \subset \mathbb{R}^n$  offen,  $\nabla f$  stetig auf  $D$  und  $x, y \in D$ . Liegt auch die Verbindungsstrecke  $\overline{xy}$  in  $D$ , dann gibt es eine Stelle  $\xi$  zwischen  $x$  und  $y$  mit

$$f(x) - f(y) = \langle \nabla f(\xi), x - y \rangle$$

**DEFINITION 4.1.** Eine nicht leere offene Teilmenge  $D \subset \mathbb{R}^n$  heißt **zusammenhängend**, wenn je zwei Punkte in  $D$  durch einen Polygonzug verbunden werden können, der zur Gänze in  $D$  liegt. Eine offene zusammenhängende Menge nennt man **Gebiet**.

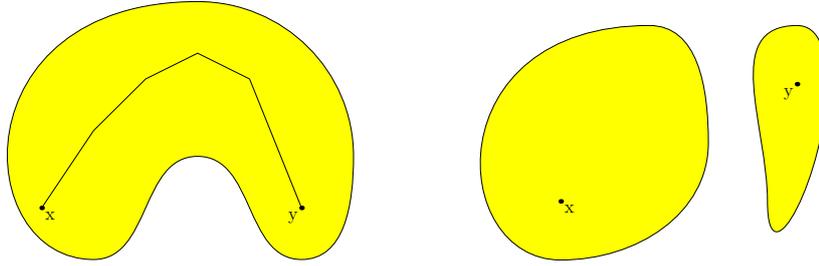


FIGURE 1.5. Zusammenhängende und nicht zusammenhängende Mengen

FOLGERUNG 4.1. *Es sei  $D \subset \mathbb{R}^n$  offen und zusammenhängend.*

1.) *Gilt*

$$\nabla f(x) = 0, \quad x \in D,$$

*dann ist  $f$  auf  $D$  konstant.*

2.) *Gilt*

$$\nabla f(x) = \nabla g(x), \quad x \in D,$$

*dann unterscheiden sich  $f$  und  $g$  auf  $D$  nur durch eine Konstante.*

PROOF. Nach Voraussetzung können je zwei Punkte  $x$  und  $y \in D$  durch einen Polygonzug in  $D$

$$x = x_0, x_1, \dots, x_i, \dots, x_n = y$$

verbunden werden. Da somit alle Segmente  $\overline{x_{i-1}x_i}$  in  $D$  liegen, folgt aus dem Mittelwertsatz

$$f(x_i) - f(x_{i-1}) = \langle \nabla f(\xi_i), x_i - x_{i-1} \rangle,$$

wobei  $\xi_i$  zwischen  $x_{i-1}$  und  $x_i$  liegt. Wegen  $\nabla f(\xi_i) = 0$  gilt

$$f(x_i) = f(x_{i-1}), \quad i = 1, \dots, n,$$

und daher auch  $f(x) = f(y)$ . Die zweite Behauptung folgt unmittelbar aus der ersten.  $\square$

Auf die Voraussetzung des Zusammenhangs kann in beiden Folgerungen nicht verzichtet werden. Es sei auch erwähnt, daß der Mittelwertsatz in der Form einer Gleichheit nicht für vektorwertige Funktionen gilt, da die Zwischenstellen für die einzelnen Koordinatenfunktion im allgemeinen nicht übereinstimmen.

Es sei  $I \subset \mathbb{R}$  ein Intervall. Eine differenzierbare Abbildung  $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^n$  heißt differenzierbare Kurve. Kurven werden in einem späteren Kapitel ausführlich diskutiert.

BEISPIEL 4.1. *Die Abbildung  $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, t)$ , beschreibt eine Schraubenlinie mit der Ganghöhe  $2\pi$ .*

Werten wir eine Funktion  $f$  entlang einer differenzierbaren Kurve aus, deren Bild zur Gänze in  $D$  liegt, folgt aus dem Mittelwertsatz

$$f(\gamma(t+h)) - f(\gamma(t)) = \langle \nabla f(\xi_{t,h}), \gamma(t+h) - \gamma(t) \rangle$$

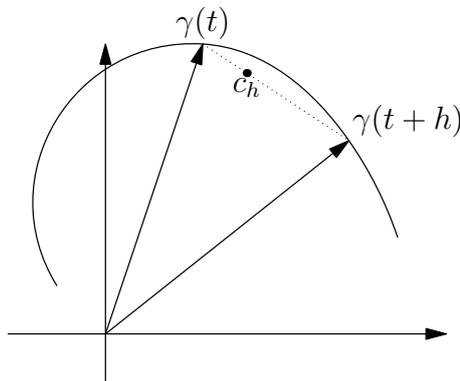


FIGURE 1.6

Dabei bezeichnet  $\xi_{t,h}$  eine Zwischenstelle auf dem Geradensegment  $\overline{\gamma(t)\gamma(t+h)}$ . Man beachte, daß dieses Segment für  $h$  hinreichend klein in  $D$  liegt, da  $D$  offen ist. Es gilt offenbar

$$\lim_{h \rightarrow 0} \xi_{t,h} = \gamma(t)$$

und somit wegen der Stetigkeit von  $\nabla f$  und der Differenzierbarkeit von  $\gamma$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (f(\gamma(t+h)) - f(\gamma(t))) = \langle \nabla f(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle,$$

also

$$\frac{d}{dt} (f \circ \gamma)(t) = \langle \nabla f(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle = f'(\gamma(t)) \gamma'(t).$$

Zusammenfassend wurde folgendes gezeigt.

**SATZ 4.2 (Kettenregel).** *Es sei  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $D \subset \mathbb{R}^n$  offen,  $\nabla f$  stetig auf  $D$ ,  $I \subset \mathbb{R}$  ein Intervall und  $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine stetig differenzierbare Kurve mit  $\gamma(I) \subset D$ . Dann ist auch die Abbildung  $t \rightarrow f(\gamma(t))$  stetig differenzierbar und es gilt*

$$\frac{d}{dt} (f \circ \gamma)(t) = \langle \nabla f(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle.$$

**BEISPIEL 4.2.** *Es sei  $\gamma$  die Schraubenlinie aus Beispiel 4.1 und  $f(x, y, z) = x^2 - y + z^2$ . Dann ist  $\gamma'(t) = (-\sin t, \cos t, 1)$ ,  $f'(x, y, z) = (2x, -1, 2z)$ , also  $f'(\gamma(t)) = (2 \cos t, -1, 2t)$  und somit*

$$\frac{d}{dt} (f \circ \gamma)(t) = (2 \cos t, -1, 2t) \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 1 \end{pmatrix} = -2 \sin t \cos t - \cos t + 2t.$$

Folgende Variante der Kettenregel wird bei Koordinatentransformationen verwendet.

**SATZ 4.3.** *Es sei  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $D \subset \mathbb{R}^n$  offen und  $g: U \rightarrow D$ ,  $U \subset \mathbb{R}^m$  offen. Sind die Gradienten von  $f$  und  $g$  stetig, dann ist die Abbildung  $f \circ g: U \rightarrow \mathbb{R}$  stetig differenzierbar und es gilt für  $1 \leq i \leq m$*

$$\frac{\partial (f \circ g)}{\partial x_i} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial y_k}(g(x)) \frac{\partial g_k}{\partial x_i}(x)$$

Ist  $f$  eine vektorwertige Funktion, wendet man diese Kettenregel auf jede Koordinatenfunktion an.

BEISPIEL 4.3 (Ebene Polarkoordinaten). *Es sei  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  und  $g: (0, \infty) \times (-\pi, \pi)$ ,  $g(r, \varphi) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi)$ . Dann ist*

$$\tilde{f}(r, \varphi) = (f \circ g)(r, \varphi) = f(\underbrace{r \cos \varphi}_x, \underbrace{r \sin \varphi}_y)$$

*Es folgt*

$$\begin{aligned} \frac{\partial(f \circ g)}{\partial r} &= \frac{\partial \tilde{f}}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r}, \\ \frac{\partial(f \circ g)}{\partial \varphi} &= \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \varphi} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \varphi} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{aligned}$$

*(man beachte den in diesem Zusammenhang sinnvollen Mißbrauch der Notation, mit  $x$  und  $y$  sowohl die unabhängigen Variablen von  $f$ , als auch die Koordinatenfunktionen von  $g$  zu bezeichnen). Mit*

$$(1.1) \quad \frac{\partial x}{\partial r} = \cos \varphi \quad \frac{\partial y}{\partial r} = \sin \varphi$$

$$(1.2) \quad \frac{\partial x}{\partial \varphi} = -r \sin \varphi \quad \frac{\partial y}{\partial \varphi} = r \cos \varphi$$

*erhalten wir schließlich*

$$(*) \quad \begin{pmatrix} \tilde{f}_r \\ \tilde{f}_\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_x \cos \varphi + f_y \sin \varphi \\ -f_x r \sin \varphi + f_y r \cos \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -r \sin \varphi & r \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \end{pmatrix}$$

*die partiellen Ableitungen  $f_x, f_y$  sind dabei an der Stelle  $(r \cos \varphi, r \sin \varphi)$  auszuwerten.*

BEISPIEL 4.4. *Es sei  $f(x, y) = x^2 - y^2 + xy$ , also  $f'(x, y) = \nabla f(x, y)^T = (2x + y, -2y + x)$ . Wir berechnen die partiellen Ableitungen von  $\tilde{f}(r, \varphi) = f(r \cos \varphi, r \sin \varphi)$  zuerst mit Hilfe der Kettenregel (\*) und dann direkt. Wendet man die Kettenregel an, rechnet man folgendermaßen:*

$$\begin{aligned} \tilde{f}_r &= (2x + y) \cos \varphi + (-2y + x) \sin \varphi \\ &= (2r \cos \varphi + r \sin \varphi) \cos \varphi + (-2r \sin \varphi + r \cos \varphi) \sin \varphi \\ &= 2r \cos^2 \varphi + r \sin \varphi \cos \varphi - 2r \sin^2 \varphi + r \cos \varphi \sin \varphi \\ &= 2r(\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi + \sin \varphi \cos \varphi) \\ &= 2r \cos 2\varphi + r \sin 2\varphi, \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
 \tilde{f}_\varphi &= -(2x + y)r \sin \varphi + (-2y + x)r \cos \varphi \\
 &= -(2r \cos \varphi + r \sin \varphi)r \sin \varphi + (-2r \sin \varphi + r \cos \varphi)r \cos \varphi \\
 &= -2r^2 \sin \varphi \cos \varphi - r^2 \sin^2 \varphi - 2r^2 \sin \varphi \cos \varphi + r^2 \cos^2 \varphi \\
 &= r^2(\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) - 4r^2 \sin \varphi \cos \varphi \\
 &= r^2 \cos 2\varphi - 2r^2 \sin 2\varphi.
 \end{aligned}$$

Dasselbe Resultat bekommt man in diesem Falle einfacher aus der expliziten Form von  $\tilde{f}$

$$\begin{aligned}
 \tilde{f}(r, \varphi) &= r^2 \cos^2 \varphi - r^2 \sin^2 \varphi + r^2 \sin \varphi \cos \varphi \\
 &= r^2(\cos 2\varphi + \frac{1}{2} \sin 2\varphi),
 \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned}
 \tilde{f}_r &= 2r \cos 2\varphi + r \sin 2\varphi \\
 \tilde{f}_\varphi &= r^2(-2 \sin 2\varphi + \cos 2\varphi).
 \end{aligned}$$

Wir können nun mit Hilfe der Kettenregel eine weitere nützliche Eigenschaft des Gradienten herleiten. Wir beschränken uns auf stetig differenzierbare Funktionen in zwei Veränderlichen und betrachten die Niveaulinie

$$N_c = \{(x, y) \in D : f(x, y) = c\}$$

an einer Stelle  $(x_0, y_0)$  mit  $\nabla f(x_0, y_0) \neq 0$ . Dann ist es möglich, die Niveaulinie in einer Umgebung von  $(x_0, y_0)$  durch eine stetig differenzierbare Kurve  $\gamma: (-\delta, \delta) \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $\gamma(0) = (x_0, y_0)$  darzustellen, d.h. es gilt

$$f(\gamma(t)) = c, \quad t \in (-\delta, \delta),$$

( $\delta$  hinreichend klein). Differenziert man diese Identität, erhält man mit Satz 4.2

$$\langle \nabla f(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle = 0, \quad t \in (-\delta, \delta).$$

Der Gradient von  $f$  ist also an jeder Stelle mit  $\nabla f(x_0, y_0) \neq 0$  orthogonal zur Niveaulinie durch den Punkt  $(x_0, y_0)$ .

## 5. Höhere partielle Ableitungen

Man kann die Überlegungen, welche zu den partiellen Ableitungen erster Ordnung führten, auf die partiellen Ableitungen erster Ordnung selbst anwenden, und erhält die partiellen Ableitungen 2. Ordnung, usw. Man schreibt

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial f}{\partial x_j} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = f_{x_j x_i}.$$

und analog für partielle Ableitungen höherer Ordnung.

**BEISPIEL 5.1.** Wir berechnen die partiellen Ableitungen 2. Ordnung der Funktion  $(x, y) \rightarrow f(x, y) = x^2 + e^x y^3$ .

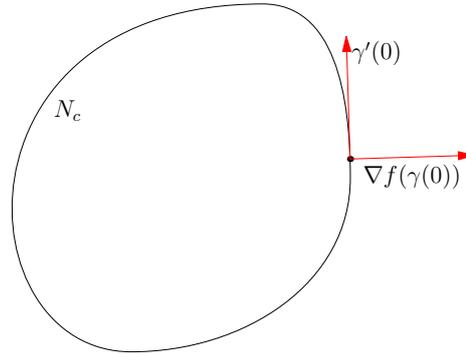


FIGURE 1.7

LÖSUNG. Dazu benötigen wir zuerst die partiellen Ableitungen erster Ordnung:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + e^x y^3 \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 3e^x y^2.$$

Die partiellen Ableitungen 2. Ordnung ergeben sich durch partielles Differenzieren:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= 2 + e^x y^3, & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= 3e^x y^2, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} &= 3e^x y^2, & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= 6e^x y. \end{aligned}$$

□

Bildet man die partiellen Ableitungen der partiellen Ableitungen 2. Ordnung erhält man die partiellen Ableitungen 3. Ordnung:

$$\begin{aligned} f_{xxx} &= e^x y^3, & f_{xxy} &= 3e^x y^2, \\ f_{xyx} &= 3e^x y^2, & f_{xyy} &= 6e^x y, \\ f_{yxx} &= 3e^x y^2, & f_{yxy} &= 6e^x y, \\ f_{yyx} &= 6e^x y, & f_{yyy} &= 6e^x \end{aligned}$$

Eine Funktion in  $n$  Veränderlichen besitzt  $n$  partielle Ableitungen 1. Ordnung,  $n^2$  partielle Ableitungen 2. Ordnung,  $n^3$  partielle Ableitungen 3. Ordnung usw. Die Anzahl der partiellen Ableitungen steigt also mit der Ordnung der Ableitung rasch an. Im speziellen Beispiel fällt jedoch auf, daß sämtliche partielle Ableitung mit derselben Anzahl von Ableitungen nach einer bestimmten Variablen (jedoch in unterschiedlicher Reihenfolge) identisch sind. Dieses Verhalten ist eine Konsequenz des folgenden Satzes, den wir der Einfachheit halber nur für Funktionen in zwei Veränderlichen formulieren:

**SATZ 5.1 (Schwarz).** *Es sei  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $D \subset \mathbb{R}^2$  offen. Sind sowohl  $f$ , als auch die partiellen Ableitungen  $\frac{\partial f}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial f}{\partial y}$ ,  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ ,  $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$  stetig auf  $D$ , dann gilt*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \quad \text{auf } D.$$

Sinngemäß gilt dieser Satz auch für Funktionen in  $n \geq 2$  Veränderlichen und garantiert die Unabhängigkeit der partiellen Ableitungen  $k$ -ter Ordnung von der Reihenfolge der einzelnen Ableitungen.

## 6. Lokale Extrema

Eine Abbildung  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $D \subset \mathbb{R}^n$ , nimmt an einer Stelle  $x_0 \in D$  ein **lokales Maximum (lokales Minimum)** an, wenn es eine  $\delta$ -Umgebung von  $x_0$ ,  $K(x_0, \delta)$ , gibt, mit

$$f(x) \leq f(x_0) \quad (f(x) \geq f(x_0)), \quad x \in K(x_0, \delta) \cap D.$$

Gilt diese Relation auf  $D$ , spricht man von einem **globalen Maximum (Minimum)**. Unabhängig von Maximum oder Minimum spricht man von einem (lokalen, globalen) **Extremum**. Der Satz von Weierstraß besitzt folgende nichttriviale Verallgemeinerung.

**SATZ 6.1.** *Eine stetige Funktion nimmt auf jeder nicht leeren, abgeschlossenen und beschränkten Teilmenge ihres Definitionsbereiches das globale Maximum und das globale Minimum an.*

Da die Untersuchung des qualitativen Verhaltens einer Funktion in mehreren Veränderlichen in den Randpunkten des Definitionsbereiches wesentlich schwieriger ist als bei Funktionen in einer Veränderlichen, beschränken wir uns vorerst auf den Fall, daß ein lokales Extremum in einem **inneren** Punkt angenommen wird. Es sei also  $D \subset \mathbb{R}^n$  offen,  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  und  $x^* = (\xi_1^*, \dots, \xi_n^*) \in D$ . Nimmt  $f$  in  $x^*$  beispielsweise ein lokales Maximum an, dann gilt

$$(*) \quad f(x) \leq f(x^*), \quad x \in K(x^*, \delta)$$

für  $\delta > 0$  hinreichend klein. Insbesondere gilt  $(*)$  für alle  $x = (\xi_1^* \dots, \xi_{i-1}^*, \xi, \xi_{i+1}^*, \dots, \xi_n^*) \in K(x^*, \delta)$ , d.h. für die Schnittfunktionen

$$\xi \rightarrow h_i(\xi) = f(\xi_1^* \dots, \xi_{i-1}^*, \xi, \xi_{i+1}^*, \dots, \xi_n^*)$$

gilt

$$h_i(\xi) \leq f(x^*) \quad \text{für } |\xi - \xi_i^*| \leq \delta,$$

$1 \leq i \leq n$ . Somit nehmen die Schnittfunktionen  $h_i$  an der Stelle  $\xi_i^*$  ein lokales Maximum an, denn es gilt  $h_i(\xi_i^*) = f(x^*)$ . Existieren die partiellen Ableitungen  $\frac{\partial f}{\partial \xi_i}$  von  $f$ , dann sind die Schnittfunktionen differenzierbar und es muß

$$h_i'(\xi_i^*) = 0, \quad 1 \leq i \leq n,$$

gelten. Wegen

$$\begin{aligned} h_i'(\xi_i^*) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (h_i(\xi_i^* + t) - h_i(\xi_i^*)) \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (f(\xi_1^* \dots, \xi_{i-1}^*, \xi_i^* + t, \xi_{i+1}^*, \dots, \xi_n^*) - f(\xi_1^* \dots, \xi_{i-1}^*, \xi_i^*, \xi_{i+1}^*, \dots, \xi_n^*)) = \frac{\partial f}{\partial \xi_i}(x^*) \end{aligned}$$

folgt

$$\frac{\partial f}{\partial \xi_i}(x^*) = 0, \quad 1 \leq i \leq n.$$

Anschaulich bedeutet dies, daß in einem lokalen Extremum die Tangentialebene an den Graph von  $f$  parallel zur  $(\xi_1 \dots, \xi_n)$  Ebene ist. Wir haben somit folgende *notwendige* Optimalitätsbedingung hergeleitet:

**SATZ 6.2.** *Besitzt eine Abbildung  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $D \subset \mathbb{R}^n$  offen, in  $x^* \in D$  ein lokales Extremum, dann existiert entweder  $\nabla f(x^*)$  nicht oder es gilt  $\nabla f(x^*) = 0$ .*

*Man nennt  $x^* \in D$  eine **kritische Stelle**, wenn  $\nabla f(x^*)$  nicht existiert oder  $\nabla f(x^*) = 0$  ist.*

Eine (stetig) differenzierbare Funktion kann somit im Inneren des Definitionsbereiches nur in einer Nullstelle des Gradienten ein lokales Extremum annehmen, aber nicht jede Nullstelle des Gradienten führt zu einem lokalen Extremum.

**BEISPIEL 6.1.** *Der Gradient von  $(x, y) \rightarrow f(x, y) = x^2 - y^2$  ist gegeben durch  $\nabla f(x, y) = (2x, -2y)^T$ . Die einzige Nullstelle von  $\nabla f$  liegt im Ursprung. Allerdings nimmt die Abbildung  $y \rightarrow f(0, y)$  in  $y = 0$  das Maximum an, die Abbildung  $x \rightarrow f(x, 0)$  nimmt in  $x = 0$  das Minimum an. Somit kann  $f$  in  $(0, 0)$  kein lokales Extremum besitzen. Es liegt ein sogenannter Sattelpunkt vor.*

Allgemein nennt man eine kritische Stelle  $x^*$  einen **Sattelpunkt**, wenn es zwei unterschiedliche Gerade  $g_1$  und  $g_2$  durch  $x^*$  gibt, sodaß  $f|_{g_1}$  in  $x^*$  ein lokales Maximum und  $f|_{g_2}$  ein lokales Minimum annimmt.

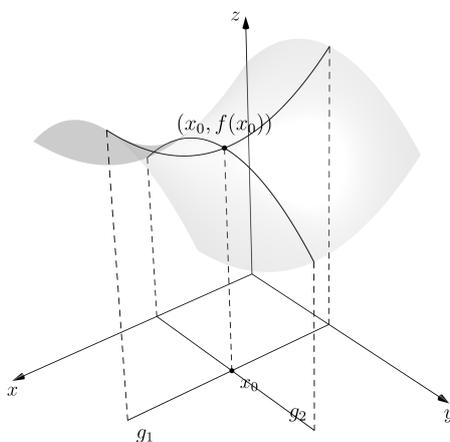


FIGURE 1.8. Sattelpunkt

Wie bei Funktionen in einer Veränderlichen kann man das qualitative Verhalten von  $f$  in einer kritischen Stelle aus den zweiten (partiellen) Ableitungen ablesen. Der Einfachheit halber beschränken wir uns auf Funktionen in zwei Veränderlichen.

**SATZ 6.3.** *Die Funktion  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $D \subset \mathbb{R}^2$  offen, habe stetige partielle Ableitungen 1. und 2. Ordnung und es sei  $\nabla f(x^*) = 0$ . Ferner sei  $\mathcal{H}_f(x^*)$  die symmetrische*

Matrix

$$\mathcal{H}_f(x^*) = \begin{pmatrix} f_{xx}(x^*) & f_{xy}(x^*) \\ f_{yx}(x^*) & f_{yy}(x^*) \end{pmatrix}$$

(**Hesse Matrix**). Dann gilt

- (1) Ist  $\det \mathcal{H}_f(x^*) < 0$ , dann liegt in  $x^*$  ein Sattelpunkt vor.
- (2) Ist  $\det \mathcal{H}_f(x^*) > 0$  und  $f_{xx}(x^*) > 0$ , dann liegt in  $x^*$  ein lokales Minimum vor.
- (3) Ist  $\det \mathcal{H}_f(x^*) > 0$  und  $f_{xx}(x^*) < 0$ , dann liegt in  $x^*$  ein lokales Maximum vor.
- (4) Im Fall  $\det \mathcal{H}_f(x^*) = 0$  ist keine Aussage möglich.

BEISPIEL 6.2. Wir untersuchen die Funktion  $(x, y) \rightarrow f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$  auf  $D = \mathbb{R}^2$ . Ihr Gradient ist

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 3x^2 - 3y \\ 3y^2 - 3x \end{pmatrix}.$$

Die Bedingung  $\nabla f(x, y) = 0$  ist gleichwertig mit

$$x^2 - y = 0, \quad \text{und} \quad y^2 - x = 0,$$

d.h. es muß  $x \geq 0$  und  $y \geq 0$  gelten. Weiters folgt aus  $y = x^2$

$$x^4 - x = 0$$

also  $x = 0$  und  $x = 1$ . Dies ergibt die beiden kritischen Punkte

$$P(0, 0) \quad \text{und} \quad Q(1, 1).$$

Für die Hesse Matrix erhält man

$$\mathcal{H}_f(x, y) = \begin{pmatrix} 6x & -3 \\ -3 & 6y \end{pmatrix}, \quad \det(\mathcal{H}_f(x, y)) = 36xy - 9,$$

also

$$\det(\mathcal{H}_f(0, 0)) = -9, \quad \text{und} \quad \det(\mathcal{H}_f(1, 1)) = 27$$

Im Ursprung liegt daher ein Sattelpunkt vor, wegen  $f_{xx}(1, 1) = 6 > 0$  liegt in  $(1, 1)$  ein lokales Minimum vor.

**6.1. Lineare Regression.** Als Anwendung greifen wir noch einmal die lineare Regression auf. Gegeben sei also ein Datensatz  $(x_i, y_i)$ ,  $i = 1, \dots, m$ ,  $m \geq 2$ , der an ein (affin) lineares Modell

$$f(x, a, b) = ax + b$$

angepasst werden soll. Als Maß für die Güte der Anpassung wird häufig

$$S(a, b) = \sum_{i=1}^m (f(x_i, a, b) - y_i)^2 = \sum_{i=1}^m (ax_i + b - y_i)^2$$

genommen (**Methode der kleinsten Fehlerquadrate**). Die Parameter  $(a, b)$  sind dann so zu bestimmen, daß der Modellfehler  $S(a, b)$  möglichst klein wird. Offenbar

hat  $S: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  stetige partielle Ableitungen und zwar

$$S_a(a, b) = 2 \sum_{i=1}^m (ax_i + b - y_i)x_i = 2(a \sum_{i=1}^m x_i^2 + b \sum_{i=1}^m x_i - \sum_{i=1}^m x_i y_i)$$

$$S_b(a, b) = 2 \sum_{i=1}^m (ax_i + b - y_i) = 2(a \sum_{i=1}^m x_i + mb - \sum_{i=1}^m y_i).$$

Die notwendige Optimalitätsbedingung  $\nabla S(a, b) = 0$  ergibt das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^m x_i^2 & \sum_{i=1}^m x_i \\ \sum_{i=1}^m x_i & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^m x_i y_i \\ \sum_{i=1}^m y_i \end{pmatrix}$$

mit der Lösung

$$a^* = \frac{m \sum_{i=1}^m x_i y_i - \sum_{i=1}^m x_i \sum_{j=1}^m y_j}{m \sum_{i=1}^m x_i^2 - (\sum_{i=1}^m x_i)^2}, \quad b^* = \frac{1}{m} \left( \sum_{i=1}^m y_i - a^* \sum_{i=1}^m x_i \right)$$

Wir erinnern daran, daß in der Ungleichung von Cauchy-Schwarz  $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$  die Gleichheit genau dann steht, wenn  $x$  und  $y$  linear abhängig sind. Setzt man  $x = (x_1, \dots, x_m)$  und  $y = (1, \dots, 1)$ , gilt  $m \sum_{i=1}^m x_i^2 - (\sum_{i=1}^m x_i)^2 = 0$  genau dann, wenn  $x_i = \lambda$  für  $i = 1, \dots, m$  gilt. Dies ist nicht möglich, da die Messungen an verschiedenen Stellen  $x_i$  vorgenommen werden. Für die Hesse Matrix von  $S$  findet man

$$\mathcal{H}_S(a, b) = 2 \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^m x_i^2 & \sum_{i=1}^m x_i \\ \sum_{i=1}^m x_i & m \end{pmatrix}$$

Die vorangehende Überlegung zeigt auch  $\det(\mathcal{H}_S(a, b)) > 0$ . Wegen  $S_{aa} > 0$  liegt daher in  $(a^*, b^*)$  ein lokales Minimum vor. Da es keine weiteren lokalen Extrema gibt, nimmt  $S$  in  $(a^*, b^*)$  das globale Minimum an. Man nennt die Gerade mit den Parametern  $(a^*, b^*)$  auch **Ausgleichsgerade**. Der Ansatz der kleinsten Fehlerquadrate kann leicht an andere Modellfunktionen angepaßt werden.

## 7. Optimierungsprobleme mit Nebenbedingungen

**BEISPIEL 7.1.** Man bestimme das Maximum von  $(x, y) \rightarrow f(x, y) = x^2 - y^2$  auf dem Einheitskreis. Zu bestimmen ist also das Maximum der Funktion  $f$  unter der Gleichungsnebenbedingung  $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$ .

Man kann gelegentlich die Nebenbedingung benützen, um eine der beiden Variablen, z.B.  $y$  durch  $x$  auszudrücken. Setzt man also  $y^2 = 1 - x^2$  in  $f$  ein, ist das Maximum der reduzierten Funktion

$$\tilde{f}(x) = 2x^2 - 1, \quad \text{für } x \in [-1, 1]$$

zu bestimmen. Dieses wird in  $x = \pm 1$  angenommen. Man beachte, daß das Maximum in einem Randpunkt des sinnvollen Definitionsbereiches von  $\tilde{f}$  angenommen wird. Aus der Nebenbedingung folgt dann  $y = 0$ . Das Maximum wird daher an den Stellen  $(\pm 1, 0)$  angenommen, es ist dort  $f(\pm 1, 0) = 1$ .

Es ist nicht immer zweckmäßig oder möglich, die Gleichungsnebenbedingung nach einer der Variablen aufzulösen. In diesen Fällen kann man eine Methode versuchen, welche wir durch eine graphische Lösung des Beispiels veranschaulichen. Wir bemerken, daß die Niveaulinien von  $f$

$$N_c = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - y^2 = c\}, \quad c \in \mathbb{R}$$

gleichseitige Hyperbeln sind. Da  $f$  und  $g$  gerade Funktionen in  $x$  sind, können wir uns auf die rechte Halbebene  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0\}$  beschränken.

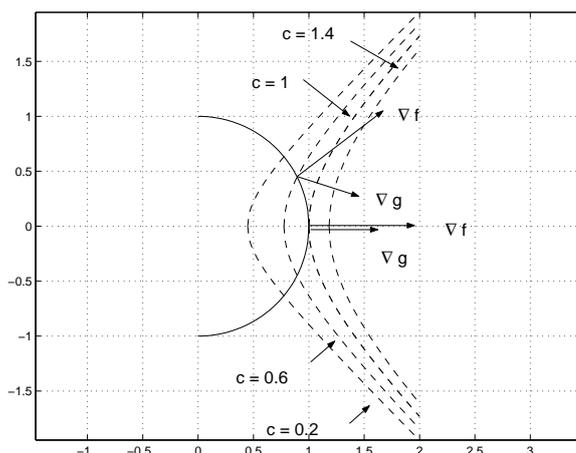


FIGURE 1.9. Lagrange Multiplikator Regel

Aus Abbildung 7 erkennt man, daß  $f$  größer wird, wenn man die Niveaulinien nach rechts verschiebt. Eine Lösung kann es jedoch nur geben, wenn der Durchschnitt einer Niveaulinie mit dem Einheitskreis nicht leer ist. Dies ist für  $c > 1$  nicht mehr der Fall. Das gesuchte Maximum liegt also an der Stelle  $(1, 0)$  (aus Symmetriegründen auch in  $(-1, 0)$ ), wo die Niveaulinie  $N_1$  den Einheitskreis gerade noch berührt. Der Einheitskreis kann als Niveaulinie

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : g(x, y) = 0\}$$

aufgefaßt werden. Da sich die beiden Niveaulinien in  $(1, 0)$  berühren, haben sie eine gemeinsame Tangente. Da der Gradient stets orthogonal zu der Niveaulinie an der betreffenden Stelle ist, müssen in  $(1, 0)$  die Gradienten  $\nabla f$  und  $\nabla g$  kollinear sein. Diese Anschauung führt auf folgendes allgemeine Prinzip.

**SATZ 7.1 (Lagrange Multiplikator Regel).** *Es seien  $f, g: D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $D \subset \mathbb{R}^n$  offen, stetig differenzierbar und  $f$  besitze in  $x_0$  ein lokales Extremum unter der Nebenbedingung  $g(x) = 0$ . Ist  $\nabla g(x_0) \neq 0$ , dann gibt es eine Zahl  $\lambda_0 \in \mathbb{R}$  derart, daß*

$$\nabla f(x_0) + \lambda_0 \nabla g(x_0) = 0$$

( $\lambda_0$  heißt Lagrange Multiplikator).

Bildet man die **Lagrange Funktion**

$$\mathcal{L}(x, \lambda) = f(x) + \lambda g(x),$$

dann besagt der Satz, daß die Lagrange Funktion in  $(x_0, \lambda_0)$  eine kritische Stelle hat. Es sei darauf hingewiesen, daß die Lagrange Funktion keiner Einschränkung mehr unterliegt. Allerdings tritt nun die zusätzliche Unbekannte  $\lambda$  auf. Im Fall  $n = 2$  findet man  $(x_0, \lambda_0)$  als Lösung des Gleichungssystems

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \frac{\partial g}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} &= \frac{\partial f}{\partial y} + \lambda \frac{\partial g}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} &= f + \lambda g = 0\end{aligned}$$

Durch die Einführung der Lagrange Funktion kann also ein Optimierungsproblem mit Gleichungsnebenbedingungen auf die Berechnung der kritischen Stellen einer nicht restringierten Hilfsfunktion zurückgeführt werden. Jede skalare Gleichungsnebenbedingung ist durch einen eigenen Lagrange Multiplikator zu berücksichtigen. Ob an der Stelle  $x_0$  tatsächlich ein Maximum oder Minimum von  $f$  unter der Bedingung  $g(x) = 0$  vorliegt, bedarf einer weiteren Untersuchung, welche über den Rahmen dieser Lehrveranstaltung hinausgeht.

LÖSUNG DES BEISPIELS MIT LAGRANGE MULTIPLIKATOR. Wir bilden zuerst die Lagrange Funktion

$$\mathcal{L}(x, y, \lambda) = x^2 - y^2 + \lambda(x^2 + y^2 - 1)$$

und lösen das Gleichungssystem

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} &= 2x + 2\lambda x = 2x(1 + \lambda) = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} &= -2y + 2\lambda y = 2y(-1 + \lambda) = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} &= x^2 + y^2 - 1.\end{aligned}$$

Wegen der dritten Gleichung kann nicht  $x = y = 0$  gelten. Ist  $x \neq 0$ , muß wegen der ersten Gleichung  $\lambda = -1$  sein, aus der zweiten folgt dann  $y = 0$ . Setzt man  $y = 0$  in die dritte Gleichung ein, erhält man  $x = \pm 1$ . Ist hingegen  $y \neq 0$ , folgt aus der zweiten Gleichung  $\lambda = 1$ , die erste ergibt dann  $x = 0$ , mit Hilfe der dritten folgt dann  $y = \pm 1$ . Die kritischen Punkte der Lagrange Funktion sind also  $(x, y) = (\pm 1, 0)$  und  $\lambda = -1$ , bzw.  $(x, y) = (0, \pm 1)$  und  $\lambda = 1$ . Da  $\nabla g(x, y) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix}$  an diesen Stellen ungleich Null ist, kann man mit Satz 7.1 schließen, daß sich die Lösung der Aufgabe unter den gefundenen Stellen befindet. Wegen  $f(\pm 1, 0) = 1$  und  $f(0, \pm 1) = -1$  nimmt die Einschränkung von  $f$  auf den Einheitskreis in  $(\pm 1, 0)$  das Maximum, in  $(0, \pm 1)$  das Minimum an.  $\square$

### 8. Rekonstruktion einer Funktion aus Ihrem Gradienten

Nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung kann man jede stetige Funktion  $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  als Ableitung einer stetig differenzierbaren Funktion  $f$  interpretieren, welche bis auf eine additive Konstante durch

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(s) ds, \quad x \in [a, b].$$

aus ihrer Ableitung rekonstruiert werden kann. Das folgende Beispiel zeigt, daß dies für Funktionen in mehreren Veränderlichen im Allgemeinen nicht mehr gilt.

BEISPIEL 8.1. *In diesem Beispiel gehen wir der Frage nach, ob die einfache Abbildung  $(x, y) \rightarrow f(x, y) = (y, -x)$  Gradient einer Funktion  $\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  sein kann. Angenommen es gäbe eine derartige Funktion, also*

$$\varphi_x(x, y) = y, \quad \varphi_y(x, y) = -x,$$

dann wäre

$$\varphi_{xy}(x, y) = 1, \quad \varphi_{yx}(x, y) = -1.$$

Da  $\varphi$  die Voraussetzungen des Satzes von Schwarz erfüllt, müsste jedoch

$$\varphi_{xy} = \varphi_{yx}$$

gelten.

Welche vektorwertigen Funktionen können daher als Gradient einer skalaren Funktion interpretiert werden? Es stellt sich heraus, daß auch der Definitionsbereich eine Rolle spielt. Wir geben eine Antwort für Funktionen in zwei Veränderlichen und führen dazu folgende Begriffe ein.

DEFINITION 8.1. 1.) Eine stetig differenzierbare Kurve  $\gamma[a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  heißt **geschlossen**, wenn

$$\gamma(a) = \gamma(b)$$

gilt. Sie heißt **einfach**, wenn sie sich nicht selbst schneidet, wenn also  $\gamma|_{(a,b)}$  injektiv ist.

2.) Ein Gebiet  $D \subset \mathbb{R}^2$  heißt **einfach zusammenhängend**, wenn der Rand von  $D$  eine einfache, geschlossene Kurve ist.

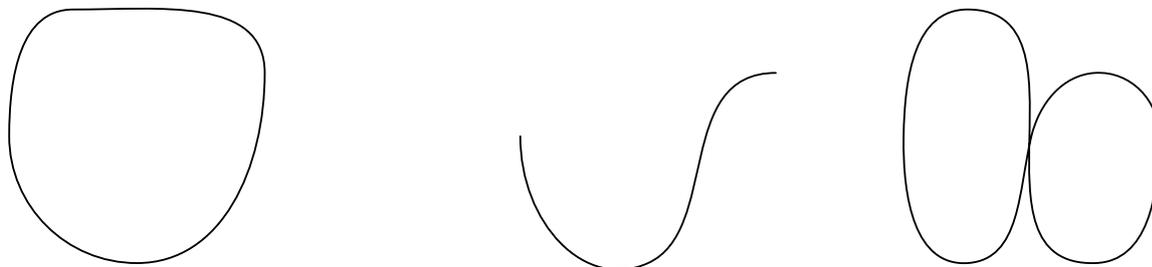


FIGURE 1.10. Einfache geschlossene, einfache nicht geschlossene, geschlossene nicht einfache Kurven

SATZ 8.1. *Es sei  $D \subset \mathbb{R}^2$  ein einfach zusammenhängendes Gebiet und  $P, Q: D \rightarrow \mathbb{R}$  Funktionen mit stetigen partiellen Ableitungen 1. Ordnung. Dann gibt es genau dann eine Funktion  $\varphi: D \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $\nabla\varphi = \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix}$ , wenn*

$$(1.3) \quad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

auf  $D$  gilt. Man nennt (1.3) **Integrabilitätsbedingung**.

Von der Notwendigkeit der Integrabilitätsbedingung kann man sich leicht überzeugen: Wenn es eine Funktion  $\varphi: D \rightarrow \mathbb{R}$  gibt mit

$$\varphi_x = P \quad \text{und} \quad \varphi_y = Q,$$

dann existieren insbesondere die gemischten partiellen Ableitungen  $\varphi_{xy}$  und  $\varphi_{yx}$  und sind stetig auf  $D$ . Aus dem Satz von Schwarz folgt dann

$$P_y = \varphi_{xy} = \varphi_{yx} = Q_x.$$

Daß (1.3) auch hinreichend für die Existenz von  $\varphi$  ist, macht den eigentlichen Beweis von Satz 8.1 aus. Wir betrachten nur den einfacheren Fall, daß  $\Omega$  ein achsenparalleles Rechteck ist. Es seien also die Integrabilitätsbedingungen erfüllt und  $(x_0, y_0)$  ein beliebiger Punkt in  $\Omega$ . Für  $(x, y) \in \Omega$  betrachten wir die Funktion

$$f(x, y) = \int_{x_0}^x P(s, y_0) ds + \int_{y_0}^y Q(x, s) ds.$$

Aus dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung folgt

$$\frac{\partial f}{\partial y} f(x, y) = Q(x, y).$$

Weiters finden wir

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} f(x, y) &= P(x, y_0) + \frac{\partial}{\partial x} \int_{y_0}^y Q(x, s) ds \\ &\stackrel{*}{=} P(x, y_0) + \int_{y_0}^y \frac{\partial Q}{\partial x}(x, s) ds \stackrel{**}{=} P(x, y_0) + \int_{y_0}^y \frac{\partial P}{\partial y}(x, s) ds \\ &= P(x, y_0) + P(x, y) - P(x, y_0) = P(x, y). \end{aligned}$$

Die mit \* markierte Gleichheit ist gerechtfertigt, da  $\frac{\partial Q}{\partial x}$  stetig und auf einem die Punkte  $(x_0, y_0)$  und  $(x, y)$  umfassenden abgeschlossenen Rechteck beschränkt ist, in \*\* wurde die Integrabilitätsbedingung verwendet. Wo geht die Annahme, daß  $\Omega$  ein achsenparalleles Rechteck ist, in die Argumentation ein?

BEISPIEL 8.2. *Es sei  $F(x, y) = \begin{pmatrix} 2x \sin y \\ x^2 \cos y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix}$ . Gesucht ist eine Funktion  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $\nabla f = F$*

LÖSUNG. Aus

$$P_y = 2x \cos y = Q_x$$

schließen wir, daß  $F$  ein Gradient ist, d.h. es gibt eine Funktion  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$f_x = P \quad \text{und} \quad f_y = Q.$$

Integriert man die erste Beziehung bezüglich  $x$ , erhält man

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \int P(x, y) dx + \psi(y) \\ &= \int 2x dx \sin y + \psi(y) = x^2 \sin y + \psi(y), \end{aligned}$$

wobei  $\psi(y)$  eine Integrationskonstante darstellt, die natürlich noch von der Variablen  $y$  abhängen kann. Aus der zweiten Beziehung folgt dann

$$f_y = x^2 \cos y + \psi'(y) = Q = x^2 \cos y$$

also

$$\psi'(y) = 0$$

somit

$$\psi(y) = c \in \mathbb{R}.$$

Die gesuchte Funktion ist also

$$f(x, y) = x^2 \sin y + c.$$

□

## 9. Koordinatentransformation

Manche Probleme, beispielsweise rotationssymmetrische Probleme, lassen sich in kartesischen Koordinaten nicht gut analysieren. In diesen Fällen ist es zweckmäßig, problemangepaßte, eventuell krummlinige Koordinaten einzuführen.

Es sei  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion und  $T: \Omega \rightarrow D$  eine Bijektion, dann ist

$$\tilde{f} = f \circ T: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

die auf  $\Omega$  zurückgeholte Funktion (dies entspricht der Darstellung von  $f$  in neuen Koordinaten). Diese Überlegung motiviert folgenden Begriff.

**DEFINITION 9.1.** Es seien  $D$  und  $\Omega$  offene Teilmengen im  $\mathbb{R}^n$ . Wir nennen  $T: \Omega \rightarrow D$  eine Koordinatentransformation auf  $D$ , wenn  $T$  bijektiv und sowohl  $T$  als auch  $T^{-1}$  stetig differenzierbar sind.

Der Nachweis, daß  $T^{-1}$  stetig differenzierbar ist, kann recht aufwendig sein. Folgendes Resultat ist dabei nützlich.

**SATZ 9.1.** *Es sei  $T: \Omega \rightarrow D$ ,  $\Omega, D \subset \mathbb{R}^n$  offen, bijektiv und stetig differenzierbar. Ist die Jacobimatrix  $DT(x)$  für alle  $x \in \Omega$  regulär, dann ist  $T^{-1}$  stetig differenzierbar.*

In diesem Zusammenhang nennt man die Determinante der Jacobi Matrix von  $T$  **Jacobi Determinante** oder auch **Funktionaldeterminante**. Die Jacobimatrix

$DT(x)$  ist somit regulär, wenn für die Jacobideterminante  $\det DT(x) \neq 0$  gilt. Für  $n = 2, 3$  ist folgende Notation gebräuchlich:

$$\begin{aligned} n = 2: \quad & (x, y) = T(u, v) & |DT(u, v)| &= \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| \\ n = 3: \quad & (x, y, z) = T(u, v, w) & |DT(u, v, w)| &= \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \right| \end{aligned}$$

Die Bilder der achsenparallelen Geradenstücke  $T \circ \gamma_i$ .  $\gamma_i(t) = \xi + te_i$ ,  $\xi \in \Omega$  heißen **Koordinatenlinien**.

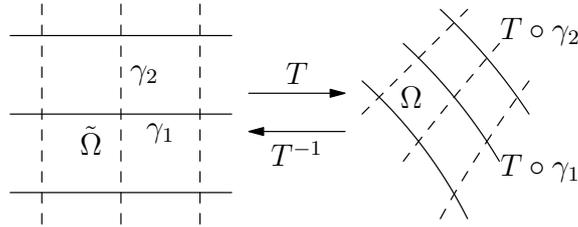


FIGURE 1.11. Koordinatentransformation

### 9.1. Ebene Polarkoordinaten.

Die Transformation auf ebene Polarkoordinaten

$$(x, y) = T(r, \varphi) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi)$$

bildet den Streifen  $\Omega = (0, \infty) \times (-\pi, \pi)$  bijektiv auf  $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0) : x \leq 0\}$  ab. Natürlich ist diese Transformation für alle  $(r, \varphi) \in \mathbb{R}^2$  definiert (und bildet den Streifen  $[0, \infty) \times \mathbb{R}$  nach  $\mathbb{R}^2$  ab). In vielen Anwendungen ist dies auch sinnvoll. Allerdings ist die Transformation dann nicht injektiv, denn es gilt  $T(r, \varphi) = T(r, \varphi + 2k\pi)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . Die Injektivität wird erzwungen, indem man das Winkelargument beispielsweise auf  $[-\pi, \pi)$  einschränkt und den Ursprung ausnimmt. Dem Ursprung kann nämlich kein eindeutiger Winkel zugeordnet werden. Eine einfache Überlegung zeigt, daß dann  $T^{-1}$  als Abbildung von  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  auf  $(0, \infty) \times [-\pi, \pi)$  nicht stetig ist. Die Einschränkung von  $T^{-1}$  auf  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0) : x \leq 0\}$  ist jedoch stetig. Dies ist der Grund für die Einschränkung von  $T$  auf  $\Omega$ . Die Koordinatenlinien sind die Bilder der Geradenscharen  $r = \text{const}$  und  $\varphi = \text{const}$  also Familien konzentrischer Kreise, bzw. Familien von Halbstrahlen in radialer Richtung. Die Jacobi Determinante ergibt sich zu

$$\left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \varphi)} \right| = \begin{vmatrix} \partial_r x & \partial_\varphi x \\ \partial_r y & \partial_\varphi y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{vmatrix} = r$$

Auch in der Jacobi Determinante zeigt sich der singuläre Charakter des Koordinatensprungs

**9.2. Zylinderkoordinaten im  $\mathbb{R}^3$ .** Ist ein Problem rotationssymmetrisch bezüglich einer Geraden  $g$ , kann die Verwendung von Zylinderkoordinaten vorteilhaft sein:

$$(1.4) \quad \begin{aligned} x &= r \cos \varphi, & r &\geq 0, \\ y &= r \sin \varphi, & -\pi &\leq \varphi \leq \pi \\ z &= z \end{aligned}$$

Die Abbildung  $T: [0, \infty) \times [-\pi, \pi] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  ist surjektiv, aber nicht injektiv. Jedoch ist die Einschränkung von  $T$  auf  $\Omega = (0, \infty) \times (-\pi, \pi) \times \mathbb{R}$  injektiv und stetig. Das Bild  $D = T(\Omega)$  ist gegeben durch

$$D = \mathbb{R}^3 \setminus \{(x, 0, z) : x \leq 0, z \in \mathbb{R}\}.$$

Die Singularität der Punkte auf der  $z$ -Achse äußert sich wieder in der Funktionaldeterminante

$$\left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \varphi, z)} \right| = \begin{vmatrix} \partial_r x & \partial_\varphi x & \partial_z x \\ \partial_r y & \partial_\varphi y & \partial_z y \\ \partial_r z & \partial_\varphi z & \partial_z z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -r \sin \varphi & r \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r$$

**9.3. Räumliche Polarkoordinaten.** Ein Punkt im  $\mathbb{R}^3$  kann auch durch seine räumlichen Polarkoordinaten (Kugelkoordinaten),  $(r, \vartheta, \varphi)$  festgelegt werden

$$(1.5) \quad \begin{aligned} x &= r \sin \vartheta \cos \varphi, \\ y &= r \sin \vartheta \sin \varphi, \\ z &= r \cos \vartheta \end{aligned}$$

Die Koordinate  $\vartheta$  entspricht der geographischen Breite,  $\varphi$  der geographischen Länge. Die Menge

$$r \geq 0, \quad 0 \leq \vartheta \leq \pi, \quad -\pi \leq \varphi \leq \pi$$

wird durch  $T$  surjektiv, aber nicht injektiv auf  $\mathbb{R}^3$  abgebildet. Schränkt man  $T$  auf

$$\Omega = (0, \infty) \times (0, \pi) \times (-\pi, \pi)$$

ein, dann ist  $T$  eine Bijektion von  $\Omega$  auf

$$D = \mathbb{R}^3 \setminus \{(x, 0, z) : x \leq 0, z \in \mathbb{R}\}.$$

Für die Jacobideterminante findet man

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \vartheta, \varphi)} \right| &= \begin{vmatrix} x_r & x_\vartheta & x_\varphi \\ y_r & y_\vartheta & y_\varphi \\ z_r & z_\vartheta & z_\varphi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sin \vartheta \cos \varphi & r \cos \vartheta \cos \varphi & -r \sin \vartheta \sin \varphi \\ \sin \vartheta \sin \varphi & r \cos \vartheta \sin \varphi & r \sin \vartheta \cos \varphi \\ \cos \vartheta & -r \sin \vartheta & 0 \end{vmatrix} \\ &= \cos \vartheta \begin{vmatrix} r \cos \vartheta \cos \varphi & -r \sin \vartheta \sin \varphi \\ r \cos \vartheta \sin \varphi & r \sin \vartheta \cos \varphi \end{vmatrix} + r \sin \vartheta \begin{vmatrix} \sin \vartheta \cos \varphi & -r \sin \vartheta \sin \varphi \\ \sin \vartheta \sin \varphi & r \sin \vartheta \cos \varphi \end{vmatrix} \\ &= r^2 \cos^2 \vartheta \sin \vartheta \begin{vmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{vmatrix} + r \sin^3 \vartheta \begin{vmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{vmatrix} \\ &= r^2 \sin \vartheta (\cos^2 \vartheta + \sin^2 \vartheta) = r^2 \sin \vartheta. \end{aligned}$$

Auch hier zeigt sich wieder, daß die Punkte der  $z$ -Achse ( $\vartheta = 0, \vartheta = \pi$ ) singuläre Punkte der Transformation sind.

**9.4. Lineare Transformation.** Wir betrachten die lineare Abbildung

$$\begin{aligned} T: [-1, 1] \times [-1, 1] &\rightarrow D \\ (\xi, \eta) &\rightarrow \left(\frac{1}{2}(\xi + \eta), \frac{1}{2}(\xi - \eta)\right) \end{aligned}$$

und bestimmen zuerst  $D = T(\Omega)$ . Diese Abbildung kann auch in der Form

$$T(\tilde{x}) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \equiv A \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$$

geschrieben werden. Wegen  $\det A = -1$  ist  $A$  regulär und somit  $T$  injektiv. Für lineare Abbildungen gilt  $DT(\tilde{x}) = A$ , somit ist die Jacobi Determinante stets ungleich Null und daher  $T$  eine Koordinatentransformation auf  $D = T(\Omega)$ . Die Koordinatenlinien  $T \circ \gamma_i$ ,  $i = 1, 2$  mit

$$\begin{aligned} \gamma_1(t; \eta) &= (t, \eta), & \eta &\in [-1, 1], \\ \gamma_2(t; \xi) &= (\xi, t), & \xi &\in [-1, 1], \end{aligned}$$

$|t| \leq 1$  sind gegeben durch

$$\begin{aligned} (T \circ \gamma_1(\cdot; \eta))(t) &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ \eta \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \eta \\ -\eta \end{pmatrix} + \frac{t}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ (T \circ \gamma_2(\cdot; \xi))(t) &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ t \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \xi \\ \xi \end{pmatrix} + \frac{t}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Eliminiert man den Parameter  $t$  aus  $T \circ \gamma_1(\cdot; \eta)$

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{2}(t + \eta) \\ y &= \frac{1}{2}(t - \eta) \end{aligned}$$

erhält man das Geradensegment

$$y = x - \eta, \quad \text{für } x \in \left[\frac{1}{2}(-1 + \eta), \frac{1}{2}(1 + \eta)\right].$$

Analog ergeben sich für die Familie  $T \circ \gamma_2(\cdot; \xi)$  die Geradensegmente

$$y = -x + \xi, \quad \text{für } x \in \left[\frac{1}{2}(\xi - 1), \frac{1}{2}(\xi + 1)\right].$$

Man erkennt, daß  $T$  sich als Drehung um den Winkel  $\frac{\pi}{4}$  im mathematisch negativen Sinn, gefolgt von einer Spiegelung an der  $x$ -Achse und einer Stauchung um den Faktor  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  beschreiben läßt. Dieses Beispiel ist ein Spezialfall der affinen Transformation

$$T(x) = Ax + b, \quad \det(A) \neq 0.$$

Ist  $A$  regulär, wird die Untersuchung der geometrischen Eigenschaften der Transformation erleichtert durch die Beobachtung, dass  $T$  Parallelogramme auf Parallelogramme, deren Ecken auf Ecken und Kanten auf kanten abbildet.

## CHAPTER 2

# Parametrisierte Kurven und Flächen

### 1. Parametrisierte Kurven

DEFINITION 1.1. Eine (**parametrisierte**) **Kurve** im  $\mathbb{R}^n$  ist eine Abbildung

$$\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad t \rightarrow \gamma(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$$

eines Intervalles  $I$ , deren Koordinatenfunktionen  $x_i: I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $i = 1, \dots, n$  stetig sind. Das Bild  $\gamma(I)$  heißt **Spur** von  $\gamma$ . Für  $n = 2$  spricht man von **ebenen Kurven**, für  $n = 3$  von **Raumkurven**.

In der Literatur sind für die Spur auch andere Bezeichnungen, beispielsweise **Weg** in Gebrauch. Auf jeden Fall soll zwischen einer parametrisierten Kurve und deren Spur unterschieden werden, da ein und dieselbe Spur auf viele unterschiedliche Arten parametrisiert werden kann.

BEISPIEL 1.1. 1.)  $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $\gamma(t) = x_0 + tv$ , *parametrisiert eine Gerade im  $\mathbb{R}^3$  durch den Punkt  $x_0$  mit Richtungsvektor  $v$ .*

2.)  $\gamma: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $\gamma(t) = (r \cos t, r \sin t)$  *parametrisiert einen Kreis  $S(0, r)$  mit Radius  $r$  und Mittelpunkt  $(0, 0)$ . Setzt man*

$$x(t) = r \cos t, \quad y(t) = r \sin t$$

*gilt*

$$(*) \quad x^2 + y^2 = r^2$$

*Dies ist die parameterfreie Darstellung der Spur von  $\gamma$ . Die parametrisierte Kurve*

$$\sigma: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \sigma(t) = (r \cos 2t, r \sin 2t)$$

*beschreibt denselben Kreis  $S(0, r)$ , das heißt  $\gamma$  und  $\sigma$  haben dieselbe Spur. Jedoch wird mit  $\sigma$  der Kreis  $S(0, r)$  zweimal im mathematisch positiven Sinne durchlaufen.*

*Die Parameterdarstellung enthält mehr Information als die Spur: interpretiert man  $t$  als Zeit und  $\gamma$  als die Bewegung eines Teilchens, dann zeigt (\*) nur, daß sich das Teilchen auf einer Kreisbahn bewegt, während  $\gamma$  angibt, wo sich das Teilchen zu jedem Zeitpunkt befindet.*

3.) Die **Neilsche Parabel** ist gegeben durch

$$\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \gamma(t) = (t^2, t^3).$$

*Elimination von  $t$  ergibt die Gleichung für die Spur*

$$y^2 = x^3, \quad x \geq 0.$$

Die Interpretation des Parameters  $t$  ergibt sich aus

$$\tan \alpha = \frac{t^3}{t^2} = t.$$

4.) Die Gerade durch die Punkte  $(1, 2)$  und  $(3, 6)$  hat die Gleichung  $y = 2x$ . Das Segment, welches diese beiden Punkte verbindet, ist gegeben durch

$$y = 2x, \quad 1 \leq x \leq 3.$$

Das Segment kann auf viele Arten parametrisiert werden:

a)  $x(t) = t, y(t) = 2t, t \in [1, 3]$ .

b) Ersetzt man  $t$  durch  $t = s + 1$

$$x(s) = s + 1, \quad y(s) = 2s + 2, \quad s \in [0, 2]$$

erhält man eine weitere Parametrisierung des Geradensegmentes, welches im selben Sinne durchlaufen wird.

c) Ersetzt man  $t$  durch  $t = 3 - s$ , also

$$x(s) = 3 - s, \quad y(s) = 6 - 2s, \quad s \in [0, 2]$$

folgt mit  $\sigma(s) = (x(s), y(s))$

$$\sigma(0) = (3, 6), \quad \sigma(2) = (1, 2),$$

d.h. das Geradensegment wird in umgekehrter Richtung durchlaufen.

d) Setzt man  $\varrho: [0, 4\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2, \varrho(t) = (x(t), y(t))$ ,

$$x(t) = 2 + \cos t, \quad y(t) = 4 + 2 \cos t,$$

findet man  $\varrho(0) = \varrho(2\pi) = \varrho(4\pi) = (3, 6)$  und  $\varrho(\pi) = \varrho(3\pi) = (1, 2)$ , das Geradensegment wird also während der Zeitspanne  $[0, 4\pi]$  beginnend bei  $(3, 6)$  insgesamt vier Mal durchlaufen.

5.) Schraubenlinie:

$$\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \gamma(t) = (r \cos t, r \sin t, ht).$$

Die Spur liegt auf dem Zylinder

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3: x^2 + y^2 = r^2, z \in \mathbb{R}\}.$$

Die Schraubenlinie hat die Ganghöhe  $2\pi h$ .

6.) Es sei  $G(f)$  der Graph einer stetigen Funktion  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ , also

$$G(f) = \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2: x \in I\}.$$

Setzt man

$$\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \gamma(t) = (t, f(t))$$

also

$$x(t) = t, \quad y(t) = f(t),$$

dann ist  $\gamma$  eine parametrisierte Kurve, deren Spur gerade der Graph von  $f$  ist.

FIGURE 2.1. Tangente

Für eine vektorwertige Funktion  $f: I \rightarrow \mathbb{R}^2$  vereinbaren wir, daß  $f$  auf  $I$  genau dann differenzierbar ist, wenn jede Koordinatenfunktion differenzierbar ist, vgl. Bemerkung 3.1 und setzen

$$\frac{df}{dx}(x) = f'(x) = (f'_1(x), \dots, f'_n(x)).$$

Eine parametrisierte Kurve ist demnach (stetig) differenzierbar, wenn jede Koordinatenfunktion (stetig) differenzierbar ist.

Es sei  $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine stetig differenzierbare Kurve. Dann existiert

$$\gamma'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h}(\gamma(t+h) - \gamma(t)),$$

wobei der Grenzwert komponentenweise genommen wird. Für eine geometrische Interpretation von  $\gamma'(t)$  an einer Stelle  $t_0$  betrachten wir die Abbildung 1. Beachtet man, daß  $\gamma(t+h) - \gamma(t)$  und  $\frac{1}{h}(\gamma(t+h) - \gamma(t))$  kollinear sind, wird aus der Zeichnung plausibel,  $\gamma'(t_0)$  als Tangentenvektor in  $t_0$  zu bezeichnen. Kinematisch interpretiert man  $\gamma'(t_0)$  als Geschwindigkeitsvektor zur Zeit  $t_0$  und  $\|\gamma'(t_0)\| = \sqrt{\gamma'_1(t_0)^2 + \dots + \gamma'_n(t_0)^2}$  als Geschwindigkeit.

BEISPIEL 1.2. 1.) Für den Kreis  $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$ ,  $t \in [0, 2\pi]$  ist der Tangentenvektor gegeben durch  $\gamma'(t) = (-\sin t, \cos t)$ . Es folgt die bemerkenswerte Eigenschaft

$$\langle \gamma(t), \gamma'(t) \rangle = 0, \quad t \in [0, 2\pi].$$

Der Tangentenvektor ist daher in jedem Punkt  $P$  des Kreises orthogonal zum Radiusvektor  $\overrightarrow{0P}$ . Die Gleichung der Tangente an den Kreis im Punkt  $\gamma(t_0)$  ist daher gegeben durch

$$\mathcal{T}(s) = \gamma(t_0) + s\gamma'(t_0) = \begin{pmatrix} \cos t_0 - s \sin t_0 \\ \sin t_0 + s \cos t_0 \end{pmatrix}$$

Setzt man  $\gamma(t_0) = (x_0, y_0)$  und ist  $\sin t_0 \neq 0$ , kann man den Parameter  $s$  aus der ersten Koordinate eliminieren,

$$s = -\frac{x - \cos t_0}{\sin t_0} = -\frac{x - x_0}{y_0}$$

und erhält für die Gleichung der Tangente die parameterfreie Form

$$y = \sin t_0 - \frac{x - \cos t_0}{\sin t_0} \cos t_0 = \frac{1 - xx_0}{y_0}.$$

2.) Wir betrachten die Kurve  $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $\gamma(t) = (t^2 - 1, t^3 - t)$ . Die Spurgleichung erhalten wir aus der Überlegung

$$x = t^2 - 1, \quad \text{also } t = \pm\sqrt{x+1}, \quad \text{für } x \geq -1$$

und somit

$$y = t(t^2 - 1) = \pm x\sqrt{x+1}.$$

Daraus kann man ablesen, daß die Spur symmetrisch bezüglich der  $x$ -Achse ist und folgendes lokale Verhalten besitzt:

$$\begin{aligned} x = -1 & \sim \pm\sqrt{x} \\ x = 0 & \sim \pm x \\ x \rightarrow \infty & \sim \pm x^{3/2}. \end{aligned}$$

Man kann nun leicht die Spur skizzieren

Man beachte, daß sich die Kurve in  $(0, 0)$  selbst schneidet, es liegt ein **Doppelpunkt** vor. Aus  $\gamma(t) = (0, 0)$ , also

$$t^2 - 1 = 0 \quad \text{und} \quad t^3 - t = 0$$

erhalten wir die Lösungen  $t = \pm 1$ . Die Tangentialvektoren im Doppelpunkt ergeben sich nun aus

$$\gamma'(t) = (2t, 3t^2 - 1)$$

zu

$$\gamma'(-1) = (-2, 2), \quad \text{und} \quad \gamma'(1) = (2, 2),$$

in Übereinstimmung mit unseren Überlegungen zur Spur von  $\gamma$ . Wir merken an, daß sich die Rechnungen durch die Kenntnis der Spur etwas vereinfacht haben. Ohne Kenntnis der Spur liest man die Symmetrie der Spur bzgl. der  $x$ -Achse in diesem Beispiel aus der Beziehung

$$(x(-t), y(-t)) = (x(t), -y(-t))$$

ab. Die Existenz eines Doppelpunktes untersucht man mit dem Ansatz

$$\gamma(t) = \gamma(s)$$

also

$$(I) \quad t^2 - 1 = s^2 - 1$$

$$(II) \quad t^3 - t = s^3 - s.$$

Aus (I) folgt  $|t| = |s|$  und (II) kann umgeformt werden zu

$$t^3 - s^3 = t - s$$

bzw.

$$(t - s)(t^2 + st + s^2) = t - s.$$

Also gilt entweder  $t = s$  oder  $t \neq s$ . Falls  $t \neq s$  muß wegen (I)  $t = -s$  gelten, woraus mit (II)

$$t^2 + st + s^2 = 1$$

und somit

$$t^2 = 1$$

folgt. Somit gilt  $t = \pm 1$  und entsprechend  $s = \mp 1$ .

Dieses Beispiel zeigt auch, daß der Tangentialvektor nicht eine Eigenschaft der Spur von  $\gamma$  ist, sondern für eine Parameterstelle definiert ist. In einem Doppelpunkt können daher ohne weiteres zwei Tangentialvektoren (für verschiedene Parameterwerte) existieren.

DEFINITION 1.2. Eine stetig differenzierbare Kurve  $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^n$  heißt regulär in  $t_0$ , wenn  $\gamma'(t_0) \neq 0$ ; sie heißt regulär wenn sie an allen Stellen  $t \in I$  regulär ist.

Eine Irregularität muß sich nicht in der Spur zeigen: sie bedeutet kinematisch, daß zur Zeit  $t_0$  die Geschwindigkeit Null ist.

BEISPIEL 1.3. 1.)  $\gamma(t) = (t^2, t^2)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , ist in  $t = 0$  nicht regulär. Die Spur von  $\gamma$  ist die Halbgerade  $y = x$ ,  $x \geq 0$ .

2.) Die Neilsche Parabel  $\gamma(t) = (t^2, t^3)$ ,  $t \in \mathbb{R}$  ist ebenfalls in  $t = 0$  nicht regulär. Sie hat an dieser Stelle eine Spitze.

3.) Der parametrisierte Graph einer stetig differenzierbaren Funktion ist regulär:

$$\begin{aligned}\gamma(t) &= (t, f(t)), & t \in I \\ \gamma'(t) &= (1, f'(t)) \neq 0.\end{aligned}$$

## 2. Die Bogenlänge

Es sei  $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine stetige Kurve,  $I = [a, b]$ . Für eine Zerlegung  $\mathcal{Z}: t_0 = a < t_1 < \dots < t_m = b$  von  $I$  betrachten wir das Sehnenpolygon mit den Eckpunkten  $\gamma(t_i)$ ,  $i = 0, \dots, m$  und der Länge

$$L(\mathcal{Z}) = \sum_{i=1}^m \|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\|$$

(wir verwenden dabei die euklidische Norm). Es ist intuitiv klar, daß die Länge des Sehnenpolygons kleiner ist, als die "Länge" der Kurve  $\gamma$ . Die Länge einer Kurve wurde allerdings noch nicht definiert. Insbesondere ist nicht klar, welchen Kurven man eine Länge zuordnen kann. Eine konsistente Einführung erfordert den Begriff des Supremums. Wir begnügen uns daher mit heuristischen Andeutungen. Entsteht die Zerlegung  $\mathcal{Z}'$  aus der Zerlegung  $\mathcal{Z}$  durch Hinzufügen eines weiteren Teilpunktes, folgt aus der Dreiecksungleichung

$$L(\mathcal{Z}) \leq L(\mathcal{Z}').$$

Man sagt, eine stetige Kurve  $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^n$  sei **rektifizierbar**, wenn die Menge der Längen der eingeschriebenen Sehnenpolygone beschränkt ist und nennt dann

$$L(\gamma) = \sup_{\mathcal{Z}} L(\mathcal{Z})$$

Länge von  $\gamma$ . Es sei darauf hingewiesen, daß nicht jede stetige Kurve rektifizierbar ist: ein besonders pathologisches Beispiel ist die **Peano Kurve**. Dies ist eine Kurve

$$\gamma: [0, 1] \rightarrow [0, 1]^2,$$

welche stetig und surjektiv (!) ist. Um derartige Pathologien zu vermeiden, beschränkt man sich meist auf reguläre Kurven.

Es sei  $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^n$  stetig differenzierbar. Für ein eingeschriebenes Sehnenpolygon folgt aus dem Mittelwertsatz

$$\begin{aligned} L(\mathcal{Z}) &= \sum_{i=1}^m \|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\| \\ &= \sum_{i=1}^m \left( \sum_{k=1}^n (\gamma_k(t_i) - \gamma_k(t_{i-1}))^2 \right)^{1/2} \\ &= \sum_{i=1}^m \left( \sum_{k=1}^n \gamma'_k(\tau_{i,k})^2 \right)^{1/2} (t_i - t_{i-1}) \end{aligned}$$

mit geeigneten Zwischenstellen  $\tau_{i,k} \in (t_{i-1}, t_i)$ . Für eine hinreichend feine Zerlegung können wir  $\tau_{i,k}$ ,  $k = 1, \dots, n$ , durch eine einheitliche Zwischenstelle  $\tau_i \in (t_{i-1}, t_i)$  ersetzen und erhalten

$$\begin{aligned} L(\mathcal{Z}) &\sim \sum_{i=1}^m \left( \sum_{k=1}^n \gamma'_k(\tau_i)^2 \right)^{1/2} (t_i - t_{i-1}) \\ &= \sum_{i=1}^m \|\gamma'(\tau_i)\| (t_i - t_{i-1}). \end{aligned}$$

Die rechte Seite kann als Riemannsche Summe für das Integral

$$\int_a^b \|\gamma'(t)\| dt$$

gedeutet werden. Diese Überlegung motiviert folgendes Resultat:

**SATZ 2.1.** *Eine stetig differenzierbare Kurve  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  ist rektifizierbar und hat die Länge*

$$L(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt.$$

*Insbesondere hat der Graph einer stetig differenzierbaren Funktion  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  die Länge*

$$L(\gamma_f) = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} dx.$$

Dieser Satz bleibt richtig, wenn  $\gamma$  nur stückweise stetig differenzierbar ist.

**BEISPIEL 2.1.** 1.) *Kreisbogen mit Zentriwinkel  $\varphi \in [0, 2\pi]$*

$$\gamma(t) = (r \cos t, r \sin t), \quad \|\gamma'(t)\| = r$$

*Es folgt*

$$L(\gamma) = \int_0^\varphi \|\gamma'(t)\| dt = r\varphi.$$

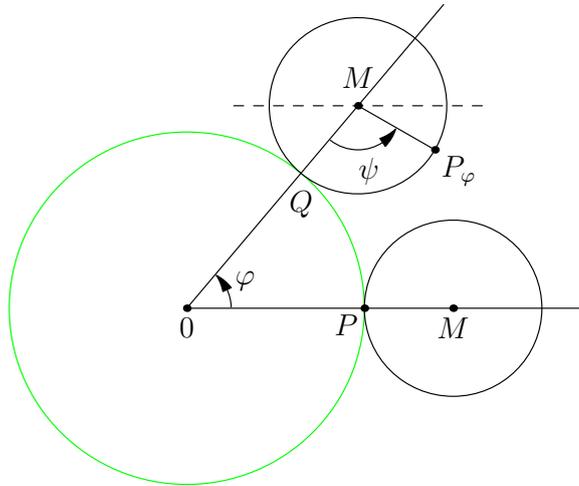


FIGURE 2.2. Epizykloide

**2.1. Epizykloide.** Ein Kreis mit Radius  $r$  rollt auf der Außenseite eines anderen Kreises mit Radius  $R$ ,  $r < R$ , ohne zu gleiten ab. Die Bahnkurve eines festen Punktes auf der Peripherie des kleinen Kreises heißt **Epizykloide**. Um eine Parametrisierung der Epizykloide zu finden, betrachten wir die Abbildung 2.1. Wir betrachten den Punkt  $P$  auf dem kleinen Kreis. Ist der kleine Kreis auf dem Großen entlang eines Bogens mit Zentriwinkel  $\varphi$  abgerollt, entspricht dem Punkt  $P$  der Punkt  $P_\varphi$ . Aus der Gleichheit der Bögen  $\widehat{PQ}$  und  $\widehat{QP}_\varphi$  folgt

$$R\varphi = r\psi$$

also

$$\psi = \frac{R}{r}\varphi.$$

Die Koordinaten des Mittelpunktes  $M$  sind

$$\begin{aligned} x_M &= (R + r) \cos \varphi, \\ y_M &= (R + r) \sin \varphi. \end{aligned}$$

Die Koordinaten des Punktes  $P_\varphi$  in einem in  $M$  verankerten lokalen Koordinatensystem sind

$$\begin{aligned} x_\varphi &= r \cos(\varphi + \pi + \psi) = -r \cos(\varphi + \psi), \\ y_\varphi &= r \sin(\varphi + \pi + \psi) = -r \sin(\varphi + \psi). \end{aligned}$$

Berücksichtigt man noch

$$\varphi + \psi = \frac{R + r}{r}\varphi$$

erhält man die globalen Koordinaten von  $P_\varphi$ , also  $(x, y) = (x_M + x_\varphi, y_M + y_\varphi)$

$$\begin{aligned}x &= (R + r) \cos \varphi - r \cos \frac{R+r}{r} \varphi, \\y &= (R + r) \sin \varphi - r \sin \frac{R+r}{r} \varphi.\end{aligned}$$

Nimmt man an, daß der kleine Kreis mit einer gleichförmigen Winkelgeschwindigkeit von  $\omega \text{ rad/sec}$  abrollt, ist  $\varphi$  durch  $\varphi(t) = \omega t$  zu ersetzen.

Ersetzt man in  $\gamma(\varphi) = (x(\varphi), y(\varphi))$  den Winkel  $\varphi$  durch  $-\varphi$  erhält man

$$x(-\varphi) = x(\varphi), \quad \text{und} \quad y(-\varphi) = -y(\varphi).$$

Die Spur von  $\gamma$  ist daher symmetrisch bezüglich der  $x$ -Achse. Offenbar ist  $\gamma$  stetig differenzierbar mit

$$\begin{aligned}x'(\varphi) &= (R + r) \left( -\sin \varphi + \sin \frac{R+r}{r} \varphi \right), \\y'(\varphi) &= (R + r) \left( \cos \varphi - \cos \frac{R+r}{r} \varphi \right)\end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned}\|\gamma'(\varphi)\|^2 &= 2(R + r)^2 \left( 1 - \left( \sin \varphi \sin \frac{R+r}{r} \varphi + \cos \varphi \cos \frac{R+r}{r} \varphi \right) \right) \\&= 2(R + r)^2 \left( 1 - \cos \left( \left( \frac{R+r}{r} - 1 \right) \varphi \right) \right) = 2(R + r)^2 \left( 1 - \cos \frac{R}{r} \varphi \right).\end{aligned}$$

Im Falle  $R = 4$  und  $r = 1$  gilt darüber hinaus

$$x(\pi - \varphi) = x(\varphi), \quad y(\pi - \varphi) = -y(\varphi),$$

diese Epizykloide ist also auch symmetrisch bezüglich der  $y$ -Achse. Es genügt also  $\gamma$  für  $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$  zu betrachten. Die Länge der Epizykloide im 1. Quadranten ergibt sich dann aus

$$L = 5\sqrt{2} \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \cos 4\varphi} \, d\varphi = 10 \int_0^{\pi/2} \sqrt{\sin^2 2\varphi} \, d\varphi = 10$$

(man beachte:  $\sin 2\varphi \geq 0$  für  $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$ ). Insgesamt beträgt die Länge der Zykloide daher 40 Längeneinheiten.

Abschließend untersuchen wir noch, wo diese Parametrisierung der Epizykloide regulär ist. Wir gehen aus von

$$\gamma'(\varphi) = 0 \Leftrightarrow \|\gamma'(\varphi)\| = 0 \Leftrightarrow \cos \frac{R}{r} \varphi = 1,$$

also

$$\varphi = \frac{r}{R} 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Im speziellen Fall  $R = 4$ ,  $r = 1$  erhalten wir die Winkel  $\varphi = k\frac{\pi}{2}$ ,  $k = 0, 1, 2, 3$ . An den Stellen  $\gamma(0) = (4, 0)$ ,  $\gamma(\frac{\pi}{2}) = (0, 4)$ ,  $\gamma(\pi) = (-4, 0$  und  $\gamma(\frac{3\pi}{2}) = (0, -4)$  hat die Epizykloide jeweils eine Spitze.

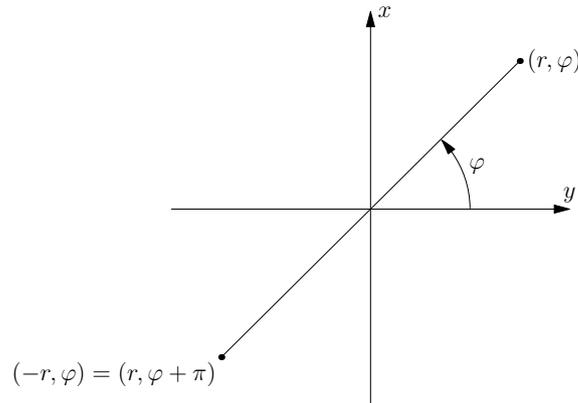


FIGURE 2.3. Polarkoordinaten

### 3. Ebene Kurven in Polarkoordinaten

In manchen Fällen ist die Darstellung einer Kurve in Polarkoordinaten nützlich

$$r = f(\varphi), \quad \varphi \in I.$$

Dies ist gleichwertig mit der Parametrisierung  $\gamma(\varphi) = (x(\varphi), y(\varphi))$ , wobei

$$x(\varphi) = r(\varphi) \cos \varphi,$$

$$y(\varphi) = r(\varphi) \sin \varphi.$$

Gilt beispielsweise  $r(0) = r(2\pi)$ , dann ist die Kurve geschlossen. Der Tangentenvektor ist gegeben durch

$$\gamma'(\varphi) = \begin{pmatrix} r' \cos \varphi - r \sin \varphi \\ r' \sin \varphi + r \cos \varphi \end{pmatrix}$$

und somit

$$\|\gamma'(\varphi)\| = \sqrt{r'^2 + r^2}.$$

Die Länge der Kurve ist daher gegeben durch

$$L(\gamma) = \int_I \sqrt{r'^2 + r^2} d\varphi.$$

Um die Einschränkung  $f(\varphi) \geq 0$ ,  $\varphi \in I$  zu umgehen, ist es zweckmäßig, in diesem Zusammenhang auch negative Werte für  $r$  zuzulassen. Wir vereinbaren dazu, einen Punkt  $P$  mit den Polarkoordinaten  $(r, \varphi)$  und  $r < 0$  mit dem Punkt mit den Polarkoordinaten  $(|r|, \varphi + \pi)$  zu identifizieren.

**BEISPIEL 3.1.** 1.)  $r = \varphi$ ,  $\varphi \geq 0$  beschreibt die **Archimedische Spirale**

2.)  $r = \cos 2\varphi$ ,  $\varphi \in [0, 2\pi]$ . Wegen  $r(0) = r(2\pi)$  wird eine geschlossene Kurve dargestellt. Wir gehen vom Graphen von  $\cos 2\varphi$ , Abbildung 3.1 aus und bauen den Graph von  $\gamma$  schrittweise auf, Abbildung 3.1.

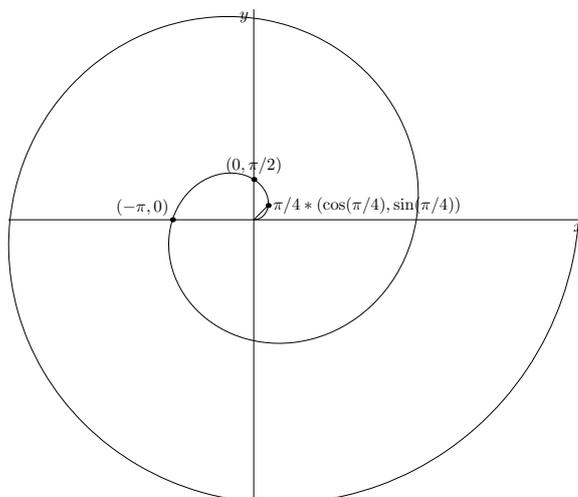


FIGURE 2.4. Archimedische Spirale

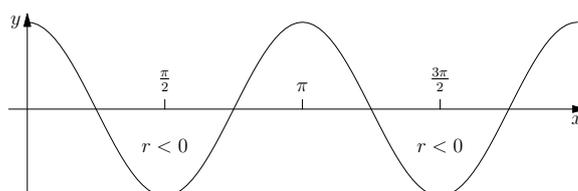
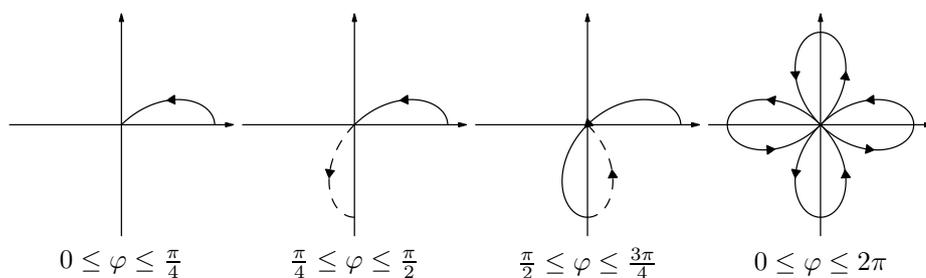
FIGURE 2.5.  $\cos 2\varphi$ 

FIGURE 2.6

#### 4. Der Flächeninhalt in Polarkoordinaten

Wir betrachten vorerst einen Sektor  $\Omega$ , der in Polarkoordinaten beschrieben wird durch

$$\Omega = \{(\varrho, \varphi) : 0 \leq \varrho < r(\varphi), \alpha \leq \varphi \leq \beta\},$$

$$\alpha < \beta \leq \alpha + 2\pi.$$

Um den Flächeninhalt von  $\Omega$  zu berechnen, zerlegen wir  $\Omega$  durch eine Partition

$$\alpha = \varphi_0 < \varphi_1 < \dots < \varphi_n = \beta$$

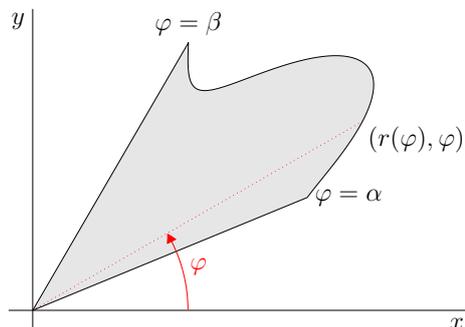


FIGURE 2.7

in Teilsektoren  $\Omega_i$

$$\Omega_i = \{(\varrho, \varphi) : 0 \leq \varrho < r(\varphi), \varphi_{i-1} \leq \varphi \leq \varphi_i\},$$

$i = 1, \dots, n$ . Wegen der Stetigkeit von  $\varphi \rightarrow r(\varphi)$  kann man jedem Sektor  $\Omega_i$  einen Kreissektor ein- und umschreiben:

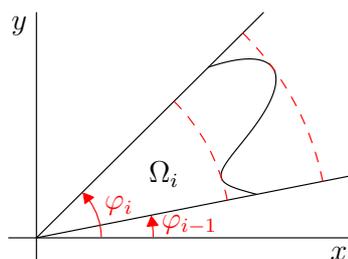


FIGURE 2.8

Setzt man

$$r_i = \min\{r(\varphi) : \varphi_{i-1} \leq \varphi \leq \varphi_i\},$$

$$R_i = \max\{r(\varphi) : \varphi_{i-1} \leq \varphi \leq \varphi_i\}$$

folgt für die Fläche  $|\Omega_i|$  von  $\Omega_i$

$$\frac{1}{2}r_i^2(\varphi_i - \varphi_{i-1}) \leq |\Omega_i| \leq \frac{1}{2}R_i^2(\varphi_i - \varphi_{i-1})$$

und durch Summation über die einzelnen Teilsektoren

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{2}r_i^2(\varphi_i - \varphi_{i-1}) \leq |\Omega| \leq \sum_{i=1}^n \frac{1}{2}R_i^2(\varphi_i - \varphi_{i-1}).$$

Die beiden Enden dieser Ungleichungskette können als Riemannsche Summe für das Integral  $\frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} r^2 d\varphi$  betrachtet werden. Dieses Integral existiert wegen der Stetigkeit von  $\varphi \rightarrow r^2(\varphi)$ . Es ist daher plausibel, den Flächeninhalt von  $\Omega$  durch

$$|\Omega| = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} r^2 d\varphi$$

zu definieren.

BEISPIEL 4.1. Als Beispiel berechnen wir den Flächeninhalt außerhalb des Kreises  $r = 1$  und innerhalb des Kreises  $r = 2 \cos \varphi$ . Durch  $r = 2 \cos \varphi$  wird ein Kreis mit Mittelpunkt  $(1, 0)$  und Radius  $r = 1$  dargestellt. Dies erkennt man, wenn man  $\cos \varphi = \frac{x}{r}$  einsetzt, also

$$r = 2 \frac{x}{r}, \quad \text{also } r^2 = 2x.$$

Dies ist äquivalent zu

$$(x - 1)^2 + y^2 = 1.$$

Die Schnittpunkte der beiden Kreise ergeben sich aus

$$1 = 2 \cos \varphi, \quad \text{bzw.} \quad \cos \varphi = \frac{1}{2},$$

also

$$\varphi = \pm \frac{\pi}{3}.$$

Aus Symmetriegründen ist die gesuchte Fläche

$$|\Omega| = 2 \int_0^{\pi/3} \left( \frac{1}{2} r^2 - \frac{1}{2} \right) d\varphi = \int_0^{\pi/3} (4 \cos^2 \varphi - 1) d\varphi.$$

Mit partieller Integration erhält man

$$\begin{aligned} \int \cos^2 \varphi d\varphi &= \sin \varphi \cos \varphi + \int \sin^2 \varphi d\varphi \\ &= \sin \varphi \cos \varphi + \varphi - \int \cos^2 \varphi d\varphi \end{aligned}$$

also

$$\int \cos^2 \varphi d\varphi = \frac{1}{2} (\sin \varphi \cos \varphi + \varphi) + c.$$

Somit folgt

$$|\Omega| = 2 \sin \varphi \cos \varphi \Big|_0^{\pi/3} + 2 \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{3}.$$

## 5. Tangenteneinheitsvektor, Hauptnormale und Berührebene

Wir betrachten eine zweimal stetig differenzierbare Raumkurve  $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^3$  mit  $\gamma'(t) \neq 0$ ,  $t \in I$ . Der **Tangenteneinheitsvektor** ist dann gegeben durch

$$T(t) = \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|}.$$

Wegen  $\|T(t)\| = 1$  gilt  $\langle T(t), T(t) \rangle = 1$  auf  $I$ . Differenziert man diese Identität, erhält man

$$2 \langle T(t), T'(t) \rangle = 0,$$

also

$$T'(t) \perp T(t).$$

$\|T'(t)\|$  ist ein Maß für die Richtungsänderung des Tangenteneinheitsvektors. Für  $T'(t) \neq 0$  definiert man den **Hauptnormalenvektor**

$$N(t) = \frac{T'(t)}{\|T'(t)\|}.$$

In jedem Punkt einer Raumkurve mit  $T'(t) \neq 0$  wird durch  $T(t)$  und  $N(t)$  die **Berührebene (Schmiegebene)** definiert. Eine Gerade besitzt keine Berührebene, da für sie  $T'(t) = 0$  ist. Der Normalenvektor der Berührebene heißt **Binormalvektor**

$$B(t) = T(t) \times N(t).$$

Auch der Binormalvektor ist ein Einheitsvektor (warum?). In jedem Punkt der Kurve bilden die Vektoren  $(T(t), N(t), B(t))$  das **Frenetsche Dreibein**, das in dieser Reihenfolge ein rechtshändiges Koordinatensystem darstellt.

BEISPIEL 5.1. *Die Schraubenlinie*

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} a \cos t \\ a \sin t \\ bt \end{pmatrix}, \quad a > 0, b > 0, t \in \mathbb{R}$$

hat den Tangentenvektor

$$\gamma'(t) = \begin{pmatrix} -a \sin t \\ a \cos t \\ b \end{pmatrix}$$

und somit den Tangenteneinheitsvektor

$$T(t) = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} \begin{pmatrix} -a \sin t \\ a \cos t \\ b \end{pmatrix}.$$

Der Hauptnormalenvektor ergibt sich aus

$$T'(t) = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} \begin{pmatrix} -a \cos t \\ -a \sin t \\ 0 \end{pmatrix}, \quad N(t) = \begin{pmatrix} -\cos t \\ -\sin t \\ 0 \end{pmatrix}$$

Der Binormalvektor berechnet sich zu

$$B(t) = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} \begin{pmatrix} b \sin t \\ -b \cos t \\ a \end{pmatrix}.$$

Die Berührebene in  $\gamma(t)$  erhält man aus

$$\langle B(t), \gamma(t) - (x, y, z) \rangle = 0,$$

wobei  $(x, y, z)$  einen beliebigen Punkt der Berührebene bezeichnet. Dies ergibt

$$\frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}}(bx \sin t - by \cos t + az) = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}}(ab \sin t \cos t - ab \sin t \cos t + abt),$$

also

$$bx \sin t - by \cos t + az = abt.$$

### 6. Parameterwechsel, Bogenlänge

Es sei  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine parametrisierte Kurve. Die Parametrisierung prägt der Spur von  $\gamma$  eine **Orientierung** auf: Die Stelle  $\gamma(t_1)$  wird vor  $\gamma(t_2)$  erreicht, falls  $t_1 < t_2$  ist (es ist nicht notwendig  $\gamma(t_1) \neq \gamma(t_2)$ ). Betrachtet man die Parametrisierung

$$\tilde{\gamma}(s) = \gamma(a + b - s), \quad s \in [a, b]$$

folgt

$$\tilde{\gamma}(a) = \gamma(b), \quad \tilde{\gamma}(b) = \gamma(a).$$

Die Spur von  $\tilde{\gamma}$  stimmt mit der Spur von  $\gamma$  überein, allerdings werden mit  $\tilde{\gamma}$  die Punkte in der umgekehrten Reihenfolge durchlaufen. Man beachte:  $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \varphi$  mit

$$\varphi: [a, b] \rightarrow [a, b], \quad s \rightarrow a + b - s.$$

Die Abbildung  $\varphi$  ist ein Beispiel einer Parametertransformation. Allgemeiner betrachten wir eine parametrisierte Kurve  $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^n$  und eine stetige Bijektion  $\varphi: J \rightarrow I$ , eines Intervalles  $J$  auf  $I$ . Man nennt

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma}: J &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ \tilde{\gamma} &= \gamma \circ \varphi, \quad \tilde{\gamma}(s) = \gamma(\varphi(s)) \end{aligned}$$

**Umparametrisierung** von  $\gamma$  mittels der **Parametertransformation**  $\varphi$ . Die Parametertransformation heißt **orientierungstreu**, wenn  $\varphi$  streng monoton steigt und **orientierungsumkehrend**, wenn  $\varphi$  streng monoton fällt. Ist  $\varphi$  differenzierbar und  $\varphi' \neq 0$  auf  $J$ , dann ist  $\varphi$  orientierungstreu für  $\varphi' > 0$  und orientierungsumkehrend für  $\varphi' < 0$ . Der Zusammenhang zwischen den Tangentialvektoren ergibt sich aus der Kettenregel:

$$\frac{d}{ds} \tilde{\gamma}(s) = \gamma'(\varphi(s)) \varphi'(s) = \varphi'(\varphi^{-1}(t)) \gamma'(t)$$

mit  $\varphi(s) = t$ .

Ein natürlicher Parameter ist die **Bogenlänge**. Dazu betrachten wir für eine stetig differenzierbare, somit rektifizierbare, reguläre Kurve  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  mit der Länge  $L$  die Abbildung

$$\begin{aligned} \sigma: [a, b] &\rightarrow [0, L], \\ \sigma(t) &= \int_a^t \|\gamma'(s)\| ds, \end{aligned}$$

$\sigma(t)$  ist also die Länge des Kurvensegmentes zwischen  $\gamma(0)$  und  $\gamma(t)$ .  $\sigma$  ist stetig und streng monoton steigend und es ist gilt

$$\sigma'(t) = \|\gamma'(t)\|.$$

Daher ist auch  $\sigma^{-1}$  eine orientierungstreue Parametertransformation. Setzt man  $s = \sigma(t)$  und  $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \sigma^{-1}$  folgt wegen  $(\sigma^{-1})'(\sigma(t)) = \frac{1}{\sigma'(t)}$  für den transformierten Tangentialvektor

$$(*) \quad \frac{d}{ds} \tilde{\gamma}(s) = (\sigma^{-1})'(\sigma(t)) \gamma'(t) = \frac{\gamma'(t)}{\sigma'(t)} = \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|},$$

$\gamma'$  wird an der Stelle  $t = \sigma^{-1}(s)$  ausgewertet. Somit folgt

$$\|\tilde{\gamma}'(s)\| = 1, \quad s \in [0, L].$$

Gilt umgekehrt für eine Parametrisierung  $\|\tilde{\gamma}(\tau)\| = 1$  für alle  $\tau \in [\alpha, \beta]$ , dann ist offenbar  $\tau - \alpha$  die Bogenlänge.

Beschreibt  $\gamma$  den Graph einer stetig differenzierbaren Funktion  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , also  $\gamma(x) = (x, f(x))$ ,  $x \in [a, b]$ , folgt für die Bogenlänge

$$\sigma(x) = \int_a^x \sqrt{1 + f'(\xi)^2} d\xi.$$

Für eine ebene Kurve in Polarkoordinaten

$$\varrho = r(\varphi), \quad \varphi \in [\alpha, \beta]$$

ergibt sich die Bogenlänge zu

$$\sigma(\varphi) = \int_\alpha^\varphi \sqrt{r^2 + r'^2} d\varphi.$$

BEISPIEL 6.1. Für die Bogenlänge der Schraubenlinie

$$\gamma(t) = (r \cos t, r \sin t, ht), \quad t \geq 0$$

erhält man wegen  $\|\gamma'(t)\| = \sqrt{r^2 + h^2}$

$$\sigma(t) = \int_0^t \sqrt{r^2 + h^2} d\xi = t\sqrt{r^2 + h^2}.$$

Setzt man  $s = \sigma(t)$ , also  $t = \sigma^{-1}(s) = \frac{s}{\sqrt{r^2 + h^2}}$  erhält man für die Parametrisierung der Schraubenlinie durch die Bogenlänge

$$\tilde{\gamma}(s) = \gamma(\sigma^{-1}(s)) = \left( r \cos \frac{s}{\sqrt{r^2 + h^2}}, r \sin \frac{s}{\sqrt{r^2 + h^2}}, \frac{hs}{\sqrt{r^2 + h^2}} \right).$$

Man verifiziere  $\|\tilde{\gamma}'(s)\| = 1$ ,  $s \geq 0$ .

## 7. Krümmung

Es sei  $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine stetig differenzierbare Kurve, welche durch die Bogenlänge parametrisiert wurde. Dann ist  $\gamma'(s)$  ein Einheitsvektor, also  $\gamma'(s) = T(s)$ , der abhängig von  $s$  nur seine Richtung ändert. Man bezeichnet mit

$$\kappa(s) = \|\gamma''(s)\| = \|T'(s)\|, \quad s \in I$$

die **Krümmung** der Kurve an der Stelle  $\gamma(s)$ .

Aus der Definition des Hauptnormalenvektors folgt dann unmittelbar

$$T'(s) = \kappa(s)N(s).$$

BEISPIEL 7.1. Für die Schraubenlinie erhalten wir aus dem vorangehenden Beispiel

$$\tilde{\gamma}''(s) = \frac{r}{r^2 + h^2} \left( -\cos \frac{s}{\sqrt{r^2 + h^2}}, -\sin \frac{s}{\sqrt{r^2 + h^2}}, 0 \right)$$

und somit

$$\kappa(s) = \|\tilde{\gamma}''(s)\| = \frac{r}{r^2 + h^2}.$$

Für  $h = 0$  erhält man die Krümmung des Kreises  $\kappa = \frac{1}{r}$ . Je kleiner der Radius des Kreises, umso größer ist dessen Krümmung.

Es ist nicht immer praktisch, die Bogenlänge als Parameter zu verwenden. Liegt eine andere Parametrisierung vor, beispielsweise  $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ , ergibt sich die Krümmung aus folgender Überlegung. Durch einen Parameterwechsel erhält man die Parametrisierung durch die Bogenlänge

$$\tilde{\gamma} = \gamma \circ \sigma^{-1}, \quad \sigma(t) = \int_a^t \|\gamma'(\xi)\| d\xi.$$

In (\*) wurde bereits

$$\tilde{\gamma}'(s) = \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|} = T(t)$$

mit  $t = \sigma^{-1}(s)$  gezeigt. Daraus folgt

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma}''(s) &= \frac{d}{ds} T(\sigma^{-1}(s)) = T'(\sigma^{-1}(s)) \frac{1}{\sigma'(\sigma^{-1}(s))} \\ &= T'(t) \frac{1}{\sigma'(t)} = \frac{T'(t)}{\|\gamma'(t)\|} \end{aligned}$$

Somit gilt

**SATZ 7.1.** *Es sei  $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine stetig differenzierbare, reguläre Kurve. Dann ist die Krümmung an der Stelle  $\gamma(t)$  gegeben durch*

$$\kappa(t) = \frac{\|T'(t)\|}{\|\gamma'(t)\|}.$$

Es ist nun leicht, die Krümmung des Graphen einer Funktion, bzw. einer Kurve in Polarkoordinaten auszurechnen. Es sei  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  stetig differenzierbar und  $\gamma(x) = (x, f(x))$ ,  $x \in I$ . Der Tangenteneinheitsvektor ist gegeben durch

$$T(x) = \frac{\gamma'(x)}{\|\gamma'(x)\|} = \frac{1}{\sqrt{1+f'^2}}(1, f'(x)).$$

Es folgt

$$\begin{aligned} T'(x) &= -(1+f'^2)^{-3/2} f' f'' (1, f'(x)) + (1+f'^2)^{-1/2} (0, f'') \\ &= (1+f'^2)^{-3/2} (-(f' f'', f'^2 f'') + (0, f'' + f'^2 f'')) \\ &= (1+f'^2)^{-3/2} (-f' f'', f'') = (1+f'^2)^{-3/2} f'' (-f', 1) \end{aligned}$$

also

$$\|T'(x)\| = (1+f'^2)^{-1} |f''|.$$

Daraus ergibt sich für die Krümmung des Graphen von  $f$  an der Stelle  $(x, f(x))$

$$\kappa(x) = \frac{|f''(x)|}{(1+f'^2(x))^{-3/2}}$$

Für die Berechnung der Krümmung einer Kurve in Polarkoordinaten gehen wir von

$$\gamma(\varphi) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi)$$

aus. Wegen

$$T(\varphi) = (r^2 + r'^2)^{-1/2}(r' \cos \varphi - r \sin \varphi, r' \sin \varphi + r \cos \varphi)$$

erhält man

$$\begin{aligned} T'(\varphi) &= -(r^2 + r'^2)^{-3/2}(rr' + r'r'')(r' \cos \varphi - r \sin \varphi, r' \sin \varphi + r \cos \varphi) \\ &\quad + (r^2 + r'^2)^{-1/2}(r'' \cos \varphi - 2r' \sin \varphi - r \cos \varphi, r'' \sin \varphi + 2r' \cos \varphi - r \sin \varphi) \\ &= (r^2 + r'^2)^{-3/2}(-r'(r + r''))(r' \cos \varphi - r \sin \varphi, r' \sin \varphi + r \cos \varphi) \\ &\quad + (r^2 + r'^2)((r'' - r) \cos \varphi - 2r' \sin \varphi, (r'' - r) \sin \varphi + 2r' \cos \varphi) \\ &= (r^2 + r'^2)^{-3/2}((-r'^2(r + r'')) + (r^2 + r'^2)(r'' - r)) \cos \varphi \\ &\quad + (rr'(r + r'') - 2r'(r^2 + r'^2)) \sin \varphi, (-r'^2(r + r'')) + (r^2 + r'^2)(r'' - r)) \sin \varphi \\ &\quad + (-rr'(r + r'') + 2r'(r^2 + r'^2)) \cos \varphi) \\ &= (r^2 + r'^2)^{-3/2}((-rr'^2 - r'^2r'' + r^2r'' - r^3 + r'^2r'' - rr'^2) \cos \varphi \\ &\quad + (r^2r' + rr'r'' - 2r'r^2 - 2r'^3) \sin \varphi, (-rr'^2 - r'^2r'' + r^2r'' - r^3 + r'^2r'' - rr'^2) \sin \varphi \\ &\quad + (-r^2r' - rr'r'' + 2r'r^2 + 2r'^3) \cos \varphi) \\ &= (r^2 + r'^2)^{-3/2}(-r(2r'^2 - rr'' + r^2) \cos \varphi - r'(2r'^2 - rr'' + r^2) \sin \varphi, \\ &\quad -r(2r'^2 - rr'' + r^2) \sin \varphi + r'(2r'^2 - rr'' + r^2) \cos \varphi) \\ &= (r^2 + r'^2)^{-3/2}(2r'^2 - rr'' + r^2)(-r \cos \varphi - r' \sin \varphi, -r \sin \varphi + r' \cos \varphi), \end{aligned}$$

also

$$\|T'(\varphi)\| = \frac{|2r'^2 - rr'' + r^2|}{r^2 + r'^2}.$$

Somit ergibt sich schließlich

$$\kappa(\varphi) = \frac{|2r'^2 - rr'' + r^2|}{(r^2 + r'^2)^{3/2}}.$$

Ist  $\kappa_0$  die Krümmung einer Kurve  $\gamma$  an der Stelle  $\gamma(t_0)$ , bedeutet dies geometrisch, daß sich  $\gamma$  in  $\gamma(t_0)$  wie ein Kreis mit Radius  $\frac{1}{\kappa_0}$  krümmt, dessen Mittelpunkt gegeben ist durch

$$M(t_0) = \gamma(t_0) + \frac{1}{\kappa_0}N(t_0).$$

Für Raumkurven liegt dieser Kreis in der Schmiegenebene.

## 8. Kinematische Interpretation

Wir betrachten die Bewegung eines Partikels  $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Aus

$$T(t) = \frac{\gamma'(t)}{\|\gamma'(t)\|} = \frac{\gamma'(t)}{\sigma'(t)} = \frac{v(t)}{\sigma'(t)},$$

( $\sigma(t)$  Bogenlänge) erhält man für den Geschwindigkeitsvektor

$$v(t) = \sigma'(t)T(t)$$

und somit für die Beschleunigung

$$a = \sigma''T + \sigma'T',$$

wegen  $T' = \kappa\sigma'N$  weiters

$$a = \sigma''T + \sigma'^2\kappa N = a_T + a_N.$$

Der Beschleunigungsvektor liegt somit in der Schmiegeebene. Er ist die Summe aus einer Tangentialkomponente

$$a_T = \sigma''T,$$

welche nur von der Änderung der Größe der Geschwindigkeit abhängt. Sie ist unabhängig vom jeweiligen Weg des Partikels. Die Normalkomponente der Beschleunigung hingegen,

$$a_N = \sigma'^2\kappa N$$

hängt sowohl von der Krümmung, als auch von der Größe der Geschwindigkeit ab. Dies äußert sich in einer Verringerung der Zentripetalkraft, wenn eine Kurve mit kleinerer Geschwindigkeit oder eine Kurve mit kleinerer Krümmung bei gleicher Geschwindigkeit durchfahren wird.

## CHAPTER 3

# Integration von Funktionen in mehreren Veränderlichen

### 1. Iterierte Integrale

Eine beschränkte Teilmenge  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  heißt **Normalbereich** bezüglich der  $x$ -Achse (Normalbereich 1. Art), wenn die Projektion von  $\Omega$  auf die  $x$ -Achse ein abgeschlossenes Intervall  $[a, b]$  ist und es Funktionen  $\varphi, \psi: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  gibt mit

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: \varphi(x) \leq y \leq \psi(x), x \in [a, b]\},$$

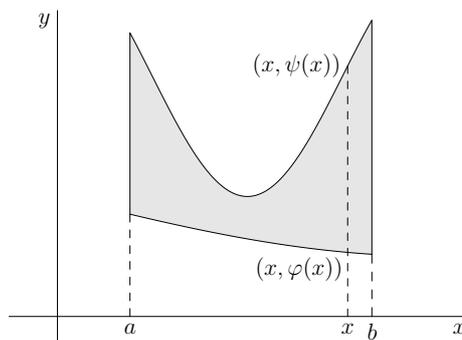


FIGURE 3.1. Normalbereich 1. Art

$\Omega$  heißt Normalbereich bezüglich der  $y$ -Achse (Normalbereich 2. Art), wenn die Projektion von  $\Omega$  auf die  $y$ -Achse ein abgeschlossenes Intervall  $[c, d]$  ist und es Funktionen  $\alpha, \beta: [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$  gibt mit

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: \alpha(y) \leq x \leq \beta(y), y \in [c, d]\}.$$

Es gibt natürlich Bereiche, welche sowohl als Normalbereich bezüglich der  $x$ -Achse, als auch bezüglich der  $y$ -Achse angesehen werden können.

Viele Teilmengen des  $\mathbb{R}^2$  lassen sich als Vereinigung von Normalbereichen 1. und 2. Art darstellen.

Es sei  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und  $\Omega$  ein Normalbereich bezüglich der  $x$ -Achse. Dann sind für alle  $x \in [a, b]$  die Schnittfunktionen

$$y \rightarrow f(x, y)$$

stetig. Somit existieren die Integrale

$$\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) dy.$$

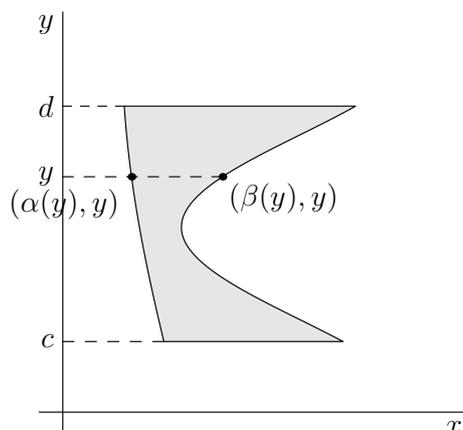


FIGURE 3.2. Normalbereich 2. Art

Man kann dann zeigen, daß auch das **iterierte Integral**

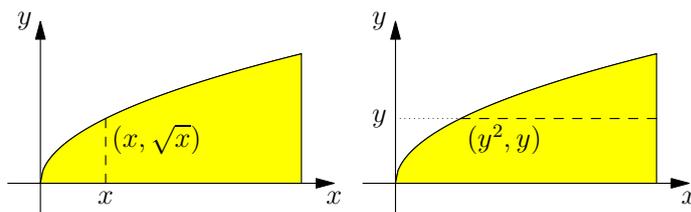
$$\int_a^b \left[ \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) dy \right] dx$$

existiert. Ist  $\Omega$  ein Normalbereich bezüglich der  $y$ -Achse, existiert analog das iterierte Integral

$$\int_c^d \left[ \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x, y) dx \right] dy.$$

BEISPIEL 1.1. Wir betrachten  $f(x, y) = xy$  auf

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq \sqrt{x}, 0 \leq x \leq 4\}.$$



$\Omega$  ist ein Normalbereich bezüglich der  $x$ -Achse mit

$$\varphi(x) \equiv 0, \quad \psi(x) = \sqrt{x}, \quad a = 0, \quad b = 4.$$

Somit ist

$$\begin{aligned} \int_a^b \left[ \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) dy \right] dx &= \int_0^4 \left[ \int_0^{\sqrt{x}} xy dy \right] dx \\ &= \int_0^4 x \left[ \frac{y^2}{2} \Big|_0^{\sqrt{x}} \right] dx = \frac{1}{2} \int_0^4 x^2 dx = \frac{32}{3}. \end{aligned}$$

$\Omega$  ist aber auch ein Normalbereich bezüglich der  $y$ -Achse mit

$$\alpha(y) = y^2, \quad \beta(y) \equiv 4, \quad c = 0, \quad d = 2.$$

Das entsprechende iterierte Integral ergibt

$$\begin{aligned} \int_c^d \left[ \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x, y) dx \right] dy &= \int_0^2 \left[ \int_{x=y^2}^4 xy dx \right] dy \\ &= \int_0^2 y \left[ \frac{x^2}{2} \Big|_{y^2}^4 \right] dy = \int_0^2 y \left( 8 - \frac{y^4}{2} \right) dy \\ &= 4y^2 \Big|_0^2 - \frac{1}{48} y^6 \Big|_0^2 = \frac{32}{3}. \end{aligned}$$

Die Gleichheit der beiden iterierten Integrale in diesem Beispiel ist kein Zufall. Wir zitieren ein Resultat:

**SATZ 1.1.** *Es sei  $\Omega$  ein Normalbereich bezüglich der  $x$ -, als auch bezüglich der  $y$ -Achse und  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$*

stetig. Dann existieren beide iterierte Integrale und sind gleich

$$\int_a^b \left[ \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) dy \right] dx = \int_c^d \left[ \int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x, y) dx \right] dy.$$

In manchen Beispielen ist eine Integrationsreihenfolge vorteilhafter als die andere:

**BEISPIEL 1.2.** *Wir betrachten  $(x, y) \rightarrow f(x, y) = e^{-x^2}$  auf dem Dreieck*

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq x, 0 \leq x \leq 1\}.$$

*Wir erhalten*

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left[ \int_{y=0}^x e^{-x^2} dy \right] dx &= \int_0^1 x e^{-x^2} dx = -\frac{1}{2} \int_0^1 \frac{d}{dx} e^{-x^2} dx \\ &= -\frac{1}{2} e^{-x^2} \Big|_0^1 = \frac{1}{2} (1 - e^{-1}). \end{aligned}$$

*Geht man von der umgekehrten Integrationsreihenfolge aus*

$$\int_0^1 \left[ \int_{x=y}^1 e^{-x^2} dx \right] dy,$$

*ist das innere Integral kein elementar lösbares Integral.*

Die Interpretation und Anwendung iterierter Integrale ergibt sich aus dem Konzept mehrdimensionaler Integrale.

## 2. Doppel- und Dreifachintegrale

Wir betrachten vorerst einen rechteckigen Bereich  $R = [a, b] \times [c, d]$  und eine stetige Funktion  $f: R \rightarrow \mathbb{R}$ . Jedes der Intervalle  $[a, b]$  und  $[c, d]$  unterteilen wir durch (der

Einfachheit halber) äquidistante Partitionen

$$\begin{aligned} x_i &= a + i \frac{b-a}{n}, & i &= 0, \dots, n, & \Delta x &= \frac{b-a}{n} \\ x_j &= c + j \frac{d-c}{m}, & j &= 0, \dots, m, & \Delta y &= \frac{d-c}{m}, \end{aligned}$$

welche auf die Zerlegung von  $R$  in die Rechtecke

$$\mathcal{Z}: \quad R_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j],$$

$1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m$ , führen. Es gilt offenbar

$$R = \bigcup_{i,j} R_{ij}$$

Aus jedem Teilrechteck wählen wir einen Punkt  $\xi_{ij} = (x_{ij}, y_{ij})$  aus und setzen  $f_{ij} = f(x_{ij}, y_{ij})$ . Man nennt die Doppelsumme

$$S_{nm}(f) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m f_{ij} \Delta x \Delta y$$

eine zur Zerlegung  $\mathcal{Z}$  gehörende Riemannsche Summe. Ist  $f \geq 0$  auf  $R$ , dann ist  $f_{ij} \Delta x \Delta y$  das Volumen des Quaders mit der Grundfläche  $R_{ij}$  und der Höhe  $f_{ij}$ .  $S_{nm}$  approximiert daher für  $f \geq 0$  das Volumen des von der Fläche  $z = f(x, y)$  und dem Rechteck  $R$  begrenzten Körpers. Ist  $f$  stetig, kann man zeigen, daß  $S_{nm}$  einen Grenzwert besitzt, der unabhängig ist von der Art der Zerlegung von  $R$  und auch unabhängig ist von den gewählten Zwischenstellen  $\xi_{ij}$ . Man nennt diesen Grenzwert Doppelintegral von  $f$  über  $R$  und schreibt

$$\int_R f(x, y) \, dx dy \quad \text{oder} \quad \iint_R f(x, y) \, dx dy$$

Es ist nun sinnvoll, das Volumen  $V(K)$  des Körpers

$$K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq f(x, y), (x, y) \in R\}$$

zu *definieren* durch

$$|K| = \iint_R f(x, y) \, dx dy.$$

Für  $f \equiv 1$  erhält man das Volumen des Quaders mit der Grundfläche  $R$  und der Höhe 1. Dies ist (abgesehen von der Dimension) gleich dem Wert des Flächeninhaltes des Rechteckes  $R$ .

Ist nun  $\Omega$  ein Normalbereich bezüglich der  $x$ -Achse (oder bezüglich der  $y$ -Achse) oder eine Vereinigung von endlich vielen Normalbereichen kann man  $\Omega$  in ein geeignetes Rechteck  $R$  einbetten. Ist  $f$  auf  $\Omega$  stetig und bezeichnet  $\tilde{f}$  die triviale Fortsetzung von  $f$  auf  $R$ , also

$$\tilde{f}(x, y) = \begin{cases} f(x, y), & (x, y) \in \Omega, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

dann kann man die vorangehende Konstruktion des Doppelintegrals für  $\tilde{f}$  auf  $R$  durchführen und definiert

$$\int_{\Omega} f(x, y) \, dx dy = \int_R \tilde{f}(x, y) \, dx dy.$$

Gilt  $f \geq 0$  auf  $\Omega$ , kann man das Doppelintegral wieder interpretieren als Volumen des zylindrischen Bereiches

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq f(x, y), (x, y) \in \Omega\}.$$

Für  $f = 1$  ergibt das Doppelintegral den Flächeninhalt von  $\Omega$

$$|\Omega| = \int_{\Omega} dx dy.$$

Das Doppelintegral besitzt zwar eine anschauliche Bedeutung, aber es ist nicht klar, wie es ausgewertet werden kann. Ohne Beweis zitieren wir ein fundamentales Resultat, welches Doppelintegrale und iterierte Integrale verknüpft.

**SATZ 2.1 (Fubini).** *Es sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  ein Normalbereich,  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  stetig,  $R = [a, b] \times [c, d] \supset \Omega$  und  $\tilde{f}$  die triviale Fortsetzung von  $f$  auf  $R$ . Dann existiert  $\int_R \tilde{f}(x, y) \, dx dy$  und es gilt*

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} f(x, y) \, dx dy &= \int_R \tilde{f}(x, y) \, dx dy \\ &= \int_{x=a}^b \left[ \int_{y=c}^d \tilde{f}(x, y) \, dy \right] dx = \int_{y=c}^d \left[ \int_{x=a}^b \tilde{f}(x, y) \, dx \right] dy. \end{aligned}$$

Ist beispielsweise  $\Omega$  ein Normalbereich bezüglich der  $x$ -Achse erhält man

$$\int_{\Omega} f(x, y) \, dx dy = \int_{x=a}^b \left[ \int_{y=\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) \, dy \right] dx.$$

Für den Flächeninhalt von  $\Omega$  finden wir die bereits bekannte Formel

$$|\Omega| = \int_{\Omega} dx dy = \int_{x=a}^b \left[ \int_{y=\varphi(x)}^{\psi(x)} dy \right] dx$$

also

$$|\Omega| = \int_a^b (\psi(x) - \varphi(x)) \, dx.$$

Ein analoges Resultat gilt, wenn  $\Omega$  ein Normalbereich bezüglich der  $y$ -Achse ist:

$$\int_{\Omega} f(x, y) \, dx dy = \int_{y=c}^d \left[ \int_{x=\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x, y) \, dx \right] dy$$

und somit

$$|\Omega| = \int_c^d (\beta(y) - \alpha(y)) \, dy.$$

Ist  $\Omega$  ein Normalbereich sowohl bezüglich der  $x$ -Achse, als auch bezüglich der  $y$ -Achse, gilt

$$\int_{\Omega} f(x, y) \, dx dy = \int_{x=a}^b \left[ \int_{y=\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) \, dy \right] dx = \int_{y=c}^d \left[ \int_{x=\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x, y) \, dx \right] dy.$$

Für Dreifachintegrale gelten analoge Überlegungen: Eine Teilmenge  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  heißt Normalbereich bezüglich der  $xy$ -Ebene, wenn es stetige Funktionen  $\gamma_1, \gamma_2: \Omega_{xy} \rightarrow \mathbb{R}$  gibt, mit

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3: \gamma_1(x, y) \leq z \leq \gamma_2(x, y), (x, y) \in \Omega_{xy}\},$$

wobei  $\Omega_{xy}$  die Projektion von  $\Omega$  auf die  $xy$ -Ebene bedeutet. Normalbereiche bezüglich der anderen Ebenen sind analog definiert. Ist  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  stetig und bettet man  $\Omega$  in einen hinreichend großen Quader  $Q$  ein, kann man wie beim Doppelintegral ein Dreifachintegral für die triviale Fortsetzung  $\tilde{f}$  von  $f$  bilden und vereinbart

$$\int_{\Omega} f(x, y, z) \, dx dy dz = \int_Q \tilde{f}(x, y, z) \, dx dy dz.$$

Man definiert das Volumen von  $\Omega$

$$|\Omega| = \int_{\Omega} dx dy dz.$$

Eine Variante des Satzes von Fubini verknüpft ein Dreifachintegral über einen Normalbereich mit einem dreifach iterierten Integral. Ist  $\Omega$  ein Normalbereich bezüglich der  $xy$ -Ebene und  $\Omega_{xy}$  ein Normalbereich bezüglich der  $x$ -Achse, also

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^n: \gamma_1(x, y) \leq z \leq \gamma_2(x, y), \varphi(x) \leq y \leq \psi(x), a \leq x \leq b\}$$

erhält man beispielsweise

$$\int_{\Omega} f(x, y, z) \, dx dy dz = \int_a^b \left[ \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \left[ \int_{\gamma_1(x, y)}^{\gamma_2(x, y)} f(x, y, z) \, dz \right] dy \right] dx.$$

Andere Integrationsreihenfolgen sind möglich und in vielen Fällen oft besser geeignet. Für das Volumen eines derartigen Körpers erhält man

$$\begin{aligned} |\Omega| &= \int_a^b \left[ \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \left[ \int_{\gamma_1(x, y)}^{\gamma_2(x, y)} dz \right] dy \right] dx \\ &= \int_a^b \left[ \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} (\gamma_2(x, y) - \gamma_1(x, y)) dy \right] dx \end{aligned}$$

Berücksichtigt man, daß

$$A(x) = \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \left[ \int_{\gamma_1(x, y)}^{\gamma_2(x, y)} dz \right] dy$$

den Inhalt der Schnittfläche des Körpers für ein festes  $x$  bedeutet, findet man das bekannte **Prinzip von Cavalieri**

$$|\Omega| = \int_a^b A(x) \, dx.$$

BEISPIEL 2.1. Man berechne das Volumen des Körpers  $\Omega$ , der nach oben durch den parabolischen Zylinder  $z = 4 - y^2$  und unten durch das elliptische Paraboloid  $z = x^2 + 3y^2$  begrenzt wird.

Die Schnittkurve beider Körper ergibt sich aus

$$4 - y^2 = x^2 + 3y^2$$

also

$$x^2 + 4y^2 = 4.$$

Die Schnittkurve kann daher geschrieben werden in der Form

$$\begin{cases} x^2 + 4y^2 = 4 \\ z = 4 - y^2. \end{cases}$$

Ihre Projektion  $\Omega_{xy}$  in die  $xy$ -Ebene ist die Ellipse  $x^2 + 4y^2 = 4$ , also

$$\Omega_{xy} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 4y^2 \leq 4\}.$$

Der Schnittkörper  $\Omega$  wird daher beschrieben durch

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + 3y^2 \leq z \leq 4 - y^2, (x, y) \in \Omega_{xy}\}.$$

Somit ergibt sich das Volumen aus

$$\begin{aligned} |\Omega| &= 2 \int_{x=-2}^2 \left[ \int_{y=0}^{\frac{1}{2}\sqrt{4-x^2}} \left[ \int_{z=x^2+3y^2}^{z=4-y^2} dz \right] dy \right] dx \\ &= 2 \int_{x=-2}^2 \left[ \int_{y=0}^{\frac{1}{2}\sqrt{4-x^2}} (4 - 4y^2 - x^2) dy \right] dx = \frac{4}{3} \int_0^2 (4 - x^2)^{3/2} dx. \end{aligned}$$

Mit partieller Integration erhält man

$$\begin{aligned} \int_0^2 (4 - x^2)^{3/2} dx &= x(4 - x^2)^{3/2} \Big|_0^2 + 3 \int_0^2 x^2(4 - x^2)^{1/2} dx \\ &= -3 \int_0^2 (4 - x^2)^{3/2} dx + 12 \int_0^2 \sqrt{4 - x^2} dx \end{aligned}$$

also

$$\int_0^2 (4 - x^2)^{3/2} dx = 3 \int_0^2 \sqrt{4 - x^2} dx.$$

Substituiert man im letzten Integral  $x = 2 \sin u$  (formal  $dx = 2 \cos u du$ ) erhält man

$$\int_0^2 \sqrt{4 - x^2} dx = 4 \int_0^{\pi/2} \cos^2 u du = 2 \int_0^{\pi/2} (\sin^2 u + u \cos^2 u) du = \pi$$

Im letzten Schritt wurde  $\int_0^{\pi/2} \sin^2 u du = \int_0^{\pi/2} \cos^2 u du$  verwendet. Insgesamt erhält man daher

$$|\Omega| = \frac{4}{3} \int_0^2 (4 - x^2)^{3/2} dx = 4\pi.$$

Dieses Beispiel zeigt, daß bei mehrfachen Integralen zum Auffinden der Stammfunktion noch die Schwierigkeit hinzukommt, den Integrationsbereich zu beschreiben.

### 3. Variablensubstitution

Die Auswertung eines Mehrfachintegrals kann durch die Wahl eines geeigneten Koordinatensystems oft erheblich vereinfacht werden. Dem entspricht in einer Dimension die Substitutionsformel

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(u) du = \int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x) dx.$$

Wir beginnen mit einer nützlichen Formel für die Berechnung von Flächeninhalten oder Volumina.

**SATZ 3.1.** *Es sei  $\tilde{\Omega}$  ein offener Normalbereich des  $\mathbb{R}^n$ ,  $n = 2, 3$ ,  $T: \tilde{\Omega} \rightarrow \Omega = T(\tilde{\Omega})$  sei bijektiv und  $T$  und  $T^{-1}$  seien stetig differenzierbar. Dann läßt sich das Volumen von  $\Omega$  berechnen durch*

$$|\Omega| = \int_{\tilde{\Omega}} |\det T'(x)| dv,$$

wobei das Volumenelement  $dv$  für  $dx dy$  im Falle  $n = 2$  und für  $dx dy dz$  im Falle  $n = 3$  steht.

**BEMERKUNG 3.1.** Normalbereiche wurden als abgeschlossene Teilmengen eingeführt. Durch Entfernen des Randes erhält man offene Normalbereiche. Die Einschränkung auf offene Normalbereiche ist aus theoretischen Gründen notwendig, da die erforderlichen Eigenschaften von  $T$  meist nur auf offenen Teilmengen nachgewiesen werden können. Man vergleiche die entsprechende Diskussion der Koordinatentransformationen. Für die praktische Anwendung in der Integralrechnung macht es keinen Unterschied, ob man mit abgeschlossenen oder offenen Normalbereichen rechnet.

Verwendet man die Jakobi-Determinante, schreibt man beispielweise im Falle eines ebenen Normalbereiches

$$|\Omega| = \int_{\tilde{\Omega}} \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| dudv.$$

**BEWEISSKIZZE.** Der Beweis von Satz 3.1 ist sehr aufwendig. Wir begnügen uns daher mit folgender plausiblen Begründung für einen ebenen Normalbereich  $\tilde{\Omega}$ . Wir betrachten eine Zerlegung von  $\tilde{\Omega}$  in achsenparallele Rechtecke, welche mittels  $T$  eine Partition von  $\Omega$  induziert (auf den Beitrag der Randelemente können wir hier nicht eingehen). Greifen wir ein Rechteck  $\tilde{R}$  heraus, welches auf das "Kurvenpolygon"  $T(\tilde{R})$  abgebildet wird.

Der Punkt  $(u_0 + \Delta u, v_0)$  wird abgebildet auf den Punkt  $T(u_0 + \Delta u, v_0)$ . Aus der Differenzierbarkeit von  $T$  folgt

$$\begin{aligned} T(u_0 + \Delta u, v_0) &= T(u_0, v_0) + T'(u_0, v_0) \begin{pmatrix} \Delta u \\ 0 \end{pmatrix} + r(\Delta u) \\ &\sim T(u_0, v_0) + T'(u_0, v_0) \begin{pmatrix} \Delta u \\ 0 \end{pmatrix} \equiv T(u_0, v_0) + \Delta u t_u. \end{aligned}$$

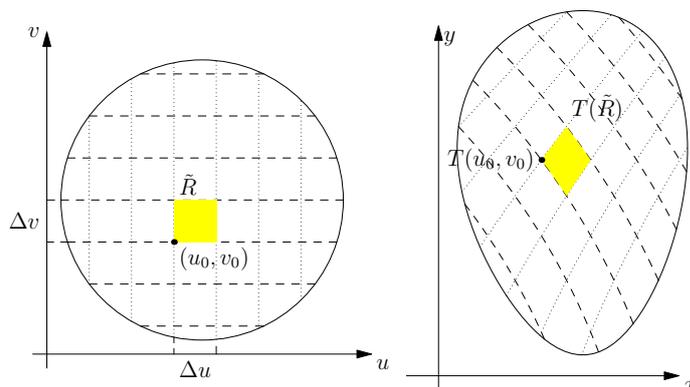


FIGURE 3.3

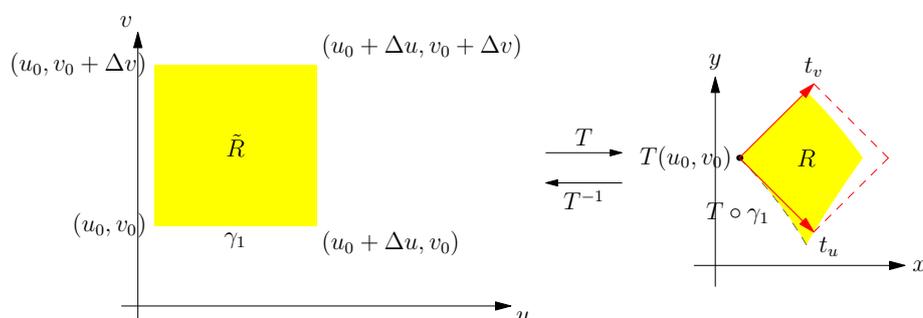


FIGURE 3.4

Der Vektor  $t_u$  ist gegeben durch

$$t_u = T'(u_0, v_0)e_1 = \begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_u \\ y_u \end{pmatrix}$$

( $T(u, v) = (x(u, v), y(u, v))$ ). Bildet man die Gerade

$$\gamma_1(t) = (u_0, v_0) + te_1$$

durch  $T$  ab, erhält man die Koordinatenlinie  $T \circ \gamma_1$ . Wegen

$$(T \circ \gamma_1)'(0) = T'(\gamma_1(0))\gamma_1'(0) = T'(u_0, v_0)e_1 = t_u$$

folgt, daß  $t_u$  der Tangentialvektor an die Koordinatenlinie  $T \circ \gamma_1$  im Punkt  $(x_0, y_0)$  ist. Auf analoge Weise erhält man

$$T(u_0, v_0 + \Delta v) \sim T(u_0, v_0) + \Delta vt_v$$

mit

$$t_v = T'(u_0, v_0)e_2 = \begin{pmatrix} x_v \\ y_v \end{pmatrix}.$$

Das durch die Tangentialvektoren  $t_u$  und  $t_v$  aufgespannte Parallelogramm  $R$  ist eine gute Approximation von  $T(\tilde{R})$ . Somit folgt

$$|T(\tilde{R})| \sim |R| = \|\Delta ut_u \times \Delta vt_v\| = |\det T'(u_0, v_0)|\Delta u\Delta v$$

(Das äußere Produkt  $t_u \times t_v$  ist sinnvoll, falls man  $t_u$  und  $t_v$  in  $\mathbb{R}^3$  einbettet:

$$t_u \times t_v = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ x_u & y_u & 0 \\ x_v & y_v & 0 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \det T'(u_0, v_0) \end{pmatrix}$$

Die Behauptung ergibt sich nun aus dem Ansatz

$$|\Omega| = \sum_{\tilde{R}} |T(\tilde{R})| \sim \sum_{\tilde{R}} |\det T'(u, v)| \Delta u \Delta v,$$

da die Summe auf der rechten Seite eine Riemannsche Summe für das Doppelintegral

$$\int_{\tilde{\Omega}} |\det DT(u, v)| \, dudv$$

darstellt. □

**BEISPIEL 3.1.** Als Beispiel berechnen wir die Fläche eines Kreises mit Radius  $R$ , der in Polarkoordinaten durch

$$K = \{(r \cos \varphi, r \sin \varphi) : 0 \leq r \leq R, 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}$$

dargestellt werden kann. Die Jacobi-Determinante der Transformation

$$T: (r, \varphi) \rightarrow (x, y) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi)$$

wurde bereits in Abschnitt 9.1 berechnet

$$\left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \varphi)} \right| = r.$$

Satz 3.1 ergibt dann

$$|K| = \int_0^{2\pi} \left[ \int_0^R r \, dr \right] d\varphi = R^2 \pi.$$

**BEMERKUNG 3.2.** Wir merken an, daß Satz 3.1 nicht direkt auf  $K$  anwendbar ist, da  $K$  nicht offen und  $T: [0, R] \times [-\pi, \pi]$  nicht injektiv ist. Mit Hilfe von Satz 3.1 wird eigentlich der Flächeninhalt von

$$\begin{aligned} K^* &= K \setminus (\{(x, 0) : -R \leq x \leq 0\} \cup \{(x, y) : x^2 + y^2 = R^2\}) \\ &= T((0, R) \times (-\pi, \pi)) \end{aligned}$$

berechnet. Man kann jedoch (in Übereinstimmung mit der Anschauung) zeigen, daß  $K$  und  $K^*$  denselben Flächeninhalt haben.

Satz 3.1 ist die Grundlage für folgende Transformationsformel für mehrdimensionale Integrale:

**SATZ 3.2.** Es sei  $\tilde{\Omega}$  ein offener Normalbereich des  $\mathbb{R}^n$ ,  $n = 2, 3$ ,  $T: \tilde{\Omega} \rightarrow \Omega = T(\tilde{\Omega})$  eine Bijektion und  $T$  und  $T^{-1}$  seien stetig differenzierbar. Dann gilt für jede stetige, beschränkte Funktion  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$

$$\int_{\Omega} f(x) \, dx = \int_{\tilde{\Omega}} (f \circ T)(u) |\det DT(u)| \, du.$$

(die entsprechenden Volums-, Flächenelemente wurden durch  $dx$  bzw.  $du$  angedeutet).

BEISPIEL 3.2. Man berechne  $\iint_{\Omega} xy \, dx dy$ , wobei  $\Omega$  die von den Kurven

$$x^2 + y^2 = 4, \quad x^2 + y^2 = 9, \quad x^2 - y^2 = 1, \quad x^2 - y^2 = 4$$

begrenzt Teilmenge im 1. Quadranten ist.

Der Rand von  $\Omega$  legt es nahe

$$u = x^2 + y^2, \quad v = x^2 - y^2$$

zu setzen. Wegen

$$u + v = 2x^2 \quad \text{und} \quad u - v = 2y^2$$

erhält man

$$x = \sqrt{\frac{u+v}{2}} \quad \text{und} \quad y = \sqrt{\frac{u-v}{2}}$$

Die Transformation  $T: (u, v) \rightarrow (x, y)$  bildet das Rechteck  $\tilde{\Omega} = (4, 9) \times (1, 4)$  auf  $\Omega$  ab.  $T$  ist injektiv und stetig differenzierbar (Begründung?). Für die Ableitung erhalten wir

$$DT'(u, v) = \begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{u+v}} & \frac{1}{\sqrt{u+v}} \\ \frac{1}{\sqrt{u-v}} & -\frac{1}{\sqrt{u-v}} \end{pmatrix}$$

und somit

$$\det DT(u, v) = -\frac{1}{8} \frac{2}{\sqrt{u^2 - v^2}}$$

Die Jacobi-Determinante ist auf  $\tilde{\Omega}$  ungleich Null und somit ist nach Satz 9.1 auch  $T^{-1}$  stetig differenzierbar. Satz 3.2 ist daher anwendbar und wir erhalten

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} xy \, dx dy &= \iint_{\tilde{\Omega}} \sqrt{\frac{u+v}{2}} \sqrt{\frac{u-v}{2}} |\det DT(u, v)| \, dudv \\ &= \frac{1}{4} \frac{1}{2} \int_{u=4}^9 \int_{v=1}^4 \sqrt{u^2 - v^2} \frac{1}{\sqrt{u^2 - v^2}} \, dudv = \frac{15}{8}. \end{aligned}$$

BEISPIEL 3.3. Als weiteres Beispiel für die Anwendung von Polarkoordinaten berechnen wir das uneigentliche Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \, dx = 2 \int_0^{\infty} e^{-x^2} \, dx.$$

Wir erinnern daran, daß das uneigentliche Integral definiert ist durch

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} \, dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n e^{-x^2} \, dx.$$

Anstelle von  $\int_0^\infty e^{-x^2} dx$  berechnen wir dessen Quadrat und erhalten formal

$$\begin{aligned} \left(\int_0^\infty e^{-x^2} dx\right)^2 &= \int_0^\infty e^{-x^2} dx \int_0^\infty e^{-y^2} dy = \int_0^\infty \left[\int_0^\infty e^{-x^2+y^2} dx\right] dy \\ &\stackrel{\text{Fubini}}{=} \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-x^2+y^2} dx dy = \int_0^{\pi/2} \left[\int_0^\infty e^{-r^2} r dr\right] d\varphi \\ &= \frac{\pi}{2} \int_0^\infty e^{-r^2} r dr = \frac{\pi}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n e^{-r^2} r dr = \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

und somit schließlich

$$\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

## CHAPTER 4

# Integrale über Kurven und Flächen

### 1. Wegintegrale

Um das Konzept eines Wegintegrals einzuführen, berechnen wir die Masse eines dünnen Drahtes, der durch eine Raumkurve  $\Gamma$  beschrieben wird. Die Dichte des Drahtes im Punkt  $x$  sei durch  $f(x)$  gegeben, Wir betrachten eine Unterteilung des Drahtes in kleine Teilstücke  $\Gamma_i$ ,  $i = 1, \dots, n$  sodaß die Änderung von  $f$  auf  $\Gamma_i$  vernachlässigt werden kann. Die Masse von  $\Gamma_i$  kann dann approximiert werden durch

$$f(x_i)\Delta s_i,$$

wobei  $x_i$  einen beliebigen Punkt aus  $\Gamma_i$  und  $\Delta s_i$  die Länge von  $\Gamma_i$  bezeichnet. Sei  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$  eine Parametrisierung von  $\Gamma$  und

$$t_0 = a < t_1 < \dots < t_n = b$$

eine den Teilstücken  $\Gamma_i$  entsprechende Zerlegung von  $\Gamma$ , dann ist die Länge von  $\Gamma_i$  gegeben durch

$$\Delta s_i = \int_{t_{i-1}}^{t_i} \|\gamma'(t)\| dt = \|\gamma'(\tau_i)\|(t_i - t_{i-1}),$$

mit einer geeigneten Zwischenstelle  $\tau_i \in (t_{i-1}, t_i)$ . Wählt man  $x_i = \gamma(\tau_i)$  ergibt sich für die Masse von  $\Gamma_i$

$$f(\gamma(\tau_i))\|\gamma'(\tau_i)\|(t_i - t_{i-1})$$

Die gesamte Masse des Drahtes wird daher durch

$$\sum_{i=1}^n f(\gamma(\tau_i))\|\gamma'(\tau_i)\|(t_i - t_{i-1})$$

gut approximiert. Ist  $f$  stetig und  $\gamma$  stetig differenzierbar, kann dies als Riemannsche Summe für

$$\int_a^b (f \circ \gamma)(t)\|\gamma'(t)\| dt$$

angesehen werden. Es zeigt sich, daß der Wert des Integrals sich bei Umparametrisierungen nicht ändert: ersetzt man  $\gamma$  durch  $\tilde{\gamma} = \gamma \circ \sigma$ ,  $\sigma: [\alpha \rightarrow \beta] \rightarrow [a, b]$

streng monoton, surjektiv und stetig differenzierbar erhält man

$$\begin{aligned} \int_{\alpha}^{\beta} (f \circ \tilde{\gamma}) \|\tilde{\gamma}'(s)\| ds &= \int_{\alpha}^{\beta} f(\gamma(\sigma(s))) \|\gamma'(\sigma(s))\| |\sigma'(s)| ds \\ &= \begin{cases} \int_{\alpha}^{\beta} f(\gamma(\sigma(s))) \|\gamma'(\sigma(s))\| \sigma'(s) ds = \int_a^b (f \circ \gamma)(t) \|\gamma'(t)\| dt & \sigma \text{ streng monoton steigend} \\ - \int_{\alpha}^{\beta} f(\gamma(\sigma(s))) \|\gamma'(\sigma(s))\| \sigma'(s) ds = - \int_b^a (f \circ \gamma)(t) \|\gamma'(t)\| dt & \sigma \text{ streng monoton fallend} \end{cases} \\ &= \int_a^b (f \circ \gamma)(t) \|\gamma'(t)\| dt \end{aligned}$$

Falls  $\gamma$  auf  $(a, b)$  injektiv ist, die Kurve also nicht mehrfach durchlaufen wird, ist dieses Integral (für festes  $f$ ) daher eine Eigenschaft der Spur von  $\gamma$ .

**DEFINITION 1.1.** Es sei  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $n = 2, 3$ , eine stetig differenzierbare Kurve und  $\Gamma$  deren Spur. Ferner sei  $f$  auf einer Umgebung von  $\Gamma$  definiert und stetig. Dann ist das **Wegintegral** von  $f$  über  $\Gamma$  definiert durch

$$\int_{\Gamma} f ds := \int_a^b (f \circ \gamma)(t) \|\gamma'(t)\| dt.$$

Ist  $\gamma$  nur stückweise stetig differenzierbar oder  $f \circ \gamma$  nur stückweise stetig, zerlegt man das Parameterintervall  $[a, b]$  in Teilintervalle auf welchen  $\gamma$  stetig differenzierbar und  $f \circ \gamma$  stetig ist und definiert  $\int_{\Gamma} f ds$  als Summe der Wegintegrale über die entsprechenden Teilstücke von  $\Gamma$ .

Gilt  $f \geq 0$  und ist  $\Gamma$  die Spur einer ebenen Kurve kann man  $\int_{\Gamma} f ds$  auch als Flächeninhalt eines Zaunes entlang  $\Gamma$  mit der Höhe  $f$  interpretieren.

**BEISPIEL 1.1.** Ein Draht habe die Form einer Schraubenlinie  $\Gamma$ , welche durch  $\gamma: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, t)$  parametrisiert wird, und die Massendichte  $f(x) = \|x\|^2$ . Wegen

$$\gamma'(t) = (-\sin t, \cos t, 1)$$

ist  $\|\gamma'(t)\| = \sqrt{2}$  und somit die Masse des Drahtes

$$\int_{\Gamma} f ds = \int_0^{2\pi} f(\gamma(t)) \|\gamma'(t)\| dt = \sqrt{2} \int_0^{2\pi} (1 + t^2) dt = \sqrt{2} \left( 2\pi + \frac{(2\pi)^3}{3} \right).$$

## 2. Kurvenintegrale

Wir betrachten wieder eine (stückweise) stetig differenzierbare Kurve  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $n = 2, 3$ , mit Spur  $\Gamma$  und eine stetige Abbildung  $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ , wobei  $U$  eine Umgebung von  $\Gamma$  darstellt. Aus historischen Gründen bezeichnet man in diesem Zusammenhang eine vektorwertige Funktion als **Vektorfeld**. Als Motivation für den Begriff des Kurvenintegrals betrachten wir ein Teilchen, welches sich entlang  $\Gamma$  unter dem Einfluß des Kraftfelds  $f$  bewegt. Ein fundamentaler Begriff ist die von  $f$  zur Bewegung des Teilchens längs  $\Gamma$  geleistete Arbeit: Ist  $\Gamma$  ein Geradenstück, das durch den Vektor  $d$  beschrieben werden kann und ist  $f$  konstant entlang  $\Gamma$ , dann ist die geleistete Arbeit

$$W = \langle f, d \rangle.$$

Ist  $\Gamma$  nicht geradlinig oder  $f$  nicht konstant, unterteilt man das Zeitintervall  $[a, b]$  in Teilintervalle,

$$a = t_0 < t_1 \cdots < t_n = b,$$

somit  $\Gamma$  in einzelne ungefähr gerade Kurvensegmente und approximiert die entlang jeden Segments geleistete Arbeit durch

$$\begin{aligned} \langle (f \circ \gamma)(t_{i-1}), \Delta x_i \rangle &= \langle (f \circ \gamma)(t_{i-1}), \gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1}) \rangle \\ &= \langle (f \circ \gamma)(t_{i-1}), \gamma'(t_{i-1})(t_i - t_{i-1}) + r(t_i - t_{i-1}) \rangle \\ &\sim \langle (f \circ \gamma)(t_{i-1}), \gamma'(t_{i-1})(t_i - t_{i-1}) \rangle. \end{aligned}$$

Die gesamte geleistete Arbeit wird somit approximiert durch

$$\sum_{i=1}^n \langle (f \circ \gamma)(t_{i-1}), \gamma'(t_{i-1})(t_i - t_{i-1}) \rangle$$

Die rechte Seite kann als Riemannsches Summe des Integrals

$$\int_a^b \langle (f \circ \gamma)(t), \gamma'(t) \rangle dt$$

aufgefasst werden. Dies führt zu folgendem Begriff:

**DEFINITION 2.1.** Es sei  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $n = 2, 3$ , eine stückweise stetig differenzierbare Kurve mit Spur  $\Gamma$ ,  $U \subset \mathbb{R}^n$  eine Umgebung von  $\Gamma$  und  $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$  ein stetiges Vektorfeld. Das Kurvenintegral von  $f$  entlang  $\Gamma$ ,  $\int_{\Gamma} f \cdot d\gamma$ , ist definiert durch

$$\int_{\gamma} f \cdot d\gamma = \int_a^b \langle (f \circ \gamma)(t), \gamma'(t) \rangle dt$$

Eine Rechnung, welche nahezu identisch zu jener beim Wegintegral ist, zeigt, daß der Wert des Kurvenintegrals bis auf das Vorzeichen unabhängig ist von der Parametrisierung von  $\Gamma$ . Das Kurvenintegral ist invariant gegenüber orientierungstreuen Reparametrisierungen von  $\Gamma$  und wechselt (im Gegensatz zum Wegintegral!) das Vorzeichen, falls die Orientierung umgekehrt wird.

**BEISPIEL 2.1.** Man berechne die Arbeit, welche das Kraftfeld  $f(x, y, z) = (-\frac{1}{2}x, -\frac{1}{2}y, \frac{1}{4})$  verrichten muß, um ein Partikel entlang der Schraubenlinie  $t \rightarrow \gamma(t) = (\cos t, \sin t, t)$ , vom Punkt  $(1, 0, 0)$  in den Punkt  $(-1, 0, 3\pi)$  zu verschieben.

Der Anfangspunkt wird offenbar zur Zeit  $t = 0$ , der Endpunkt zur Zeit  $t = 3\pi$  durchlaufen. Wegen

$$(f \circ \gamma)(t) = \left(-\frac{1}{2} \cos t, -\frac{1}{2} \sin t, \frac{1}{4}\right)$$

ergibt sich die geleistete Arbeit aus

$$\begin{aligned} W &= \int_{\gamma} f \cdot d\gamma = \int_0^{3\pi} \langle (f \circ \gamma)(t), \gamma'(t) \rangle dt \\ &= \int_0^{3\pi} \left\langle \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \cos t \\ -\frac{1}{2} \sin t \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle dt = \int_0^{3\pi} \frac{1}{4} dt = \frac{3\pi}{4}. \end{aligned}$$

BEMERKUNG 2.1. 1.) Das das Kurvenintegral bis auf ein Vorzeichen unabhängig ist von der Wahl der Parametrisierung  $\gamma$ , also letztlich nur von der Spur von  $\Gamma$  abhängt, schreibt man für einfache Kurven oft auch

$$\int_{\Gamma} f \cdot ds \equiv \int_{\gamma} f \cdot d\gamma.$$

2.) Häufig findet man auch folgende Schreibweise: dazu setzen wir formal  $f = (P, Q, R)$ ,  $d\gamma = (dx, dy, dz)$  und schreiben

$$\int_{\Gamma} P dx + Q dy + R dz \equiv \int_{\gamma} f \cdot d\gamma.$$

Besonders einfach läßt sich ein Kurvenintegral für ein **Gradientenfeld** auswerten. Es sei also  $f = \nabla\varphi$  für eine stetig differenzierbare Funktion  $\varphi: U \rightarrow \mathbb{R}$ . Dann folgt aus der Kettenregel

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} f \cdot ds &= \int_a^b \langle f(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt = \int_a^b \langle (\nabla\varphi)(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt \\ &= \int_a^b \frac{d}{dt}(\varphi \circ \gamma)(t) dt = \varphi(\gamma(b)) - \varphi(\gamma(a)) \end{aligned}$$

Zusammenfassend gilt

SATZ 2.1. Sei  $\varphi: U \rightarrow \mathbb{R}$  stetig differenzierbar und  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $n = 2, 3$ , eine stückweise stetig differenzierbare Kurve mit Spur  $\Gamma$ . Dann gilt

$$\int_{\Gamma} \nabla\varphi \cdot ds = \varphi(\gamma(b)) - \varphi(\gamma(a)).$$

Das Integral hängt also nur mehr von den Endpunkten des Weges, nicht aber vom Weg selbst ab. Entlang einer geschlossenen Kurve gilt daher

$$\int_{\Gamma} \nabla\varphi \cdot ds = 0.$$

Wir erinnern daran, daß ein ebenes Vektorfeld auf einem einfach zusammenhängenden Gebiet genau dann ein Gradientenfeld ist, wenn

$$P_y = Q_x$$

gilt (Satz 8.1).

BEISPIEL 2.2. Man integriere das Vektorfeld  $f(x, y) = (y^2, 2xy - e^y)$  entlang des Kreisbogens  $\gamma: [0, \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$ . Wir demonstrieren 2 Lösungsansätze.

Variante 1: Wegen

$$(*) \quad P_y = 2y = Q_x$$

hängt der Wert des Integrals nur mehr von den Endpunkten  $(1, 0)$  und  $(0, 1)$  des Weges ab. Anstelle über den Kreisbogen kann man daher auch über die Sekante  $\Sigma$  integrieren, welche durch

$$\sigma(t) = (1 - t, t), \quad t \in [0, 1]$$

parametrisiert wird. Man beachte  $\sigma(0) = \gamma(0)$  und  $\sigma(1) = \gamma(\frac{\pi}{2})$ . Mit Satz 2.1 erhält man daher

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} f \cdot ds &= \int_{\Sigma} f \cdot ds = \int_0^1 \langle f(\sigma(t)), \sigma'(t) \rangle dt \\ &= \int_0^1 (t^2, 2(t-1)t - e^t) \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} dt = \int_0^1 (-3t^2 + 2t - e^t) dt = 1 - e. \end{aligned}$$

Variante 2: Wegen (\*) ist  $f$  ein Gradientenfeld, es gibt also eine Funktion  $\varphi: U \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f = \nabla\varphi$ . Aus

$$P(x, y) = y^2 = \varphi_x$$

erhalten wir  $\varphi(x, y) = y^2x + h(y)$ . Wegen

$$\varphi_y(x, y) = 2xy + h'(y) = Q(x, y) = 2xy - e^y$$

findet man

$$h'(y) = -e^y$$

also

$$h(y) = -e^y + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

und somit

$$\varphi(x, y) = xy^2 - e^y$$

(ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann man  $c = 0$  setzen). Mit Hilfe von Satz 2.1 und  $\varphi(1, 0) = -1$  und  $\varphi(0, 1) = e$  erhält man schließlich

$$\int_{\Gamma} \nabla\varphi \cdot ds = \int_{\Gamma} \nabla\varphi \cdot ds = \varphi(0, 1) - \varphi(1, 0) = 1 - e.$$

### 3. Parametrisierte Flächen

Der Graph einer stetigen Funktion in zwei Veränderlichen stellt eine Fläche im  $\mathbb{R}^3$  dar. Aber auch die Oberfläche einer Kugel oder eines Torus entsprechen unserer Vorstellung einer Fläche: eine Fläche entsteht aus der Ebene durch Verbiegen, Verwerfen und Zusammenrollen.

**DEFINITION 3.1.** Eine **parametrisierte Fläche** im  $\mathbb{R}^3$  ist eine stetige Abbildung  $\phi: D \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $D \subset \mathbb{R}^2$ . Die Punktmenge  $S = \phi(D)$  heißt auch kurz Fläche. Ist  $\phi$  (stetig) differenzierbar, heißt  $S$  (stetig) differenzierbare Fläche.

Eine Fläche  $S$  ist stetig differenzierbar, wenn die Koordinatenfunktionen

$$(u, v) \rightarrow \phi(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$$

stetige partielle Ableitungen besitzen.

**BEISPIEL 3.1.** 1.) Die Kugeloberfläche kann parametrisiert werden durch

$$\phi: D \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad D = [0, 2\pi] \times \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$x(u, v) = r \cos u \cos v,$$

$$y(u, v) = r \sin u \cos v,$$

$$z(u, v) = r \sin v$$

2.) Eine Parametrisierung der Oberfläche eines Kegels mit Öffnungswinkel  $\alpha$  und Mantellänge  $s$  erhält man aus der Beobachtung, daß alle Punkte des Kegels mit einem Abstand  $v$  von der Spitze auf einem Kreis mit Radius  $\varrho = v \sin \alpha$ ,  $0 \leq v \leq s$  liegen. Betrachtet man einen Kegel dessen Spitze im Koordinatenursprung liegt, findet man

$$\begin{aligned}x(u, v) &= v \sin \alpha \cos u, \\y(u, v) &= v \sin \alpha \sin u, \\z(u, v) &= v \cos \alpha\end{aligned}$$

und  $D = [0, 2\pi] \times [0, s]$ .

3.) Ein Stab der Länge  $l$  liege anfangs auf der  $x$ -Achse und berühre mit einem Ende die  $z$ -Achse. Er dreht sich mit konstanter Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  um die  $z$ -Achse und steigt gleichzeitig mit konstanter Steigrate  $b$  nach oben und überstreicht dabei eine **Schneckenfläche**.

Um diese Fläche zu parametrisieren, markieren wir auf dem Stab im Abstand  $u$  von der  $z$ -Achse einen Punkt und bestimmen dessen Koordinaten als Funktion der Zeit  $v$ . Zu dieser Zeit hat der Stab eine Höhe  $bv$  erreicht und sich um den Winkel  $\omega v$  um die  $z$ -Achse gedreht. Dies führt auf

$$\begin{aligned}x(u, v) &= u \cos \omega v, \\y(u, v) &= u \sin \omega v, \\z(u, v) &= bv\end{aligned}$$

und  $D = [0, l] \times [0, \infty)$ .

Die Kurven  $u = \text{const}$ , beziehungsweise  $v = \text{const}$  überziehen die Fläche  $S$  mit einem Netz von Kurven, den Koordinatenkurven. Im Beispiel der Kugel sind dies die Meridiane und Breitenkreise.

Es sei nun  $\phi$  stetig differenzierbar und  $(u_0, v_0) \in D$ . Halten wir  $u$  beim Wert  $u_0$  fest, wird die Gerade  $u = u_0$  abgebildet auf die Kurve  $v \rightarrow \phi(u_0, v)$ . Deren Tangentialvektor in  $v = v_0$  ist durch

$$T_v(u_0, v_0) = \left( \frac{\partial x}{\partial v}(u_0, v_0), \frac{\partial y}{\partial v}(u_0, v_0), \frac{\partial z}{\partial v}(u_0, v_0) \right)$$

gegeben. Halten wir  $v$  beim Wert  $v_0$  fest, wird die Gerade  $v = v_0$  auf die Kurve  $u \rightarrow \phi(u, v_0)$  abgebildet. deren Tangentialvektor in  $u = u_0$  ist durch

$$T_u(u_0, v_0) = \left( \frac{\partial x}{\partial u}(u_0, v_0), \frac{\partial y}{\partial u}(u_0, v_0), \frac{\partial z}{\partial u}(u_0, v_0) \right)$$

gegeben. Sind  $T_u(u_0, v_0)$  und  $T_v(u_0, v_0)$  linear unabhängig, bestimmen sie eine Ebene, die **Tangentialebene** an  $S$  im Punkt  $(u_0, v_0)$ . Ein Normalvektor ist durch  $T_u(u_0, v_0) \times T_v(u_0, v_0)$  gegeben.

BEISPIEL 3.2. 1.) Für die Kugeloberfläche erhalten wir

$$\begin{aligned}T_u(u, v) &= (-r \sin u \cos v, r \cos u \cos v, 0), \\T_v(u, v) &= (-r \cos u \sin v, -r \sin u \sin v, r \cos v)\end{aligned}$$

Diese beiden Vektoren sind offenbar für  $|v| \neq \frac{\pi}{2}$  linear unabhängig und eine einfache Rechnung ergibt

$$T_u(u, v) \times T_v(u, v) = \begin{pmatrix} r \cos u \cos v \\ r \sin u \cos v \\ r \sin v \end{pmatrix} r \cos v$$

Jeder Normalvektor in  $(x(u, v), y(u, v), z(u, v))$  mit  $|v| \neq \frac{\pi}{2}$  ist daher kollinear zu  $(x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ . Man beachte, daß für  $v = \pm \frac{\pi}{2}$  die Kugeloberfläche offenbar einen Normalvektor besitzt, dies in der gewählten Parametrisierung nicht widergespiegelt wird. Dies liegt an  $T_u(u, \pm \frac{\pi}{2}) = 0$ , letztendlich aber daran, daß dem Nord-, bzw. Südpol kein eindeutiger Winkel zugewiesen werden kann.

2.) Für den Kegel finden wir

$$\begin{aligned} T_u(u, v) &= (-v \sin \alpha \sin u, v \sin \alpha \cos u, 0), \\ T_v(u, v) &= (\sin \alpha \cos u, \sin \alpha \sin u, \cos \alpha). \end{aligned}$$

Diese Vektoren sind linear unabhängig genau dann, wenn  $v \neq 0$  ist:

$$T_u(u, v) \times T_v(u, v) = v \begin{pmatrix} \cos u \sin \alpha \cos \alpha \\ -\sin u \sin \alpha \cos \alpha \\ -\sin^2 \alpha \end{pmatrix}.$$

Somit existiert überall ein Normalvektor ausgenommen in der Spitze des Kegels. Dies entspricht auch unserer Anschauung.

DEFINITION 3.2. Eine stetig differenzierbare Fläche  $\phi: D \rightarrow \mathbb{R}^3$  heißt **glatt**, in  $(u_0, v_0) \in D$ , wenn  $T_u(u_0, v_0) \times T_v(u_0, v_0) \neq 0$  ist. Die Fläche heißt **glatt**, wenn sie in allen Punkten  $(u, v) \in D$  glatt ist.

BEMERKUNG 3.1. 1.) Eine glatte Fläche hat keine Ecken und Kanten.

2.) Das Beispiel der Kugeloberfläche zeigt, daß die Glattheit einer Fläche von deren Parametrisierung abhängt.

3.) Ist  $S$  in  $(u_0, v_0)$  glatt, dann existiert in  $\phi(u_0, v_0)$  die Tangentialebene. Sie ist gegeben durch

$$\langle n, x - x_0 \rangle = 0$$

mit  $n = T_u(u_0, v_0) \times T_v(u_0, v_0)$ ,  $x_0 = \phi(u_0, v_0)$  und  $x = (x_1, x_2, x_3)$ .

4.) Wir betrachten die Fläche  $S$ , welche der Graph einer stetig differenzierbaren Abbildung  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $D \subset \mathbb{R}^2$  ist. Wir parametrisieren sie in der Form

$$\begin{aligned} x(u, v) &= u, \\ y(u, v) &= v, \\ z(u, v) &= f(u, v), \end{aligned}$$

$(u, v) \in D$ , und erhalten

$$\begin{aligned} T_u(u, v) &= \left(1, 0, \frac{\partial f}{\partial u}(u, v)\right), \\ T_v(u, v) &= \left(0, 1, \frac{\partial f}{\partial v}(u, v)\right). \end{aligned}$$

Die Tangentialvektoren sind daher stets linear unabhängig und bestimmen den Normalvektor

$$T_u(u, v) \times T_v(u, v) = \begin{pmatrix} -\frac{\partial f}{\partial y}(u, v) \\ -\frac{\partial f}{\partial v}(u, v) \\ 1 \end{pmatrix} \neq 0.$$

Der Graph einer stetig differenzierbaren Funktion ist somit glatt. Die Gleichung der Tangentialebene ist gegeben durch

$$\left\langle \begin{pmatrix} -\frac{\partial f}{\partial y}(u, v) \\ -\frac{\partial f}{\partial v}(u, v) \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix} \right\rangle = 0$$

also durch

$$z - z_0 = \frac{\partial f}{\partial u}(u_0, v_0)(x - u_0) + \frac{\partial f}{\partial v}(u_0, v_0)(y - v_0)$$

mit  $z_0 = f(u_0, v_0)$ . Dies stimmt mit den Betrachtungen für Funktionen in mehreren Veränderlichen überein.

5.) Das Konzept einer glatten Fläche kann auch stückweise glatte Flächen, beispielsweise die Oberfläche von Polyedern, ausgedehnt werden.

#### 4. Der Flächeninhalt parametrisierter Flächen

Der Einfachheit nehmen wir an,  $D$  sei ein Rechteck,  $D = [a, b] \times [\alpha, \beta]$ . Wir zerlegen die Intervalle  $[a, b]$  und  $[\alpha, \beta]$  in  $n$  beziehungsweise  $m$  gleich lange Intervalle der Länge  $\Delta u = \frac{b-a}{n}$ , beziehungsweise  $\Delta v = \frac{\beta-\alpha}{m}$

$$\begin{aligned} u_0 = a < u_1 < \dots < u_n = b, & & u_i = a + \frac{b-a}{n}i \\ v_0 = \alpha < v_1 < \dots < v_m = \beta, & & v_j = \alpha + \frac{\beta-\alpha}{m}j. \end{aligned}$$

Wir erhalten eine Partition von  $D$  in Teilrechtecke  $R_{ij}$

$$\begin{aligned} R_{ij} &= [u_{i-1}, u_i] \times [v_{j-1}, v_j], & 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m, \\ D &= \bigcup_{i,j} R_{ij}. \end{aligned}$$

Ist  $\phi: D \rightarrow \mathbb{R}^3$  stetig differenzierbar, erhalten wir die Abschätzung

$$\begin{aligned} \phi(u_i + \Delta u, v_j) - \phi(u_i, v_j) &= (x(u_i + \Delta u, v_j) - x(u_i, v_j), y(u_i + \Delta u, v_j) \\ &\quad - y(u_i, v_j), z(u_i + \Delta u, v_j) - z(u_i, v_j)) \\ &\sim \left( \frac{\partial x}{\partial u}(u_i, v_j)\Delta u, \frac{\partial y}{\partial u}(u_i, v_j)\Delta u, \frac{\partial z}{\partial u}(u_i, v_j)\Delta u \right) \\ &= \Delta u T_u(u_i, v_j) \end{aligned}$$

und analog

$$\phi(u_i, v_j + \Delta v) - \phi(u_i, v_j) = \Delta v T_v(u_i, v_j).$$

Das Bild des Rechteckes  $R_{ij}$  kann also approximiert werden durch das Parallelogramm  $P_{ij}$  welches durch die Tangentialvektoren  $\Delta u T_u(u_i, v_j)$  und  $\Delta v T_v(u_i, v_j)$  aufgespannt wird. Die Fläche  $\phi(D)$  wird also durch  $\cup_{ij} P_{ij}$  approximiert und es folgt

$$|\phi(D)| \sim \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m |P_{ij}| = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \|T_u(u_i, v_j) \times T_v(u_i, v_j)\| \Delta u \Delta v.$$

Die Approximation ist umso besser, je größer  $n$  und  $m$  sind. Die Doppelsumme kann als Riemannsche Summe für das Doppelintegral  $\iint_D \|T_u \times T_v\| \, dudv$  aufgefasst werden. Dies motiviert folgende Definition.

DEFINITION 4.1. Der Flächeninhalt einer stetig differenzierbaren parametrisierten Fläche  $S = \phi(D)$  ist gegeben durch

$$|S| = |\phi(D)| = \iint_D \|T_u \times T_v\| \, dudv.$$

BEMERKUNG 4.1. 1.) Man kann zeigen, daß der Flächeninhalt unabhängig ist von der gewählten Parametrisierung von  $S$ .

2.) Ist die Fläche stückweise glatt, also  $S = \cup_{i=1}^k S_i$  und  $S_i$  glatt, dann setzt man

$$|S| = \sum_{i=1}^k |S_i|.$$

BEISPIEL 4.1. 1.) Ist die Fläche  $S$  ein ebenes Gebiet  $\Omega$ , kann  $S$  parametrisiert werden durch  $D = \Omega$  und

$$\phi(u, v) = (u, v, 0), \quad (u, v) \in D.$$

Es folgt

$$\begin{aligned} T_u(u, v) &= (1, 0, 0), \\ T_v(u, v) &= (0, 1, 0) \end{aligned}$$

also

$$T_u \times T_v = (0, 0, 1)$$

und daher  $\|T_u \times T_v\| = 1$ . Dies ergibt für den Flächeninhalt einer ebenen Fläche

$$|\Omega| = \iint_{\Omega} \|T_u \times T_v\| \, dudv = \iint_{\Omega} \, dudv$$

in Übereinstimmung mit der Diskussion in Abschnitt 2.

2.) Für die Kugelfläche wurde bereits

$$T_u \times T_v = r \cos v \phi(u, v)$$

gezeigt. Da  $\phi(u, v)$  einen Punkt der Kugelfläche repräsentiert, folgt  $\|\phi(u, v)\| = r$  und daher  $\|T_u \times T_v\| = r^2 \cos v$  (beachte  $\cos v \geq 0$  für  $v \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ ). Wir erhalten daher

$$\begin{aligned} |S(0, r)| &= \iint_D r^2 \cos v \, dudv = r^2 \int_{u=0}^{2\pi} \left[ \int_{v=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos v \, dv \right] du \\ &= 4r^2 \pi. \end{aligned}$$

3.) Für den Kegel mit Öffnungswinkel  $\alpha$  und Mantellänge  $s$  berechnen wir vorerst

$$\begin{aligned}\|T_u \times T_v\|^2 &= v^2(\cos^2 u \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha + \sin^2 u \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha + \sin^4 \alpha) \\ &= v^2(\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha + \sin^4 \alpha) = v^2 \sin^2 \alpha\end{aligned}$$

und somit

$$|K| = \sin \alpha \int_{u=0}^{2\pi} \left[ \int_{v=0}^s v \, dv \right] du = s^2 \pi \sin \alpha.$$

4.) Der Flächeninhalt von Rotationsflächen: es sei  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig differenzierbar. Die Fläche  $S$  entstehe durch Rotation des Graphen von  $f$  um die  $x$ -Achse. Eine einfache Überlegung führt zu folgender Parametrisierung von  $S$ :  $D = [a, b] \times [0, 2\pi]$

$$\begin{aligned}x &= u, \\ y &= f(u) \cos v, \\ z &= f(u) \sin v.\end{aligned}$$

Wir erhalten

$$\begin{aligned}T_u &= (1, f'(u) \cos v, f'(u) \sin v), \\ T_v &= (0, -f(u) \sin v, f(u) \cos v)\end{aligned}$$

und somit

$$T_u \times T_v = \begin{pmatrix} f(u)f'(u) \\ -f(u) \cos v \\ -f(u) \sin v, \end{pmatrix}$$

also  $\|T_u \times T_v\|^2 = f(u)^2(1 + f'(u)^2)$ . Für den Flächeninhalt der Rotationsfläche  $S$  ergibt sich daher

$$|S| = \int_a^b \left[ \int_0^{2\pi} \|T_u \times T_v\| \, dudv \right] = 2\pi \int_a^b |f(u)| \sqrt{1 + f'(u)^2} \, du.$$

## 5. Flächenintegrale

**5.1. Integration einer skalaren Funktion über eine Fläche.** Als Motivation wollen wir die Masse einer glatten Fläche  $S$  berechnen, deren Dichte durch eine stetige Funktion  $\varrho: S \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben ist. Dazu betrachten wir eine stetig differenzierbare Parametrisierung von  $S$ ,  $\phi: D \rightarrow \mathbb{R}^3$  und eine Partition von  $D$  in Rechtecke  $R_{ij}$  wie in Abschnitt 4. Der Einfachheit halber betrachten wir wieder den Fall, daß  $D$  ein Rechteck ist.

Es sei  $\tilde{P}_{ij} = \phi(R_{ij})$ ,  $1 \leq i \leq n$ ,  $1 \leq j \leq m$ . Sind  $n$  und  $m$  hinreichend groß, ist die Dichte von  $S$  auf jedem Flächenstück  $\tilde{P}_{ij}$  nahezu konstant und kann durch  $\varrho(\phi(u_i, v_j))$  approximiert werden. Seine Masse ist daher ungefähr  $\varrho \circ \phi(u_i, v_j) |\tilde{P}_{ij}|$ . Für den Flächeninhalt von  $\tilde{P}_{ij}$  wurde bereits die Näherung

$$|\tilde{P}_{ij}| \sim |P_{ij}| = \|T_u(u_i, v_j) \times T_v(u_i, v_j)\| \Delta u \Delta v$$

hergeleitet. Die Gesamtmasse der Fläche wird daher durch die Formel

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \varrho \circ \phi(u_i, v_j) \|T_u(u_i, v_j) \times T_v(u_i, v_j)\| \Delta u \Delta v$$

approximiert, welche intuitiv die Gesamtmasse der Fläche umso besser wiedergibt, je größer  $n$  und  $m$  sind. Da  $\varrho \circ \phi \|T_u \times T_v\|$  auf  $D$  stetig ist, kann die Doppelsumme als Riemannsche Summe interpretiert werden, welche gegen das Doppelintegral

$$\iint_D (\varrho \circ \phi)(u, v) \|T_u(u, v) \times T_v(u, v)\| \, dudv$$

konvergiert. Schreibt man noch  $\int_S \varrho dS$  für die Masse von  $S$  ist es sinnvoll

$$\int_S \varrho dS = \iint_D (\varrho \circ \phi)(u, v) \|T_u(u, v) \times T_v(u, v)\| \, dudv$$

zu setzen. Dies motiviert folgende Definition des Flächenintegrals einer skalaren Funktion  $f$ :

**DEFINITION 5.1.** Es sei  $S$  eine glatte Fläche, welche durch  $\phi: D \rightarrow \mathbb{R}^3$  parametrisiert wird und  $f: S \rightarrow \mathbb{R}$  sei stetig. Dann ist das Integral von  $f$  über  $S$  definiert durch

$$\int_S f dS = \iint_D (f \circ \phi)(u, v) \|T_u(u, v) \times T_v(u, v)\| \, dudv.$$

**BEMERKUNG 5.1.** 1.) Für  $f \equiv 1$  erhält man die Formel für den Flächeninhalt von  $S$ .  
2.) Ist  $S$  stückweise glatt, also  $S = \cup_{i=1}^k S_i$  setzt man

$$\int_S f dS = \sum_{i=1}^k \int_{S_i} f dS_i.$$

Somit kann man beispielsweise ein Integral über die Oberfläche eines Quaders als Summe der Integrale über die sechs Seitenflächen berechnen.

3.) Man kann zeigen, daß der Wert des Flächenintegrals unabhängig von der gewählten Parametrisierung ist.

Für den Graph einer differenzierbaren Abbildung  $g: D \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $D \subset \mathbb{R}^2$ , wurde bereits

$$T_u(u, v) \times T_v(u, v) = \begin{pmatrix} -\frac{\partial g}{\partial u}(u, v) \\ -\frac{\partial g}{\partial v}(u, v) \\ 1 \end{pmatrix}$$

gezeigt. Somit folgt für das Integral einer Funktion  $f$  über den Graph  $S$  von  $g$

$$\int_S f dS = \iint_D f(u, v, g(u, v)) \sqrt{1 + \left(\frac{\partial g}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial v}\right)^2} \, dudv.$$

**BEISPIEL 5.1.** Die Dichte einer kegelförmigen Membran sei in jedem Punkt proportional zu dessen abstand von der  $z$ -Achse. Der Kegel wird durch

$$z = 4 - 2\sqrt{x^2 + y^2}, \quad 0 \leq z \leq 4$$

beschrieben. Man berechne die Masse der Membran.

Der Kegel ist der Graph von

$$z = g(x, y) = 4 - 2\sqrt{x^2 + y^2}$$

über

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4\}.$$

Die Dichte ist dann durch

$$\rho(x, y, z) = k\sqrt{x^2 + y^2}$$

gegeben ( $k \geq 0$ ). Wegen

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = \frac{-2x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = \frac{-2y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

also

$$\sqrt{1 + \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2} = \sqrt{5}$$

folgt aus einer einfachen Rechnung für die Gesamtmasse der Membran

$$\int_S f dS = k\sqrt{5} \iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy = k\sqrt{5} \int_0^{2\pi} \left[ \int_0^2 r^2 dr \right] d\varphi = \frac{16\pi}{3} k\sqrt{5}.$$

Als weitere Übung berechne man die Masse der Membran, wenn der Kegel durch Polarkoordinaten dargestellt wird.

**5.2. Integration vektorwertiger Funktionen über Flächen.** Wir betrachten die Strömung einer Flüssigkeit durch eine glatte Fläche  $S$ , welche durch eine stetig differenzierbare Funktion  $\Phi: D \rightarrow \mathbb{R}$  parametrisiert wird. Die Geschwindigkeit der Flüssigkeit wird in jedem Punkt des Raumes durch das Vektorfeld  $F$  beschrieben. Wir interessieren uns für das netto Flüssigkeitsvolumen, welches pro Zeiteinheit durch die Fläche  $S$  strömt. Dazu zerlegen wir wieder  $D$  in hinreichend kleine Rechtecke  $R_{ij}$ ,  $1 \leq i \leq n$ ,  $1 \leq j \leq m$ , welchen jeweils ein Flächenstück  $\tilde{P}_{ij}$  entspricht, das durch das in der Tangentialebene liegende Parallelogramm  $P_{ij} = T_u(u_i, v_j)\Delta u \times T_v(u_i, v_j)\Delta v$  approximiert werden kann (man vergleiche die entsprechende Konstruktion in Abschnitt 4). Mit  $\nu$  bezeichnen wir einen Normaleneinheitsvektor von  $S$ . Wir nehmen an, daß  $R_{ij}$  so klein ist, daß  $\nu$  und  $F$  auf  $\tilde{P}_{ij}$  als konstant betrachtet werden können. Das durch das Flächenstück  $\tilde{P}_{ij}$  strömende Flüssigkeitsvolumen kann daher approximiert werden durch das Volumen des Parallelepipeds, welches durch die Vektoren  $T_u(u_i, v_j)\Delta u$ ,  $T_v(u_i, v_j)\Delta v$  und  $F_{ij} = F(\phi(u_i, v_j))$  aufgespannt wird, also durch

$$\langle F_{ij}, T_u(u_i, v_j) \times T_v(u_i, v_j) \rangle \Delta u \Delta v.$$

Das gesamte durch  $S$  strömende Flüssigkeitsvolumen wird daher approximiert durch

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \langle (F \circ \phi)(u_i, v_j), T_u(u_i, v_j) \times T_v(u_i, v_j) \rangle \Delta u \Delta v.$$

Ist  $F$  stetig, kann die Doppelsumme als Riemannsches Integral für das Doppelintegral

$$\iint_D \langle F \circ \phi, T_u \times T_v \rangle du dv$$

interpretiert werden.

Bei dieser Herleitung haben wir stillschweigend vorausgesetzt, daß die Flüssigkeit auf einer Seite der Fläche ein-, auf der anderen wieder austritt, d.h. daß wir zwei Seiten der Fläche unterscheiden können. Dies kommt darin zum Ausdruck, daß wir in jedem Punkt der Fläche einen Normaleneinheitsvektor definieren können, der stetig über  $S$  variiert. Eine stückweise glatte Fläche mit dieser Eigenschaft heißt **orientierbar**. Durch die Festlegung eines stetigen Normalenfeldes wird die Fläche  $S$  orientiert und  $S$  heißt dann **orientierte Fläche**. Ist  $S$  eine geschlossene Fläche, beispielsweise die Oberfläche einer Kugel, ist es üblich, den Normalenvektor so zu orientieren, daß er nach außen weist. Allgemein nennt man jene Seite der Fläche, in die  $\nu$  zeigt, die Außenseite, die andere Seite Innenseite.

BEISPIEL 5.2. 1.) Ist  $S$  der Graph einer stetig differenzierbaren Funktion  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  und parametrisiert man  $S$  durch  $\phi: D \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $\phi(x, y) = (x, y, f(x, y))$  ist ein Feld von Normaleneinheitsvektoren gegeben durch

$$\nu(x, y) = \frac{\left(-\frac{\partial f}{\partial x}, -\frac{\partial f}{\partial y}, 1\right)}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}}.$$

2.) Ist  $S$  Niveaufäche einer stetig differenzierbaren Funktion  $G: U \rightarrow \mathbb{R}$ , z.B.  $S = \{(x, y, z) \in U: G(x, y, z) = 0\}$ ,  $U \subset \mathbb{R}^3$ , berechnen sich die Normaleneinheitsvektoren aus

$$\nu = \frac{\nabla G}{\|\nabla G\|}.$$

Hat man eine Fläche  $S$  orientiert und ist  $\phi$  eine Parametrisierung von  $S$ , dann heißt  $\phi$  **orientierungstreu**, wenn

$$\frac{T_u \times T_v}{\|T_u \times T_v\|} = \nu$$

in allen Punkten der Fläche gilt und  $\phi$  heißt **orientierungsumkehrend** (gegenseitig), wenn

$$\frac{T_u \times T_v}{\|T_u \times T_v\|} = -\nu$$

in allen Punkten von  $S$  gilt. Somit wird folgende Vereinbarung sinnvoll.

DEFINITION 5.2. Es sei  $S$  eine orientierbare Fläche und  $F$  ein stetiges Vektorfeld, das auf einer Umgebung von  $S$  definiert ist. Ferner sei  $\phi: D \rightarrow \mathbb{R}^3$  eine stetig differenzierbare Parametrisierung von  $S$ . Dann heißt

$$\int_{\phi} F \cdot dS = \iint_D \langle F \circ \phi, T_u \times T_v \rangle dudv$$

**Flächenintegral des Vektorfeldes  $F$ .**

BEMERKUNG 5.2. 1.) Die Bezeichnung deutet bereits an, daß im Gegensatz zum Flächenintegral einer skalaren Funktion das Flächenintegral eines Vektorfeldes von der

Parametrisierung abhängt. Sind  $\phi$  und  $\tilde{\phi}$  glatte, orientierungstreue Parametrisierungen von  $S$ , gilt

$$\int_{\phi} F \cdot dS = \int_{\tilde{\phi}} F \cdot dS,$$

sind  $\phi$  und  $\tilde{\phi}$  glatte, gegensinnige Parametrisierungen, gilt

$$\int_{\phi} F \cdot dS = - \int_{\tilde{\phi}} F \cdot dS,$$

Dies rechtfertigt die Schreibweise

$$\int_S F \cdot dS = \int_{\phi} F \cdot dS$$

2.) Ist  $S$  eine orientierte, glatte Fläche und  $\phi: D \rightarrow \mathbb{R}^3$  eine orientierungstreue, glatte Parametrisierung, d.h.

$$\nu = \frac{T_u \times T_v}{\|T_u \times T_v\|}$$

ist der Normaleneinheitsvektor von  $S$ , der bezüglich  $S$  nach außen gerichtet ist. Dann folgt

$$\begin{aligned} \int_S F \cdot dS &= \iint_D \langle F \circ \phi, T_u \times T_v \rangle dudv \\ &= \iint_D \langle F \circ \phi, \frac{T_u \times T_v}{\|T_u \times T_v\|} \rangle \|T_u \times T_v\| dudv = \iint_D \langle F \circ \phi, \nu \rangle \|T_u \times T_v\| dudv \\ &= \int_S \langle F, \nu \rangle dS, \end{aligned}$$

es gilt also

$$\int_S F \cdot dS = \int_S \langle F, \nu \rangle dS$$

Das Flächenintegral des Vektorfeldes  $F$  ist somit gleich dem Flächenintegral der Normalkomponente von  $F$  über  $S$ . Das Integral  $\int_S \langle F, \nu \rangle dS$  wird als **Fluß** von  $F$  durch  $S$  bezeichnet.

**BEISPIEL 5.3.** Die Fläche  $S$  sei ein Teil des Paraboloids beschrieben durch

$$z = 4 - x^2 - y^2, \quad z \geq 0$$

und so orientiert, daß  $\langle \nu, e_3 \rangle \geq 0$  gilt. Eine Flüssigkeit der konstanten Dicht  $\rho$  strömt mit einer Geschwindigkeit  $v(x, y, z) = (x, y, z)$  durch die Fläche  $S$ . Welche Flüssigkeitsmenge strömt pro Zeiteinheit durch  $S$ ?

Wir parametrisieren  $S$  durch

$$\phi(x, y) = (x, y, 4 - x^2 - y^2)$$

über

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 4\}.$$

Das ergibt die Tangentialvektoren

$$T_x(x, y) = (1, 0, -2x),$$

$$T_y(x, y) = (0, 1, -2y)$$

und somit das Normalenfeld

$$T_x \times T_y = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Wegen  $\langle T_x \times T_y, e_3 \rangle = 1 \geq 0$  ist die Parametrisierung orientierungstreu und wir erhalten für die pro Zeiteinheit durch  $S$  strömende Flüssigkeitsmenge  $M$

$$\begin{aligned} M &= \varrho \int_S v \cdot dS = \varrho \iint_D \langle v \circ \phi, T_x \times T_y \rangle dx dy \\ &= \varrho \iint_D \left\langle \begin{pmatrix} x \\ y \\ 4 - x^2 - y^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \varrho \iint_D (2(x^2 + y^2) + 4 - x^2 - y^2) dx dy \\ &= \varrho \int_0^{2\pi} \left[ \int_0^2 (r^2 + 4)r dr \right] d\varphi = 24\pi\varrho. \end{aligned}$$



## CHAPTER 5

### Integralsätze

#### 1. Der Satz von Green

Für das Folgende treffen wir die Vereinbarung, unter der positiven Orientierung der Randkurve eines Normalbereiches jene zu verstehen, bei der der Normalbereich beim Umlauf entlang der Randkurve in der angedeuteten Richtung zur Linken liegt. Der positiv orientierte Rand läßt sich in der angedeuteten Weise in orientierte Komponenten zerlegen

$$C^+ = C_1^+ \cup B_2^+ \cup C_1^- \cup B_1^-.$$

Mit diesen Vereinbarungen können wir folgendes Hilfsresultat zeigen. Wir schreiben  $\partial D$  für den positiv orientierten Rand von  $D$ .

PROPOSITION 1.1. *Es sei  $D$  ein Normalbereich bezüglich der  $x$ -Achse und bezüglich der  $y$ -Achse und es seien  $P, Q: D \rightarrow \mathbb{R}$  stetig differenzierbare Funktionen. Dann gilt*

$$\begin{aligned} \int_{\partial D} P dx &= \int_{\partial D} (P, 0) \cdot d\gamma = - \iint_D \frac{\partial P}{\partial y} dx dy, \\ \int_{\partial D} Q dx &= \int_{\partial D} (0, Q) \cdot d\gamma = - \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy \end{aligned}$$

PROOF. Wir zeigen nur die erste Beziehung und berechnen das Kurvenintegral des Vektorfeldes  $(P, 0)$  über den orientierten Rand  $\partial D$  des Normalbereiches  $D$ . Für diesen Fall verwenden wir, daß  $D$  ein Normalbereich bezüglich der  $x$ -Achse ist. Wir parametrisieren  $\partial D$  in folgender Form

$$\begin{aligned} C_1^+ : & \quad \gamma_1(x) = (x, \varphi(x)), & x \in [a, b], \\ B_2^+ : & \quad \gamma_2(t) = t(b, \psi(b)) + (1-t)(b, \varphi(b)), & t \in [0, 1], \\ C_1^- : & \quad \gamma_3(x) = (b - (x - a), \psi(b - (x - a))), & x \in [a, b], \\ B_2^- : & \quad \gamma_4(t) = t(a, \varphi(a)) + (1-t)(a, \psi(a)), & t \in [0, 1]. \end{aligned}$$

Dies führt auf die Tangentialvektoren

$$\begin{aligned} \gamma_1'(x) &= (1, \varphi'(x)), \\ \gamma_2'(t) &= (b, \psi(b)) - (b, \varphi(b)) = (0, \psi(b) - \varphi(b)), \\ \gamma_3'(x) &= (-1, -\psi'(b - (x - a))), \\ \gamma_4'(t) &= (0, \varphi(a) - \psi(a)). \end{aligned}$$

Dies ergibt für das Kurvenintegral

$$\begin{aligned}
 \int_{\partial D} (P, 0) \cdot d\gamma &= \sum_{i=1}^4 \int_{\gamma_i} \langle (P, 0) \circ \gamma_i, \gamma_i' \rangle ds \\
 &= \int_a^b (P \circ \gamma_1)(x) dx + 0 - \int_a^b (P \circ \gamma_3)(x) dx + 0 \\
 &= \int_a^b P(x, \varphi(x)) dx - \int_a^b P(b - (x - a), \psi(b - (x - a))) dx \\
 &= \int_a^b P(x, \varphi(x)) dx - \int_a^b P(y, \psi(y)) dy.
 \end{aligned}$$

Da  $D$  ein Normalbereich bezüglich der  $x$ -Achse ist, erhalten wir für das Doppelintegral mit dem Satz von Fubini

$$\begin{aligned}
 \iint_D \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) dx dy &= \int_a^b \left[ \int_{y=\varphi(x)}^{\psi(x)} \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) dy \right] dx \\
 &= \int_a^b (P(x, \psi(x)) - P(x, \varphi(x))) dx = - \int_{\partial D} (P, 0) \cdot d\gamma.
 \end{aligned}$$

Die zweite Identität kann man analog zur ersten verifizieren. □

Durch Addition der beiden Identitäten erhält man

$$\begin{aligned}
 \int_{\partial D} F \cdot d\gamma &= \int_{\partial D} (P, 0) \cdot d\gamma + \int_{\partial D} (0, Q) \cdot d\gamma \\
 &= \iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy.
 \end{aligned}$$

Wir fassen zusammen:

**SATZ 1.1.** *Es sei  $D$  ein ebener Normalbereich bezüglich der  $x$ -Achse und bezüglich der  $y$ -Achse,  $\partial D$  sein positiv orientierter Rand und  $F = (P, Q): D \rightarrow \mathbb{R}^2$  ein stetig differenzierbares Vektorfeld. Dann gilt*

$$\int_{\partial D} F \cdot d\gamma = \int_{\partial D} P dx + Q dy = \iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy.$$

Tatsächlich läßt sich der Greensche Satz auf allgemeinere Bereiche anwenden, welche sich als Vereinigung von endlich vielen Normalbereichen 3. Art schreiben lassen. Wir verdeutlichen das Prinzip am Beispiel eines Kreisringes.

Man beachte die unterschiedliche Orientierung des inneren und des äußeren Randes.  $D$  ist kein Normalbereich, läßt sich aber als Vereinigung von 4 Normalbereichen 3. Art darstellen. Auf jedem der Normalbereiche  $D_i$  kann man den Satz von Green

anwenden:

$$\begin{aligned} \iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy &= \sum_{i=1}^4 \iint_{D_i} \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy \\ &= \sum_{i=1}^4 \int_{\partial D_i} P dx + Q dy = \int_{\partial D} P dx + Q dy. \end{aligned}$$

Die letzte Gleichung folgt aus der Beobachtung, daß die inneren Randsegmente zweimal in entgegengesetzter Richtung durchlaufen werden und sich die entsprechenden Kurvenintegrale daher kompensieren.

BEISPIEL 1.1. *Man berechne  $\int_{\partial D} (\arctan x + y^2) dx + (e^y - x^2) dy$  über folgenden Weg: Auf Grund der vorausgehenden Bemerkung ist der Satz von Green anwendbar auf das stetig differenzierbare Vektorfeld  $(P, Q)$  mit*

$$\begin{aligned} P(x, y) &= \arctan x + y^2, \\ Q(x, y) &= e^y - x^2. \end{aligned}$$

Mit

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) &= -2x, \\ \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) &= 2y \end{aligned}$$

erhalten wir den einfachen Ausdruck

$$\begin{aligned} \int_{\partial D} (\arctan x + y^2) dx + (e^y - x^2) dy &= \iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy \\ &= -2 \iint_D (x + y) dx dy = -2 \int_0^\pi \left[ \int_{r=1}^3 (r \cos \varphi + r \sin \varphi) r dr \right] d\varphi \\ &= -2 \int_0^\pi (\cos \varphi + \sin \varphi) d\varphi \int_1^3 r^2 dr = -\frac{104}{3}. \end{aligned}$$

Setzt man in den Satz von Green ein Vektorfeld mit  $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = k$ ,  $k \in \mathbb{R}$ , ein, ergibt sich die Möglichkeit der Berechnung des Flächeninhaltes von  $D$  mittels eines Kurvenintegrals. Wählt man beispielsweise  $Q(x, y) = x$  und  $P(x, y) = -y$  folgt

FOLGERUNG 1.1. *Der Flächeninhalt eines ebenen Normalbereiches 3. Art  $D$  ist gegeben durch*

$$|D| = \frac{1}{2} \int_{\partial D} -y dx + x dy.$$

BEISPIEL 1.2. *Wir berechnen den Flächeninhalt der Ellipse*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Wir parametrisieren die Ellipse in der Form

$$\begin{aligned}x(\varphi) &= a \cos \varphi, \\y(\varphi) &= b \sin \varphi,\end{aligned}$$

$0 \leq \varphi \leq 2\pi$ . Der Tangentialvektor ist gegeben durch

$$\gamma'(\varphi) = (x'(\varphi), y'(\varphi)) = (-a \sin \varphi, b \cos \varphi)$$

und somit

$$|D| = \frac{1}{2} \int_{\partial D} -y dx + x dy = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left\langle \begin{pmatrix} -b \sin \varphi \\ a \cos \varphi \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -a \sin \varphi \\ b \cos \varphi \end{pmatrix} \right\rangle d\varphi = ab\pi.$$

Es sei  $t \rightarrow \gamma(t) = (x(t), y(t))$ ,  $t \in I$ , eine orientierungstreue Parametrisierung des positiv orientierten Randes  $\partial D$  eines Normalbereiches 3. Art. Dann ist

$$\nu(t) = \frac{(y'(t), x'(t))}{\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}}$$

der nach außen gerichtete Normaleneinheitsvektor im Punkt  $\gamma(t)$ . Wir integrieren nun die Normalkomponente des Vektorfeldes  $F = (P, Q)$  über  $\partial D$ , also den Fluß von  $F$  durch  $\partial D$ , und erhalten

$$\begin{aligned}\int_{\partial D} F \cdot \nu d\gamma &= \int_a^b \left\langle \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix} \circ \gamma, \begin{pmatrix} y'(t) \\ -x'(t) \end{pmatrix} \right\rangle \frac{1}{\|\gamma'(t)\|} \|\gamma'(t)\| dt \\ &= \int_a^b (P(\gamma(t))y'(t) - Q(\gamma(t))x'(t)) dt \\ &= \int_a^b \left\langle \begin{pmatrix} -Q \\ P \end{pmatrix} \circ \gamma, \gamma'(t) \right\rangle dt = \int_{\partial D} -Q dx + P dy \\ &= \iint_D \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) dx dy.\end{aligned}$$

Die letzte Gleichung ergibt sich durch Anwendung des Greenschen Satzes auf das Vektorfeld  $(Q, P)$ .

Für ein Vektorfeld  $F = (P, Q)$  bzw.  $F = (P, Q, R)$  nennt man die spezielle Kombination

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}, \text{ bzw. } \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

**Divergenz** des Vektorfeldes  $F$  und schreibt  $\operatorname{div} F$ .

## 2. Der Satz von Stokes

Der Satz von Stokes stellt ähnlich wie der Satz von Green einen Zusammenhang her zwischen dem Integral eines Vektorfeldes über eine einfach geschlossene Kurve  $C$  im  $\mathbb{R}^3$  und dem Integral über eine Fläche  $S$  im  $\mathbb{R}^3$ , welche von  $C$  berandet wird. Der Einfachheit halber betrachten wir den Fall,  $S$  der Graph einer Funktion  $g: D \rightarrow \mathbb{R}^3$  ist. Dabei ist  $D$  ein Grundgebiet, auf welches der Satz von Green anwendbar ist. Wie beim Satz von Green muß der Rand von  $S$  orientiert werden.

Die Fläche  $S$  sei parametrisiert durch

$$\begin{aligned}\phi: D &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ \phi(x, y) &= (x, y, g(x, y))\end{aligned}$$

und hat daher den Normalenvektor

$$T_x(x, y) \times T_y(x, y) = (-g_x(x, y), -g_y(x, y), 1)$$

Somit ist das Integral eines Vektorfeldes  $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  gegeben durch

$$\begin{aligned}(5.1) \quad \int_S f \cdot dS &= \iint_D \langle F \circ \phi, T_x \times T_y \rangle dx dy \\ &= \iint_D (-F_1(x, y, g(x, y))g_x(x, y) - F_2(x, y, g(x, y))g_y(x, y) \\ &\quad + F_3(x, y, g(x, y))) dx dy.\end{aligned}$$

**SATZ 2.1.** *Es sei  $S$  eine glatte, orientierte Fläche, die durch eine injektive, zweimal stetig differenzierbare Parametrisierung  $\phi: D \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $D \subset \mathbb{R}^2$  gegeben ist.  $\partial S$  sei der orientierte Rand von  $S$  und  $F$  ein stetig differenzierbares Vektorfeld auf  $S$ . Dann gilt*

$$(*) \quad \int_S \operatorname{rot} F \cdot dS = \int_{\partial S} F \cdot d\gamma.$$

**PROOF.** Wie bereits erwähnt betrachten wir nur den Fall, daß  $S$  der Graph einer zweimal stetig differenzierbaren Funktion  $g$  ist, d.h.

$$S = \phi(D) = \{(x, y, g(x, y)) : (x, y) \in D\}.$$

Wegen

$$\operatorname{rot} F = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z} \\ \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \end{pmatrix}$$

folgt für die linke Seite von  $(*)$  mit Berücksichtigung (5.1) von

$$\int_S \operatorname{rot} F \cdot dS = \iint_D \left[ \left( \frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z} \right) \circ \phi(-g_x) + \left( \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x} \right) \circ \phi(-g_y) + \left( \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) \circ \phi \right] dx dy$$

Für die Berechnung der rechten Seite von  $(*)$  gehen wir von einer orientierungstreuen Parametrisierung  $\sigma$  des Randes von  $D$  aus

$$\sigma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2.$$

Dann ist  $\gamma = \phi \circ \sigma$  eine entsprechende Parametrisierung des Randes von  $S$

$$\gamma(t) = \phi(\sigma_1(t), \sigma_2(t)) = (\sigma_1(t), \sigma_2(t), g(\sigma_1(t), \sigma_2(t)))$$

mit dem Tangentialvektor

$$\begin{aligned}\gamma'(t) &= (\sigma_1'(t), \sigma_2'(t), g_x(\sigma_1(t), \sigma_2(t))\sigma_1'(t) + g_y(\sigma_1(t), \sigma_2(t))\sigma_2'(t)) \\ &= (\sigma_1'(t), \sigma_2'(t), (g_x \circ \sigma)(t)\sigma_1'(t) + (g_y \circ \sigma)(t)\sigma_2'(t)).\end{aligned}$$

Somit erhalten wir für das Integral des Vektorfeldes  $F$  über den orientierten Rand von  $S$

$$\begin{aligned}
\int_{\partial S} F \cdot d\gamma &= \int_a^b \langle (F \circ \gamma)(t), \gamma'(t) \rangle dt = \int_a^b \langle (F \circ (\phi \circ \sigma))(t), \gamma'(t) \rangle dt \\
&= \int_a^b \langle (F \circ \phi)(\sigma(t)), \gamma'(t) \rangle dt \\
&= \int_a^b [(F_1 \circ \phi)(\sigma(t))\sigma'_1(t) + (F_2 \circ \phi)(\sigma(t))\sigma'_2(t) \\
&\quad + (F_3 \circ \phi)(\sigma(t))(g_x \circ \sigma)(t)\sigma'_1(t) + (g_y \circ \sigma)(t)\sigma'_2(t)] dt \\
&= \int_a^b [(F_1 \circ \phi + F_3 \circ \phi g_x)(\sigma(t))\sigma'_1(t) + (F_2 \circ \phi + F_3 \circ \phi g_y)(\sigma(t))\sigma'_2(t)] dt \\
&= \int_{\partial D} \begin{pmatrix} F_1 \circ \phi + F_3 \circ \phi g_x \\ F_2 \circ \phi + F_3 \circ \phi g_y \end{pmatrix} \cdot d\sigma.
\end{aligned}$$

Wendet man den Satz von Green auf das letzte Integral an, erhält man

$$\begin{aligned}
\int_{\partial S} F \cdot d\gamma &= \iint_D \left[ \frac{\partial}{\partial x} (F_2 \circ \phi + F_3 \circ \phi g_y) - \frac{\partial}{\partial y} (F_1 \circ \phi + F_3 \circ \phi g_x) \right] dx dy \\
&= \iint_D \left[ \frac{\partial}{\partial x} (F_2(x, y, g(x, y)) + F_3(x, y, g(x, y))g_y(x, y)) - \frac{\partial}{\partial y} (F_1(x, y, g(x, y)) \right. \\
&\quad \left. + F_3(x, y, g(x, y))g_x(x, y)) \right] dx dy \\
&= \iint_D \left[ \frac{\partial}{\partial x} (F_2(x, y, g(x, y)) + \frac{\partial F_2}{\partial z} \circ \phi g_x + \frac{\partial F_3}{\partial x} \circ \phi g_y + \frac{\partial F_3}{\partial z} \circ \phi g_x g_y + F_3 \circ \phi g_{yx} \right. \\
&\quad \left. - \frac{\partial}{\partial y} (F_1(x, y, g(x, y)) - \frac{\partial F_1}{\partial z} \circ \phi g_y - \frac{\partial F_3}{\partial y} \circ \phi g_x - \frac{\partial F_3}{\partial z} \circ \phi g_y g_x - F_3 \circ \phi g_{xy}) \right] dx dy \\
&= \iint_D \left[ \left( \frac{\partial F_3}{\partial y} \circ \phi - \frac{\partial F_2}{\partial z} \circ \phi \right) (-g_x) + \left( \frac{\partial F_1}{\partial z} \circ \phi - \frac{\partial F_3}{\partial x} \circ \phi \right) (-g_y) + \left( \frac{\partial F_2}{\partial x} \circ \phi \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{\partial F_1}{\partial y} \circ \phi \right) \right] dx dy = \int_S \operatorname{rot} F \cdot dS.
\end{aligned}$$

□

BEISPIEL 2.1. Man berechne

$$\int_C -y^3 dx + x^3 dy - z^3 dz,$$

über die Schnittkurve  $C$  des Zylinders  $x^2 + y^2 = 1$  mit der Ebene  $x + y + z = 1$ . Die Schnittkurve  $C$  ist der Rand der Schnittfläche  $S$ . Diese ist der Graph von  $g(x, y) = 1 - x - y$  über dem Kreis  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ . Für das Vektorfeld  $F = (-y^3, x^3, z^3)$  ergibt eine einfache Rechnung

$$\operatorname{rot} F = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3x^2 + 3y^2 \end{pmatrix}.$$

Mit dem Satz von Stokes folgt daher

$$\begin{aligned} \int_C F \cdot d\gamma &= \int_S \operatorname{rot} F \cdot dS = \iint_D \langle (\operatorname{rot} F) \circ \phi, T_x \times T_y \rangle dx dy \\ &= \iint_D \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3x^2 + 3y^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle dx dy = 3 \iint_D (x^2 + y^2) dx dy \\ &= 3 \int_0^{2\pi} \left[ \int_0^1 r^3 dr \right] d\varphi = \frac{3\pi}{2}. \end{aligned}$$

BEMERKUNG 2.1. Es sei  $S$  eine ebene Fläche parallel zur  $xy$ -Ebene mit Abstand  $z_0$  von der  $xy$ -Ebene und  $F$  das spezielle Vektorfeld  $F(x, y, z) = (P(x, y), Q(x, y), 0)$ . Dann ist

$$\operatorname{rot} F = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \end{pmatrix}$$

Die Fläche  $S$  wird parametrisiert durch

$$\phi(x, y) = (x, y, z_0), \quad (x, y) \in D,$$

somit ist  $T_x \times T_y = (0, 0, 1]$  und es folgt

$$\begin{aligned} \int_S \operatorname{rot} F \cdot dS &= \iint_D \langle (\operatorname{rot} F) \circ \phi, T_x \times T_y \rangle dx dy \\ &= \iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy. \end{aligned}$$

Ist andererseits  $\sigma: I \rightarrow \mathbb{R}^2$  eine orientierungstreue Parametrisierung des Randes von  $D$ , dann ist  $\gamma = \phi \circ \sigma$  eine orientierungstreue Parametrisierung des Randes von  $S$  und es folgt

$$\begin{aligned} \int_{\partial S} F \cdot d\gamma &= \int_I \langle F \circ \gamma, \gamma' \rangle dt \\ &= \int_I \left\langle \begin{pmatrix} P \circ \gamma \\ Q \circ \gamma \\ 0 \end{pmatrix}, \gamma' \right\rangle dt = \int_I \left\langle \begin{pmatrix} P \circ \sigma \\ Q \circ \sigma \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sigma'_1 \\ \sigma'_2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle dt = \int_{\partial D} P dx + Q dy. \end{aligned}$$

In diesem Fall stimmt also der Satz von Stokes mit dem Satz von Green überein.

### 3. Der Divergenzsatz von Gauß

SATZ 3.1. Es sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  ein Normalbereich 4. Art,  $\partial\Omega$  seine nach außen orientierte Oberfläche,  $U$  eine Umgebung von  $\Omega$  und  $F = (P, Q, R): U \rightarrow \mathbb{R}^3$  ein stetig differenzierbares Vektorfeld. Dann gilt

$$(5.2) \quad \int_{\Omega} \operatorname{div} F dx = \int_{\partial\Omega} F \cdot dS (= \int_{\partial\Omega} \langle F, \nu \rangle dS)$$

PROOF. Setzt man  $\nu = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ , dann ist (5.2) gleichbedeutend mit

$$\int_{\Omega} \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial PQ}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx = \int_{\partial\Omega} (P\nu_1 + Q\nu_2 + R\nu_3) ds.$$

Es genügt daher, die Gültigkeit der Beziehungen

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{\partial P}{\partial x} dx &= \int_{\partial\Omega} P\nu_1 dS, \\ \int_{\Omega} \frac{\partial Q}{\partial y} dx &= \int_{\partial\Omega} Q\nu_2 dS, \\ \int_{\Omega} \frac{\partial R}{\partial z} dx &= \int_{\partial\Omega} R\nu_3 dS \end{aligned}$$

nachzuweisen. Wir weisen die letzte nach und verwenden dabei, daß  $\Omega$  ein Normalbereich bezüglich der  $xy$ -Ebene ist. Es gilt also

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : g(x, y) \leq z \leq f(x, y), (x, y) \in D\},$$

wobei  $D$  ein Normalbereich 3. Art in  $\mathbb{R}^2$  ist. Somit folgt mit Hilfe des Satzes von Fubini

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{\partial R}{\partial z} dx &= \int_D \left[ \int_{z=g(x,y)}^{f(x,y)} \frac{\partial R}{\partial z}(x, y, z) dz \right] dx dy \\ &= \int_D [R(x, y, f(x, y)) - R(x, y, g(x, y))] dx dy. \end{aligned}$$

Die Oberfläche  $\partial\Omega$  setzt sich im Allgemeinen aus 6 glatten Teilflächen zusammen. Die Normalvektoren für die beiden Seitenflächen sind  $(0, \pm 1, 0)$ , für die vordere und hintere Randfläche  $(\pm 1, 0, 0)$ . Für diese Flächen gilt also  $\nu_3 = 0$  und das Flächenintegral umfaßt nur mehr

$$\int_{\partial\Omega} R\nu_3 dS = \int_{S_1} R\nu_3 dS + \int_{S_2} R\nu_3 dS.$$

Die Flächen  $S_1$  und  $S_2$  sind gegeben durch

$$\begin{aligned} S_1 &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = f(x, y), (x, y) \in D\}, \\ S_2 &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = g(x, y), (x, y) \in D\} \end{aligned}$$

ihre Normaleneinheitsvektoren sind

$$\begin{aligned} \nu^1(x, y, z) &= \frac{(-f_x, -f_y, 1)}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}}, \\ \nu^2(x, y, z) &= \frac{(g_x, g_y, -1)}{\sqrt{1 + g_x^2 + g_y^2}}, \end{aligned}$$

(man beachte die Orientierung von  $\nu^2$ ). Aus der Definition des Flächenintegrals ergibt sich nun

$$\int_{S_1} R\nu_3 dS = \iint_D R(x, y, f(x, y)) \frac{1}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}} \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} dx dy = \iint_D R(x, y, f(x, y)) dx dy,$$

und analog

$$\int_{S_2} R\nu_3 dS = - \iint_D R(x, y, g(x, y)) dx dy$$

Insgesamt erhält man daher

$$\int_{\partial\Omega} R\nu_3 dS = \iint_D (R(x, y, f(x, y)) - R(x, y, g(x, y))) dx dy.$$

□