2.) Funktionen

Def 1 Es seien D und W nichtleere Mengen

1) Eine Funktion (Abbildung) f von D nach W ist eine Vorschrift, welche jedem Element $x \in D$ genau ein $y \in W$ zuordnet.

kompakt: $f: \begin{cases} D \to W \\ x \to f(x) \end{cases}$

2) D heißt Definitionsbereich, W Wertevorrat von f

$$f(D) = \{ y \in W : y = f(x) \text{ für mindestens ein } x \in D \}$$

heißt Bild von D unter f. Schreibweise: bild(f)

y -- Bild von x
x -- Urbild von y
$Y \subset W$
$f^{-1}(Y) = \{ x \in D : f(x) \in Y \}$

3) $$G(f) = \{ (x, f(x)) \in D \times W : x \in D \}$$

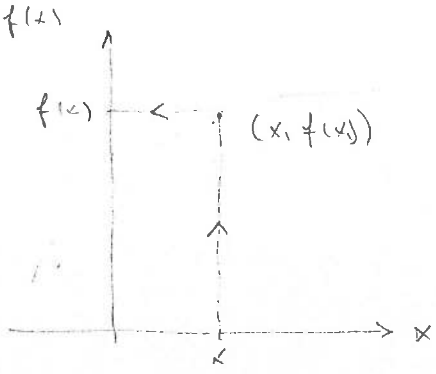
heißt Graph von f.

Bsp.:

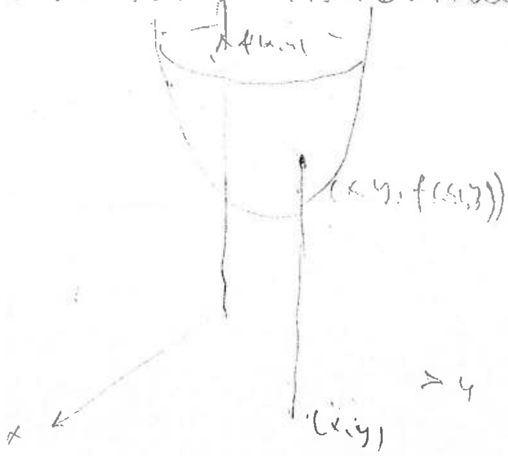
Im Folgenden werden wir uns auf reelle Funktionen einer oder mehrerer reellen Variablen beschränken, d.h. $D, W \subset \mathbb{R}$. Das Konzept einer Abbildung ist jedoch wesentlich allgemeiner.

Für $W \subset \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$ ist $G(f) \subset \mathbb{R}^2$,
$D \subset \mathbb{R}^2$ ist $G(f) \subset \mathbb{R}^3$

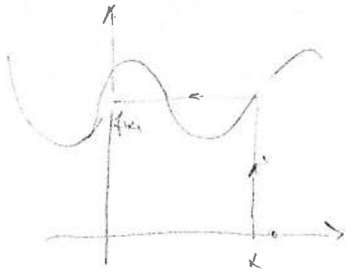
Der Graph einer Funktion kann zu deren Visualisierung verwendet werden:



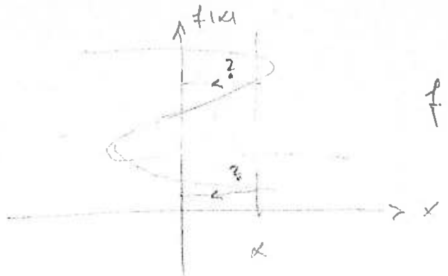
$D \subset \mathbb{R}$



$D \subset \mathbb{R}^2$



Funktion



f(x) ?

keine Funktion

Schneidet jede Gerade parallel zur Ordinatenachse $G(f)$ höchstens ein Mal, liegt eine Funktion vor.

Schreibweise: $f: D \to W$, $y = f(x)$,

$f: D \to W$

$f(x) = \ldots$

Bemerkungen:

1) Zwei Abbildungen f und g sind genau dann gleich, wenn sie denselben Definitionsbereich und Wertevorrat haben und

$$f(x) = g(x), \quad x \in D$$

gilt.

Bsp: $f(x) = 1$
$g(x) = \sin^2 x + \cos^2 x$

2) Eine Funktion schöpft i.A. ihren Wertevorrat nicht aus.

3) Ein Element des Bildes von D kann auch mehrfach angenommen werden.

4) Der Definitionsbereich wird oft nicht explizit angegeben. Dann nimmt man den natürlichen Definitionsbereich von f. Schreibweise $D(f)$

Definition 2 Es sei $f: D \to W$ eine Funktion.

1) f heißt surjektiv, wenn zu jedem $y \in W$ mindestens ein $x \in D$ mit $y = f(x)$ existiert.

2) f heißt injektiv, wenn zu jedem $y \in W$ höchstens ein $x \in D$ mit $y = f(x)$ existiert.

3) f heißt bijektiv, wenn f injektiv und surjektiv ist.

Eine Abbildung f ist somit surjektiv genau dann, wenn

$$W = f(D).$$

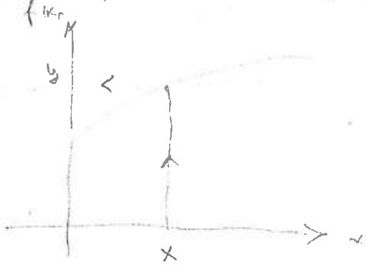
Alternativ:

Bemerkung: f injektiv $\Leftrightarrow$
$\forall x, \tilde{x} \in D: \; f(x) = f(\tilde{x}) \Rightarrow x = \tilde{x}$

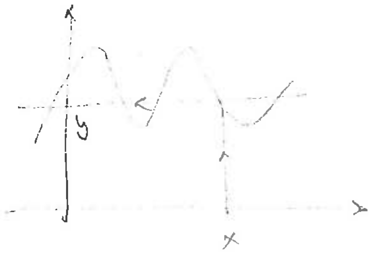
move

f ist injektiv / surjektiv / bijektiv genau dann, wenn die Gleichung $y = f(x)$ für jedes $y \in W$ höchstens / mindestens / genau eine Lösung besitzt.

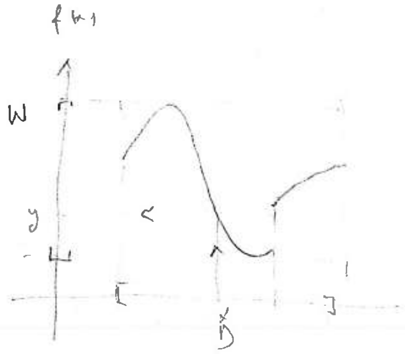
Daraus ergibt sich folgender graphischer Test:



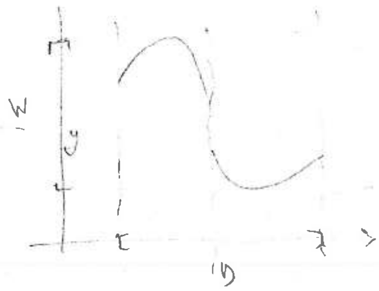
injektiv



nicht injektiv



surjektiv



Die Bestimmung des exakten Bildes $f(D)$ ist nicht immer einfach.
Für manche Beispiele kann man folgende Strategie verwenden:
Man diskutiere die Lösbarkeit der Gleichung

$$y = f(x)$$

in Abhängigkeit von y.

Dann gilt
- Ist $y = f(x)$ für alle $y \in W$ lösbar, ist f surjektiv
- Besitzt $y = f(x)$ für alle $y \in W$ höchstens eine Lösung, ist f injektiv

Beispiel 1 $\quad f(x) = \dfrac{x-1}{-2x+3}$.

$$D(f) = \{ x \in \mathbb{R} : -2x+3 \neq 0 \} = \mathbb{R} \setminus \{ \tfrac{3}{2} \}$$

Wir fassen f auf als Abbildung $f : D(f) \to \mathbb{R}$ und berechnen die Bildmenge von f. Für $y \in \mathbb{R}$ beliebig, aber fest, betrachten wir die Gleichung $y = f(x)$ d.h.

$$\frac{x-1}{-2x+3} = y$$

und lösen die Gleichung nach x auf:

$$x - 1 = -2xy + 3y$$
$$x + 2xy = 1 + 3y$$
$$x(1+2y) = 1+3y$$

Somit für $y \neq -\frac{1}{2}$ folgt

$$x = \frac{1+3y}{1+2y}$$

Liegt diese Lösung stets in $D(f)$? Wäre

$$\frac{1+3y}{1+2y} = \frac{3}{2}$$

$$1+3y = \frac{3}{2} + 3y$$

folgte der Widerspruch

$$1 = \frac{3}{2}$$

Somit gilt stets $\frac{1+3y}{1+2y} \neq \frac{3}{2}$

Kann $y = -\frac{1}{2}$ als Bild auftreten? Aus [illegible]

$$\frac{x-1}{-2x+3} = -\frac{1}{2}$$

$$x-1 = x - \frac{3}{2}$$

folgt der Widerspruch $-1 = -\frac{3}{2}$, somit $-\frac{1}{2} \notin \text{Bild}(f)$.

Diese Rechnung zeigt: f ist injektiv, aber nicht surjektiv und

$$\text{Bild}(f) = \mathbb{R} \setminus \{-\tfrac{1}{2}\}$$

A posteriori kann man nun den Wertevorrat von f verkleinern und f interpretieren als Abbildung

$$f: \mathbb{R} \setminus \{\tfrac{3}{2}\} \to \mathbb{R} \setminus \{-\tfrac{1}{2}\}$$

Bei dieser Interpretation ist f sogar bijektiv! Streng genommen sollte man daher auch eine andere Bezeichnung wählen. 13.10.06

Wir zeigen nun, wie wir aus einfachen Bausteinen kompliziertere Funktionen konstruieren können.

3.1 Algebraische Verknüpfungen

Definition 3: Es seien $D_f, D_g \subseteq \mathbb{R}$, $f: D_f \to \mathbb{R}$, $g: D_g \to \mathbb{R}$ Funktionen. Ferner sei $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann sind die Funktionen $\lambda f: D_f \to \mathbb{R}$, $f \pm g$, $fg: D_f \cap D_g \to \mathbb{R}$ definiert durch $(x \in D)$

$$(\lambda f)(x) = \lambda f(x), \quad x \in D_f$$ | [illegible] Multipl. |

$$(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x),$$
$$x \in D_f \cap D_g$$
$$(fg)(x) = f(x)\,g(x)$$

Der Quotient $\frac{f}{g}$ ist auf $\{x \in D_f \cap D_g : g(x) \neq 0\}$ definiert durch

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

11.10.

Beispiel:

1) $id^2(x) = id(x)\,id(x) = x^2$, $\quad id^k(x) = x^k$, $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 1$, $\quad id^0(x) := 1$

2) Es seien $a_i \in \mathbb{R}$, $0 \leq i \leq n$.

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k\, id^k(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

Summe nicht verwenden

$$P = \sum_{k=0}^{n} a_k\, id^k$$ heißt Polynomfunktion

(vom Grad n falls $a_n \neq 0$).

3) Es seien P, Q Polynome. Dann nennt man

$$R = \frac{P}{Q}$$

rationale Funktion. Es gilt

$$D(R) = \{x \in \mathbb{R} : Q(x) \neq 0\}$$

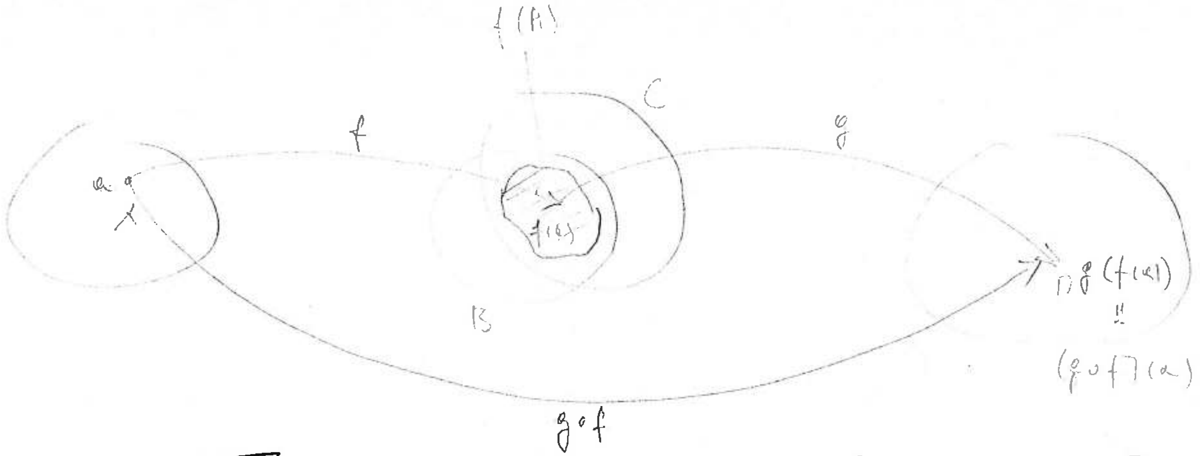
3.2 Verkettung von Funktionen

Definition 4 Es seien A, B, C, D nichtleere Mengen und

$$f : A \to B, \quad g : C \to D$$

Funktionen. Gilt die Verknüpfungsbedingung $f(A) \subset C$ dann ist die Verkettung (Hintereinanderausführung, Komposition) von g nach f, $g \circ f$, definiert durch

$$g \circ f : \begin{cases} A \to D \\ x \to g(f(x)) \end{cases}$$



Beispiel $f(x) = \sqrt{x+2}$ $D(f) = [-2,\infty)$, $g(x) = x^2-3$, $D(g) = \mathbb{R}$

a) $f \circ g$ $x \in \mathbb{R} = D(g)$

$(f \circ g)(x) = f(g(x))$ $g(x) = x^2-3 \in D(f) \Leftrightarrow x^2-3 \geq -2 \Leftrightarrow x^2 \geq 1 \Leftrightarrow |x| \geq 1$

$= \sqrt{g(x)+2} = \sqrt{x^2-3+2} = \sqrt{x^2-1}$ $\Downarrow$ $D(f \circ g) = (-\infty,-1] \cup [1,\infty)$

b) $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ Verknüpfungsbedingung für $x \in D(f)$ automatisch erfüllt, somit $D(g \circ f) = D(f)$

$= (f(x))^2 - 3 = (\sqrt{x+2})^2 - 3 = x-1$

Beachte: $f \circ g \neq g \circ f$

Beispiel: Wir greifen Beispiel 1 auf und setzen f wie oben und

$g: \mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{2}\} \to \mathbb{R}$, $g(y) = \frac{1+3y}{1+2y}$

Wir haben bereits gezeigt, dass $g(y) \neq \frac{3}{2}$ für $y \in D(g)$ gilt.

Daher existiert $f \circ g$ und

$$(f \circ g)(y) = f(g(y)) = \frac{g(y)-1}{-2g(y)+3} = \frac{\frac{1+3y}{1+2y} - 1}{-2\,\frac{1+3y}{1+2y} + 3} = \frac{1+3y-1-2y}{-2-6y+3+6y} = y$$

Also $(f \circ g)(y) = y$ für $y \in D(g)$

d.h. $f \circ g = \mathrm{id}_{D(g)}$.

Nach Konstruktion gilt $\mathrm{bild}(f) = D(g)$. Somit existiert auch $g \circ f$ und eine einfache Rechnung zeigt

$$g \circ f = \mathrm{id}_{D(f)}$$

Zufall?

Zur Erinnerung: $g(y)$ war eine (die) eindeutige Lösung der Gleichung

$$f(x) = y$$

d.h. es gilt $f(g(y)) = y$

Dieses Beispiel veranschaulicht folgende Eigenschaft injektiver Funktionen $f : D \to W$. Für alle $y \in \mathrm{bild}(f)$ hat die Gleichung

(*) $$f(x) = y$$

genau eine Lösung $x \in D$. Man kann somit folgende Funktion definieren

$$g : \begin{cases} \mathrm{bild}(f) \to D \\ y \to x = g(y), \quad g(y) \text{ löst } (*) . \end{cases}$$

Die Funktion g ist somit gerade so konstruiert worden, dass

$$(f \circ g)(y) = f(g(y)) = y \qquad y \in \mathrm{bild}(f)$$

also

$$f \circ g = \mathrm{id}_{\mathrm{bild}(f)}$$

gilt. Darüber hinaus ist g surjektiv, $\mathrm{bild}(g) = D$. Somit existiert auch die Verknüpfung $g \circ f$. Für $x \in D$ und selbem $f(x) = y$ folgt

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(y) = x,$$

die letzte Gleichung ist eine Folgerung aus der Definition von g. Es gilt also

(**) $$g \circ f = \mathrm{id}_D$$

Kann es noch andere Funktionen gemäß der Eigenschaft (**) geben? Sei $\tilde{g}$: bild$(f) \to D$ eine weitere Funktion mit (**). Dann folgt für $y \in$ bild(f), d.h. $y = f(x)$ für ein $x \in D$, mit (**)

$$\tilde{g}(y) = \tilde{g}(f(x)) = (\tilde{g} \circ f)(x) = id_D(x) = (g \circ f)(x)$$
$$= g(f(x)) = g(y)$$

d.h. $\tilde{g} = g$

<u>Definition 5</u>: Es sei $f: D \to W$ injektiv. Die Abbildung

$$f^{-1}: \begin{cases} \text{bild}(f) \to D \\ y \mapsto x \text{ mit } f(x) = y \end{cases}$$

heißt <u>Umkehrfunktion</u> von f.

Mit den vorausgegangenen Überlegungen wurde folgendes Resultat bewiesen

<u>Satz 1</u> Eine injektive Funktion $f: D \to W$ besitzt genau eine Umkehrfunktion f^{-1} : bild$(f) \to D$. Die Umkehrfunktion ist injektiv und es gelten die Identitäten

$$f \circ f^{-1} = id_{\text{bild}(f)}$$
$$f^{-1} \circ f = id_D$$

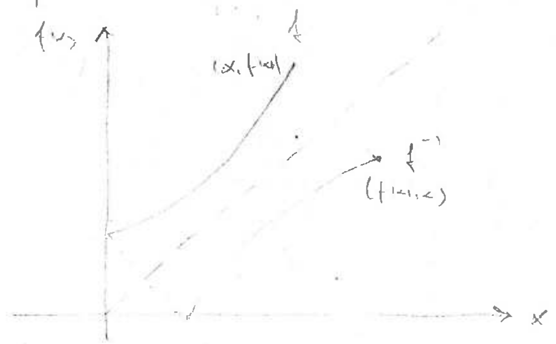
Bemerkung: 1) Man verwechsle f^{-1} nicht mit der Funktion $\frac{1}{f}$!

2) Ist $f: D \to W$ sogar bijektiv, dann ist auch $f^{-1}: W \to D$ eine Bijektion.

Besteht ein Zusammenhang zwischen den Graphen von f und f^{-1}?

$$G(f^{-1}) = \{ (y, f^{-1}(y)) \in W \times D : y \in \text{bild}(f) \}$$
$$= \{ (y, x) \in W \times D : y \in \text{bild}(f), x = f^{-1}(y) \}$$
$$= \{ (y, x) \in W \times D : (x, y) \in G(f) \}$$

Der Graph von f entsteht also durch Spiegelung an der Mediane aus dem Graphen von f^{-1}.



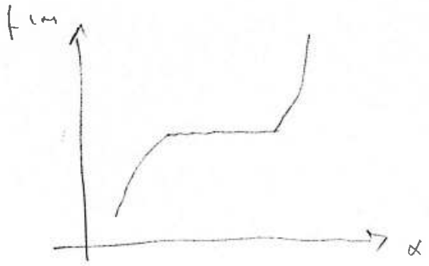
Qualitative Eigenschaften reeller Funktionen:

Definition 6: Sei f eine Funktion $D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$.

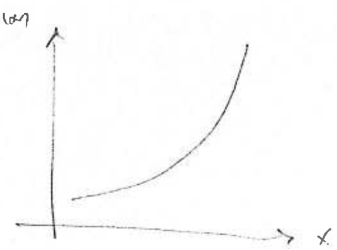
1.) f heißt monoton wachsend (fallend), wenn aus $x \leq y$ stets $f(x) \leq f(y)$ $(f(x) \geq f(y))$ folgt $(x, y \in D)$.

2) f heißt streng monoton wachsend (fallend), wenn aus $x < y$ stets $f(x) < f(y)$ $(f(x) > f(y))$ folgt.

3) f heißt (streng) monoton, wenn f (streng) monoton wachsend oder (streng) monoton fallend ist.



monoton wachsend



streng monoton wachsend

20.10.2010

Satz: Eine streng monotone Funktion ist injektiv. Sie besitzt daher eine Umkehrfunktion, welche im selben Sinne streng monoton ist.

Definition 7 Es sei $D \subset \mathbb{R}$ symmetrisch bezüglich 0 und $f: D \to \mathbb{R}$ eine Funktion.

1) f heißt gerade, wenn für alle $x \in D$

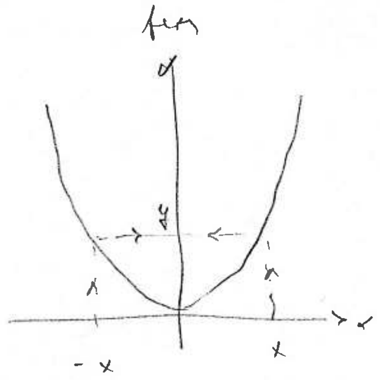
$$f(x) = f(-x)$$

gilt.

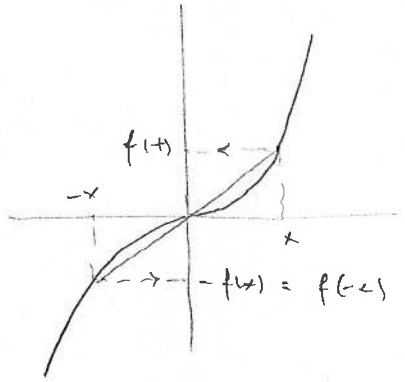
2) f heißt <u>ungerade</u>, wenn für alle $x \in D$

$$f(x) = -f(-x)$$

gilt



gerade



ungerade

Es gilt

- Das Produkt zweier $\left\{ \begin{array}{l} \text{gerader} \\ \text{ungerader} \end{array} \right.$ Funktionen ist gerade.

- Das Produkt einer geraden und einer ungeraden Funktion ist ungerade.

<u>Def 7</u> (Beschränktheit) Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt auf $I \subset D$

a) beschränkt nach unten, wenn es eine Konstante $m \in \mathbb{R}$ gibt mit $f(x) \geq m$, $x \in I$

$(\exists m \in \mathbb{R}\ \forall x \in I : f(x) \geq m)$

b) beschränkt nach oben, wenn es eine Konstante $M \in \mathbb{R}$ gibt mit $f(x) \leq M$, $x \in I$

$(\exists M \in \mathbb{R}\ \forall x \in I : f(x) \leq M)$

c) beschränkt, wenn es eine Konstante $M \geq 0$ gibt, mit

$$|f(x)| \leq M, \quad x \in I$$

$$(\exists M \geq 0\ \forall x \in I : |f(x)| \leq M)$$

Eine Funktion ist somit genau dann beschränkt, wenn sie nach oben und nach unten beschränkt ist.

<u>Bsp</u> $f(x) = \frac{x-1}{x+2}$, $x \neq -2$ ist nicht beschränkt. Denn

a) für beliebiges $M \geq 0$ beliebig groß gilt für $x < -2$

$$\left|\frac{x-1}{x+2}\right| = \frac{x-1}{x+2} > M \iff x-1 \overset{!}{<} Mx + 2M$$

$$\iff -x(-1+M) = |x|(-1+M) < 2M$$

$$\iff |x| < \frac{2M}{-1+M} \qquad (\text{o.B.d.A. } M > 1)$$

d.h. $|f(x)| > M$ für $x \in \left(-\frac{2M}{-1+M}, -2\right)$

b) f ist beschränkt auf z.B. $[0, \infty)$. Dazu betrachte

$$f(x) = \frac{x+2-3}{x+2} = 1 - \frac{3}{x+2} \leq 1 \quad \text{für } x \geq 0$$

Wegen $\frac{3}{x+2} \leq \frac{3}{2}$ folgt

$$f(x) \geq 1 - \frac{3}{2} = -\frac{1}{2} \quad \text{für } x \geq 0$$

d.h. f ist nach oben und unten beschränkt.

<u>Def 8</u> (Periodizität) $f: D \to \mathbb{R}$ heißt <u>periodisch</u> mit Periode $T \neq 0$ genau dann, wenn

1) Für alle $x \in D$ gilt auch $x + T \in D$
2) Für alle $x \in D$ gilt: $f(x) = f(x+T)$.

Bemerkung: a) Ist T eine Periode von f, dann auch kT, $k \in \mathbb{Z}$.

b) Die kleinste positive Periode einer periodischen Funktion heißt primitive Periode

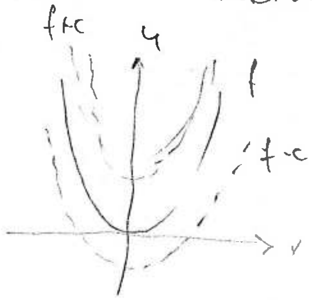
c) Es genügt, eine periodische Funktion auf einem Intervall der Länge T anzugeben.

Beispiele: ungedämpfte Schwingungen
trigonometrische Funktionen.

Operationen auf Graphen einer Funktion $f: D \to \mathbb{R}$

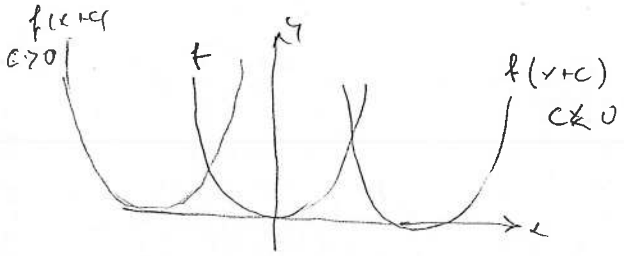
$y = f(x) + c$ vertikale Verschiebung um $|c|$ Einheiten

nach $\begin{cases} \text{oben} & c>0 \\ \text{unten} & c<0 \end{cases}$



$y = f(x+c)$ horizontale Verschiebung um $|c|$ Einheiten

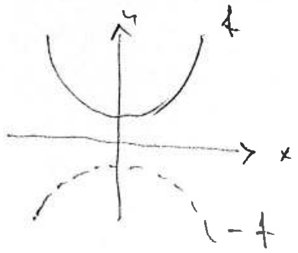
nach $\begin{cases} \text{links} \\ \text{rechts} \end{cases}$ für $\begin{matrix} c>0 \\ c<0 \end{matrix}$



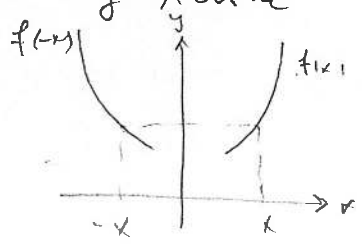
$y = -f(x)$ $\qquad\qquad$ $y = f(-x)$

Spiegelung des Graphen von f um

x-Achse

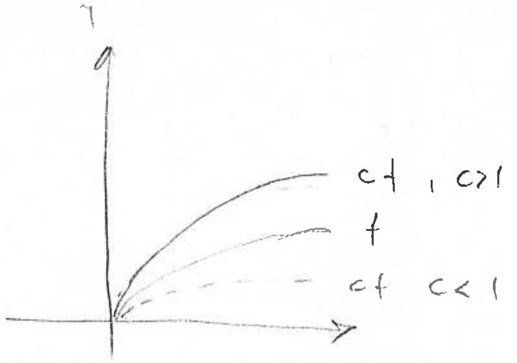


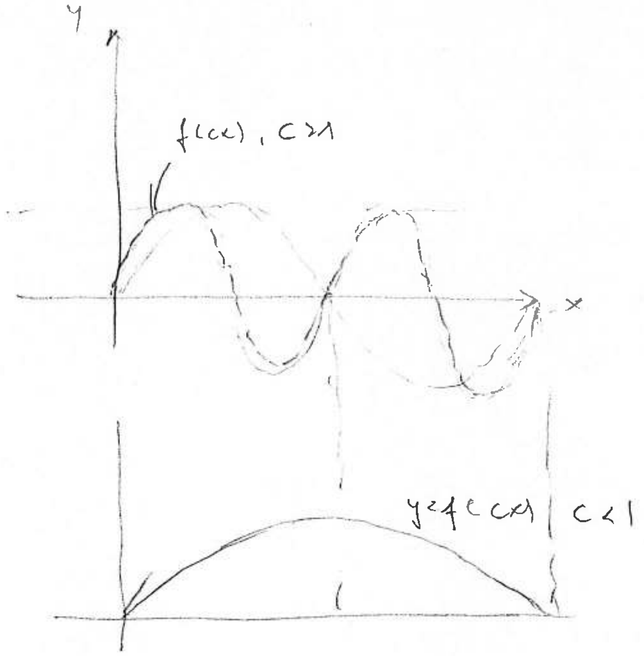
y-Achse



$y = c\,f(x)$ vertikale Streckung für $c > 1$
vertikale Stauchung für $0 < c < 1$

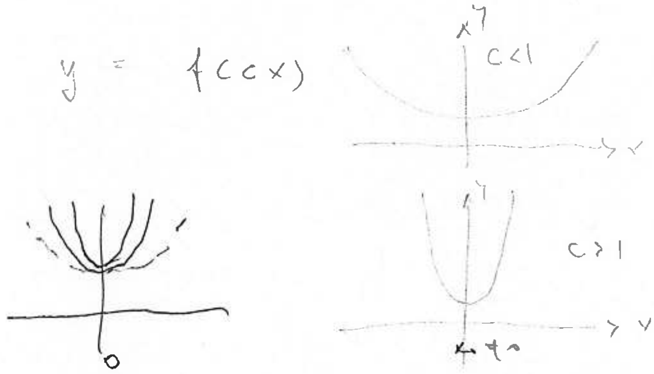
$y = f(cx)$ horizontale Streckung für $0 < c < 1$
horizontale Stauchung für $c > 1$


y
cf , c>1
f
cf c<1


y
f(cx), c>1
x
y=f(cx) c<1

$y = -f(-x)$ Spiegelung am Ursprung

$y = f(cx)$



Streckung ($c<1$), Stauchung ($c>1$) in x-Richtung um c Einheiten

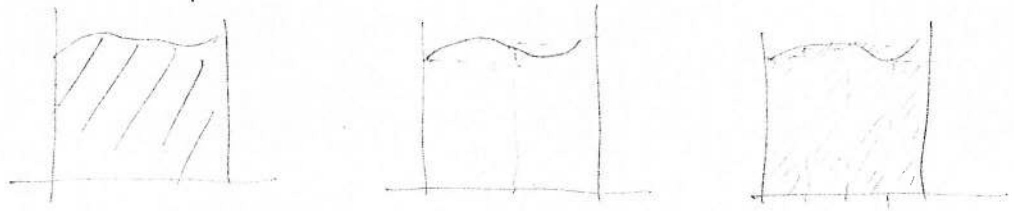
Beschränkt hin?
Lineare Abbildung

4. Grenzwert und Stetigkeit

4.1 Grenzwert von Funktionen

Der Grenzwertbegriff 'meint' begegnet bei

- der Bestimmung des Anstiegs einer Kurve (Tangentenproblem)
- der Berechnung von Flächeninhalten

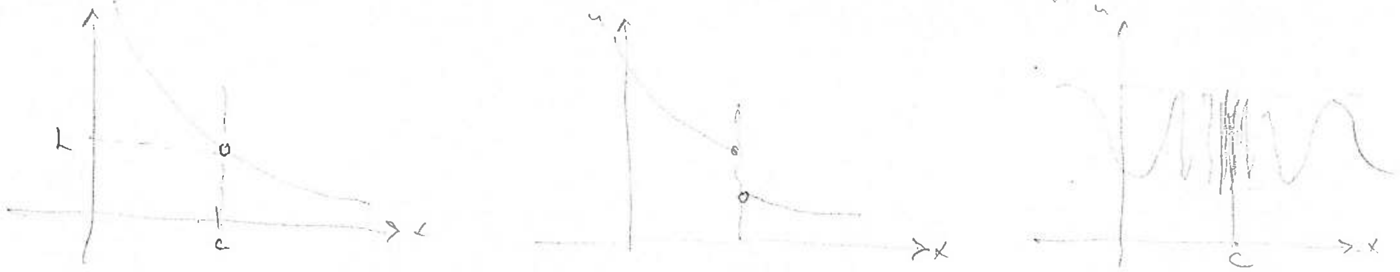


etc

- der Berechnung der Länge einer Kurve
- der Bestimmung momentaner Änderungsraten (Geschwindigkeit in Physik etc,
  Wachstumsraten in Populationsdynamik
  Reaktionsgeschwindigkeit in Biologie, Chemie etc)
- der Berechnung von Reihen einer Folgen
- der Diskussion des qualitativen Verhaltens einer Funktion in den Randpunkten oder Lücken des Definitionsbereiches. Kann man eine Lücke des Definitionsbereiches sinnvoll füllen?

20.10.08

Wie kann man beispielsweise folgendes unterschiedliche Verhalten einer Funktion in der Nähe einer Stelle c differenzieren?



Im ersten Fall gibt es offensichtlich eine Zahl L mit der Eigenschaft, dass sich die Funktionswerte $f(x)$ der Zahl L beliebig nahe kommen wenn x gegen c (egal wie) strebt. Dies ist offenbar in den beiden anderen Situationen nicht der Fall.

Wie kann man die schwammigen Formulierungen „die Funktionswerte kommen der Zahl L beliebig nahe", „x strebt gegen c" durch einen eindeutigen (mathematisch verständlichen) Formalismus ersetzen. Im Laufe der Zeit hat sich der Umgebungsbegriff als geeignet herausgestellt.

22.10.2012

<u>Def 1</u> 1) Es sei $x_0 \in \mathbb{R}$ und $\delta > 0$. Intervalle vom Typ $K(x_0,\delta) = (x_0-\delta, x_0+\delta)$ heißen <u>δ-Umgebung</u> von x_0.

2) Für beliebiges $\xi \in \mathbb{R}$ heißen Intervalle vom Typ (ξ, ∞) ξ-Umgebung von ∞ ($(-\infty, \xi)$ ξ-Umgebung von $-\infty$) oder Umgebung. $\mathcal{U}(x) := \{U \in \mathbb{R},\ U \text{ ist Umgebung von } x\}$

Wir erinnern nochmals daran, dass die Objekte $\pm\infty$ nicht zu $\mathbb{R}$ gehören.

<u>Def 2</u> Es sei $D \subset \mathbb{R}$. Eine Zahl $x_0 \in \mathbb{R}$ heißt <u>Häufungspunkt</u> von D, wenn für jede δ-Umgebung von x_0 gilt

$$D \cap K(x_0,\delta) \setminus \{x_0\} \neq \emptyset$$

(egal wie klein δ gewählt wird).

Diese Benennung bedeutet anschaulich, dass sich die Elemente von D um x_0 häufen. Man beachte, dass x_0 nicht Element von D sein muss.

Insbesondere haben wir folgende Beispiele vor Augen:

$D = (x_0, b)$, $D = (a, x_0)$, $D = (a, x_0) \cup (x_0, b)$

$D = [x_0, b)$, $D = (a, x_0]$, $D = [a, b]$, $x_0 \in D$ $(a < b)$

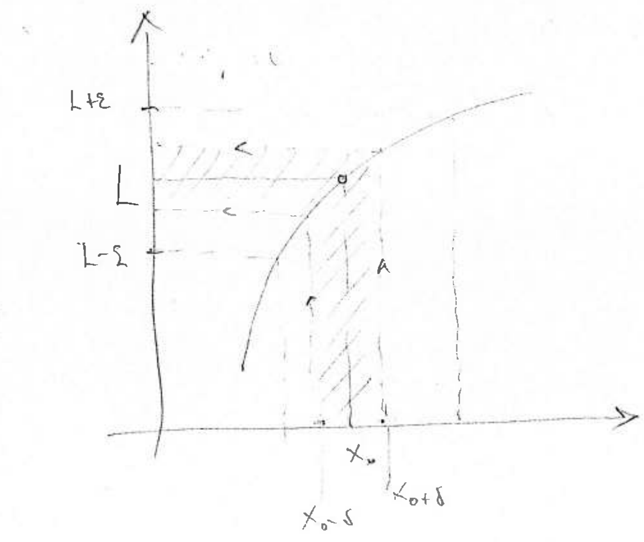
x_0 Randpunkt eines Intervalles

$\boxed{22.10.2006}$

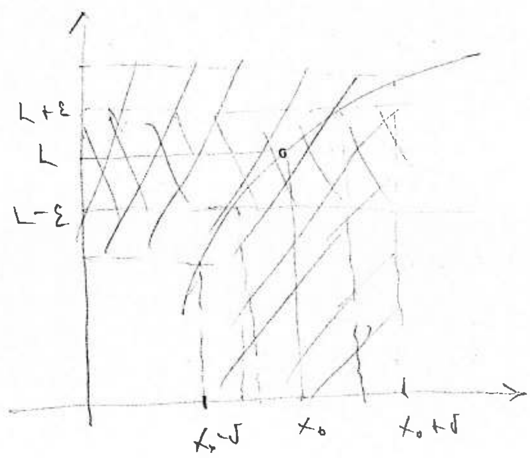
__Def 3__ Es sei $f: D \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $x_0 \in \mathbb{R}$ ein Häufungspunkt von D. Eine reelle Zahl L heißt __Grenzwert von f für x gegen x_0__, $L = \lim_{x \to x_0} f(x)$, genannt, wenn es zu jeder ε-Umgebung $K(L, \varepsilon)$ von L eine δ-Umgebung $K(x_0, \delta)$ von x_0 gibt mit

$$f\left((K(x_0, \delta) \setminus \{x_0\}) \cap D\right) \subset K(L, \varepsilon)$$

Da die Funktion f an der Stelle x_0 möglicherweise nicht definiert ist, muss die Stelle x_0 aus der δ-Umgebung von x_0 entfernt werden. Sollte f doch an der Stelle x_0 definiert sein, spielt der Funktionswert $f(x_0)$ keine Bedeutung bei der Berechnung des Grenzwertes!



passendes δ



δ zu groß

Begriff für komplexe Funktion

Bemerkungen:

1) δ hängt von ε ab, $\delta = \delta(\varepsilon)$
2) δ ist nicht eindeutig bestimmt
3) Hat man ein passendes δ gefunden, funktioniert jedes kleinere (mit dem selben ε).
4) Es ist nicht notwendig (und meist nicht möglich) das beste

zu finden.

Wir zeigen nun, daß man mit Def 3 tatsächlich rechnen kann:

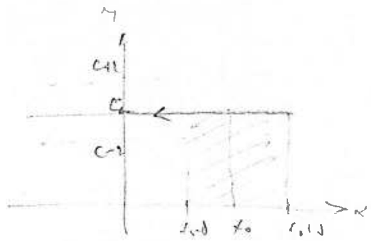
Beispiel 1 (konstante Funktion): $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = c$.

(kurz: $\lim\limits_{x \to x_0} c = c$)

Es gilt

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = c,$$

denn für jede Wahl von ε gilt

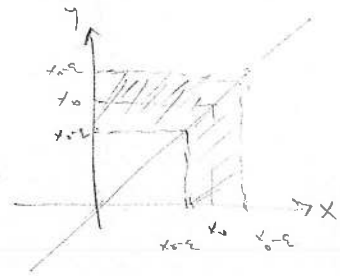


$$|f(x) - c| = |c - c| = 0 < \varepsilon$$

unabhängig von $x \in \mathbb{R}$. Somit kann $\delta > 0$ beliebig gewählt werden.

2.) Identität: $\lim\limits_{x \to x_0} \mathrm{id}(x) = x_0$

(andere Schreibweise: $\lim\limits_{x \to x_0} x = x_0$)



Für konkrete Beispiele ist folgende Form von Def 3 nützlich:

$L = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ genau dann, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, sodaß für alle $x \in D$ mit

$$0 < |x - x_0| < \delta$$

notwendigerweise

$$|f(x) - L| < \varepsilon$$

folgt.

Es sei also $\varepsilon > 0$ beliebig gewählt und $|x - x_0| < \delta$ mit einem noch zu bestimmenden δ. Dann gilt

$$|\mathrm{id}(x) - x_0| = |x - x_0| < \varepsilon$$

offensichtlich, falls $\delta \le \varepsilon$ gewählt wird

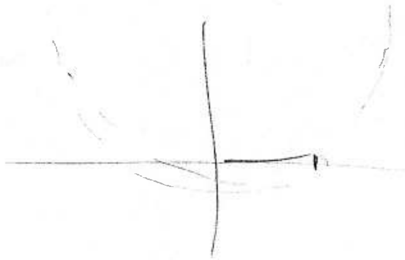
$f(x) = -3x^2 + 2x + 1 \qquad f(-1) = -4 \qquad \underline{x_0 = -1}$

$|f(x) - (-4)| = |-3x^2 + 2x + 5|$

$= |-3\cdot(x+1-1)^2 + 2(x+1) + 3|$

$= |-3(x+1)^2 + 6(x+1) + 2(x+1)|$

$\leq 3\delta^2 + 8\delta < \varepsilon$



(1) $\delta^2 + \frac{8}{3}\delta - \frac{\varepsilon}{3} < 0$

$\delta_{12} = -\frac{8}{6} \pm \sqrt{\frac{64}{36} + \frac{\varepsilon}{3}}$

$\delta < -\frac{8}{6} + \sqrt{\frac{64}{36} + \frac{\varepsilon}{3}}$

(2) o.B.d.A. $\underline{0 < \delta \leq 1}$

$|f(x) - (-4)| \leq 3\delta^2 + 8\delta = \delta(3\delta + 8)$

$\leq \delta\, 11 < \varepsilon$

$\Rightarrow \delta < \frac{\varepsilon}{11}$

$\underline{\delta < \min\left(\frac{\varepsilon}{11}, 1\right)}$

3.) $\lim\limits_{x \to -1} (3 - 5x) = 8.$

Es sei $\varepsilon > 0$ gewählt und $|x - (-1)| = |x + 1| < \delta$. Es folgt

$$|f(x) - 8| = |3 - 5x - 8| = |-5 - 5x| = |(-5)(x+1)| = 5|x+1| < 5\delta \overset{!}{\leq} \varepsilon$$

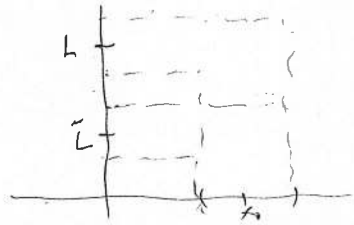
Die letzte Ungleichung ist eine Bedingung an δ, sie ist erfüllt, falls $\delta \leq \frac{\varepsilon}{5}$ gewählt wird.

<u>Satz 1</u> Der Grenzwert einer Funktion ist eindeutig bestimmt.

Beweis: Angenommen eine Funktion $f: D \to \mathbb{R}$ hätte in einem HP x_0 von D zwei Grenzwerte L und $\hat{L}$, o. B. d. A. $L < \hat{L}$.
Wählen wir in Def 3 $\varepsilon = \frac{1}{3}(\hat{L} - L)$ gibt es $\delta_1, \delta_2 > 0$ mit

$$|f(x) - L| < \tfrac{1}{3}(\hat{L} - L) \quad \text{für} \quad |x - x_0| < \delta_1$$

$$|f(x) - \hat{L}| < \tfrac{1}{3}(\hat{L} - L) \quad \text{für} \quad |x - x_0| < \delta_2$$



Für $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$ und $x' \in D$ mit $|x' - x_0| < \delta$ folgt

$$|L - \hat{L}| \leq |L - f(x')| + |f(x') - \hat{L}| < \tfrac{2}{3}|L - \hat{L}|$$

Für $\hat{L} - L > 0$ ergibt sich die falsche Behauptung $1 < \frac{2}{3}$.
Somit muss $L = \hat{L}$ gelten.

Das Berechnen von Grenzwerten wird erheblich vereinfacht, wenn man kompliziertere Ausdrücke in ihre elementaren Bestandteile zerlegt. Dazu dienen folgende Regeln.

Satz 2 (Rechenregeln f. Grenzwerte) Es seien $f, g : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$, Funktionen und $x_0 \in \mathbb{R}$ ein Häufungspunkt von D. Wenn

1.) die Grenzwerte

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = F \quad \text{und} \quad \lim_{x \to x_0} g(x) = G$$

existieren, dann existieren auch die Grenzwerte von

$f \pm g$, λf für $\lambda \in \mathbb{R}$, $f \cdot g$

und es gilt

$$\lim_{x \to x_0} (f \pm g)(x) = F \pm G$$

$$\lim_{x \to x_0} (\lambda f)(x) = \lambda F$$

$$\lim_{x \to x_0} (fg)(x) = FG$$

2.) Falls $G \neq 0$, dann besitzt $\frac{f}{g}$ einen Grenzwert mit

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f}{g}(x) = \frac{F}{G}.$$

29-11.2012

Folgerung: Wir erinnern an die elementaren Grenzwerte

$$\lim_{x \to x_0} c = c \quad \text{für alle } c \in \mathbb{R} \text{ (konstante Funktion)}$$

$$\lim_{x \to x_0} id(x) = \lim_{x \to x_0} x = x_0 \quad \text{(Identität)}$$

Es folgt für $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 1$

$$\lim_{x \to x_0} id^k(x) = \lim_{x \to x_0} x^k = x_0^k$$

und

$$\lim_{x \to x_0} (a_k\, id^k)(x) = a_k \lim_{x \to x_0} id^k(x) = a_k x_0^k, \quad a_k \in \mathbb{R}$$

Somit folgt für ein Polynom 1. Grades

$$P_1(x) = a_0 + a_1 x, \quad P_1 = a_0\, id^0 + a_1\, id$$

$$\lim_{x \to x_0} (a_0 + a_1 x) = \lim_{x \to x_0} a_0 + \lim_{x \to x_0} a_1\, id(x) = a_0 + a_1 x_0$$

$$= P_1(x_0)$$

für ein Polynom 2. Grades

$$P_2(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 = P_1(x) + a_2\, id^2(x)$$

$$\lim_{x\to x_0} P_2(x) = \lim_{x\to x_0}\left(P_1(x) + a_2\cdot id^2(x)\right)$$

$$= \lim_{x\to x_0} P_1(x) + \lim_{x\to x_0} a_2\cdot id^2(x)$$

$$= a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 = P_2(x_0)$$

und allgemein für $P(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k x^k$

$$\lim_{x\to x_0} P(x) = P(x_0).$$

Es seien P und Q Polynome und

$$R = \frac{P}{Q} : \{x \in \mathbb{R} : Q(x) \neq 0\}$$

Dann folgt mit der Quotientenregel:

$$\lim_{x\to x_0} R(x) = \lim_{x\to x_0} \frac{P}{Q}(x) = \frac{\lim_{x\to x_0} P(x)}{\lim_{x\to x_0} Q(x)} = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)} = R(x_0)$$

Wir halten fest:

Polynome und rationale Funktionen haben an jeder Stelle ihres Definitionsbereiches einen Grenzwert, der gleich ist dem Funktionswert an dieser Stelle.

27.10.200

Beispiele:

Satz 3 (Monotonie) Es seien $f, g : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$, Funktionen und $x_0 \in \mathbb{R}$ ein Häufungspunkt von D.

Existieren die Grenzwerte

$$\lim_{x\to x_0} f(x) \quad \text{und} \quad \lim_{x\to x_0} g(x)$$

und gilt

$$f(x) \leq g(x), \quad x \in D$$

oder

$$f(x) < g(x), \quad x \in D$$

dann folgt

$$\lim_{x\to x_0} f(x) \leq \lim_{x\to x_0} g(x).$$

Man beachte, daß eine strikte Ungleichung beim Grenzübergang i.A. nicht erhalten bleibt:

$$\lim_{x\to 0} x^2 = 0, \quad \text{aber} \quad x^2 > 0 \quad \text{für } x \neq 0.$$

⊗ Ohne Rechnung folgt somit

$$\lim_{x\to -1} 3 - 2x + x^2 = 3 - 2(-1) + (-1)^2 = 6,$$

$$\lim_{x\to 2} \frac{4+x}{3-x^2} = \frac{4+2}{3-2^2} = \frac{6}{-1} = -6.$$

⊗

Satz 4 (Sandwich Satz) Es seien $f, g, h : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$, Funktionen und $x_0 \in \mathbb{R}$ ein Häufungspunkt von D. Existieren die Grenzwerte $\lim_{x\to x_0} f(x)$ und $\lim_{x\to x_0} g(x)$, dann folgt aus

$$f(x) \leq h(x) \leq g(x), \quad x \in D$$

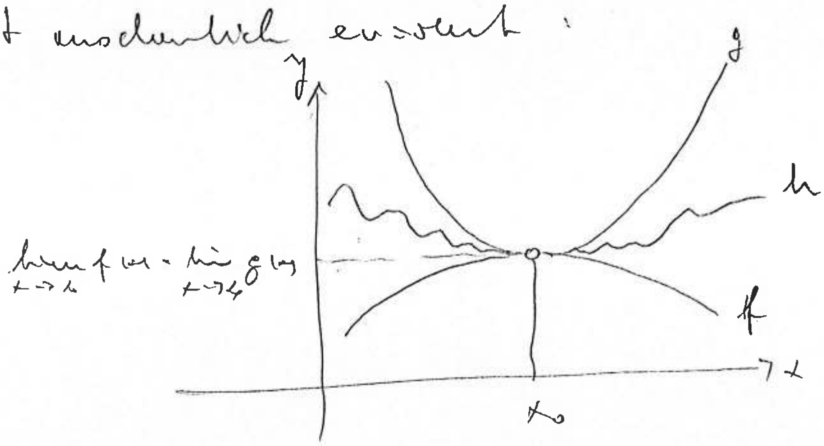
und

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x)$$

die Existenz des Grenzwertes von h in x_0 mit

$$\lim_{x\to x_0} h(x) = \lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x)$$

Dies ist anschaulich evident:



Folgerung:
f beschränkt,
$\lim_{x\to x_0} g(x) = 0$
$\Rightarrow \lim_{x\to x_0} f(x)g(x) = 0$

Es ist auch wichtig zu erkennen, wann ein Grenzwert nicht existieren kann. Dazu notieren wir

Satz 5 Es seien $f, g: D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$, Funktionen und x_0 ein Häufungspunkt von D.

Existieren die Grenzwerte $\lim_{x \to x_0} f(x)$ und $\lim_{x \to x_0} g(x)$ und gilt

$$\lim_{x \to x_0} f(x) \neq 0 \quad \text{und} \quad \lim_{x \to x_0} g(x) = 0$$

dann hat $\frac{f}{g}$ keinen Grenzwert in x_0. (in $\mathbb{R}$)

Satz 6: Es seien $f: I \to \mathbb{R}$, $g: J \to \mathbb{R}$, $f(I) \subset J$, x_0 ein Häufungspunkt von I. Es sei $y_0 = \lim_{x \to x_0} f(x)$ ein HP von J und $f(x) \neq y_0$ in J. Besitzt g einen Grenzwert z in y_0, dann existiert $\lim_{x \to x_0} (g \circ f)(x)$ und $\lim_{x \to x_0} (g \circ f)(x) = \lim_{x \to x_0} g(f(x)) = z$

4.2 Einseitige Grenzwerte

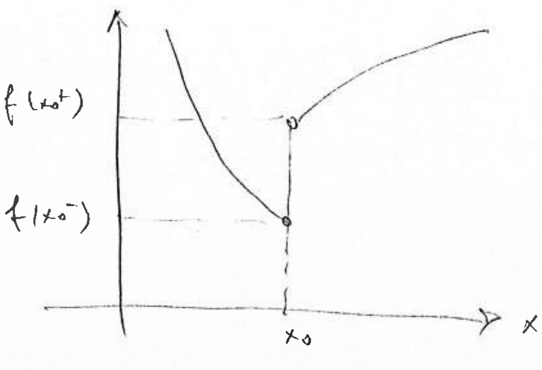
Varianten des Grenzwertbegriffes können durch Anpassung des Umgebungsbegriffes in f. Def 3 erfasst werden.

Wählt man beispielsweise nur einseitige Umgebungen von x_0 zu $(x_0 - \delta, x_0)$ oder $(x_0, x_0 + \delta)$ erhält man einseitige Grenzwerte

symbolisch

$$f(x_0^+) \equiv \lim_{x \to x_0^+} f(x) \equiv \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x),$$

$$f(x_0^-) \equiv \lim_{\substack{x \to x_0^- \\ 4}} f(x) \equiv \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x)$$



Zwischen einseitigen Grenzwerten und dem Grenzwert schlechthin besteht ein enger Zusammenhang.

Satz 6 Der Grenzwert $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ existiert genau dann, wenn die beiden einseitigen Grenzwerte $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$ und $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$ existieren und gleich sind. Es gilt dann

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0^+} f(x) = \lim_{x\to x_0^-} f(x).$$

Somit gibt es folgende Ursachen für das Fehlen eines Gre

- Die einseitigen Grenzwerte existieren, sind aber nicht gleich : Sprungstelle
- Mindestens einer der beiden einseitigen Grenzwerte existiert nicht

Bsp.:

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + 3 & x \geq -1 \\ 3x + 5 & x < -1 \end{cases}$$

Wir betrachten die einseitigen Grenzwerte

$$\lim_{\substack{x\to -1 \\ x<-1}} f(x) = \lim_{\substack{x\to -1 \\ x<-1}} (3x+5) = 3(-1)+5 = 2$$

$$\lim_{\substack{x\to -1 \\ x>-1}} f(x) = \lim_{\substack{x\to -1 \\ x>-1}} (x^3+3) = (-1)^3+5 = 2$$

Somit existiert auch

$$\lim_{x\to -1} f(x) = 2.$$

29.10.200

4.3 Asymptotisches Verhalten

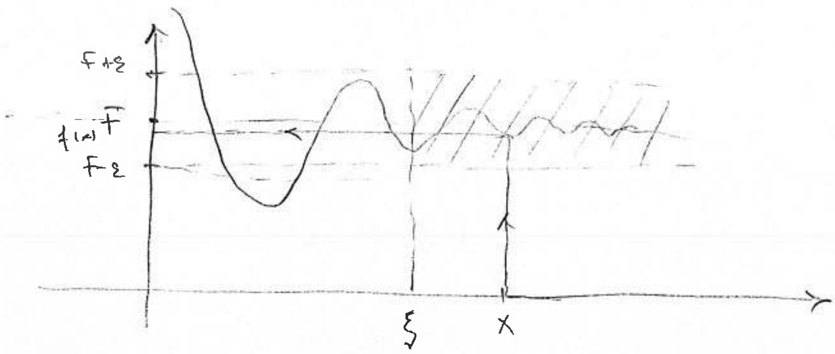
Das Verhalten einer Funktion für große Werte von x wird durch einen Grenzwert $\lim_{x\to\infty} f(x)$ erfasst. Zur Erinnerung: Umgebungen von ∞ sind Intervalle der Form (a,∞), $a \in \mathbb{R}$.

Somit erhalten wir aus Definition 3 folgende Interpretation:

$\lim_{x\to\infty} f(x) = F$ genau dann, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\xi \in \mathbb{R}$ gibt mit

$$|f(x) - F| < \varepsilon$$

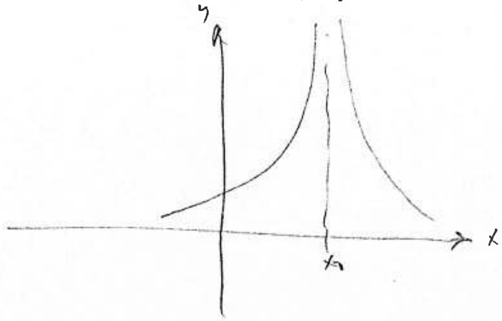
für alle $x \in D \cap (\xi,\infty)$

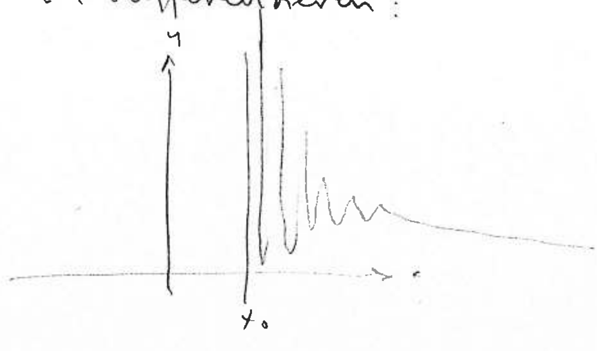


Zur Übung überlege man sich die Bedeutung von $\lim_{x\to-\infty} f(x)$

4.4 Uneigentliche Grenzwerte

Wenn eine Funktion in jeder Umgebung von x_0 unbeschränkt ist, dann kann sie an der Stelle x_0 keinen Grenzwert besitzen. Es ist jedoch nützlich folgendes Verhalten zu differenzieren:





Das Verhalten der ersten Funktion wird beschrieben durch

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty$$

und sagt f habe in x_0 den uneigentlichen Grenzwert ∞

(uneigentlich, weil $\infty \notin \mathbb{R}$ und f keinen Grenzwert in x_0 besitzt)

Definition 3 klärt die Bedeutung:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty$$

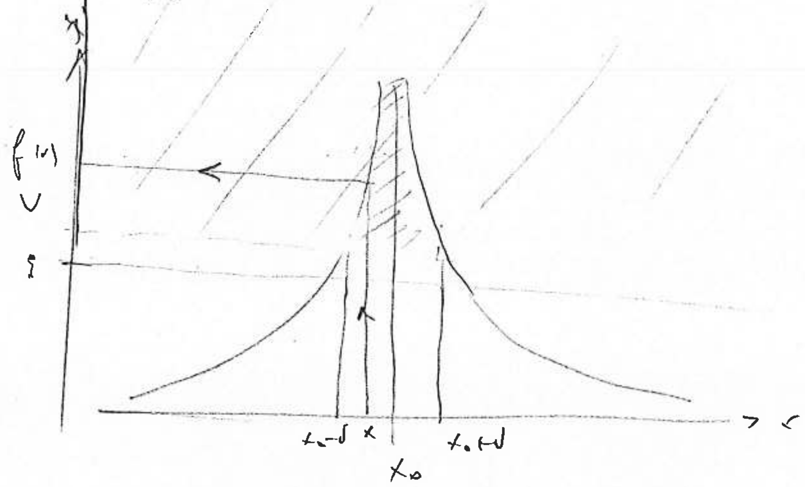
gilt genau dann, wenn für jedes $\xi \in \mathbb{R}$ ein $\delta = \delta(\xi)$ existiert, sodass

$$f(x) > \xi$$

für alle $x \in D$ mit

$$|x - x_0| < \delta$$

gilt.



Als Übung überlege man sich die Bedeutung einseitiger uneigentlicher Grenzwerte

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x) = \pm\infty \qquad \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x) = \pm\infty$$

oder von

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \pm\infty, \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = \pm\infty.$$

Aus den Rechenregeln für Grenzwerte ergeben sich folgende Regeln für den Umgang mit den Symbolen $\pm\infty$:

- $\infty + \infty = \infty$
- $x \cdot \infty = \infty$ für alle $x > 0$
  $x \cdot \infty = -\infty$ für alle $x < 0$
- $\frac{x}{\infty} = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$
- $-\infty < x < \infty$ —"—

Ausdrücke der Form $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$, $\frac{\infty}{\infty}$ sind nicht definiert und bedürfen einer eigenen Analyse.

Wir können nun Satz 5 präzisieren:

Satz 7: Es sei $\lim_{x \to x_0} f(x) = F$ und $\lim_{x \to x_0} g(x) = 0$.
Ist $F \neq 0$ und $\frac{f(x)}{g(x)} > 0$ für $x \neq x_0$, dann gilt

$$\lim_{x \to x_0} \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| = \infty$$

Nützlich ist auch folgendes Resultat

Satz 8: Existiert $\lim_{x \to x_0} f(x) = F$ und ist $\lim_{x \to x_0} g(x) = \infty$, dann gilt

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

Dies ist die exakte Formulierung der obigen Regel $\frac{x}{\infty} = 0$.

5 Stetige Funktionen

Zur Erinnerung: Für den Begriff des Grenzwertes einer Funktion an der Stelle x_0 ist es unerheblich, ob die Funktion in x_0 definiert ist oder nicht. Die Funktion wird nur an $x \neq x_0$ ausgewertet!

Für die Stetigkeit einer Funktion in $x = x_0$ ist gerade der Funktionswert von f in x_0 maßgeblich. Somit gilt notwendigerweise $x_0 \in D$.

Def. 5.1) Eine Funktion $f: D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$ heißt in $x_0 \in D$ stetig, wenn folgendes gilt:

1) Es existiert $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$

2) Es gilt $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

2) f heißt stetig $\Leftrightarrow$ f ist stetig in allen $x \in D$.

3.11.2008

Beispiel

1.) Polynome und rationale Funktionen sind stetig.

2.) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x-1}{x^2+x-2} & x \in \mathbb{R} \setminus \{1, -2\} \\ \dfrac{1}{3} & x = 1 \end{cases}$

ist auf $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$ stetig. Da f auf $\mathbb{R} \setminus \{1, -2\}$ eine rationale Funktion ist, ist sie dort auch stetig. Es genügt $x = 1$ zu betrachten. Aus

$$\lim_{x \to 1} \frac{x-1}{x^2+x-2} = \lim_{x \to 1} \frac{x-1}{(x+2)(x-1)} = \lim_{x \to 1} \frac{1}{x+2} = \frac{1}{3} = f(1)$$

Somit ist f auch in $x = 1$ stetig.

Setzt man die Definition des Grenzwertes ein, erhält man folgende Charakterisierung der Stetigkeit:

Satz 1 Eine Abbildung $f: D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$, ist in $x_0 \in D$ stetig genau dann, wenn zu jeder ε-Umgebung $K(f(x_0), \varepsilon)$ von $f(x_0)$ es eine δ-Umgebung $K(x_0, \delta)$ von x_0 gibt, mit

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \quad \text{für alle } x \in D \text{ mit } |x - x_0| < \delta.$$

Dies läßt sich folgendermaßen veranschaulichen:

⊗ Folgerung

f ist in x_0 nicht stetig genau dann, wenn einer der folgenden Fälle auftritt

1) $f(x_0^+) = f(x_0^-) \neq f(x_0)$ hebbare Unstetigkeit

2.) $f(x_0^+) \neq f(x_0^-)$ Sprungstelle

3.) Einer der einseitigen Grenzwerte existiert nicht.

Unstetigkeit 2. Art

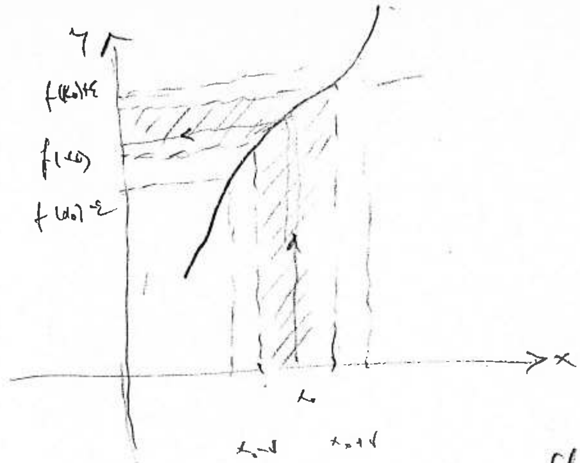
Der Grenzwert ermöglicht es eine „Lücke" im Definitionsbereich auf natürliche Weise zu schließen. Es sei f eine Funktion

$f: I \to \mathbb{R}$, $x_0 \notin I$ aber x_0 ein Häufungspunkt von I

Ferner existiere der Grenzwert $\lim_{x \to x_0} f(x)$. Setzt man

$$F: \begin{cases} I \cup \{x_0\} \to \mathbb{R} \\ F(x) = f(x) \quad x \in I \\ F(x_0) = \lim_{x \to x_0} f(x) \end{cases}$$

Dann ist F stetig in x_0. Man nennt F stetige Fortsetzung von f.



Folgendes Beispiel zeigt, wie man mit der obigen Charakterisierung umgeht:

Beispiel: $f(x) = x^2+3x-4$ ist in $x_0 = -1$ stetig

Es sei $\varepsilon > 0$ beliebig gewählt. Wegen $f(x_0) = -6$ ist der Ausgangspunkt

$$|f(x)-f(x_0)| = |x^2+3x-4-(-6)| = |x^2+3x+2|$$
$$= |(x+1)^2 + (x+1)| \le |x+1|^2 + |x+1|$$
$$\le |x+1|\,(|x+1|+1)$$

Beachte: $|x+1| = |x-x_0| < \delta$ (mit einem noch festzulegenden δ)

Somit
$$|f(x)-f(x_0)| < \delta(\delta+1)$$

(*) O.B.d.A. kann man von $\delta < 1$ ausgehen. Dann gilt

$$|f(x)-f(x_0)| < 2\delta \overset{!}{<} \varepsilon$$

falls $\delta < \frac{\varepsilon}{2}$. Wegen (*) gilt

$$|f(x)-f(x_0)| < \varepsilon \quad \text{für } |x+1| < \delta$$

also falls

$$\delta < \min\left(1, \frac{\varepsilon}{2}\right)$$

gewählt wird.

Da für eine in x_0 stetige Funktion

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$$

gilt und $x_0 = \lim_{x\to x_0} x$ (trivialerweise) gilt, folgt

(*) $$\lim_{x\to x_0} f(x) = f\left(\lim_{x\to x_0} x\right)$$

Bei stetigen Funktionen darf man also Funktionsauswertung mit Grenzwertbildung vertauschen! Umgekehrt zieht diese Eigenschaft die Stetigkeit von f an $x = x_0$ nach sich.

Die Rechenregeln für Grenzwerte ergeben analoge Regeln für stetige Funktionen. Damit kann man die Untersuchung der Stetigkeit komplizierter Funktionen auf die (bekannte) Stetigkeit ihrer elementaren Bausteine zurückführen:

Satz 2. Es seien $f, g : D \to \mathbb{R}$ in x_0 stetig und $\lambda \in \mathbb{R}$.
Dann sind auch die Funktionen λf, $f \pm g$, fg und $\frac{f}{g}$ in x_0 stetig (für $\frac{f}{g}$ muss natürlich $g(x_0) \neq 0$) gelten.

Man beachte, dass die Stetigkeit von f und g in x_0 vorausgesetzt wurde. Wenn diese Voraussetzung nicht erfüllt ist, kann keine Aussage getroffen werden.

Eine direkte Folgerung aus (*) ist

Satz 3 (Stetigkeit der Hintereinanderausführung) Es sei $f : I \to \mathbb{R}$ in $x_0 \in I$ stetig und $g : J \to \mathbb{R}$ mit Bild$(f) \subset J$. Ist g in $f(x_0)$ stetig, dann ist auch $g \circ f$ in x_0 stetig.

Bsp.: $h(x) = \left(\frac{(x-1)^3}{(x^2+1)^2}\right)^4$ ist stetig auf $\mathbb{R}$, da h aufgefasst werden kann als

$$h = g \circ f \quad \text{mit} \quad f(x) = \frac{(x-1)^3}{(x^2+1)^2} \quad \text{und} \quad g(z) = z^4.$$

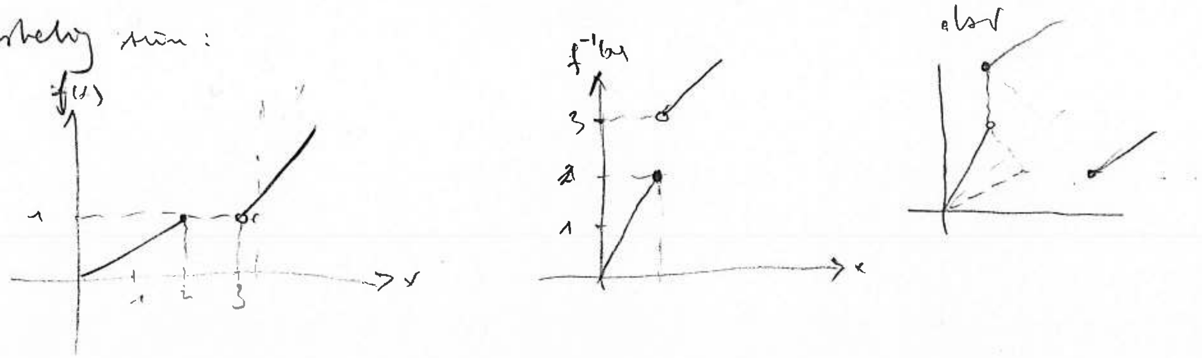
Etwas tiefer gilt folgendes Resultat

Satz 4 (Stetigkeit der Umkehrfunktion) Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f: I \to \mathbb{R}$ streng monoton. Dann existiert $f^{-1}: f(I) \to \mathbb{R}$ und f^{-1} ist stetig.

5.11.2006

Bemerkung: 1) Die Stetigkeit von f^{-1} ergibt sich also bereits aus ihrer Existenz falls f auf einem Intervall definiert ist (man beachte, daß f nicht stetig zu sein braucht).
Allgemein gilt, daß die Umkehrfunktion in vielerlei Hinsicht bessere Eigenschaften besitzt als die Ausgangsfunktion.

2.) Wenn f nicht auf einem Intervall definiert ist, kann f^{-1} auch unstetig sein:



Bsp.: $\sqrt{\ }: [0,\infty) \to [0,\infty)$, $x \to \sqrt{x}$ ist als Umkehrfunktion von

$$f: \begin{cases} [0,\infty) \to [0,\infty) \\ x \to x^2 \end{cases}$$

stetig.

Es sei $f: D \to \mathbb{R}$, $x_0 \notin D$ ein HP von D, und es existiere $\lim_{x \to x_0} f(x)$. Setzt man

$$F: \begin{cases} D \cup \{x_0\} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto f(x) & x \in D \\ x_0 \to \lim_{x \to x_0} f(x) & x = x_0 \end{cases}$$

dann ist F stetig in x_0. Man nennt F stetige Fortsetzung von f nach x_0.

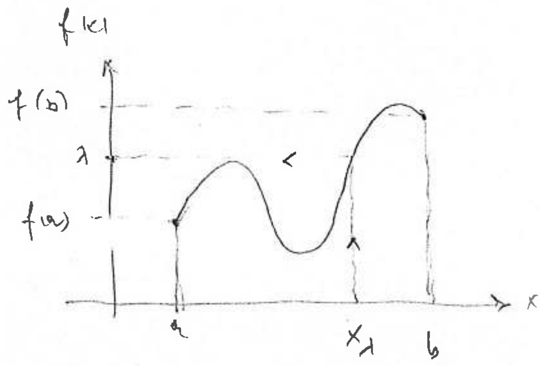
Bsp.: $f(x) = \frac{x^3}{|x|}$ kann stetig nach $x_0 = 0$ fortgesetzt werden, da $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$.

7.1 Qualitative Eigenschaften stetiger Funktionen

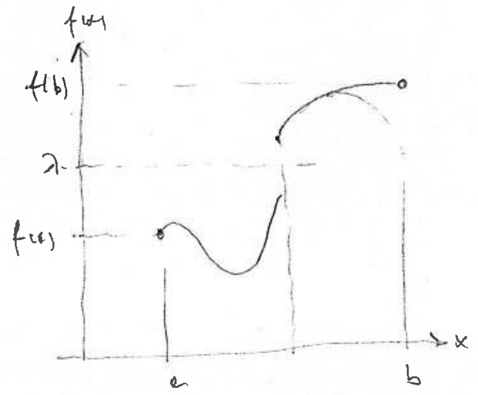
Der Graph einer stetigen Funktion wird durch eine „durchgehende Kurve" dargestellt. Dies wird präzisiert durch

Satz 5 (Zwischenwertsatz) Es sei $f : I \to \mathbb{R}$ stetig, $I \subset \mathbb{R}$ Intervall, $\alpha = f(a)$, $\beta = f(b)$ mit $\lambda: \alpha < \lambda < \beta$, ... $f(b)$. Dann gibt es eine Stelle $x_\lambda \in [a,b]$ mit

$$f(x_\lambda) = \lambda$$



aber



Anwendung: Bisektionsmethode zur Berechnung einer Nullstelle von f.

Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig mit

$f(a)\, f(b) < 0$.

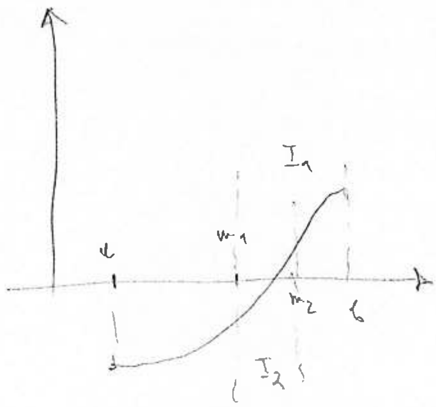
Schritt 0: Setze $I_0 = [a_0, b_0]$ mit $m_1 = \frac{1}{2}(b+a)$

Schritt k: Es liegt $I_{k-1} = [a_{k-1}, b_{k-1}]$ ...)

- Berechne $m_k = \frac{1}{2}(a_{k-1}, b_{k-1})$
- Setze $I_k = [a_k, b_k]$ mit $I_k = [a_{k-1}, m_k]$ oder

  $I_k = [m_k, b_{k-1}]$

  so, dass $f(a_k)\, f(b_k) < 0$.



+ benötigt nur 1 Funktionsauswertung pro Schritt

+ Fehlerschranken
$$|\xi - m_k| \le 2^{-k}(b_0 - a_0)$$

- langsam: 3 Iterationen pro Dezimalstelle.

Def 8 $f : I \to \mathbb{R}$

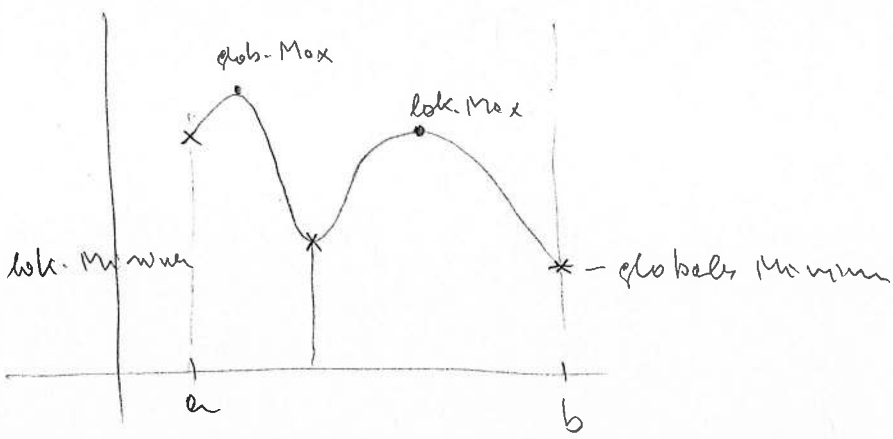
1) f nimmt in $x_0 \in I$ das globale Maximum (Minimum) an, wenn

$$f(x) \le f(x_0) \qquad x \in I$$
$$(f(x) \ge f(x_0) \qquad x \in I)$$

2) f nimmt in $x_0 \in I$ ein lokales Maximum (Minimum) an, wenn es ein $\delta > 0$ gibt mit

$$f(x) \le f(x_0) \qquad x \in I \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$$
$$(f(x) \ge f(x_0) \qquad \text{—"—})$$

3. Ein Maximum oder Minimum einer Funktion nennt man Extremum.



Bemerkungen:

1) Die Werte des glob. Maximum bzw. glob. Minimum sind eindeutig bestimmt, nicht jedoch jene der lok. Extrema

2) Das glob. Maximum (Minimum) kann u. U. an verschiedenen Stellen angenommen werden.

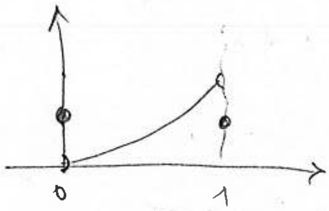
3) Num. Software findet i. A. nur Stellen lok. Extrema.

Satz (Weierstraß)

Eine stetige Funkt. nimmt auf einem abgeschlossenen, beschränkten Intervall das globale Maximum und Minimum an.

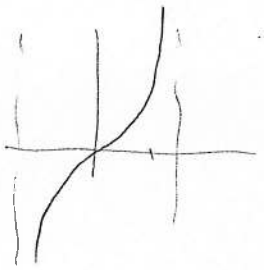
Jede der 3 Voraussetzungen ist notwendig

1) f nicht stetig:



besitzt weder Max noch Min

2.) $I = (a,b)$

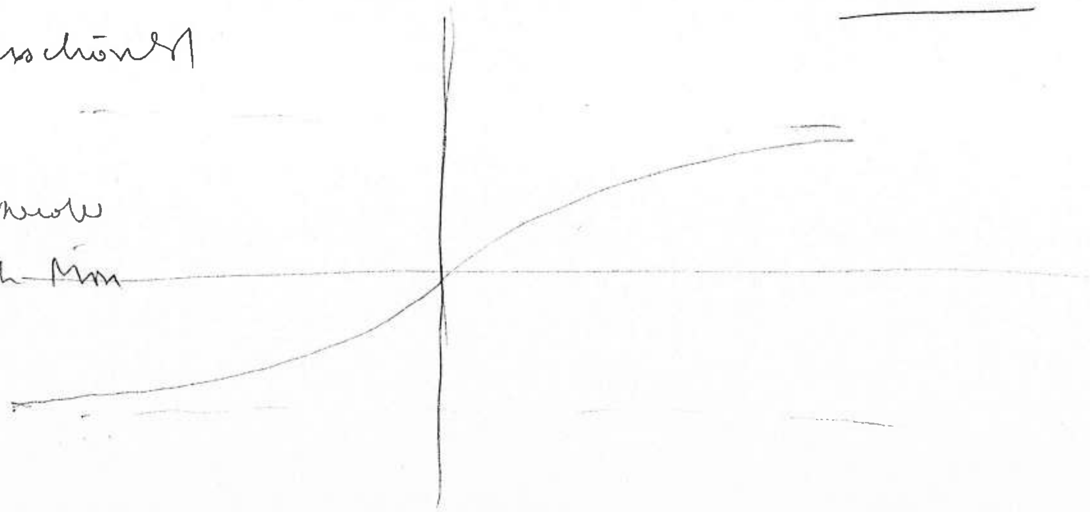


besitzt weder Max noch Min

10. 11. 2008

3.) I unbeschränkt

besitzt weder Max noch Min



6. Folgen

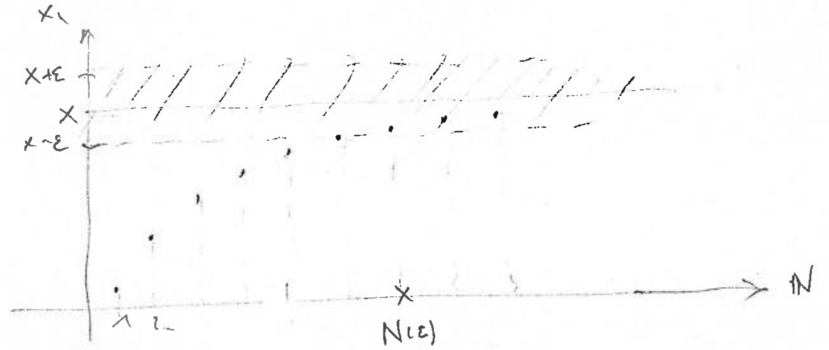
Zur Erinnerung: wir haben eine Abbildung

$$x: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$$

als Folge bezeichnet. Um hervorzuheben, daß es ein erstes, zweites, etc. Glied der Folge gibt, schreibt man x_n anstelle von $x(n)$. Von besonderem Interesse ist das asymptotische Verhalten der Folge, d.h. ob sie einen Grenzwert besitzt für $n \to \infty$. Die Aussage

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x$$

bedeutet also anschaulich



Die folgende Definition bringt also eigentlich nichts Neues:

Def 1 1) Eine Folge $(x_n) \subset \mathbb{R}$ heißt konvergent gegen x, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ einen Index $N(\varepsilon)$ gibt, sodaß

$$|x_n - x| < \varepsilon$$

für alle $n \geq N(\varepsilon)$ gilt. Man nennt x Grenzwert der Folge und schreibt

$$x = \lim_{n\to\infty} x_n .$$

2.) Eine Folge (x_n) heißt konvergent, wenn es ein $x \in \mathbb{R}$ mit $x = \lim_{n\to\infty} x_n$ gibt. Eine Folge heißt divergent, wenn sie nicht konvergent ist.

3.) Eine Folge (x_n) heißt Nullfolge, wenn $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$

Bemerkungen:

(1) Man kann die Konvergenz einer Folge auch so interpretieren: außerhalb jeder ε-Umgebung des Grenzwertes x können jeweils nur endlich viele Folgenglieder liegen (diese werden im Allgemeinen natürlich immer mehr, je kleiner die ε-Umgebung gewählt wird).

move

2.) Der Grenzwert ist eindeutig

3.) Eine konvergente Folge ist beschränkt, aber nicht umgekehrt.]

⊗ 4.) Das Konvergenzverhalten einer Folge hängt nicht von einem endlichen Anfangsstück der Folge ab.

Ein gravierender Nachteil der Charakterisierung des Grenzwertes einer Folge besteht darin, daß man den Grenzwert kennen muß, um die Konvergenz zu testen. Daher ist man an inneren Eigenschaften einer Folge interessiert, welche die Konvergenz sicherstellen.
Wir präzisieren noch einmal die Begriffe Beschränktheit und Monotonie für Folgen:

Def 2 1) Eine Folge (x_n) heißt beschränkt, wenn es ein $M > 0$ gibt mit

$$|x_n| \leq M, \quad n \in \mathbb{N}.$$

2.) Eine Folge (x_n) heißt monoton wachsend (fallend), wenn

$$x_n \leq x_{n+1} \qquad (x_n \geq x_{n+1})$$

für $n \in \mathbb{N}$ gilt.

wörtlich

Man kann zeigen

Satz 1: Eine beschränkte monotone Folge ist konvergent.

Man beachte, daß dieses Resultat keine Hinweise auf den Grenzwert gibt.

⊗ Es gelten die üblichen Rechenregeln für Grenzwerte wie

- $x_n \to x, \; y_n \to y$

$\Rightarrow$

$$\lim_{n\to\infty} (x_n + y_n) = x + y$$

$$\lim_{n\to\infty} \alpha x_n = \alpha x$$

$$\lim_{n\to\infty} x_n y_n = xy$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{x}{y}, \quad y \neq 0$$

- $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$, (y_n) beschränkt $\to \lim_{n\to\infty} x_n y_n = 0$
- Sandwich theorem
- Uneigentliche Grenzwerte

Beispiel: Man kann zeigen, daß die Folge $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, $n \in \mathbb{N}$ monoton steigend und beschränkt ist. Somit ist sie konvergent.

Man definiert

$$e = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 2{,}71828..$$

Man nennt e die Eulersche Zahl.

Weitere wichtige Grenzwerte:

- $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^\alpha} = 0$, $\alpha > 0$; $\lim\limits_{n\to\infty} n^\alpha = \infty$, $\alpha > 0$
- $\lim\limits_{n\to\infty} x^n = 0 \iff |x| < 1$
  $\lim\limits_{n\to\infty} |x|^n = \infty \iff |x| > 1$, somit ist (x_n) divergent für $|x|>1$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^k}{x^n} = 0$ für $k \in \mathbb{N}_0$, $|x|>1$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$, $a > 0$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$