Integral- und Differentialrechnung für USW

7. Übungsblatt 13. Januar 2016

60. Bestimmen Sie folgende, möglicherweise uneigentliche, Grenzwerte. Sie dürfen die *Regel von L'Hospital* verwenden.

a) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{(x+1)^2-16}{\ln\left(\frac{x}{3}\right)}$

b) $\lim\limits_{x\to \pi} \dfrac{\pi - x}{1+\cos(x)}$

c) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-3x-1}{2(x^2-1)}$

d) $\lim\limits_{x\to \pi} \dfrac{1-\sin(\frac{x}{2})}{1+\cos(x)}$

61. Ein kugelförmiger Ballon wird mit einer konstanten Rate von $8\frac{\mathrm{cm}^3}{\mathrm{min}}$ aufgeblasen.
   a) Wie rasch vergrößert sich der Radius in dem Augenblick, in dem er gerade 10cm beträgt.
   b) Wie rasch nimmt die Oberfläche des Ballons in diesem Moment zu?

62. Bestimmen Sie die Ableitung der Funktion

$$f(t) = \frac{\cos(t)(t^2-1) + e^{3\left(\frac{1}{t}-t^2\right)}}{t-1}$$

63. Wir betrachten die Funktion $f(x) = x^3 - 2x + 2$. Verwenden Sie das Newton-Verfahren um eine Nullstelle von f zu finden, wobei wir folgende Startwerte betrachten:

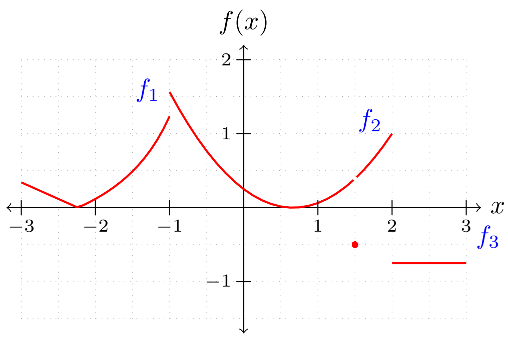
a) $x_0 = -2$ b) $x_0 = -1$ c) $x_0 = 0$

Berechnen Sie mindestens 4 Glieder der Folge. Was können Sie über die Konvergenz im Bezug auf die Startwerte sagen? Argumentieren Sie warum (63a) der beste Startwert ist.
Um effizient zu rechnen, ist es ***sehr*** *nützlich die Notation aus dem Skriptum (Tabelle 5.2, Seite 72) zu verwenden (Sie finden eine ähnliche Notation auch auf Wikipedia). Bereiten Sie das Beispiel (falls Sie das Beispiel präsentieren wollen) so vor, dass Sie nur noch die Resultat-Tabelle notieren müssen.*

64. Bestimmen Sie die lokalen und globalen Extremwerte, sowie die Wendepunkt(e), der Funktionen f im Intervall $[-1,4]$ mit

$$f(x) = e^{3x}\left(x^2-4x+1\right).$$

65. Beschreiben Sie alle kritischen Punkte der dargestellten Funktion (als eine Menge):



Wobei

$$f : \begin{cases} f_1 : & [-3,-1] \longrightarrow \mathbb{R} \\ f_2 : & (-1,2] \longrightarrow \mathbb{R} \\ f_3 : & (2,3] \longrightarrow \mathbb{R} \end{cases}$$

gilt. Argumentieren Sie, warum es sich um kritische Punkte handelt!

66. Skizzieren Sie die Ableitung f' einer Funktion f, die **alle** folgenden Eigenschaften besitzt:
   - f' ist periodisch auf $[0, \infty)$.
   - f besitzt lokale Maxima in $x = \pi$ und $x = 3\pi$.
   - $f(x) = 3$ für $x \in (-2, 0)$.
   - Es gilt $\lim\limits_{x \to -2^-} f(x) = \infty$.
   - f ist konvex auf $[-4, -2)$ und konkav auf $(-\infty, -4)$.

   Skizzieren Sie die Funktion mindestends im Bereich $[-8, 20]$.

67. Bestimmen Sie alle lokalen und globalen Extremwerte der Funktion:

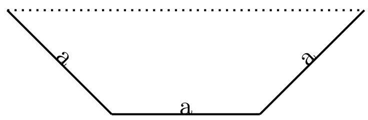
$$f : \begin{cases} [-3, 3] & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto \begin{cases} 2x^2 + 3x - 1 & \text{für } x < 0 \\ -3x^2 - x - 1 & \text{für } x \geq 0 \end{cases} \end{cases}$$

   Gibt es einen Wendepunkt? Falls ja, bestimmen Sie diesen. Fall nicht, argumentiern Sie warum es keinen geben kann. (Sie dürfen verwenden, dass die Funktion stetig ist.)
   Da der Wendepunkt im Skriptum durch das beschreiben der Eigenschaften wiederholt wird, möchte ich die Definition hier etwas kompakter (leicht vereinfacht) anführen.
   Sei $x_0 \in I = [a, b]$ und $f : I \to \mathbb{R}$ stetig und zwei mal differenzierbar auf $I \setminus \{x_0\}$. Wir nennen x_0 einen Wendepunkt von f falls
   - $f''(x) > 0$ auf (a, x_0) und $f''(x) < 0$ auf (x_0, b), oder
   - $f''(x) < 0$ auf (a, x_0) und $f''(x) > 0$ auf (x_0, b) gilt.

   Falls f auch in x_0 differenzierbar ist, so folgt $f''(x_0) = 0$.

68. Ein Kochtopf soll die Form eines Drehzylinders mit den Radius r, der Höhe h und ein Volumen von $V = 500$ml haben.
   Welchen Radius hat der Kochtopf, wenn man einen möglichst geringen Materialverbaruch haben möchte. (Also, man möchte die Oberfläche ohne Deckel minimieren.)

69. Für die Konstruktion einer Wasserrinne sollen 3 **gleiche** Bretter verwendet werden, wobei die Breite der Bretter a ist. Der Querschnitt der Rinne soll Trabezförmig sein.



   Um den Durchfluss zu maximieren, soll die Querschnittsfläche maximiert werden. Berechnen Sie die Geometrie (also die Winkel) des Trabezes, damit die Querschnittsfläche maximiert wird.

70. Bestimmen Sie jeweils 2 verschiedene Stammfunktionen, welche sich bei $x = \frac{4}{3}$ um einen Wert von 2 unterscheiden (d.h.: $F_1(\frac{4}{3}) - F_2(\frac{4}{3}) = 2$), von f, g und h mit

   a) $f(x) = \dfrac{x^2}{3} - \dfrac{(2x-3)^2}{3x} - 7$
   b) $g(x) = \left|x^2 - 1\right|$ für $x \neq \pm 1$
   c) $h(x) = -e^{-x} + \dfrac{1}{1 + x^2}$

   Tipp: Betrachten Sie die Integrationstabellen für Winkelfunktionen.

71. Berechne folgende Integrale durch partielle Integration:

   a) $\displaystyle\int_1^4 x e^{-2x} \mathrm{d}x$
   b) $\displaystyle\int \ln(1 + x^2) \mathrm{d}x$
   c) $\displaystyle\int \sin(x) e^x \mathrm{d}x$
   d) $\displaystyle\int_{-1}^1 \sin^2(3x + 2) \mathrm{d}x$

72. Berechne folgende Integrale durch geeignete Substitution:

a) $\int_1^4 3x(1+x^2)^4 \mathrm{d}x$

b) $\int (t-2t^3)(t^2-t^4)^7 \mathrm{d}t$

c) $\int \sqrt{1+\sin(x)}\cos(x)\mathrm{d}x$

d) $\int_1^2 \frac{e^{4x}}{e^{2x}+4}\mathrm{d}x$

73. Ein Objekt bewegt sich entlang einer geradlinigen Bahn mit einer Geschwindigkeit

$$v(t) = (t+1)^3 - 2t.$$

a) Bestimmen Sie die Beschleunigung des Teilchens zur Zeit $t = 0$.

b) Bestimmen Sie den Ort des Teilchens in Abhängigkeit von der Zeit t, falls es zur Zeit $t = 0$ den Koordinatenursprung passiert.