

Integral und Differentialrechnung für USW
Ergänzungsblatt, 6.05.2014

1. Gegeben seien folgende Teilmengen in \mathbb{R} : $A = (4, 6]$, $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $C = \{3, 5, 1\}$ und $D = [3, 7)$ in Intervallschreibweise oder in aufzählendem Verfahren. Bestimmen Sie $(A \cup B) \cap C$, $(B \setminus C) \cap C$, $C \times C$, und $(B \times D) \cap (D \times A)$. Veranschaulichen Sie diese Mengen als Punktmengen in \mathbb{R} , bzw. \mathbb{R}^2 .
2. Stellen Sie das Dreieck mit den Eckpunkten $(-2, -1)$, $(0, 3)$, $(2, 0)$ als Menge von geordneten Paaren dar.
3. Finden Sie eine geeignete Beschreibung folgender Teilmengen des \mathbb{R}^2 .

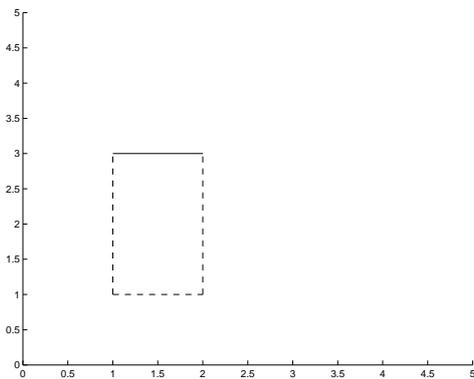


Figure 1:

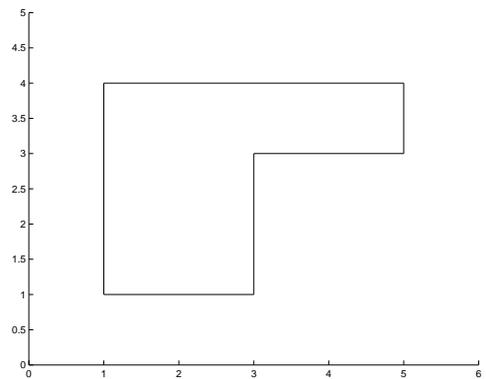


Figure 2:

4. Lösen Sie in \mathbb{R} die Ungleichung $\frac{2x+1}{x+2} > 1$.
5. Lösen Sie die Ungleichung $(x - 4)(x + 2) \leq 0$.
6. Lösen Sie die Ungleichung $|3x - 6| + 3 > -x + 1$.
7. Lösen Sie die Ungleichung $-(x + 2)(x - 1) > 2$.
8. Lösen Sie die Ungleichung $(x - 3)(x + 2)(x - 1) > 0$.
9. Skizzieren Sie folgende Punktmenge $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2 \leq y < x + 1, 1 \leq x \leq 3\}$
10. Skizzieren Sie den Graph einer Abbildung f welche das Intervall $[-3, -1]$ nicht injektiv und nicht surjektiv in das Intervall $[-2, -1]$ abbildet.
11. Betrachten Sie die Graphen der Abbildungen f , g und h :

Welche der Abbildungen $f: [-2, 2] \rightarrow [-5, 3]$, $g: [-2, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ und $h: [-2, 2] \rightarrow [-3.63, 3.63]$ ist injektiv, surjektiv, bijektiv?

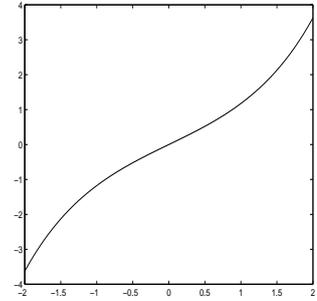
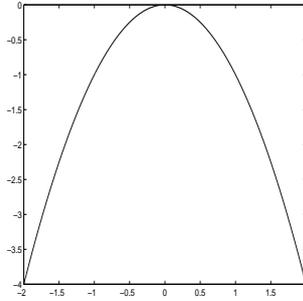
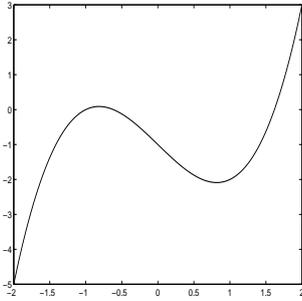
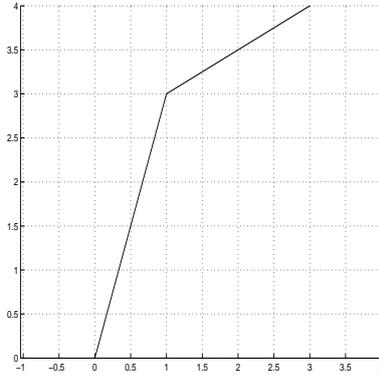


Figure 3: f

Figure 4: g

Figure 5: h

12. Bestimmen Sie den Definitionsbereich der Funktion $f(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$
13. Gegeben sei die Abbildung $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = -8x + 2$. Zeigen Sie: f ist injektiv und surjektiv und bestimmen Sie f^{-1} .
14. Gegeben sei die Abbildung $x \rightarrow f(x) = \frac{2x-1}{3x+2}$. Bestimmen Sie den Definitionsbereich und das Bild von f . Ist f injektiv? Geben Sie gegebenenfalls die Umkehrfunktion an.
15. Geben sie den Definitionsbereich der Funktionen $f(x) = \frac{1}{x-3}$ und $g(x) = (x-1)^2$ an. Bilden Sie die Kompositionen $f \circ g$ und $g \circ f$ und bestimmen Sie deren Definitionsbereich.
16. Stellen Sie $f(x) = \left(\frac{2-x^2}{x^2+1}\right)^2$ als Verkettung von 3 einfacheren Funktionen dar.
17. f und g seien Funktionen, welche an der Stelle x_0 jeweils einen Grenzwert besitzen. Sind folgende Aussagen richtig?
- (a) $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)}$.
- (b) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)g(x) = f(x_0)g(x_0)$.
- (Es können auch beide Aussagen richtig oder beide Aussagen falsch sein).
18. Berechnen Sie den Grenzwert $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2-x-6}{x-3}$.
19. Berechnen Sie die Grenzwerte $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3+8}{x+2}$ und $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}-2}{1-x^2}$.
20. Berechnen Sie den Grenzwert $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2+2x-3}{x^3+x^2-9x-9}$.
21. Für welche Werte von a, b existiert der Grenzwert der Abbildung $f(x) = \begin{cases} bx^2 + 2a & x < 1 \\ ax - 3 & x \geq 1 \end{cases}$ an der Stelle $x = 1$ und gilt $f(0) = 1$?
22. Es sei $f(x) = \begin{cases} -1 & x \leq -1 \\ x^3 & -1 < x \leq 1 \\ 1 & x > 1 \end{cases}$. Existieren die Grenzwerte in $x = -1$ und $x = 1$?
23. Gegeben sei folgender Graph der Umkehrfunktion von f . Zeichnen Sie den Graphen von f .



24. Gegeben sei die Funktion $f: \mathbb{R} \setminus \{-1, -2\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^3 - 3x + 2}{x^2 + 3x + 2}$. Ist f stetig in die Nullstellen des Nenners fortsetzbar?

25. Berechnen Sie die Grenzwerte

$$\lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{x^2 + 3x + 2}, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{3x^4 + 2x - 10}{-6x^3 + 3x^2 + 9}}$$