Integral und Differentialrechnung für USW
Ergänzungsblatt am 26.1.2015

1. Für welche Werte von $a \in \mathbb{R}$ ist die Abbildung

$$f(x) = \begin{cases} (ax)^2 + 3ax - 1 & x \leq -1 \\ 3x^3 + 2x^2 - a & x > -1 \end{cases}$$

   an der Stelle $x_0 = -1$ stetig.

2. Entscheiden sie für folgende Funktionen, ob Sie die Lücke in deren Definitionsbereich derart schließen können, daß die fortgesetzte Funktion stetig ist:

$$f(x) = \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - 3x + 2}, \qquad g(x) = \frac{x^2 - 1}{(x-1)^2}.$$

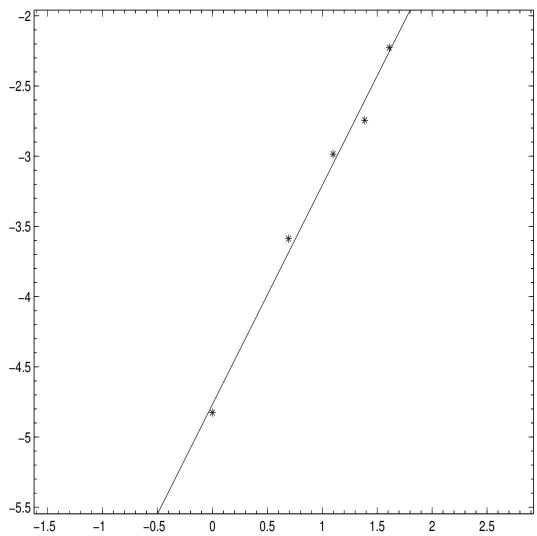
3. Berechnen Sie gegebenenfalls folgende Grenzwerte

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2 - 3}{-x^2 + 5x + 1}, \qquad \lim_{x\to-\infty} \frac{x - 1}{x^3 + x - 1}, \qquad \lim_{x\to\infty} \frac{x^4 - 2x^2 + 1}{x^3 + x^2 + 2}$$

4. Die folgende Abbildung zeigt einen Datensatz in *doppelt logarithmischer* Darstellung (markiert durch $*$) und (durchgezogen) die Ausgleichsgerade.

   (a) Welches mathematische Modell $y = ax^b$ oder $y = ae^{bx}$ passt zu den Daten.

   (b) Schätzen Sie die Parameter a und b.



5. Schätzen Sie mit Hilfe des folgenden Datensatzes die Parameter c und λ in der Modellfunktion $y(x) = cx^\lambda$.

y	0.003	0.030	0.126	0.343	0.750
x	0.2	0.4	0.6	0.8	1

6. Bestimmen Sie alle Lösungen im Intervall $[0, 2\pi]$ der Gleichung $\cos x - 2\sin x = 0$.

7. Lösen Sie die Gleichung $\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = y$, $y \in (-1, 1)$, nach $x \in \mathbb{R}$ auf.

8. Durch Einleitung einer giftigen Chemikalie wurde ein Badesee so verunreinigt, daß ein Badeverbot erlassen werden musste. An verschieden Stellen des Sees wurden 135 ppm (parts per million) der Chemikalie gemessen. Die Verunreinigung nimmt langsam exponentiell ab, und zwar um 10% pro Woche.

   (a) Nach wie vielen Wochen ist die Verunreinigung auf die Hälfte zurückgegangen?

   (b) Das Badeverbot kann erst dann wieder aufgehoben werden, wenn die Verunreinigung den Grenzwert von 25 ppm unterschritten hat. Nach wie vielen Wochen ist dies möglich.

9. Infolge eines Lecks verliert ein Tank in den ersten 5 Minuten nach der Füllung 20% seines Inhaltes. Bestimmen Sie den Tankinhalt t Minuten nach der Füllung unter der Annahme, daß die Verlustrate proportional ist zum jeweiligen Tankinhalt. Wann ist nur mehr weniger als 1 % des ursprünglichen Inhaltes vorhanden.

10. Berechnen Sie die Ableitung der Funktionen

$$\ln \frac{x+2}{x^2+1}, \qquad \arctan \sqrt{x}, \qquad e^{-sin(x^2)}, e^{2\ln x}.$$

11. Es sei $f\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x - 2\cos x$. Finden sie die Intervalle, auf denen f monoton wächst, bzw. monoton fällt. Wo befindet sich das globale Maximum (Minimum)?

12. Zeigen Sie, daß $f(x) = 2x^3 - 4x + 1$ im Intervall $[1, 2]$ eine Nullstelle besitzt. Berechnen Sie die Nullstelle mit Hilfe des Newton Verfahrens mit Startwert $x_0 = 2$ auf 4 mindestens Dezimalen genau. Wie verhalten sich die Newtoniterierten, wenn man das Verfahren in $x_0 = 1$ startet?

13. Skizzieren Sie den Graph einer Funktion $f\colon [0, 1] \to \mathbb{R}$ mit $f(0) = 0$, $f'(x) < 0$ und $f''(x) \geq 0$ für alle $x \in [0, 1]$.

14. Skizzieren Sie den Graph einer differenzierbaren Funktion $f : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ mit folgenden Eigenschaften: $\lim_{x\to\infty} = 2$, $\lim_{x\to-\infty} = \infty$, $f'(x) < 0$ für $x < -1$, $f'(x) > 0$ für $x > -1$.

15. Betrachten Sie folgenden Graphen einer Abbildung $f\colon [0, 1] \to \mathbb{R}$.

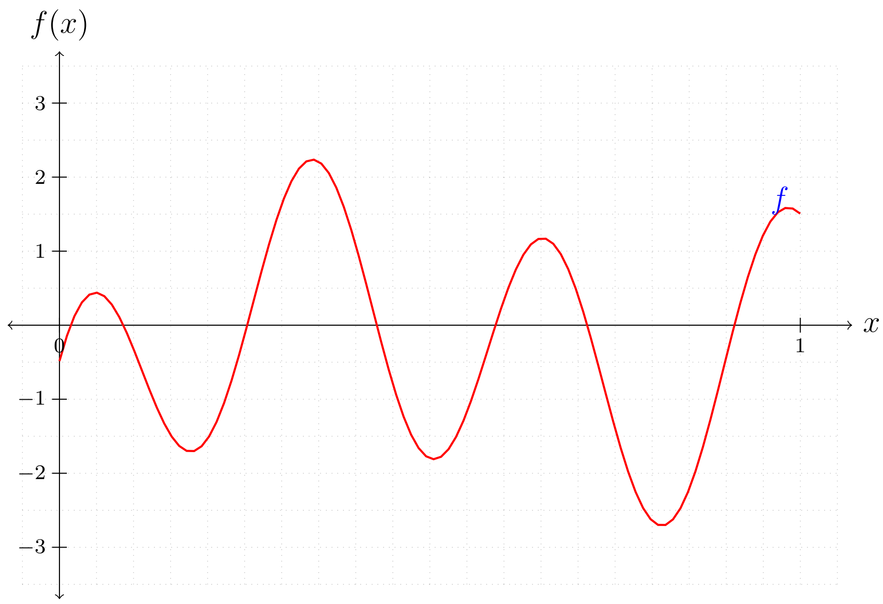
   (a) Markieren Sie Intervalle, auf welchen f konkav bzw. konvex ist.

   (b) Markieren Sie ein Intervall, auf welchem $f' < 0$ ist.

   (c) Markieren Sie ungefähr Punkte des Graphen, in denen $f''(x) = 0$ ist.

(d) Markieren Sie alle globalen Extremwerte.

(e) Markieren Sie alle lokalen Extremwerte.



16. Trifft folgende Behauptung zu?
    Ist $f'(x_0) = 0$, dann besitzt f an der Stelle x_0 ein lokales Extremum.

17. Untersuchen Sie das Monotonieverhalten der Abbildung $x \to f(x) = -2 - \frac{16}{3}x^3 + 2x^4$ und bestimmen Sie das globale Maximum und Minimum von f auf dem Intervall $[0, 3]$.

18. Welche der folgenden Aussagen ist richtig?

    (a) Wenn $f'(0) > 0$, dann ist f monoton wachsend.

    (b) Ist $f'(0) > 0$ und $f'(1) > 0$, dann ist f monoton wachsend auf $[0, 1]$.

    (c) Ist $f'(x) > 0$ für $x \in [0, 1]$, dann ist f monoton wachsend auf $[0, 1]$.

19. Berechnen Sie folgende Grenzwerte

$$\lim_{n\to\infty} \frac{-n+3}{\frac{n}{2} + \sqrt{1 + \frac{1}{n}}}, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{n - \sqrt{3n+2}}{\sqrt{9n^2 - 4n + 6}}, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{6 \cdot 5^n - 2 \cdot 3^n}{-3 \cdot 5^n + 10 \cdot 2^n}.$$

20. Berechnen Sie den Grenzwert $\lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{x^3}}{\sin x}$.

21. Berechnen Sie die Grenzwerte

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - (1+x)}{x^2 + x}, \qquad \lim_{x\to 1} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$$

22. Berechnen Sie die Grenzwerte

$$\lim_{x\to 1} \frac{1 - x^2}{\ln(x)}, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\cos(5x)}{\cos x}, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\sin(\pi x)}{\sin x}.$$

23. Der Radius eines expandierenden, kugelförmigen Ballons nimmt pro Minute um 2cm zu. Mit welcher Rate wächst das Volumen in dem Moment, in dem der Radius 10cm beträgt.

24. Ein oben offener Reaktor habe die Form einer Halbkugel mit aufgesetztem Zylinder. Wie ist ein Reaktor mit maximalem Fassungsvermögen und einer Oberfläche von 1000 m^2 zu dimensionieren?

25. Eine Bäckerei hat 11 Filialen. Jede dieser Filialen erwirtschaftet pro Woche einen mittleren Gewinn von 560 Euro. Einer Marktstudie zufolge verringert sich der mittlere wöchentliche Gewinn jeder Filiale bei Eröffnung weiterer Filialen und zwar um 32 Euro pro neuer Filiale. Es können höchstens 8 weitere Filialen eröffnet werden. Wie viele weitere Filialen sollen eröffnet werden damit der Gewinn maximal wird. Wie hoch ist er?

26. Ein Kirchenfenster besteht aus einem Rechteck mit aufgesetztem Halbkreis. Es soll bei gegebenem Umfang (8 Meter) möglichst viel Licht durchlassen. Bestimmen Sie die Geometrie des Fensters.

27. Berechnen Sie folgende Integrale

$$\int \frac{3\sqrt{x} - 2\sqrt[5]{x^2} + x^3}{x^{3/5}}\, dx, \qquad \int_0^1 2e^{-3x}x^2\, dx, \qquad \int e^{-8\cos x} \sin x\, dx.$$

28. Berechnen Sie folgende Integrale

$$\int x\sqrt[3]{3x^2+2}\, dx, \qquad \int_{-\pi}^{\pi} x \sin x\, dx, \qquad \int_{-1}^{1} 2x^3 e^{-x^4}\, dx.$$

29. Berechnen Sie die Integrale

$$\int \frac{x}{1+x}\, dx, \qquad \int_{-1}^{1} \frac{2x^2}{1+x^2}\, dx, \qquad \int_0^2 |x-1|\, dx$$

(Hinweis: Verwenden Sie $\int \frac{1}{1+x}\, dx = \ln(1+x)$, bzw. $\int \frac{1}{1+x^2}\, dx = \arctan(x)$.)

30. Bestimmen Sie die partiellen Ableitungen $\frac{\partial}{\partial x}$ und $\frac{\partial}{\partial y}$ für

$$\begin{array}{ll} x^2 + xy\sin(3x - 4y^2), & e^{x^3-3y+1}, \\ \sin(x^2)\cos((2x-4y)^2), & \arctan(\frac{y}{x}) \end{array}$$

31. Finden und qualifizieren Sie die kritischen Punkte der Funktion

$$f(x,y) = y^2 - xy + 2x + y + 1.$$

32. Bestimmen Sie das Minimum der Funktion $f(x,y) = x^2 + (y-2)^2$ auf der Hyperbel $x^2 - y^2 = 1$.