

HÖHERE MATHEMATIK II

GUNTHER H. PEICHL

Skriptum zur Vorlesung im SS 2007

INSTITUT FÜR MATHEMATIK
KARL-FRANZENS-UNIVERSITÄT GRAZ

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1. Grundlagen der Lineare Algebra	1
1. Lineare Gleichungssysteme	1
2. Vektorräume	7
3. Lineare Abbildungen	15
4. Die Determinante einer Matrix	26
5. Komplexe Zahlen	28
6. Eigenwerte und Eigenvektoren	32

Grundlagen der Lineare Algebra

1. Lineare Gleichungssysteme

1.1. Definitionen, Grundlagen.

DEFINITION 1.1.

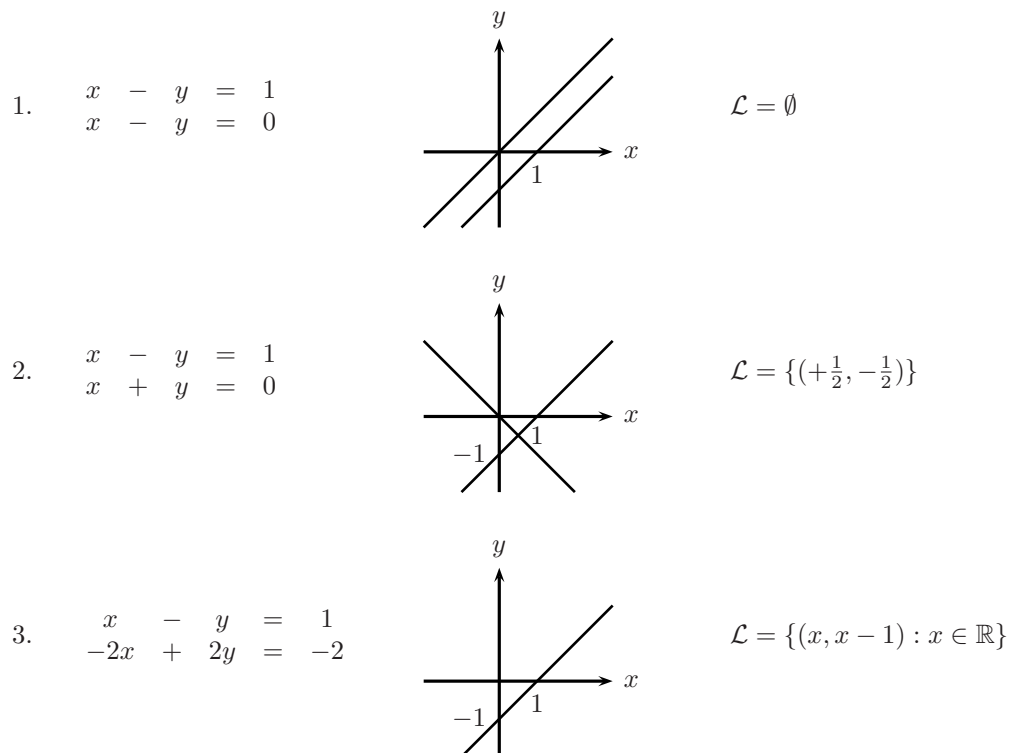
- Ein **lineares Gleichungssystem** (LGS) von m Gleichungen in n Unbekannten x_1, \dots, x_n besteht aus m linearen Gleichungen.

$$(1.1) \quad \begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}$$

mit **Koeffizienten** $a_{ij} \in \mathbb{R}, 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$.

- Ist $b_i = 0, 1 \leq i \leq m$, heißt das System (1.1) **homogen**, andernfalls **inhomogen**.
- Jeder Satz reeller Zahlen x_1, \dots, x_n , der alle m Gleichungen zugleich erfüllt, heißt **partikuläre Lösung** von (1.1). Die Gesamtheit aller partikulären Lösungen bildet die **Lösungsmenge** des linearen Gleichungssystems.

BEISPIEL 1.1.



Diese Beispiele demonstrieren ein typisches Verhalten von LGS.

SATZ 1.1. *Ein lineares GLS hat entweder keine, genau eine oder unendlich viele Lösungen.*

Dreieckssysteme:

$$\begin{array}{rcll} \text{I} & x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ \text{II} & & & - & x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ \text{III} & & & & & & 2x_3 & = & 4 \end{array}$$

Ist ein Beispiel eines **oberen Dreieckssystems**, welches durch **Rückwärtseinsetzen** gelöst werden kann:

$$\begin{array}{ccccc} \text{III} & \longrightarrow & \text{II} & \longrightarrow & \text{I} \\ \downarrow & \nearrow & \downarrow & \nearrow & \downarrow \\ x_3 & & x_2 & & x_1 \end{array}$$

$$x_3 = 2$$

$$x_2 = x_3 = 2$$

$$x_1 = -2x_2 - x_3 + 1 = -4 - 2 + 1 = 5$$

Das LGS besitzt die eindeutige Lösung $\mathcal{L} = \{(-5, 2, 2)\}$.

$$\begin{array}{rcll} x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & - & x_4 & = & 1 \\ & & - & x_2 & + & x_3 & & = & 0 \end{array}$$

ist ein LGS von 2 Gleichungen in 4 Unbekannten. Man kann das Verfahren des vorherigen Beispiels anwenden, wenn man annimmt, dass beispielsweise x_3 und x_4 bekannt seien. Man erhält dann

$$x_2 = x_3$$

$$x_1 = -2x_2 - x_3 + x_4 + 1 = -3x_3 + x_4 + 1$$

Da jede Wahl von $x_3, x_4 \in \mathbb{R}$ auf diese Weise zu einer Lösung führt erhält man als Lösungsmenge

$$\mathcal{L} = \{(-3x_3 + x_4 + 1, x_3, x_3, x_4) : x_3, x_4 \in \mathbb{R}\}.$$

Diese Lösungsmenge spiegelt die intuitive Erwartung wider, dass durch 2 Bedingungen (\equiv Gleichungen) im Allgemeinen 4 Größen nicht eindeutig festgelegt werden können. Es fehlt an Information.

Ein LGS in allgemeiner Form kann man dadurch lösen, dass man es in ein "Dreieckssystem" mit gleicher Lösungsmenge umformt (Eliminationsphase), welches dann durch Rücksubstitution gelöst werden kann.

Folgende **elementare Umformungen** ändern die Lösungsmenge nicht:

1. Vertauschen zweier Gleichungen
2. Multiplikation einer Gleichung mit einer Zahl ungleich Null
3. Addition eines Vielfachen einer Gleichung zu einer anderen Gleichung.

Das Verfahren wird bedeutend übersichtlicher und vor allem automatisierbar, wenn man nur mehr die Koeffizienten des LGS und die Inhomogenität in einem Rechteckschema notiert.

Das LGS (mit $n = m$)

$$\begin{array}{rcll} x_1 & + & x_2 & + & & & 3x_4 & = & 4 \\ 2x_1 & + & x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & 1 \\ 3x_1 & - & x_2 & - & x_3 & + & 2x_4 & = & -3 \\ -x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & - & x_4 & = & 4 \end{array}$$

kann (bei entsprechender Interpretation) kompakt geschrieben werden in der Form:

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & 2 & -3 \\ -1 & 2 & 3 & -1 & 4 \end{array}$$

Jede Zeile des Schemas entspricht einer Gleichung des Systems, die j -te Spalte beinhaltet die Koeffizienten der Unbekannten x_j . Der Deutlichkeit halber wurde die Inhomogenität durch einen senkrechten Strich von den Koeffizienten abgesetzt.

Eliminationsphase:

$$\begin{array}{cccc|c}
 2 & 1 & -1 & 1 & 1 \\
 1^* & 1 & 0 & 3 & 4 \\
 3 & -1 & -1 & 2 & -3 \\
 -1 & 2 & 3 & -1 & 4 \\
 \hline
 1^* & 1 & 0 & 3 & 4 \\
 0 & -1 & -1 & -5 & -7 \\
 0 & -4 & -1 & -7 & -15 \\
 0 & 3 & 3 & 2 & 8 \\
 \hline
 1^* & 1 & 0 & 3 & 4 \\
 0 & -1^* & -1 & -5 & -7 \\
 0 & 0 & 3 & 13 & 13 \\
 0 & 0 & 0 & -13 & -13
 \end{array}$$

Rücksubstitution:

$$\begin{aligned}
 x_4 &= 1 \\
 x_3 &= \frac{1}{3}(13 - 13x_4) = 0 \\
 x_2 &= -(-7 + 5x_4 + x_3) = 2 \\
 x_1 &= 4 - 3x_4 - x_2 = -1
 \end{aligned}$$

Man erhält die Lösung $\mathcal{L} = \{(-1, 2, 0, 1)\}$.

Jede andere Inhomogenität hätte auf ein Schema geführt, welches sich von obigem Tableau nur in der letzten Spalte unterscheidet. Die Rücksubstitution zeigt, dass jedes dieser Systeme genau eine Lösung besitzt. Dies führt zur Vermutung: Ist ein System von n linearen Gleichungen in n Unbekannten für eine Inhomogenität eindeutig lösbar, dann auch für jede andere. Ferner erkennen wir, dass lineare GLS mit gleichen Koeffizienten aber verschiedenen Inhomogenitäten simultan gelöst werden können:

BEISPIEL 1.2 ($m > n$).

$$(1.2) \quad \begin{array}{cccc|cc}
 1 & -2 & 1 & -4 & 1 & 1 \\
 1 & 3 & 7 & 2 & 2 & 2 \\
 1 & -12 & -11 & -16 & -1 & 5 \\
 \hline
 1 & -2 & 1 & -4 & 1 & 1 \\
 0 & 5 & 6 & 6 & 1 & 1 \\
 0 & -10 & -12 & -12 & -2 & 4 \\
 \hline
 1 & -2 & 1 & -4 & 1 & 1 \\
 0 & 5 & 6 & 6 & 1 & 1 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6
 \end{array}$$

Diskutieren wir zuerst das LGS mit der Inhomogenität (1, 2, 3): Die letzte Zeile des Tableaus (1.2) entspricht der Gleichung

$$0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 = 0$$

welche durch ein beliebiges Quadrupel (x_1, x_2, x_3, x_4) gelöst wird. Diese Gleichung kann somit ohne Informationsverlust weggelassen werden, sodass wir nur mehr das äquivalente System

$$\begin{aligned}
 x_1 - 2x_2 + x_3 - 4x_4 &= 1 \\
 5x_2 + 6x_3 + 6x_4 &= 1
 \end{aligned}$$

untersuchen müssen. Wählt man x_3 und x_4 beliebig erhält man:

$$\begin{aligned}
 x_2 &= \frac{1}{5}(1 - 6x_3 - 6x_4) \\
 x_1 &= 1 + \frac{2}{5}(1 - 6x_3 - 6x_4) - x_3 + 4x_4 = \frac{7}{5} - \frac{17}{5}x_3 + \frac{8}{5}x_4.
 \end{aligned}$$

Dies ergibt die allgemeine Lösung

$$\mathcal{L} = \left\{ \left(\frac{7}{5} - \frac{17}{5}x_3 + \frac{8}{5}x_4, \frac{1}{5} - \frac{6}{5}x_3 - \frac{6}{5}x_4, x_3, x_4 \right) : x_3, x_4 \in \mathbb{R} \right\}$$

Völlig anders ist die Situation bei der anderen Inhomogenität: Die letzte Zeile des Tableaus (1.2) ist dann äquivalent zur Gleichung

$$0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 = 6,$$

welche durch kein Quadrupel (x_1, x_2, x_3, x_4) gelöst wird. Somit kann auch das ursprüngliche System für diese Inhomogenität keine Lösung besitzen. Dies führt auf die Vermutung ein System von m Gleichungen mit n Unbekannten, $n > m$, ist entweder unlösbar, oder besitzt unendlich viele Lösungen.

BEISPIEL 1.3 ($n < m$). Wir betrachten wieder 2 Systeme mit gleichen Koeffizienten

$$\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 3 & -1 & -1 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 & -2 \\ 0 & -4 & -4 & -3 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

aus welchen man abliest, dass das System mit der Inhomogenität $(1, -1, 0)$ nicht lösbar ist und jenes mit der Inhomogenität $(1, -1, -1)$ die eindeutige Lösung $x_2 = 1, x_1 = 0$ besitzt.

Es gibt aber auch LGS mit $n < m$ mit unendlich vielen Lösungen:

$$\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ \hline 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}$$

besitzt die allgemeine Lösung $\mathcal{L} = \{(1 - x_2, x_2) : x_2 \in \mathbb{R}\}$.

Ob ein LGS lösbar ist, die Lösung eindeutig ist oder nicht, kann offenbar aus dem aus der Eliminationsphase resultierenden Tableau abgelesen werden. Dazu führen wir die folgende Notation ein:

DEFINITION 1.2.

1. Eine $m \times n$ **Matrix** über \mathbb{R} ist eine Liste von nm reellen Zahlen, welche in einem rechteckigen Schema zwischen zwei Klammern mit m Zeilen und n Spalten angeordnet sind:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Man schreibt auch $A = (a_{ij})$, wobei i den Zeilenindex und j den Spaltenindex des Matrixelements a_{ij} bezeichnet.

$$\mathbb{R}^{m \times n} = \{M : M \text{ ist eine } m \times n \text{ Matrix über } \mathbb{R}\}$$

2. Sind die Matrixelemente a_{ij} die Koeffizienten eines LGS, nennt man $A = (a_{ij})$ **Koeffizientenmatrix**. Als **erweiterte Koeffizientenmatrix** bezeichnet man das Schema

$$(A|b) = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right) \quad \text{mit} \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

1.2. Der Gauß'sche Algorithmus. Wir geben nun ein systematisches Verfahren an, ein gegebenes LGS von m Gleichungen mit n Unbekannten in ein äquivalentes System überzuführen, welches durch Rücksubstitution gelöst werden kann.

Im k -ten Schritt des Gauß'schen Algorithmus ist folgendes durchzuführen:

1. Verschiebe alle Zeilen mit Zeilenindex $i \geq k$ in denen alle Koeffizienten Null sind an das untere Ende der erweiterten Matrix.
2. Suche die erste Koeffizientenspalte mit Spaltenindex $j_0 \geq k$, in der mindestens eines der Matrixelemente mit einem Zeilenindex $i \geq k$ ungleich Null ist (\equiv **Pivotspalte**).
3. Wähle in der Pivotspalte ein Matrixelement ungleich 0 mit einem Zeilenindex $i_0 \geq k$ (\equiv **Pivotelement**).
4. Vertausche die i_0 -te mit der k -ten Zeile.
5. Ist j_0 der Index der Pivotspalte, eliminiere die Variable x_{j_0} aus den Gleichungen $k+1, \dots, m$ durch Addition des $-\frac{a_{i,j_0}}{a_{k,j_0}}$ -fachen der k -ten Zeile zur i -ten Zeile, $i = k+1, \dots, m$.

Der Algorithmus terminiert, wenn kein Pivotelement mehr gefunden werden kann. Dies ist spätestens nach $\min(m, n)$ Schritten der Fall.

Nicht in jedem Schritt sind alle Punkte 1–5 durchzuführen. Insbesondere entfällt im letzten Schritt des Gauß Algorithmus die Eliminationsphase 5. Wenn es keine Zeile gibt, in der alle Koeffizienten ungleich Null sind entfällt Punkt 1, wenn bereits $i_0 = k$ entfällt Punkt 4.

Nach der Durchführung des Gauß Algorithmus liegt die erweiterte Koeffizientenmatrix in **Staffelform** vor:

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & a'_{1j_1} & \dots & \dots & \dots & a'_{1n} & b'_1 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & a'_{2j_2} & \dots & a'_{2n} & b'_2 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & & \ddots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & a'_{rj_r} & \dots & a'_{rn} & b'_r \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & \dots & 0 & b'_{r+1} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & \dots & 0 & b'_m \end{pmatrix}$$

Die Matrixelemente $a'_{1j_1}, \dots, a'_{rj_r}$ sind die Pivotelemente. Die Variablen, welche zu Pivotspalten gehören, nennt man **Basisvariable**, alle anderen Variablen heißen **nichtbasische Variable**. Liegt ein LGS in Staffelform vor, kann man es nach den basischen Variablen (mit Sicherheit) auflösen. Dies ist wesentlich für die Implementierung.

Der folgende Satz gibt an, wie man aus der Staffelform die Lösbarkeit des System entscheiden und gegebenenfalls die Lösung berechnen kann.

SATZ 1.2. *Ein LGS von m Gleichungen in n Unbekannten liegt in Staffelform vor.*

- a. *Das LGS ist genau dann nicht lösbar, wenn es einen Zeilenindex $i \geq r+1$ gibt mit $b'_i \neq 0$.*
- b. *Das LGS sei lösbar. Dann gilt:*
 1. *Das LGS hat genau eine Lösung, wenn es keine nicht basischen Variablen gibt. Dies ist nur für $m \geq n$ möglich.*
 2. *Die allgemeine Lösung des LGS enthält s frei wählbare Parameter genau dann, wenn es s nichtbasische Variable gibt. Jede nichtbasische Variable kann als Parameter gewählt werden.*
 3. *Die allgemeine Lösung berechnet man aus der Staffelform durch Rücksubstitution nach den Basisvariablen.*

Für ein homogenes LGS erhält man speziell:

FOLGERUNG 1.1. *Für ein homogenes LGS gilt:*

1. *Es gibt mindestens eine Lösung, die **triviale Lösung** $(0, \dots, 0)$.*
2. *Gibt es keine nichtbasischen Variablen, dann ist die triviale Lösung die einzige Lösung des LGS.*

BEISPIEL 1.4. *Wir lösen das LGS*

$$\begin{array}{rcccccc} 2x_1 & + & x_2 & - & x_3 & & + & x_5 & = & 0 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & + & 2x_5 & = & -1 \\ 4x_1 & + & 2x_2 & & & + & x_4 & + & 4x_5 & = & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccc|c} 2 & 1 & -1 & 0 & 1 & & 0 \\ 2 & 1 & & 1 & 1 & 2 & -1 \\ 4 & 2 & & 0 & 1 & 4 & 0 \\ \hline 2 & 1 & -1 & 0 & 1 & & 0 \\ 0 & 0 & & 2 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & & 2 & 1 & 2 & 0 \\ \hline 2 & 1 & -1 & 0 & 1 & & 0 \\ 0 & 0 & & 2 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}$$

Da jede Zeile ein Pivotelement enthält, existiert mindestens eine Lösung, weil es zwei nichtbasische Variable x_2 und x_4 gibt, enthält die Lösung zwei freie Parameter, für welche man x_2 und x_4 nehmen kann:

$$\begin{aligned} x_5 &= 1 \\ x_4 &= t \\ x_3 &= \frac{1}{2}(-1 - x_4 - x_5) = -1 - \frac{1}{2}t \\ x_2 &= s \\ x_1 &= \frac{1}{2}(-x_2 + x_3 - x_5) = \frac{1}{2}(-s - 1 - \frac{1}{2}t - 1) = -1 - \frac{1}{2}s - \frac{1}{4}t \end{aligned}$$

Dies ergibt die allgemeine Lösung

$$\mathcal{L} = \left\{ \left(-1 - \frac{1}{2}s - \frac{1}{4}t, \quad s, \quad -1 - \frac{1}{2}t, \quad t, \quad 1 \right) : s, t \in \mathbb{R} \right\}$$

Verzichtet man auf die besondere Bedeutung der letzten Spalte der erweiterten Matrix, kann man auch beliebige Matrizen durch den Gauß Algorithmus in Staffelform überführen. Da man beim Gauß Algorithmus bei der Wahl des Pivotelements im Allgemeinen mehrere Möglichkeiten hat, ist die resultierende Staffelform nicht eindeutig bestimmt. Es stellt sich jedoch heraus, dass die Anzahl der Pivotelemente unabhängig von deren Wahl ist. Sie ist eine für die gegebene Matrix charakteristische Größe.

DEFINITION 1.3. Führt man eine $m \times n$ Matrix A mit dem Gauß Algorithmus in Staffelform über, nennt man die Anzahl der Pivotelemente den **Rang** von A und bezeichnet ihn mit $\text{Rg}A$.

Da in jeder Zeile und in jeder Spalte höchstens ein Pivotelement stehen kann folgt:

SATZ 1.3. *Für eine $m \times n$ Matrix A gilt stets*

$$\text{Rg}A \leq \min(m, n).$$

Mit Hilfe des Ranges können wir die Lösbarkeit eines LGS folgendermaßen klassifizieren:

SATZ 1.4. *Für ein LGS mit erweiterter Matrix*

$$(A|b) \equiv (A, b) = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right)$$

gilt:

1. Das LGS ist nicht lösbar genau dann, wenn

$$\text{Rg}(A, b) > \text{Rg}A$$

2. Das LGS ist für die Inhomogenität b lösbar genau dann, wenn

$$\operatorname{Rg}(A, b) = \operatorname{Rg}A$$

3. Das LGS besitzt höchstens eine Lösung genau dann, wenn

$$\operatorname{Rg}A = n$$

4. Das LGS besitzt unendlich viele Lösungen genau dann, wenn

$$\operatorname{Rg}(A, b) = \operatorname{Rg}A < n$$

5. Das LGS ist für jede Inhomogenität $b \in \mathbb{R}^m$ lösbar genau dann, wenn

$$\operatorname{Rg}A = m$$

FOLGERUNG 1.2. Für ein homogenes LGS gilt:

1. Ein HLGS besitzt nur die triviale Lösung genau dann, wenn

$$\operatorname{Rg}A = n$$

2. Ein HLGS besitzt unendlich viele Lösungen genau dann, wenn

$$\operatorname{Rg}A < n$$

2. Vektorräume

2.1. Vektoren im \mathbb{R}^n .

Die allgemeine Lösung eines LGS wurde bisher als Menge von geordneten n -Tupeln geschrieben, z.B. die Lösung des Beispiels 1.4:

$$\mathcal{L} = \left\{ \left(-1 - \frac{1}{2}s - \frac{1}{4}t, \quad s, \quad -1 - \frac{1}{2}t, \quad t, \quad 1 \right) : s, t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Man gewinnt Einsicht in die Struktur der Lösung eines LGS, wenn man edr Menge von n -Tupeln reeller Zahlen folgender lineare Struktur aufprägt: es seien $x, y \in \mathbb{R}^n$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$ ($x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n)$).

Wir definieren

$$\begin{aligned} x + y &:= (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n) \\ \lambda x &:= (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n) \end{aligned}$$

Man beachte, dass das Symbol “+” und das nicht angeschriebene Multiplikationssymbol “ \cdot ” auf der linken und rechten Seite jeweils eine unterschiedliche Bedeutung besitzen. In diesem Zusammenhang nennt man die n -Tupel **Vektoren** im \mathbb{R}^n . Es stellt sich als vorteilhaft heraus Vektoren als Spalte zu notieren:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad x_i \dots i\text{-te } \mathbf{Komponente} \text{ von } x$$

man spricht auch von einem **Spaltenvektor**, im Fließtext ist es ökonomischer Vektoren als n -Tupel, also als **Zeilenvektor**, zu notieren: $x = (x_1, \dots, x_n)$.

$$\vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

heißt **Nullvektor**. Oft schreib man 0 anstelle von $\vec{0}$. Die Vektoren

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \vec{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

nennt man die **kanonischen Einheitsvektoren**.

Man überzeugt sich dann, dass man ein Quintupel aus der Lösungsmenge \mathcal{L} schreiben kann als

$$\begin{pmatrix} -1 + \frac{1}{2}s - \frac{1}{4}t \\ s \\ -1 - \frac{1}{2}t \\ t \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = x_s + sx_h + ty_h.$$

Es stellt sich heraus, dass x_s eine partikuläre Lösung des inhomogenen LGS, x_h und y_h partikuläre Lösungen des zugehörigen homogenen LGS sind. Hier zeigt sich ein grundlegendes Prinzip, welches wir in einem allgemeinen Zusammenhang verstehen wollen.

2.2. Vektorräume.

DEFINITION 2.1. Ein **Vektorraum über dem Körper** \mathbb{K} ist eine nichtleere Menge V auf der eine Addition “+” mit folgenden Eigenschaften definiert ist:

Für alle $x, y, z \in V$ gilt:

1. $x + y \in V$
2. $x + y = y + x$
3. $x + (y + z) = (x + y) + z$
4. Es gibt ein Element $0 \in V$ mit $x + 0 = x$
5. Es gibt ein $x' \in V$ mit $x + x' = 0$

Ferner ist eine Multiplikation “ \cdot ” : $V \times \mathbb{K} \rightarrow V$ definiert, sodass für alle $x, y \in V$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ gilt

6. $\lambda \cdot x \in V$
7. $\lambda \cdot (x + y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot y$
8. $(\lambda + \mu) \cdot x = \lambda \cdot x + \mu \cdot x$
9. $(\lambda\mu) \cdot x = \lambda(\mu \cdot x)$
10. $1 \cdot x = x$

Die Elemente von V heißen **Vektoren**, jene von \mathbb{K} **Skalare**. Das additive Neutralelement aus 4 heißt **Nullvektor**.

BEMERKUNG 2.1.

1. Auf die Bedeutung des Begriffes Körper kann hier nicht eingegangen werden. In den Beispielen ist \mathbb{K} meist \mathbb{R} , später der Körper der komplexen Zahlen. Es ist aber auch $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$ möglich.
2. Der Nullvektor ist eindeutig bestimmt. Dies folgt aus

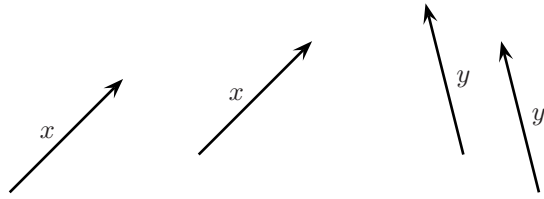
$$0 = 0 + \tilde{0} = \tilde{0}$$

unter der Annahme, $\tilde{0}$ wäre ein weiterer Nullvektor.

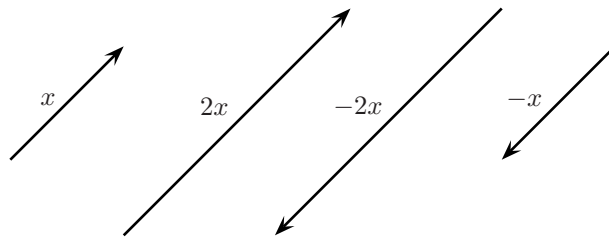
3. Ebenso ist das inverse Element aus 5 eindeutig bestimmt, anstelle von x' schreibt man im Vektorraum $-x$.
4. Man beachte, dass “+” in 7 in zwei verschiedenen Bedeutungen verwendet wird. Ebenso treten in 9 zwei verschiedene Multiplikationen auf.
5. Zur Vereinfachung der Notation schreiben wir künftig λx anstelle von $\lambda \cdot x$.
6. Eine Menge V mit den Eigenschaften 1 – 5 heißt **Abelsche Gruppe**.

BEISPIEL 2.1.

1. Die Vektoren im \mathbb{R}^n aus Abschnitt 2.1 bilden einen Vektorraum über \mathbb{R} .
2. Viele Begriffe in der Physik werden durch die Angabe einer Richtung und ihrer Größe festgelegt: Geschwindigkeit, Beschleunigung, Kraft, Verschiebung. Man kann sie durch Pfeile veranschaulichen:



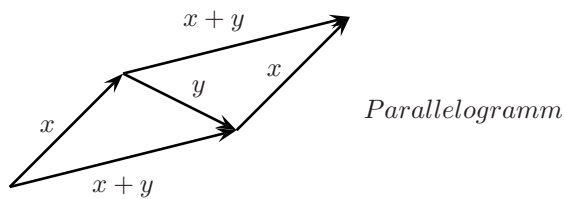
Die Menge aller Pfeile mit gleicher Richtung und gleicher Länge fasst man zu einem Vektor zusammen. Jeder einzelne Pfeil eines Vektors heißt **Repräsentant** des Vektors. Es seien x, y Vektoren, mit $\lambda \in \mathbb{R}$. Wir betrachten λx als jenen Vektor, der für $\lambda > 0$ in dieselbe Richtung, für $\lambda < 0$ in die entgegengesetzte Richtung weist und die $|\lambda|$ -fache Länge besitzt.



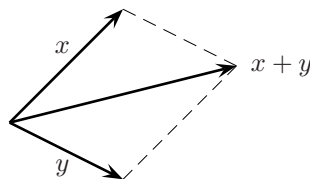
Der Summenvektor $x + y$ ergibt sich indem man an der Spitze eines Repräsentanten von x einen Repräsentanten von y ansetzt. Der Pfeil, der den Anfangspunkt von x mit der Spitze von y verbindet repräsentiert $x + y$.



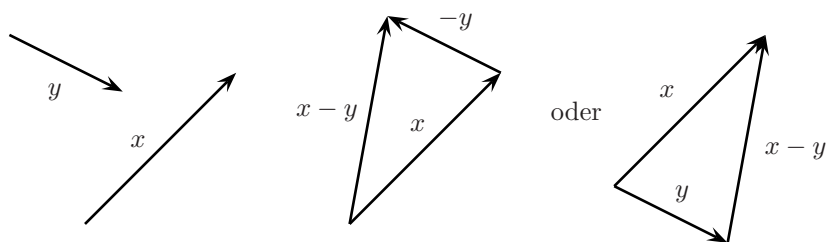
Es folgt unmittelbar: $x + y = y + x$



Die "Parallelogrammregel" führt auf dasselbe Resultat

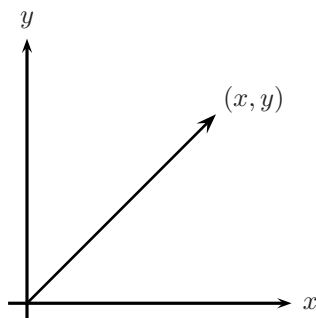


Analog geht man bei der Subtraktion von Vektoren vor:

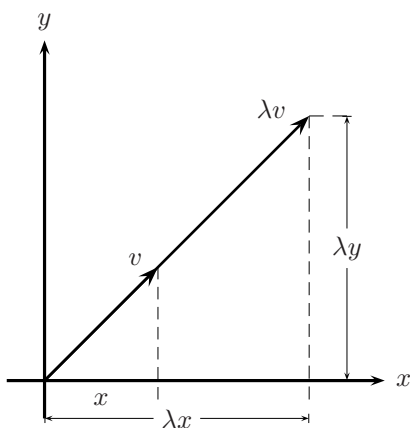


Dem Nullvektor wird keine Richtung zugeordnet. Man kann sich überzeugen, dass die so definierten Vektoren mit diesen Operationen einen Vektorraum über \mathbb{R} bilden.

3. Wir führen Beispiel 1 weiter und führen ein kartesisches Koordinatensystem ein. Aus jedem Vektor wählen wir jenen Repräsentanten, der im Ursprung des Koordinatensystems beginnt. Dadurch wird einem Punkt in der Ebene (Raum) P mit den Koordinaten (x, y) ((x, y, z)) eindeutig festgelegt und umgekehrt bestimmt jeder Punkt einen eindeutigen Repräsentanten eines Vektors.



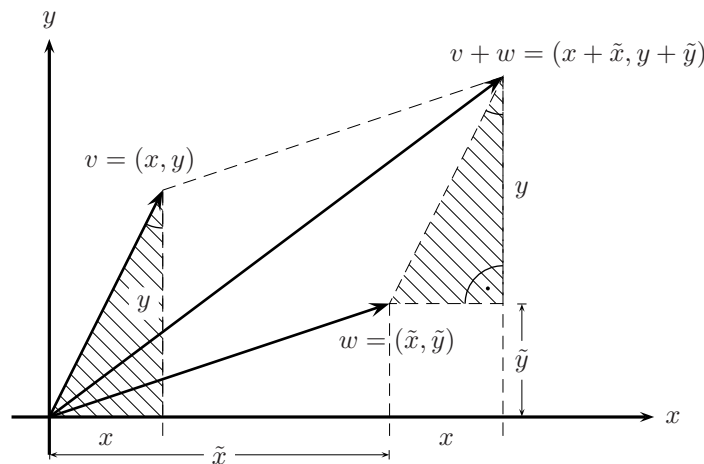
Auch die Menge dieser Repräsentanten bildet einen Vektorraum über \mathbb{R} , dessen Elemente man **Ortsvektoren** nennt. Wenn der Ortsvektor v den Punkt mit den Koordinaten (x, y) festlegt, dafür schreiben wir $v = (x, y)$, dann gilt $\lambda v = (\lambda x, \lambda y)$. Dies ergibt sich aus den ähnlichen Dreiecken



Ist ferner $w = (\tilde{x}, \tilde{y})$ dann folgt

$$v + w = (x + \tilde{x}, y + \tilde{y})$$

denn



Die Multiplikation mit einem Skalar und die Addition von Vektoren stimmen also mit den entsprechenden Operationen aus Abschnitt 2.1 überein.

4. Die Menge $\mathcal{F}(I, \mathbb{R}) := \{f | f : I \rightarrow \mathbb{R}\}$ aller auf dem Intervall I definierten reellwertigen Funktionen bildet mit den Operationen

$$\begin{aligned} (f + g)(x) &= f(x) + g(x) \quad , \\ (\lambda f)(x) &= \lambda f(x) \quad , \end{aligned} \quad x \in I, \lambda \in \mathbb{R}$$

einen Vektorraum über \mathbb{R} .

DEFINITION 2.2. Es sei V ein Vektorraum über \mathbb{K} . Eine nichtleere Teilmenge $U \subset V$ heißt **Unterraum** von V , wenn gilt:

1. $x + y \in U$ für alle $x, y \in U$
2. $\lambda x \in U$ für alle $x \in U, \lambda \in \mathbb{K}$

Eine Teilmenge U eines Vektorraums V ist also genau dann ein Unterraum von V , wenn U mit den Verknüpfungen “+” und “·” selbst einen Vektorraum bildet. Definition 2.2 verlangt, dass U abgeschlossen ist gegenüber der Addition und Multiplikation mit Skalaren.

BEISPIEL 2.2.

1. Jede Gerade durch den Koordinatenursprung bilden einen Unterraum im \mathbb{R}^2 .
2. Jede Gerade und jede Ebene durch den Koordinatenursprung bildet einen Unterraum im \mathbb{R}^2 .
3. $C(I, \mathbb{R}) = \{f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R}) : f \text{ ist stetig}\}$ ist ein Unterraum von $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$.
4. Es sei $x_0 \in I$, dann ist

$$\mathcal{F}_{x_0}(I, \mathbb{R}) = \{f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R}) : f(x_0) = 0\}$$

ein Unterraum von $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$.

DEFINITION 2.3. Sei V ein Vektorraum über \mathbb{K}

1. Es seien $v_1, \dots, v_m \in V$ mit $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{K}$. Der Vektor

$$v = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i$$

heißt eine **Linearkombination** der Vektoren v_1, \dots, v_m .

2. Sei $M \subset V$ eine nichtleere Teilmenge von V . Die Menge aller Linearkombinationen von Vektoren aus M

$$[M] := \{\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n : n \in \mathbb{N}, v_1, \dots, v_n \in M, \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}\}$$

heißt **lineare Hülle** von M . Wir setzen $[\emptyset] = \{0\}$.

SATZ 2.1. *Es sei V ein Vektorraum über \mathbb{K} und $M \subset V$. Dann ist $[M]$ ein Unterraum von V .*

DEFINITION 2.4. Ist V ein Vektorraum und $M \subset V$ derart, dass $[M] = V$, dann heißt M ein **Erzeugendensystem** von V und V der von M erzeugte Vektorraum.

BEISPIEL 2.3. $U = \{(x, 0, z) \in \mathbb{R}^3 : x, z \in \mathbb{R}\}$ ist ein Unterraum des \mathbb{R}^3 , denn für $u = (x, 0, z) \in U, w = (\tilde{x}, 0, \tilde{z}) \in U$ folgt

$$\begin{aligned}\lambda u &= (\lambda x, 0, \lambda z) \in U \\ u + w &= (x + \tilde{x}, 0, z + \tilde{z}) \in U\end{aligned}$$

Dieser Unterraum wird erzeugt vom System $\{e_1, e_3\}$, aber auch von $\{e_1, e_3, e_1 + e_3\}, \{e_1, 2e_1 - 3e_3\}$, etc.

Erzeugendensysteme eines Unterraums sind also nicht eindeutig definiert. Manche Erzeugendensysteme enthalten redundante Vektoren. Es ist somit naheliegend, nach Erzeugendensystemen mit möglichst wenigen Vektoren zu suchen. Wie kann man redundante Elemente eines Erzeugendensystems identifizieren und eliminieren?

2.3. Basis und Dimension.

DEFINITION 2.5. Sei V ein Vektorraum über \mathbb{K} . Die Vektoren $v_1, \dots, v_n \in V$ heißen **linear abhängig**, wenn es Skalare $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ gibt, die nicht alle 0 sind, sodass

$$0 = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$$

Die Vektoren v_1, \dots, v_n heißen **linear unabhängig**, wenn sie nicht linear abhängig sind.

Die Vektoren v_1, \dots, v_n sind somit linear unabhängig genau dann, wenn nur die triviale Linearkombination den Nullvektor ergibt.

BEMERKUNG 2.2.

1. Jede Menge von Vektoren, welche den Nullvektor enthält ist linear abhängig.
2. Um die lineare Abhängigkeit von Vektoren zu untersuchen geht man folgendermaßen vor
 - a. Man nimmt an $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ sei derart, dass

$$(1.3) \quad \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n = 0.$$

Dies lässt sich als homogenes LGS für die Koeffizienten $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ interpretieren.

- b. Besitzt das HLGS (1.3) nur die triviale Lösung, sind die Vektoren v_1, \dots, v_n linear unabhängig, ansonsten linear abhängig.
3. Die kanonischen Einheitsvektoren sind linear unabhängig.

BEISPIEL 2.4. *Es sei*

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Der Ansatz

$$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_4 v_4 = 0$$

führt auf das HLGS

$$\begin{aligned}\lambda_1 &- \lambda_2 &+ 2\lambda_3 &+ \lambda_4 &= 0 \\ -\lambda_1 &+ 2\lambda_2 &- 3\lambda_3 &+ \lambda_4 &= 0 \\ -\lambda_1 &+ 3\lambda_2 &- 3\lambda_3 &+ \lambda_4 &= 0 \\ 2\lambda_1 &+ \lambda_2 &+ 2\lambda_3 &+ 6\lambda_4 &= 0\end{aligned}$$

welches wir mit dem Gauß Algorithmus lösen:

$$\begin{array}{cccc|cccc}
 1^* & -1 & 2 & 1 & 1^* & -1 & 2 & 1 \\
 -1 & 2 & -3 & 1 & 0 & 1^* & -1 & 2 \\
 -1 & 3 & -3 & 1 & 0 & 0 & 1^* & -2 \\
 2 & 1 & 2 & 6 & 0 & 0 & -3 & 6 \\
 \hline
 1^* & -1 & 2 & 1 & \rightarrow & 1^* & -1 & 2 & 1 \\
 0 & 1^* & -1 & 2 & & 0 & 1^* & -1 & 2 \\
 0 & 2 & -1 & 2 & & 0 & 0 & 1^* & -2 \\
 0 & -1 & -2 & 4 & & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \hline
 \end{array}$$

Es folgt

$$\begin{aligned}
 \lambda_4 &= s \\
 \lambda_3 &= 2s \\
 \lambda_2 &= x_3 - 2x_4 = 2s - 2s = 0 \\
 \lambda_1 &= \lambda_2 - 2\lambda_3 - \lambda_4 = -5s
 \end{aligned}$$

Somit gilt

$$-5sv_1 + 0v_2 + 2sv_3 + sv_4 = 0, \quad s \in \mathbb{R}.$$

Die Vektoren v_1, \dots, v_4 sind demnach linear abhängig. Die Vektoren v_1, v_2, v_3 sind jedoch linear unabhängig ($s = 0!$). Andererseits sieht man leicht ein, dass die Pivotspalten der Staffelform linear unabhängig sind (Dreieckssystem). (Ebenso sind auch die Pivotzeilen der Staffelform linear unabhängig). Diese Überlegung rechtfertigt:

SATZ 2.2. *Es sei $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$ und $B \in \mathbb{K}^{m \times n}$ entstehe aus A durch Anwendung des Gaußschen Algorithmus. Dann sind in A und in B dieselben Spalten linear abhängig bzw. linear unabhängig.*

SATZ 2.3. *Es sei $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$. Dann gilt*

1. $\text{Rg}A$ ist die maximale Anzahl linear unabhängiger Spalten von A .
2. $\text{Rg}A$ ist die maximale Anzahl linear unabhängiger Zeilen von A .

Bildet man die Matrix $A = (v_1, v_2, v_3, v_4)$, folgt $\text{Rg}A = 3$.

BEISPIEL 2.5 (Fortsetzung des vorherigen Beispiels.).

Setzt man $s = 1$ ergibt sich

$$v_4 = 5v_1 - 2v_3$$

Der Vektor v_4 lässt sich als Linearkombination von v_1 und v_3 darstellen. Natürlich könnte man auch v_1 aus v_4 und v_3 bzw. v_3 aus v_1 und v_4 linear kombinieren. Es ist jedoch nicht möglich v_2 als Linearkombination von v_1, v_3 und v_4 darzustellen ($\lambda_2 = 0$).

Da $v_4 \in [v_1, v_2]$ folgt

$$[v_1, v_2, v_3, v_4] = [v_1, v_2, v_3]$$

denn es gilt

$$\begin{aligned}
 \alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3 + \delta v_4 &= \alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3 + 5\delta v_1 - 2\delta v_3 \\
 &= (\alpha + 5\delta)v_1 + \beta v_2 + (\gamma - 2\delta)v_3 \in [v_1, v_2, v_3]
 \end{aligned}$$

Da v_1, v_2, v_3 linear unabhängig sind, folgt andererseits

$$[v_i, v_j] \not\subseteq [v_1, v_2, v_3] \quad i \neq j, \quad 1 \leq i, j \leq 3$$

Somit ist $\{v_1, v_2, v_3\}$ ein minimales Erzeugendensystem des Unterraums $M = [v_1, v_2, v_3, v_4]$. Für alle $x \in M$ gilt daher

$$x = \alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3$$

mit geeigneten Koeffizienten $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$. Diese Koeffizienten sind sogar eindeutig bestimmt: wäre

$$x = \tilde{\alpha}v_1 + \tilde{\beta}v_2 + \tilde{\gamma}v_3$$

erhält man durch Subtraktion

$$0 = (\alpha - \tilde{\alpha})x_1 + (\beta - \tilde{\beta})v_2 + (\gamma - \tilde{\gamma})v_3$$

und daraus wegen der linearen Unabhängigkeit

$$\alpha = \tilde{\alpha}, \beta = \tilde{\beta}, \gamma = \tilde{\gamma}.$$

Dies motiviert folgenden Begriff:

DEFINITION 2.6. Es sei $M \subset \mathbb{K}^n$ ein nichttrivialer Unterraum. Ein linear unabhängiges Erzeugendensystem heißt **Basis** von M .

Dem Nullraum weißt man gelegentlich \emptyset als Basis zu.

BEISPIEL 2.6.

1. Die kanonischen Einheitsvektoren e_i sind linear unabhängig und bilden eine Basis des \mathbb{K}^n , da für jeden Vektor $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ offenbar $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ gilt. Somit gilt $x \in [e_1, \dots, e_n]$.
2. Die Vektoren $e_1, e_1 + e_2, e_1 + e_2 + e_3, \dots, \sum_{i=1}^n e_i$ sind ebenfalls linear unabhängig und eine Basis des \mathbb{K}^n .
3. Die Potenzfunktionen $p_i, p_i(x) = x^i, i = 0, \dots, n$ sind linear unabhängig und bilden eine Basis für

$$\mathcal{P}_n = \{f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}) : f \text{ ist ein Polynom, } \text{grad } f \leq n\}$$

Ein Vektorraum kann zwar unendlich viele Basen haben, alle Basen sind aber endlich und enthalten dieselbe Anzahl von Basisvektoren oder alle Basen sind unendlich.

Wir fassen zusammen.

SATZ 2.4.

1. Jeder Vektorraum besitzt eine Basis
2. Besitzt ein Vektorraum V eine endliche Basis mit n Vektoren, dann hat jede andere Basis von V ebenfalls n Vektoren.
3. Ist eine Basis von V unendlich, dann sind es auch alle anderen Basen von V .

DEFINITION 2.7.

1. Besitzt ein Vektorraum V eine endliche Basis mit n Vektoren, dann heißt n die **Dimension** von V und man schreibt $\dim V = n$.
2. Besitzt V keine endliche Basis, heißt V **unendlichdimensional** und man schreibt $\dim V = \infty$.

BEISPIEL 2.7.

1. Für \mathbb{R}^n über \mathbb{R} ist $\dim \mathbb{R}^n = n$.
2. Für \mathbb{R}^n über \mathbb{Q} ist $\dim \mathbb{R}^n = \infty$.
3. $\dim C(I, \mathbb{R}) = \infty$.
4. $\dim \mathcal{P}_n = n + 1$.

SATZ 2.5. Es sei V ein Vektorraum über \mathbb{K} und $\dim V = n$ und $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\} \subset V$. Dann gilt: \mathcal{B} ist eine Basis von V genau dann, wenn sich jeder Vektor $v \in V$ auf eindeutige Weise als Linearkombination der Vektoren v_1, \dots, v_n darstellen lässt, d.h. wenn es eindeutig bestimmte Skalare $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ gibt mit

$$v = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i$$

DEFINITION 2.8. Sei V ein Vektorraum über \mathbb{K} und $\{v_1, \dots, v_n\}$ eine Basis von V .

1. In der Darstellung $v = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i$ heißen die Skalare λ_i **Koordinaten** von V bezüglich der Basis $\{v_1, \dots, v_n\}$.
2. Das geordnete n -Tupel $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ heißt **geordnete Basis** von V .

3. Ist $v \in V$ und sind $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ die Koordinaten von v bezüglich der geordneten Basis \mathcal{B} dann heißt der Vektor

$$[v]_{\mathcal{B}} := \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$$

der **Koordinatenvektor** von v bezüglich \mathcal{B} .

O.B.d.A. wurde der Koordinatenvektor als Spalte geschrieben. Im Folgenden werden wir unter einer Basis stets eine geordnete Basis verstehen.

BEISPIEL 2.8. Wir berechnen den Koordinatenvektor von $v = (2, 0, 2)$ bezüglich der Basis $\mathcal{B} = ((1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1))$.

Der Ansatz

$$v = \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \lambda_3 b_3$$

führt auf das LGS für die Koordinaten $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$:

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}$$

mit der Lösung $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = -2, \lambda_3 = 2$. Somit ist der Koordinatenvektor von v bezüglich \mathcal{B}

$$[v]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Als Probe verifiziere man die Identität

$$2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

3. Lineare Abbildungen

3.1. Lineare Abbildungen und Matrizen. Im Folgenden seien V und W Vektorräume über \mathbb{K} .

DEFINITION 3.1. Eine Abbildung $f : V \rightarrow W$ heißt linear, wenn

1. $f(x + y) = f(x) + f(y), \quad x, y \in V$
2. $f(\lambda x) = \lambda f(x), \quad \lambda \in \mathbb{K}, x \in V$

Linearität einer Abbildung bedeutet demnach, dass das Bild einer Linearkombination von Vektoren gleich der entsprechenden Linearkombination der Bildvektoren ist,

$$f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i v_i\right) = \sum_{i=1}^n \lambda_i f(v_i)$$

Für $\lambda = 0$ erhält man eine notwendige Bedingung für Linearität:

$$f(0) = 0.$$

BEISPIEL 3.1.

1. Die Identität $\text{id} : V \rightarrow V$ ist linear.

2. $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit $f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2x - 5z \\ 3x + 2y - z \end{pmatrix}$ ist linear. Es gilt beispielsweise

$$\begin{aligned} f\left(\lambda \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) &= f\left(\begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \\ \lambda z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2\lambda x - 5\lambda z \\ 3\lambda x + 2\lambda y - \lambda z \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 2x - 5z \\ 3x + 2y - z \end{pmatrix} \\ &= \lambda f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) \end{aligned}$$

3. Es sei $C^1(I, \mathbb{R}) = \{f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R}) : f \text{ ist stetig differenzierbar}\}$ mit $D : C^1(I, \mathbb{R}) \rightarrow C(I, \mathbb{R})$ definiert durch $Df = f'$ dann ist D linear.
 4. Sei $I = [a, b]$. Die Abbildung $T : C(I, \mathbb{R}) \rightarrow C^1(I, \mathbb{R})$, $(Tf)(x) = \int_a^x f(s)ds$ ist linear.
 5. Es sei $A = (a_{ik})$ eine $m \times n$ Matrix. Mit deren Hilfe kann man eine Abbildung $f_A : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m$ definieren, sodass man für $x = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ die Koordinaten des Bildvektors $y = (\eta_1, \dots, \eta_m)$ berechnet durch

$$\eta_i = \sum_{k=1}^n a_{ik} \xi_k, \quad i = 1, \dots, m.$$

Die Abbildung f_A ist linear.

In der Praxis verzichtet man bei der Notation auf eine Unterscheidung zwischen der Matrix A und der durch sie vermittelten Abbildung f_A und schreibt anstelle von

$$y = f_A(x)$$

kurz

$$y = Ax$$

Es gilt aber auch folgende Umkehrung: Es sei $\dim V = n$ und $\dim W = m$, $\mathcal{A} = (a_1, \dots, a_n)$ eine Basis von V , $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_m)$ eine Basis von W und $f : V \rightarrow W$ linear. Stellt man $v \in V$ als Linearkombination von Basisvektoren dar

$$v = \sum_{j=1}^n \xi_j a_j$$

und setzt dies in $y = f(v)$ ein, erhält man wegen der Linearität

$$y = f(v) = f\left(\sum_{j=1}^n \xi_j a_j\right) = \sum_{j=1}^n \xi_j f(a_j).$$

Jeder der Bildvektoren $f(a_j)$ lässt sich in eindeutiger Weise als Linearkombination der Basisvektoren in \mathcal{B} darstellen:

$$f(a_j) = \sum_{k=1}^m a_{kj} b_k, \quad j = 1, \dots, n$$

Insgesamt erhält man somit

$$y = \sum_{j=1}^n \xi_j \sum_{k=1}^m a_{kj} b_k = \sum_{k=1}^m \left(\sum_{j=1}^n a_{kj} \xi_j \right) b_k$$

Andererseits gilt

$$y = \sum_{k=1}^m \eta_k b_k$$

wir haben also y auf zwei Arten als Linearkombination von Basisvektoren dargestellt. Aus der Eindeutigkeit von Koordinatenvektoren folgt daher

$$(1.4) \quad \eta_k = \sum_{j=1}^n a_{kj} \xi_j, \quad k = 1, \dots, m$$

Wir fassen die Koeffizienten a_{kj} in eine $m \times n$ Matrix A zusammen derart, dass

$$A = ([f(a_1)]_{\mathcal{B}}, \dots, [f(a_n)]_{\mathcal{B}}).$$

Dann ist (1.4) gleichbedeutend mit

$$[y]_{\mathcal{B}} = A[x]_{\mathcal{A}}$$

Wir fassen zusammen:

SATZ 3.1. *Es sei $f : V \rightarrow W$, $\dim V = n$, $\dim W = m$, linear. Ist $\mathcal{A} = (a_1, \dots, a_n)$ eine Basis von V und $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_m)$ eine Basis von W , dann kann f durch eine $m \times n$ Matrix M_f beschrieben werden, deren j -te Spalte durch $[f(a_j)]_{\mathcal{B}}$ gegeben ist. Dem funktionalen Zusammenhang $y = f(x)$ entspricht die Beziehung*

$$[y]_{\mathcal{B}} = M_f[x]_{\mathcal{A}}$$

Als Folgerung halten wir fest: Eine lineare Abbildung ist durch ihre Bilder auf einer Basis bereits eindeutig festgelegt. Man kann sich überlegen, dass 3.1 auch dann gilt, wenn die Dimension des Bildraumes W nicht endlich ist, wenn $\dim f(V) \leq \infty$.

BEISPIEL 3.2.

1. Es sei $\dim V = n$, $\mathcal{A} = (v_1, \dots, v_n)$ eine Basis in V , $id : V \rightarrow V$. Wegen

$$id(v_i) = v_i = 0v_1 + \dots + 1v_i + \dots + 0v_n$$

folgt $[id(v_i)]_{\mathcal{A}} = e_i$. Die Matrixdarstellung der Identität in V bezüglich einer beliebigen Basis ist demnach die Matrix

$$M_{id} = E = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix},$$

die Einheitsmatrix.

2. Es sei $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit $f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2x - 5z \\ 3x + 2y - z \end{pmatrix}$. Wir wählen im \mathbb{R}^3 und im \mathbb{R}^2 jeweils die Standardbasis.

Es folgt

$$\begin{aligned} f(e_1) &= f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad (= 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}) \\ f(e_2) &= f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad (= 0 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}) \\ f(e_3) &= f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -5 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (= -5 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + (-1) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}) \end{aligned}$$

Dies ergibt die Matrixdarstellung A von f

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & -5 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 3}$$

3. Es sei $V = \mathcal{P}_n$ und $W = \mathcal{P}_{n-1}$, $n \geq 1$. Wir wählen jeweils die Basis $\mathcal{A} = (p_0, \dots, p_n)$ bzw. $\mathcal{B} = (p_0, \dots, p_{n-1})$ und betrachten die Ableitung $D : \mathcal{P}_n \rightarrow \mathcal{P}_{n-1}$

$$Dp = p', \quad p \in \mathcal{P}_n$$

Wegen

$$\begin{aligned} Dp_i &= ip_{i-1}, \quad 1 \leq i \leq n \\ Dp_0 &= 0 \end{aligned}$$

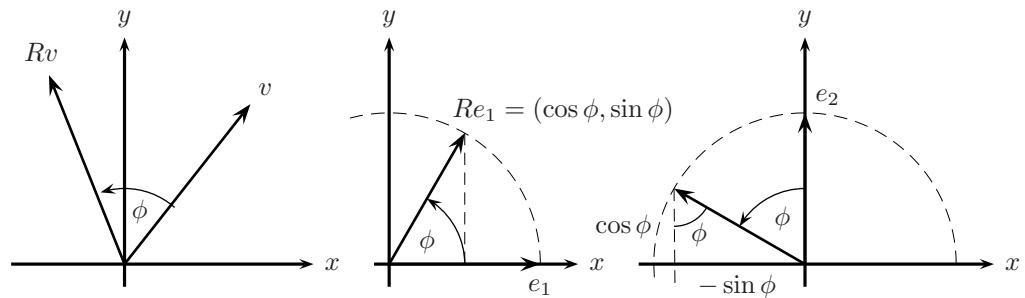
gilt

$$[Dp_i]_{\mathcal{B}} = ie_{i-1}, \quad 1 \leq i \leq n, \quad [Dp_0]_{\mathcal{B}} = 0$$

Die Matrixdarstellung der Ableitung im \mathcal{P}_n ist somit gegeben durch

$$M_D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & 2 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & 0 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times (n+1)}$$

4. Rotation im \mathbb{R}^2 um einen Winkel ϕ entgegen dem Uhrzeigersinn:



Wir wählen im \mathbb{R}^2 die kanonische Basis. Aus der Skizze liest man ab

$$Re_1 = \begin{pmatrix} \cos(\phi) \\ \sin(\phi) \end{pmatrix} \quad Re_2 = \begin{pmatrix} -\sin(\phi) \\ \cos(\phi) \end{pmatrix}$$

und somit

$$M_R = \begin{pmatrix} \cos(\phi) & -\sin(\phi) \\ \sin(\phi) & \cos(\phi) \end{pmatrix}$$

Die Darstellung von Re_2 ergibt sich auch aus der Beobachtung, dass man Re_2 auch erhält, indem man e_1 um den Winkel $\phi + \pi/2$ dreht.

5. Übung: $T : \mathcal{P}_n \rightarrow \mathcal{P}_{n+1}$, $(Tp)(x) = \int_0^x p(s) ds$.

Durch eine lineare Abbildung werden zwei Unterräume bestimmt, mit deren Hilfe wichtige Eigenschaften der Abbildung beschrieben werden können:

DEFINITION 3.2. Es sei $f : V \rightarrow W$ linear.

1. Der **Kern** von f ist die Menge aller Vektoren aus V , welche durch f auf den Nullvektor in W abgebildet werden

$$\ker f = \{v \in V : f(v) = 0\}$$

2. Das Bild von f ist die Menge aller Vektoren aus W , welche als Bilder von Vektoren aus V unter f auftreten

$$\text{Bild } f = \{w \in W : \text{es existiert ein } v \in V \text{ mit } f(v) = w\}$$

SATZ 3.2. Es sei $f : V \rightarrow W$ linear. Dann gilt

1. $\ker f$ ist ein Unterraum von V und $\text{bild } f$ ist ein Unterraum von W .
2. f ist injektiv genau dann, wenn $\ker f = \{0\}$.

3.2. Matrizen und lineare Gleichungssysteme. Wir betrachten das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcccc} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 & & \\ & & \vdots & & \vdots \\ & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n & = & b_m & & \end{array}$$

mit der Koeffizientenmatrix $A = (a_{ik}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$, Inhomogenität $b = (b_1, \dots, b_m) \in \mathbb{R}^m$ und $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Es wurde bereits gezeigt, dass die $m \times n$ Matrix A eine lineare Abbildung $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ induziert, welche wir ebenfalls mit A bezeichnen. Dann kann das LGS in kompakter Form geschrieben werden als

$$(1.5) \quad Ax = b.$$

Ein LGS kann somit auch folgendermaßen interpretiert werden: Gesucht ist ein Vektor $x \in \mathbb{R}^n$, der durch die lineare Abbildung A auf b abgebildet wird. Das Berechnen der allgemeinen Lösung eines homogenen LGS ist somit gleichwertig mit dem Berechnen des Kerns von A .

Der neue Blickwinkel ermöglicht nun zwanglos ein besseres Verständnis der Struktur der allgemeinen Lösung eines LGS. Seien etwa y und z Lösungen von $Ax = b$. Wegen der Linearität von A folgt

$$A(y - z) = Ay - Az = b - b = 0,$$

d.h. die Differenz von zwei beliebigen Lösungen von $Ax = b$ löst das homogene Gleichungssystem und liegt daher im Kern von A . Kennt man also irgendeine partikuläre Lösung x_p von (1.5) und ist y eine weitere Lösung, dann ist $v = y - x_p \in \ker A$ und somit besitzt jede Lösung y von (1.5) die Darstellung

$$y = x_p + v$$

mit $v \in \ker A$. Umgekehrt ist jeder Vektor der Form $y = x_p + v$ mit $v \in \ker A$ eine Lösung von (1.5), denn es gilt

$$Ay = A(x_p + v) = Ax_p + Av = b + 0 = b.$$

Es gilt also

SATZ 3.3. Die allgemeine Lösung des inhomogenen LGS $Ax = b$ ist gegeben durch

$$\mathcal{L} = \{x_p + v : v \in \ker A\}$$

wobei x_p eine partikuläre Lösung von $Ax = b$ bezeichnet.

Eine unmittelbare Konsequenz aus der Linearität von A ist

SATZ 3.4. Superpositionsprinzip Es seien x_i Lösungen der inhomogenen linearen Gleichungssysteme $Ax_i = b_i$, $i = 1, 2$. Dann ist $\alpha x_1 + \beta x_2$ Lösung von $Ax = \alpha b_1 + \beta b_2$.

Man beachte, dass Satz 3.3 und Satz 3.4 nur die Linearität von A benötigen.

BEISPIEL 3.3. Zu berechnen ist der Kern von

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 5 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Gauß Elimination ergibt das äquivalente LGS

$$\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 5 & 5 & 1 & 1^* & -1 & -1 & 1 \\ -1^* & 1 & 1 & -1 & 0 & 1^* & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1^* & -1 & -1 & 1 & 1^* & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 6^* & 6 & 0 & 0 & 1^* & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

mit der Lösung

$$\begin{aligned}x_4 &= t \\x_3 &= s \\x_2 &= -s \\x_1 &= -t\end{aligned}$$

welche man in der Form

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} s + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} t = su + tv$$

schreiben kann. Da man auf diese Weise jede Lösung der homogenen Gleichung erhalten kann, folgt

$$\ker A = [u, v]$$

Man überzeugt sich leicht von der linearen Unabhängigkeit der Lösungen u und v . Somit ist (u, v) eine Basis von $\ker A$.

Allgemein gilt, dass die Anzahl der nichtbasischen Variablen mit der Dimension von $\ker A$ übereinstimmt und eine Basis von $\ker A$ bestimmt werden kann, indem man in der allgemeinen Lösung der Reihe nach alle nichtbasischen Variablen mit jeweils einer einzigen Ausnahme Null setzt.

3.3. Matrizenkalkül. Es seien $f, g : V \rightarrow W, \dim V = n, \dim W = m$. Aus der Definition von λf bzw. $f + g$ folgt mit Satz 3.1, dass die i -te Spalte von $M_{\lambda f}$ bzw. M_{f+g} (bezüglich fester Basen \mathcal{A} in V bzw. \mathcal{B} in W) gegeben sind durch

$$\begin{aligned}[(\lambda f)(v_i)]_{\mathcal{B}} &= [\lambda f(v_i)]_{\mathcal{B}} = \lambda [f(v_i)]_{\mathcal{B}} \\[(f + g)(v_i)]_{\mathcal{B}} &= [f(v_i) + g(v_i)]_{\mathcal{B}} = [f(v_i)]_{\mathcal{B}} + [g(v_i)]_{\mathcal{B}}\end{aligned}$$

Die letzte Gleichheit ist jeweils eine Konsequenz aus dem Superpositionsprinzip. Dies legt nahe, in der Menge $\mathbb{K}^{m \times n}$ eine Multiplikation mit einem Skalar und eine Addition elementweise zu definieren:

DEFINITION 3.3. Es seien $A = (a_{ij}), B = (b_{ij}) \in \mathbb{K}^{m \times n}$, und $\lambda \in \mathbb{K}$. Dann sind die Matrizen λA und $A + B$ definiert durch

$$\begin{aligned}(\lambda A)_{ij} &= \lambda a_{ij} \\(A + B)_{ij} &= a_{ij} + b_{ij}, \quad 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n.\end{aligned}$$

Mit dieser Struktur bilden $\mathbb{K}^{m \times n}$ einen Vektorraum. Offenbar gilt

$$\begin{aligned}M_{\lambda f} &= \lambda M_f \\M_{f+g} &= M_f + M_g\end{aligned}$$

Es seien nun $f : V \rightarrow W$ und $g : W \rightarrow Z$ lineare Abbildungen, $\dim Z = r$. Dann ist auch

$$g \circ f : V \rightarrow Z$$

linear. Es seien $M_f, M_g, M_{g \circ f}$ die Matrixdarstellungen von f, g bzw. $g \circ f$ bezüglich fester Basen $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ in V, W und Z . Welcher Zusammenhang besteht zwischen den Matrizen M_f, M_g und $M_{g \circ f}$? Dem funktionalen Zusammenhang

$$y = (g \circ f)(x) = g(f(x))$$

entspricht nach Satz 3.1

$$[y]_{\mathcal{C}} = M_{g \circ f}[x]_{\mathcal{A}} = M_g([f(x)]_{\mathcal{B}}) = M_g(M_f[x]_{\mathcal{A}}) \stackrel{\text{formal}}{=} M_g M_f[x]_{\mathcal{A}}$$

d.h. (formal)

$$M_{g \circ f} = M_g M_f.$$

Der Matrix, welche die Hintereinanderausführung $g \circ f$ der linearen Abbildungen g und f beschreibt, entspricht also ein noch zu definierendes Produkt der Matrizen M_g und M_f . Dazu betrachten wir

Beispielsweise sei $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, dann ist $AB = 0$, aber $BA = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Dieses Beispiel zeigt auch, dass aus $AB = 0$ i.A. nicht $A = 0$ oder $B = 0$ gefolgert werden kann. Dies ist ein markanter Unterschied zu \mathbb{K} .

Abgesehen von der Kommutativität des Produktes gelten die üblichen Rechenregeln.

SATZ 3.5. *Es seien A, B, C geeignete Matrizen, sodass folgende Operationen sinnvoll sind. Dann gelten folgende Regeln*

1. $(\lambda A)B = A(\lambda B) = \lambda(AB)$, $\lambda \in \mathbb{K}$
2. $A(BC) = (AB)C$
3. $A(B + C) = AB + AC$ und $(A + B)C = AC + BC$
4. $A0 = 0$ und $0A = 0$

3.4. Die inverse Matrix. Ist $\dim V = n$, $f : V \rightarrow V$, linear und bijektiv, dann existiert eine Umkehrabbildung $f^{-1} : V \rightarrow V$. Diese ist wiederum linear (Ü) und es gilt

$$f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = id$$

Dieser Beziehung entspricht für die Matrixdarstellung von f und f^{-1}

$$M_f M_{f^{-1}} = M_{f^{-1}} M_f = E$$

DEFINITION 3.5.

1. Es seien $A, B \in \mathbb{K}^{n \times n}$. Man nennt B die **inverse Matrix** von A , wenn

$$AB = BA = E$$

gilt. Für die inverse Matrix von A schreibt man A^{-1} .

2. A heißt **regulär (invertierbar)**, wenn die inverse Matrix von A existiert. Andernfalls heißt A singulär.

BEMERKUNG 3.2.

1. Die inverse Matrix ist eindeutig.
2. Ist A regulär, dann besitzt das LGS

$$Ax = b$$

für jede Inhomogenität die eindeutige Lösung

$$x = A^{-1}b.$$

Dies ist evident, da die zu A zugehörige lineare Abbildung bijektiv ist. Auf der Ebene der Matrizenkalküls folgt dies aus

$$A(A^{-1}b) = (AA^{-1})b = Eb = b.$$

3. In der Praxis wird aber ein LGS nicht durch Invertieren von A gelöst, da die Berechnung von A^{-1} i.A. aufwendiger ist, als die Lösung mit Hilfe des Gaußschen Algorithmus.
4. Für die Existenz der inversen Matrix genügt es bereits, eine Matrix zu finden, welche einer der beiden folgenden Bedingungen genügt

$$AB = E \quad \text{bzw.} \quad BA = E.$$

Die inverse Matrix ist somit auch charakterisiert als eindeutige Lösung X der Matrixgleichung

$$(1.6) \quad AX = E.$$

Schreibt man $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ und $E = (e_1, \dots, e_n)$, dann ist 1.6 gleichwertig mit dem simulatenen LGS

$$Ax_i = e_i, \quad i = 1, \dots, n$$

für die Spalten der inversen Matrix. Dieses kann effizient mithilfe des Gauß–Jordan–Algorithmus gelöst werden. Gleichzeitig kann die Frage der Invertierbarkeit von A entschieden werden. Dieser Algorithmus ist eine Weiterentwicklung des Gauß–Algorithmus, der auch

die Substitutionsphase einschließt.

Im k -ten Schritt ist durchzuführen:

1-5 wie im Gauß-Algorithmus

6. Elimination aller Elemente **oberhalb** des Pivotelements und Normierung des Pivotelements zu 1.
7. Abfrage, ob eine Nullzeile auf der Koeffizientenseite auftritt. Tritt eine Nullzeile auf der Koeffizientenseite auf, dann ist A nicht invertierbar und der Algorithmus wird beendet.

Die Berechnung der Inversen erfolgt demnach nach dem Schema

$$\begin{array}{c|c} A & E \\ \hline G & J \\ \vdots & \vdots \\ \hline E & A^{-1} \end{array}$$

BEISPIEL 3.4. *Berechne die Inverse von*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 3 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -7 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & -1 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 3 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & -2 \\ \hline 1 & 3 & 0 & 1 & 5 & -10 \\ 0 & -2 & 0 & -1 & -3 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 2 \\ \hline 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{7}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & -2 \end{array}$$

Somit ist A invertierbar und es gilt

$$A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -7 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

Für die Inverse regulärer 2×2 -Matrizen gibt es die einfache explizite Darstellung

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

falls $ad - bc \neq 0$ (diese Bedingung ist sogar gleichwertig mit der Regularität von A).

Aus den Eigenschaften der Umkehrabbildung folgt unmittelbar

SATZ 3.6. *Es seien $A, B \in \mathbb{K}^{n \times n}$. Ist A regulär*

1. *Dann ist auch A^{-1} regulär und ihre Inverse ist A :*

$$(A^{-1})^{-1} = A$$

2. *Das Produkt AB ist genau dann regulär, wenn A und B regulär sind. Es gilt*

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

Invertierbarkeit von Matrizen lässt sich auf viele Arten charakterisieren:

SATZ 3.7. *Es sei $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$. Äquivalent sind folgende Aussagen*

1. A ist regulär
2. $\ker A = \{0\}$
3. Die Spalten (Zeilen) von A sind linear unabhängig.
4. Die Spalten (Zeilen) von A sind eine Basis des \mathbb{K}^n .
5. $\text{Rg}A = n$
6. Das LGS $Ax = b$ besitzt für jedes $b \in \mathbb{K}^n$ genau eine Lösung.

3.5. Koordinatentransformationen. Es sei $f : V \rightarrow W$ linear, $\dim V = n, \dim W = m$ mit \mathcal{A}, \mathcal{B} Basen in V bzw. in W . In der Notation für die Matrixdarstellung haben wir bisher die gewählten Basen unterdrückt. Manchmal ist es zweckmäßig die zugrundegelegten Basen anzuführen. In diesem Falle schreiben wir $[f]_{\mathcal{A}\mathcal{B}}$ anstelle von M_f . Die Beziehung $y = f(x)$ wird dann äquivalent ausgedrückt durch

$$[y]_{\mathcal{B}} = [f]_{\mathcal{A}\mathcal{B}}[x]_{\mathcal{A}}.$$

Wir betrachten den Spezialfall $W = V$ und $f = id$. Dann gilt für alle $x \in V$

$$[x]_{\mathcal{B}} = [id]_{\mathcal{A}\mathcal{B}}[x]_{\mathcal{A}}.$$

Ist $\mathcal{A} = (a_1, \dots, a_n)$, dann ist die i -te Spalte von $[id]_{\mathcal{A}\mathcal{B}}$ gegeben durch

$$[id(a_i)]_{\mathcal{B}} = [a_i]_{\mathcal{B}}.$$

Die Matrix der Identität bezüglich zweier Basen \mathcal{A} und \mathcal{B} im selben Vektorraum V , $[id]_{\mathcal{A}\mathcal{B}}$, heißt auch die **Basiswechselmatrix** zum Basiswechsel von \mathcal{A} nach \mathcal{B} :

$$(V, \mathcal{A}) \begin{array}{c} \xrightarrow{id} \\ \xleftarrow{id^{-1} = id} \end{array} (V, \mathcal{B})$$

Somit gilt

SATZ 3.8. *Es seien \mathcal{A} und \mathcal{B} Basen eines Vektorraums V mit $\dim V = n$. Dann gilt*

1. $[id]_{\mathcal{A}\mathcal{B}}[x]_{\mathcal{A}} = [x]_{\mathcal{B}}$, $x \in V$
2. Die Basiswechselmatrix ist invertierbar und

$$[id]_{\mathcal{A}\mathcal{B}}^{-1} = [id]_{\mathcal{B}\mathcal{A}}$$

Als wichtigen Spezialfall betrachten wir $V = \mathbb{R}^n, \mathcal{A} = (a_1, \dots, a_n)$ und $\mathcal{B} = \mathcal{E}$ die kanonische Basis. Wegen $[a_i]_{\mathcal{E}} = a_i$ steht in der i -ten Spalte der Basiswechselmatrix $[id]_{\mathcal{A}\mathcal{E}}$ gerade der i -te Basisvektor a_i .

BEISPIEL 3.5. *Man berechne die Koordinaten von $x = (2, 0, 4)$ bezüglich der Basis $\mathcal{A} = ((2, 3, 1), (1, 0, 0), (1, 5, 2))$.*

Die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 5 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

ist die Basiswechselmatrix $[id]_{\mathcal{A}\mathcal{E}}$. Somit gilt

$$(1.7) \quad [x]_{\mathcal{E}} = A[x]_{\mathcal{A}},$$

d.h. $[x]_{\mathcal{A}}$ ist die Lösung des LGS (1.7):

$$\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 4 \\ \hline 1 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & -1 & -12 \\ \hline 1 & 0 & 0 & -20 \\ 0 & 1 & 0 & 30 \\ 0 & 0 & 1 & 12 \end{array}$$

Es folgt $[x]_{\mathcal{A}} = (-20, 30, 12)$.

Ist umgekehrt $[x]_{\mathcal{A}} = (1, 1, 3)$ gegeben, ergibt eine einfache Multiplikation

$$[x]_{\mathcal{E}} = [id]_{\mathcal{AE}}[x]_{\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 5 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 18 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Wie ändert sich die Matrix $[f]_{\mathcal{AB}}$ einer linearen Abbildung $f : V \rightarrow W$, wenn man in V und W die Basen durch $\tilde{\mathcal{A}}$ bzw. $\tilde{\mathcal{B}}$ austauscht? Die Beziehung $y = f(x)$ kann dann geschrieben werden als

$$\begin{aligned} [y]_{\mathcal{B}} &= [f]_{\mathcal{AB}}[x]_{\mathcal{A}} \\ \text{bzw. } [y]_{\tilde{\mathcal{B}}} &= [f]_{\tilde{\mathcal{A}}\tilde{\mathcal{B}}}[x]_{\tilde{\mathcal{A}}} \end{aligned}$$

Wegen

$$\begin{aligned} [x]_{\tilde{\mathcal{A}}} &= [id]_{\mathcal{A}\tilde{\mathcal{A}}}[x]_{\mathcal{A}} \\ [x]_{\tilde{\mathcal{B}}} &= [id]_{\mathcal{B}\tilde{\mathcal{B}}}[x]_{\mathcal{B}} \end{aligned}$$

folgt

$$\begin{aligned} [f]_{\tilde{\mathcal{A}}\tilde{\mathcal{B}}}[x]_{\tilde{\mathcal{A}}} &= [y]_{\tilde{\mathcal{B}}} = [id]_{\mathcal{B}\tilde{\mathcal{B}}}[y]_{\mathcal{B}} \\ &= [id]_{\mathcal{B}\tilde{\mathcal{B}}}[f]_{\mathcal{AB}}[x]_{\mathcal{A}} \\ &= [id]_{\mathcal{B}\tilde{\mathcal{B}}}[f]_{\mathcal{AB}}[id]_{\mathcal{A}\tilde{\mathcal{A}}}^{-1}[x]_{\tilde{\mathcal{A}}} \\ & (= [id]_{\mathcal{B}\tilde{\mathcal{B}}}[f]_{\mathcal{AB}}[id]_{\tilde{\mathcal{A}}\mathcal{A}}[x]_{\tilde{\mathcal{A}}}), \quad x \in V \end{aligned}$$

Da dies für alle $x \in V$ gilt, folgt

SATZ 3.9. *Es sei $f : V \rightarrow W$ linear, V, W endlichdimensional und $[f]_{\mathcal{AB}}$ die Matrix von f bezüglich der Basen \mathcal{A} in V und \mathcal{B} in W . Ersetzt man \mathcal{A} durch $\tilde{\mathcal{A}}$ in V und \mathcal{B} durch $\tilde{\mathcal{B}}$ in W erhält man*

$$[f]_{\tilde{\mathcal{A}}\tilde{\mathcal{B}}} = [id]_{\mathcal{B}\tilde{\mathcal{B}}}[f]_{\mathcal{AB}}[id]_{\mathcal{A}\tilde{\mathcal{A}}}^{-1}$$

Für den Spezialfall $V = \mathbb{R}^n$, $\mathcal{A} = \mathcal{B} = \mathcal{E}$, und $\tilde{\mathcal{A}} = \tilde{\mathcal{B}} = (s_1, \dots, s_n)$ setzen wir

$$\begin{aligned} A &= [f]_{\mathcal{E}\mathcal{E}} \\ S &= (s_1, \dots, s_n) = [id]_{\tilde{\mathcal{A}}\mathcal{E}} \end{aligned}$$

also

$$S^{-1} = [id]_{\mathcal{E}\tilde{\mathcal{A}}}.$$

Dies ergibt die Transformationsformel

$$[f]_{\tilde{\mathcal{A}}\tilde{\mathcal{A}}} = S^{-1}AS$$

BEISPIEL 3.6. Es sei \mathcal{A} die Basis aus Beispiel 3.5 und

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 11 & -25 \\ 0 & -3 & 15 \\ 0 & -2 & 8 \end{pmatrix}$$

Eine etwas mühsame Rechnung ergibt

$$\begin{aligned} S^{-1}AS &= \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 5 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -2 & 11 & -25 \\ 0 & -3 & 15 \\ 0 & -2 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 5 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 2 & -5 \\ 1 & -3 & 7 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -2 & 3 \\ 6 & 0 & 15 \\ 2 & 0 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

In Bezug auf die Basis \mathcal{A} wird also die lineare Abbildung durch eine wesentlich einfachere Matrix beschrieben als in Bezug auf die kanonische Basis.

Das folgende Diagramm fasst die Transformationsformel anschaulich zusammen:

$$\begin{array}{ccc} (V, \mathcal{A}) & \xrightarrow{[f]_{\mathcal{A}\mathcal{B}}} & (W, \mathcal{B}) \\ [id]_{\mathcal{A}\tilde{\mathcal{A}}} \downarrow & & \uparrow [id]_{\tilde{\mathcal{B}}\mathcal{B}} = [id]_{\mathcal{B}\tilde{\mathcal{B}}}^{-1} \\ (V, \tilde{\mathcal{A}}) & \xrightarrow{[f]_{\tilde{\mathcal{A}}\tilde{\mathcal{B}}}} & (W, \tilde{\mathcal{B}}) \end{array}$$

Matrizen, welche ein und dieselbe Abbildung beschreiben haben viele gemeinsame Eigenschaften:

DEFINITION 3.6. Die Matrizen $A, B \in \mathbb{K}^{n \times n}$ heißen **ähnlich** genau dann, wenn es eine reguläre Matrix $S \in \mathbb{K}^{n \times n}$ gibt mit

$$B = S^{-1}AS$$

SATZ 3.10. Ähnliche Matrizen haben denselben Rang.

4. Die Determinante einer Matrix

Jeder **quadratischen** Matrix kann man einen Skalar, $\det A$, die **Determinante** von A , zuordnen. Gelegentlich schreibt man auch $|A|$ anstelle von $\det A$. Wir geben keine exakte Definition sondern beschränken uns auf die wesentlichen Eigenschaften und Methoden zur Berechnung einer Determinante. Für Matrizen in $\mathbb{K}^{2 \times 2}$ bzw. $\mathbb{K}^{3 \times 3}$ gibt es einfache Formeln:

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & \det A &= ad - bc \\ A &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} & \det A &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} \\ & & & & - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{32}a_{23}a_{11} \end{aligned}$$

Eine einfache Merkhilfe für die Berechnung der Determinante einer 3×3 -Matrix ist die **Regel von Sarrus**: dazu ergänze man die Matrix um die erste und zweite Spalte

$$\begin{array}{ccccc} & & - & - & - \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \\ & & + & + & + \end{array}$$

und bilde die Summe der Produkte der Matrixelemente in den von links oben nach rechts unten verlaufenden Diagonalen und subtrahiere davon die Produkte der Matrixelemente in den von links unten nach rechts oben verlaufenden Diagonalen.

BEISPIEL 4.1.

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & -2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -2 + 12 - 10 - (-10 + 6 - 4) = 8$$

Im \mathbb{R}^2 und \mathbb{R}^3 kann man die Determinante geometrisch deuten:

SATZ 4.1. Die Determinante einer Matrix im $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ ($\mathbb{R}^{3 \times 3}$) entspricht dem (signierten) Flächeninhalt (Volumen) jenes Parallelogramms (Parallelepipeds), welches von den Spalten der Matrix aufgespannt wird.

Eigenschaften von Determinanten:

SATZ 4.2.

1. Die Determinante der Einheitsmatrix ist $\det E = 1$
2. Für zwei Matrizen $A, B \in \mathbb{K}^{n \times n}$ gilt

$$\det AB = \det A \det B$$

3. A ist regulär genau dann, wenn $\det A \neq 0$. In diesem Fall gilt

$$\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$$

4. Sind A und B ähnlich, gilt

$$\det A = \det B$$

5. Ist $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ und $\lambda \in \mathbb{K}$, dann gilt

$$\det(\lambda A) = \lambda^n \det A$$

4.1. Berechnung einer Determinante. Eine Matrix $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ heißt **untere (obere) Dreiecksmatrix**, wenn

$$a_{ij} = 0 \quad \text{für } i < j \quad (i > j)$$

also sämtliche Matrixelemente oberhalb (unterhalb) der Diagonale Null sind. Eine Matrix heißt **Diagonalmatrix**, wenn

$$a_{ij} = 0 \quad \text{für } i \neq j.$$

SATZ 4.3. Es sei $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ eine untere (obere) Dreiecksmatrix. Dann ist die Determinante von A gleich dem Produkt der Diagonalelemente

$$\det A = \prod_{i=1}^n a_{ii}$$

Eine Berechnungsmethode für Determinanten basiert darauf, die gegebene Matrix analog dem Gaußschen Algorithmus in eine Dreiecksmatrix umzuformen. Dabei sind folgende Umformungen zulässig:

SATZ 4.4. Entsteht die Matrix B aus A durch eine der folgenden Umformungen, dann gilt für die Determinante von B :

1. Eine Zeile von A wird mit einem Skalar λ multipliziert, dann ist

$$\det B = \lambda \det A.$$

2. Zu einer Zeile von A wird das λ -fache einer anderen Zeile von A addiert, dann ist

$$\det B = \det A.$$

3. Zwei Zeilen von A werden vertauscht, dann ist

$$\det B = -\det A.$$

Diese Regeln gelten auch, wenn die Umformungen in den Spalten von A vorgenommen werden.

Eine unmittelbare Folge ist $\det A = 0$, falls zwei Zeilen (Spalten) von A gleich sind oder A eine Nullzeile (Nullspalte) enthält.

BEISPIEL 4.2.

$$\begin{vmatrix} 12 & 8 & 11 & 2 \\ 2 & 4 & 3 & 1^* \\ 10 & 6 & 9 & 1 \\ 9 & -6 & 5 & -2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 12 & 8 & 11 & 2 \\ 10 & 6 & 9 & 1 \\ 9 & -6 & 5 & -2 \\ 2 & 4 & 3 & 1^* \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 8 & 0 & 5 & 0 \\ 8 & 2 & 6^* & 0 \\ 13 & 2 & 11 & 0 \\ 2 & 4 & 3 & 1^* \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 8 & 0 & 5 & 0 \\ 13 & 2 & 11 & 0 \\ 0 & 2 & 1^* & 0 \\ 2 & 4 & 3 & 1^* \end{vmatrix} \\
= \begin{vmatrix} 8 & -10^* & 0 & 0 \\ 13 & -20 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1^* & 0 \\ 2 & 4 & 3 & 1^* \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 13 & -20 & 0 & 0 \\ 8 & -10^* & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1^* & 0 \\ 2 & 4 & 3 & 1^* \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & -10^* & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1^* & 0 \\ 2 & 4 & 3 & 1^* \end{vmatrix} = 30$$

4.2. Der Entwicklungssatz von Laplace. Der Entwicklungssatz ermöglicht es, die Berechnung der Determinanten einer Matrix $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ auf die Berechnung von n Determinanten von Matrizen im $\mathbb{K}^{n-1 \times n-1}$ zurückzuführen.

- Unterlege die Matrix mit dem Vorzeichenschema

$$\begin{array}{ccccccc}
+ & - & + & - & \dots \\
- & + & - & + & \dots \\
+ & - & + & - & \dots \\
- & + & - & + & \dots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{array}$$

- Wähle eine geeignete Spalte (Zeile).
- Multipliziere jedes Element der gewählten Spalte (Zeile) mit dem entsprechenden Vorzeichen und der Determinante jener Matrix, die durch Streichen der Zeile und Spalte entsteht, in welcher das betreffende Element steht.
- Die Determinante ist die Summe dieser Produkte.

Insbesondere eignen sich Zeilen (Spalten) mit vielen Nullen für die Entwicklung nach Laplace. Die Anzahl der Nullen kann durch geeignete Umformungen erhöht werden.

BEISPIEL 4.3.

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & -3 & 5 \\ 2 & 0 & 4 & 6 & -8 \\ 3 & 1 & 5 & -7 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 6 & 0 & -4 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & -3 \\ 2 & 0 & 4 & 6 \\ 3 & 1 & 5 & -7 \\ 6 & 0 & -4 & 2 \end{vmatrix} = -(-2)(-3) \begin{vmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & 1 & 5 \\ 6 & 0 & -4 \end{vmatrix} \\
= -6 \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 6 & -4 \end{vmatrix} = -6 \cdot (-32) = 192$$

5. Komplexe Zahlen

Die Nullstellen der quadratischen Gleichung ($p, q \in \mathbb{R}$)

$$(1.8) \quad x^2 + px + q = 0$$

sind gegeben durch

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

sofern die Bedingung

$$\frac{p^2}{4} - q \geq 0$$

erfüllt ist. Wenn diese Bedingung verletzt ist, dann hat (1.8) keine Lösung in \mathbb{R} . Beispielsweise ist

$$x^2 + 1 = 0$$

nicht lösbar in \mathbb{R} . Die formalen Lösungen $\pm\sqrt{-1}$ erfüllen den **Wurzelsatz von Vieta**, d.h.

$$x_1 + x_2 = p = 0$$

$$x_1 x_2 = \sqrt{-1}(-\sqrt{-1}) = -(\sqrt{-1})^2 = -(-1) = 1 = q$$

Die Einführung solcher formaler Lösungen hat sich als so fruchtbar erwiesen, dass ein neuer Zahlbegriff eingeführt wurde.

DEFINITION 5.1.

1. Das Symbol i ist definiert durch

$$i^2 = -1$$

und heißt **imaginäre Einheit**.

2. Die Elemente der Menge

$$\mathbb{C} = \{a + ib : a, b \in \mathbb{R}\}$$

heißen **komplexe Zahlen**.

Die Elemente der Menge

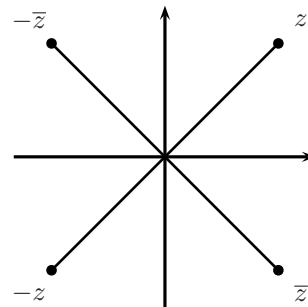
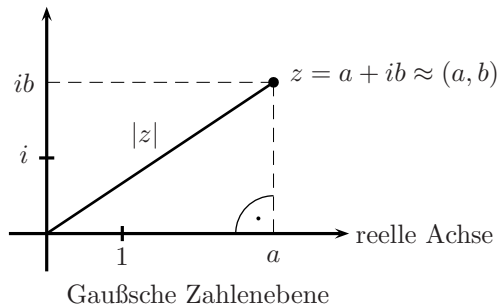
$$\{ix : x \in \mathbb{R}\}$$

heißen **imaginäre Zahlen**.

3. Es sei $z = a + ib$ eine komplexe Zahl. Man nennt
 - a. a Realteil von z , $a = \Re z$
 - b. b Imaginärteil von z , $b = \Im z$
 - c. $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ Absolutbetrag von z
 - d. $\bar{z} = a - ib$ die zu z konjugiert komplexe Zahl

Eine komplexe Zahl ist somit eindeutig durch die Angabe des Real- und des Imaginärteiles festgelegt. Die komplexe Zahl $z = a + ib$ bestimmt daher eindeutig einen Punkt in der Ebene mit den kartesischen Koordinaten (a, b) und umgekehrt. Man nennt die Ebene, deren Punkte als komplexe Zahlen aufgefasst werden **Gaußsche Zahlenebene**.

imaginäre Achse



Für die Addition und Multiplikation komplexer Zahlen gelten die üblichen Regeln, welche um die Vereinbarung $i^2 = -1$ ergänzt werden. Ist $x = a + ib, y = \alpha + i\beta$, dann folgt also

$$x \pm y = a \pm \alpha + i(b \pm \beta)$$

$$xy = (a + ib)(\alpha + i\beta) = a\alpha + i(a\beta + b\alpha) + i^2 b\beta$$

$$= a\alpha - b\beta + i(a\beta + b\alpha).$$

Setzt man $b = \beta = 0$ erhält man die üblichen Rechenregeln für reelle Zahlen. Die Arithmetik komplexer Zahlen mit $\Im z = 0$ ist somit identisch mit der Arithmetik reeller Zahlen. Man kann daher die komplexen Zahlen mit $\Im z = 0$ mit den reellen Zahlen identifizieren.

Eine einfache Rechnung ergibt

SATZ 5.1.

1. $\Re z = \frac{1}{2}(z + \bar{z}), \quad \Im z = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$
2. $z - \bar{z} = |z|^2$ und somit $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$

Der zweite Punkt deutet an, wie die Division komplexer Zahlen durchgeführt werden kann:

$$\frac{x}{y} = x \cdot \frac{1}{y} = \frac{x\bar{y}}{|y|^2}$$

BEISPIEL 5.1. Man berechne $\frac{1+2i}{3-4i}$.

$$\frac{1+2i}{3-4i} = (1+2i) \frac{3+4i}{9+16} = \frac{1}{25}(3+4i+6i+8i^2) = \frac{1}{25}(-5+10i) = \frac{1}{5}(-1+2i)$$

SATZ 5.2. *Eigenschaften der Konjugation Für komplexe Zahlen x, y gilt*

1. $\overline{x+y} = \bar{x} + \bar{y}$
2. $\overline{xy} = \bar{x}\bar{y}$
3. $|\bar{x}| = |x|$

SATZ 5.3. *Eigenschaften des Betrags Für komplexe Zahlen x, y gilt*

1. $|x| = 0$ genau dann, wenn $x = 0$
2. $|xy| = |x||y|$
3. $|x+y| \leq |x| + |y|$

5.1. Allgemeines über Polynome ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$).

DEFINITION 5.2.

1. Ein Polynom über \mathbb{K} ist eine Abbildung $p: \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$,

$$p(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$$

mit $n \in \mathbb{N}, a_i \in \mathbb{K}, 0 \leq i \leq n$. Das Polynom hat den **Grad** n , $\text{grad } p = n$, falls $a_n \neq 0$ und $a_i = 0$ für $i > n$. Für $p = 0$ setzt man $\text{grad } p = -\infty$.

2. Ein Element $x_0 \in \mathbb{K}$ heißt **Nullstelle** (Wurzel) des Polynoms p , wenn

$$p(x_0) = 0$$

SATZ 5.4 (Division mit Rest). *Es sei d ein Polynom, $d \neq 0$. Dann gibt es zu jedem Polynom p eindeutig bestimmte Polynome r und q mit*

$$p = qd + r \\ \text{grad } r < \text{grad } d$$

Ist $r = 0$, heißt d Teiler von p .

Dividiert man also ein Polynom p durch ein Polynom d (Divisor) erhält man als Quotient ein Polynom q und als Rest ein weiteres Polynom r mit $\text{grad } r < \text{grad } d$.

BEISPIEL 5.2. *Es sei $p(x) = 2x^4 + 5x^3 - x + 7$ und $d(x) = x^2 + 4x + 3$.*

$$\begin{array}{r} (2x^4 + 5x^3 - x + 7) : (x^2 + 4x + 3) = 2x^2 - 3x + 6 \\ -2x^4 + 8x^3 + 6x^2 \\ \hline 3x^3 - 6x^2 - x + 7 \\ -3x^3 + 12x^2 + 9x \\ \hline 6x^2 + 8x + 7 \\ -6x^2 + 24x + 18 \\ \hline -16x - 11 \\ q(x) = 2x^2 - 3x + 6 \\ p(x) = -16x - 11 \end{array}$$

Somit gilt die Darstellung

$$p(x) = (2x^2 - 3x + 6)(x^2 + 4x + 3) = 16x - 11.$$

Wählt man im Divisionssatz (5.4) speziell $d(x) = x - x_0$ für ein festes $x_0 \in \mathbb{K}$, dann gilt

$$\begin{aligned} p(x) &= q(x)(x - x_0) + r(x) \\ \text{grad } r &< \text{grad } d = 1 \end{aligned}$$

also kann r nur ein konstantes Polynom oder das Nullpolynom sein. Wir können daher aus dem Divisionssatz folgern:

SATZ 5.5. $x_0 \in \mathbb{K}$ ist genau dann Nullstelle eines Polynoms p , wenn es ein Polynom q mit $\text{grad } q = \text{grad } p - 1$ gibt, sodass

$$p(x) = q(x)(x - x_0), \quad x \in \mathbb{K}.$$

Wiederholt man dieses Argument, erhält man, dass ein Polynom vom Grad n höchstens n Nullstellen besitzen kann. Lässt man jedoch auch komplexe Nullstellen zu, dann gilt sogar

SATZ 5.6 (Fundamentalsatz der Algebra).

1. Ein Polynom n -ten Grades besitzt in \mathbb{C} genau n (nicht notwendigerweise verschiedene) Nullstellen.
2. Sind $z_1, \dots, z_k \in \mathbb{C}$ die verschiedenen Nullstellen eines Polynoms p vom Grad n , dann gibt es eindeutig bestimmte Zahlen m_1, \dots, m_k derart dass p die Darstellung besitzt

$$\begin{aligned} p(z) &= a_n(z - z_1)^{m_1}(z - z_2)^{m_2} \cdots (z - z_k)^{m_k} \\ \sum_{i=1}^k m_i &= n. \end{aligned}$$

Man nennt die Exponenten m_i die **algebraische Multiplizität** der Nullstelle z_i .

In den Anwendungen sind die Koeffizienten der betrachteten Polynome meist reell. Es gilt dann folgendes nützliche Resultat.

SATZ 5.7. Es sei p ein Polynom mit reellen Koeffizienten.

1. Dann treten die Nullstellen in $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ in konjugiert komplexen Paaren auf.
2. Ist $\text{grad } p = 2n + 1$, dann hat p mindestens eine reelle Nullstelle.

Ferner halten wir fest, dass die Lösungen der quadratischen Gleichung

$$x^2 + px + q = 0, \quad p, q \in \mathbb{C}$$

gegeben sind durch

$$(1.9) \quad x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}.$$

BEISPIEL 5.3. Das Polynom $p(z) = z^3 - 1$ besitzt die reelle Nullstelle $z = 1$. Die beiden weiteren konjugiert komplexen Nullstellen ergeben sich aus der Darstellung

$$p(z) = (z^2 + z + 1)(z - 1) = q(z)(z - 1).$$

Die Nullstellen von q sind nach (1.9)

$$z_{2,3} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - 1} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{-\frac{3}{4}} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

6. Eigenwerte und Eigenvektoren

DEFINITION 6.1. Es sei V ein Vektorraum über \mathbb{K} und $f : V \rightarrow V$ linear. Ein Skalar $\lambda \in \mathbb{K}$ heißt **Eigenwert**, wenn es einen Vektor $v \neq 0$ in V gibt mit

$$f(v) = \lambda v.$$

Man nennt v **Eigenvektor** von f zum Eigenwert λ , der Unterraum

$$\ker(\lambda \text{id} - f)$$

heißt **Eigenraum** von f zum Eigenwert λ .

Wird f durch eine Matrix $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ beschrieben, dann ist $\lambda \in \mathbb{K}$ Eigenwert genau dann, wenn es einen Vektor $x \neq 0, x \in \mathbb{K}^n$ gibt mit

$$Ax = \lambda x,$$

d.h. wenn das homogene LGS

$$(A - \lambda E)x = 0$$

eine (und damit unendlich viele) nichttriviale Lösung besitzt.

Aus Satz 4.2 folgt daher

SATZ 6.1. *Es sei $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$.*

1. Ein Skalar $\lambda \in \mathbb{K}$ ist genau dann Eigenwert von A , wenn $\lambda E - A$ singulär ist, d.h. wenn

$$\det(\lambda E - A) = 0$$

2. $\chi_A(\lambda) = \det(\lambda E - A)$ ist ein Polynom vom Grad n ,

$$\chi_A(\lambda) = \lambda^n + \dots + (-1)^n \det A$$

und heißt **charakteristisches Polynom**.

3. Die Eigenvektoren zum Eigenwert $\lambda \in \mathbb{K}$ sind die nichttrivialen Lösungen von

$$(\lambda E - A)x = 0$$

4. A ist invertierbar genau dann, wenn 0 kein Eigenwert von A ist.

5. Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten sind linear unabhängig.

Da ein Polynom vom Grad n genau n Nullstellen besitzt, hat jede Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ n Eigenwerte in \mathbb{C} , die zugehörigen Eigenvektoren liegen dann in \mathbb{C} :

Es sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, dann sind die Koeffizienten des charakteristischen Polynoms reelle Zahlen. Somit treten die Eigenwerte, aber auch die Eigenvektoren in konjugiert komplexen Paaren auf:

$$Ax = \lambda x \quad \Rightarrow \quad A\bar{x} = \bar{\lambda}\bar{x}$$

BEISPIEL 6.1.

1. Man bestimme die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ -4 & -4 & -3 \end{pmatrix}$$

1.Schritt: Aufstellen des charakteristischen Polynoms:

$$\begin{aligned} \chi_A(\lambda) &= \det(\lambda E - A) = \begin{vmatrix} \lambda - 4 & -3 & -3 \\ -2 & \lambda - 3 & -2 \\ 4 & 4 & \lambda + 3 \end{vmatrix} \\ &= (\lambda - 4)(\lambda - 3)(\lambda + 3) + 24 - 24 + 12(\lambda - 3) \\ &\quad + 6(\lambda + 3) + 8(\lambda - 4) = \dots \\ &= \lambda^3 - 4\lambda^2 + 5\lambda - 2 \end{aligned}$$

2.Schritt: (oft nicht exakt möglich) Berechnung der Nullstellen von χ_A . Durch Probieren findet man $\chi_A(1) = 0$, d.h. $\lambda = 1$ ist ein Eigenwert von A . Um die weiteren Nullstellen von χ_A zu finden, dividieren wir durch $\lambda - 1$:

$$\begin{array}{r} (\lambda^3 - 4\lambda^2 + 5\lambda - 2) : (\lambda - 1) = \lambda^2 - 3\lambda + 2 \\ -\lambda^3 \quad + \quad \lambda^2 \\ \hline \quad -3\lambda^2 + 5\lambda \\ \quad -3\lambda^2 \quad + \quad 3\lambda \\ \hline \quad \quad 2\lambda - 2 \\ \quad \quad +2\lambda - 2 \\ \hline \quad \quad \quad 0 \end{array}$$

Wegen $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = (\lambda - 1)(\lambda - 2)$ hat A die Eigenwerte

$$\lambda_{1,2} = 1, \lambda_3 = 2$$

Der Eigenwert 1 hat also als Nullstelle des charakteristischen Polynoms die Vielfachheit 2. Die zugehörigen Eigenvektoren sind die nichttrivialen Lösungen von $(E - A)x = 0$. Aus

$$E - A = \begin{pmatrix} -3 & -3 & -3 \\ -2 & -2 & -2 \\ 4 & 4 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

erhält man die allgemeine Lösung des homogenen LGS

$$x = \begin{pmatrix} -t - s \\ s \\ t \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = su + tv \quad s, t \in \mathbb{R}, s, t \text{ nicht beide } 0$$

Die Eigenvektoren u, v sind linear unabhängig, somit gilt

$$\dim(E - A) = 2.$$

Führt man die obige Rechnung für den Eigenwert $\lambda_3 = 2$ durch, findet man

$$\begin{aligned} 2E - A &= \begin{pmatrix} -2 & -3 & -3 \\ -2 & -1 & -2 \\ 4 & 4 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -2 & -3 & -3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \\ &\rightarrow \begin{pmatrix} -2 & -3 & -3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 0 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

und somit die allgemeine Lösung

$$x = \begin{pmatrix} -\frac{3}{4} \\ -\frac{1}{2} \\ +1 \end{pmatrix} t, \quad t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Da Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten stets linear unabhängig sind, gibt es eine Basis des \mathbb{R}^3 aus Eigenvektoren von A .

BEISPIEL 6.2. Man berechne Eigenwerte und Eigenvektoren von $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Eine einfache Rechnung zeigt, dass das charakteristische Polynom für $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ gegeben ist durch

$$\chi_A(\lambda) = \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + \det A,$$

also

$$\chi_A(\lambda) = \lambda^2$$

mit der zweifachen Nullstelle $\lambda_{1,2} = 0$. Die zugehörigen Eigenvektoren ergeben sich aus $-Ax = 0$ zu

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} t, \quad t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Die Dimension des Kerns von A beträgt 1, somit gibt es keine Basis aus Eigenvektoren von A . Dies motiviert die Begriffe

DEFINITION 6.2. Es sei $\lambda \in \mathbb{K}$ ein Eigenwert der Matrix $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$. Dann heißt die Vielfachheit von λ als Nullstelle des charakteristischen Polynoms die **algebraische Vielfachheit** von λ . Die Dimension des Eigenraumes zu λ heißt **geometrische Vielfachheit** von λ .

Aus dem Fundamentalsatz folgt dann

SATZ 6.2. Es sei $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Dann gilt

1. Die Summe der algebraischen Vielfachheiten aller Eigenwerte von A ist n .
2. Die geometrische Vielfachheit eines Eigenwerts ist kleiner oder höchstens gleich dessen algebraischer Vielfachheit.
3. Es gibt genau dann eine Basis bestehend aus Eigenvektoren, wenn für jeden Eigenwert die geometrische und algebraische Vielfachheit übereinstimmen.

Es sei nun $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ und S eine Basis des \mathbb{K}^n aus Eigenvektoren von A . Nach Satz 3.9 wird die Abbildung bei Verwendung der neuen Basis dargestellt durch die Matrix $B = S^{-1}AS$, wobei in den Spalten von $S = (s_1, \dots, s_n)$ die Eigenvektoren s_i zum Eigenwert $\lambda_i, i = 1, \dots, n$ stehen (nicht alle λ_i müssen verschieden sein). Aus

$$S^{-1}S = S^{-1}(s_1, \dots, s_n) = E$$

liest man

$$S^{-1}s_i = e_i, \quad i = 1, \dots, n$$

ab. Zusammen mit

$$As_i = \lambda_i s_i, \quad i = 1, \dots, n$$

erhält man

$$\begin{aligned} S^{-1}AS &= S^{-1}A(s_1, \dots, s_n) = S^{-1}(As_1, \dots, As_n) = S^{-1}(\lambda_1 s_1, \dots, \lambda_n s_n) \\ &= (\lambda_1 S^{-1}s_1, \dots, \lambda_n S^{-1}s_n) = (\lambda_1 e_1, \dots, \lambda_n e_n) = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n). \end{aligned}$$

In Bezug auf die neue Basis wird die durch A vermittelte Abbildung also durch eine Diagonalmatrix dargestellt. Wir vereinbaren daher

DEFINITION 6.3. Eine Matrix $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ heißt **diagonalisierbar**, wenn der \mathbb{K}^n eine Basis aus Eigenvektoren von A besitzt.

SATZ 6.3. Sei $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$. Äquivalent sind folgende Aussagen

1. A ist diagonalisierbar.
2. Die algebraische und geometrische Vielfachheit eines jeden Eigenwertes von A stimmen überein.
3. A ist ähnlich zu einer Diagonalmatrix $D \in \mathbb{K}^{n \times n}, D = S^{-1}AS$, wobei in der Diagonale von D die Eigenwerte von A stehen und die Spalten von S aus den zugehörigen Eigenvektoren gebildet werden.

BEISPIEL 6.3 (Fortsetzung von Beispiel 6.1). Die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ -4 & -4 & 3 \end{pmatrix}$$

hat die Eigenwerte $\lambda_{1,2} = 1$ und $\lambda_3 = 2$. Zugehörige Eigenvektoren sind $u = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $w = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$. Setzt man $S = (u \ v \ w)$ folgt

$$D = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 2 \end{pmatrix}.$$

BEISPIEL 6.4. Man diagonalisiere gegebenenfalls die Matrix $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

Das charakteristische Polynom $\chi_A(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 2$ hat die Nullstellen $\lambda_{1,2} = 1 \pm i$. Somit ist A diagonalisierbar. Die Eigenvektoren zu $\lambda = 1 + i$ ergeben sich zu

$$\begin{pmatrix} 1+i & 1 \\ -2 & -1+i \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & \frac{1-i}{2} \\ 1+i & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & \frac{1-i}{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

d.h.

$$x = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}(1-i) \\ 1 \end{pmatrix} \tilde{t} = \begin{pmatrix} -1+i \\ 2 \end{pmatrix} t, \quad t \in \mathbb{C}, t \neq 0,$$

ist Eigenvektor von A zum Eigenwert $\lambda = 1 + i$ und somit ist

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} -1-i \\ 2 \end{pmatrix} t, \quad t \in \mathbb{C}, t \neq 0,$$

Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda = 1 - i$. Die Matrix

$$S = \begin{pmatrix} -1+i & -1-i \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

transformiert A auf Diagonalform

$$S^{-1}AS = \begin{pmatrix} 1+i & 0 \\ 0 & 1-i \end{pmatrix}$$

SATZ 6.4.

1. Es sei $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^{n \times n}$ eine Diagonalmatrix. Dann gilt für alle $k \in \mathbb{N}$

$$D^k = \text{diag}(\lambda_1^k, \dots, \lambda_n^k)$$

2. Es sei $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ diagonalisierbar und $D = S^{-1}AS$ eine zu A ähnliche Diagonalmatrix. Dann gilt für alle $k \in \mathbb{N}$

$$A^k = SD^kS^{-1}.$$

Dieses Ergebnis illustriert einen der Gründe für die Nützlichkeit der Diagonalisierbarkeit einer Matrix. Potenzen von Diagonalmatrizen sind sehr bequem auszurechnen, ganz im Gegenteil zu Potenzen einer beliebigen quadratischen Matrix, die durch fortgesetzte Multiplikation der Matrix mit sich selbst berechnet werden müssen. Der zweite Punkt zeigt, dass man diese Tatsache zur Berechnen der Potenzen diagonalisierbarer Matrizen nutzen kann. Die Gültigkeit der Formel wird plausibel durch folgende Rechnung:

$$A^2 = AA = SDS^{-1}SDS = SDEDS^{-1} = SD^2S^{-1}$$

6.1. Anwendungsbeispiel: Entwicklung einer Population. Wir studieren die Population einer bestimmten Tierart: Im ersten 1. Jahr sind die Tiere unfruchtbar. Im 2. Lebensjahr hat ein Tier durchschnittlich je $\frac{13}{4}$ Nachkommen, im 3. Lebensjahr durchschnittlich je 3 Nachkommen. Die Wahrscheinlichkeit das 1. Lebensjahr zu überleben beträgt 25%, die Wahrscheinlichkeit das zweite Jahr zu überleben ebenfalls 25%. Keines der Tiere dieser Art wird älter als 3 Jahre. Gesucht sind:

1. Die Anzahl der im k -ten Jahr an einem Stichtag im 1., 2. bzw. 3. Lebensjahr stehenden Tiere.
2. Die langfristige Entwicklung der Altersstruktur dieser Population.

Wir bezeichnen mit $x_i(k)$ die Anzahl der Tiere, die am Stichtag des k -ten Jahres im i -ten Lebensjahr stehen, $i = 1, 2, 3$.

Dann folgt aus der Annahme über die Population für $k = 0, 1, 2, \dots$

$$x_1(k+1) = \frac{13}{4}x_2(k) + 3x_3(k) \quad (\text{Nachwuchs der älteren Tiere})$$

$$x_2(k+1) = \frac{1}{4}x_1(k) \quad (\text{Überlebende, die im Vorjahr 0-1 Jahre alt waren})$$

$$x_3(k+1) = \frac{1}{4}x_2(k) \quad (\text{Überlebende, die im Vorjahr 1-2 Jahre alt waren})$$

Fasst man die Alterspyramide der einzelnen Jahrgänge zu einem Vektor zusammen $x(k) = (x_1(k), x_2(k), x_3(k))$ und setzt

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{13}{4} & 3 \\ \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix}$$

wird die Entwicklung der Population in Matrixschreibweise beschrieben durch

$$x(k+1) = Ax(k), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Dies ist eine lineare Differenzgleichung 1. Ordnung, welche gelöst wird durch

$$x(k) = A^k x(0), \quad k = 1, 2, \dots$$

Um $x(k)$ explizit zu berechnen wird zunächst A diagonalisiert. Das charakteristische Polynom

$$\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda & -\frac{13}{4} & 3 \\ -\frac{1}{4} & \lambda & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4} & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^3 - \frac{12}{16}\lambda - \frac{3}{16}$$

besitzt die Nullstellen $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -\frac{3}{4}$, $\lambda_3 = -\frac{3}{16}$. Die Berechnung der zugehörigen Eigenvektoren ergibt für

$$\begin{aligned} \lambda_1 = 1 & & s_1 &= \begin{pmatrix} 16 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} t, \\ \lambda_2 = -\frac{3}{4} & & s_2 &= \begin{pmatrix} 9 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} t, \quad t \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ \lambda_3 = -\frac{1}{4} & & s_3 &= \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} t. \end{aligned}$$

Zum Aufstellen der Transformationsmatrix S wählen wir für alle 3 Eigenvektoren $t = 1$ und erhalten $A = SDS^{-1}$ mit

$$S = \begin{pmatrix} 16 & 9 & 1 \\ 4 & -3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{4} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

Damit ergibt sich die Alterspyramide im Jahr k aus

$$\begin{aligned} x(k) &= A^k x(0) = SD^k S^{-1} x(0) \\ (1.10) \quad &= -\frac{1}{70} \begin{pmatrix} 16 & 9 & 1 \\ 4 & -3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1^k & 0 & 0 \\ 0 & (-\frac{3}{4})^k & 0 \\ 0 & 0 & (-\frac{1}{4})^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & -8 & -6 \\ -5 & 15 & 20 \\ 7 & -7 & -84 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ x_3(0) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Dieses Produkt wertet man aus, indem man jeweils Matrix und Vektor Multiplikation ausführt. Dies ergibt

$$\begin{aligned}x_1(k) &= -\frac{1}{70}[32x_1(0) + 128x_2(0) + 96x_3(0) + (-\frac{3}{4})^k(45x_1(0) - 135x_2(0) - 180x_3(0)) \\ &\quad + (-\frac{1}{4})^k(-7x_1(0) + 7x_2(0) + 84x_3(0))], \\x_2(k) &= -\frac{1}{70}[8x_1(0) + 32x_2(0) + 24x_3(0) + (-\frac{3}{4})^k(-15x_1(0) + 45x_2(0) + 60x_3(0)) \\ &\quad + (-\frac{1}{4})^k(7x_1(0) - 7x_2(0) - 84x_3(0))], \\x_3(k) &= -\frac{1}{70}[2x_1(0) + 8x_2(0) + 6x_3(0) + (-\frac{3}{4})^k(5x_1(0) - 15x_2(0) - 20x_3(0)) \\ &\quad + (-\frac{1}{4})^k(-7x_1(0) + 7x_2(0) + 84x_3(0))].\end{aligned}$$

Ein einfacher Grenzwert ergibt nun das asymptotische Verhalten der Alterspyramide. Dieses bekommt man auch direkt aus (1.10), wenn man die Stetigkeit der Abbildung $x \rightarrow Ax$ berücksichtigt. Auf diese Weise findet man

$$\begin{aligned}\lim_{k \rightarrow \infty} x(k) &= \lim_{k \rightarrow \infty} (SD^k S^{-1}x(0)) = S \lim_{k \rightarrow \infty} D^k S^{-1}x(0) \\ &= -\frac{1}{70} \begin{pmatrix} 16 & 9 & 1 \\ 4 & -3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & -8 & -6 \\ -5 & 15 & 20 \\ 7 & -7 & -84 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ x_3(0) \end{pmatrix} \\ &= -\frac{1}{70} \begin{pmatrix} 16 & 9 & 1 \\ 4 & -3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & -8 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ x_3(0) \end{pmatrix} \\ &= -\frac{1}{70} \begin{pmatrix} 16 & 9 & 1 \\ 4 & -3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2x_1(0) - 8x_2(0) - 6x_3(0) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{70}(2x_1(0) + 8x_2(0) + 6x_3(0)) \begin{pmatrix} 16 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Dies ist ein Eigenvektor zum (betrags-)größten Eigenwert der Systemmatrix. Die Verhältnisse von zwei- zu einjährigen bzw. von drei- zu zweijährigen Tieren streben für $k \rightarrow \infty$ gegen die Werte

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{x_2(k)}{x_1(k)} = \frac{1}{4} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{x_3(k)}{x_2(k)} = \frac{1}{4}$$

unabhängig von den Verhältnissen $x_2(0) : x_1(0)$ bzw. $x_3(0) : x_2(0)$ zu Beginn des Beobachtungszeitraumes. Sobald sich die Population stabilisiert hat, sind für die Verhältnisse der Altersklassen zueinander nur mehr die Überlebenswahrscheinlichkeiten maßgebend, nicht aber die Fortpflanzungsraten.