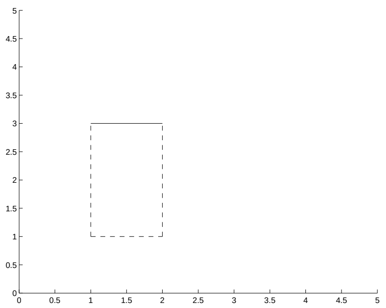
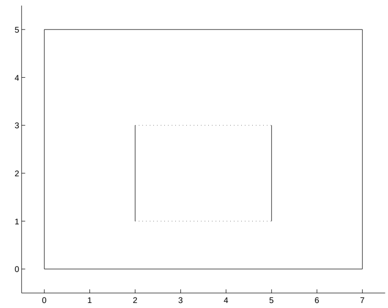
Höhere Mathematik I
Ergänzungsblatt, 17.11.2009

Diese Beispiele dienen der Selbstkontrolle und werden in den Übungen NICHT behandelt.

1. Gegeben seien folgende Teilmengen in $\mathbb{R}$: $A = (4, 6]$, $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $C = \{3, 5, 1\}$ und $D = [3, 7)$ in Intervallschreibweise oder in aufzählendem Verfahren. Bestimmen Sie $(A \cup B) \cap C$, $(B \setminus C) \cap C$, $C \times C$, und $(B \times D) \cap (D \times A)$. Veranschaulichen Sie diese Mengen als Punktmengen in $\mathbb{R}$, bzw. $\mathbb{R}^2$.

2. Finden Sie eine geeignete Beschreibung folgender Teilmengen des $\mathbb{R}^2$.





3. Stellen Sie das Viereck mit den Eckpunkten $(-1, 0)$, $(0, -1)$, $(1, 0)$ und $(0, 1)$ als Menge von geordneten Paaren dar.

4. Berechnen Sie

$$\operatorname{Re}\frac{1}{-2+3i}, \qquad \operatorname{Im}\frac{1-i}{2+5i}, \qquad \operatorname{Re}\big(3(2+i)^2 - 3i\big), \qquad \operatorname{Im}\frac{2+i}{3-4i}.$$

5. Stellen Sie $z = \frac{2-3i}{1+2i}$ in der Form $z = a + ib$, a, $b \in \mathbb{R}$ dar. Bestimmen Sie $|\bar{z}|$.

6. Skizzieren Sie folgende Punktmengen in der Gaußschen Zahlenebene:

$$A = \{z \in \mathbb{C} : |\frac{z}{2} - 1 + 3i| \leq 4\}, \qquad B = \{z \in \mathbb{C} : |-z + i + 1| = 3\}, \tag{1}$$

$$C = \{z \in \mathbb{C} : -2 \leq \operatorname{Im} z < 1, |\operatorname{Re} z| < 2\}, \qquad D = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}\left((1-i)(z+2i)\right) \geq 0\}. \tag{2}$$

7. Finden Sie alle Lösungen der Gleichung $|x - 1| = -|x| + 1$.

8. Welche $x \in \mathbb{R}$ erfüllen die Ungleichung

$$\frac{x-4}{x+2} \leq \frac{2x}{x+2} - x - 1.$$

9. Lösen Sie die Ungleichungen $(x-4)(x+2) \leq 0$ und $(x-4)(x+2) > -8$.

10. Lösen Sie in $\mathbb{R}$ die Ungleichung $\frac{2x+1}{x+2} > 1$.

11. Skizzieren Sie den Graph einer Abbildung f welche das Intervall $[-3,-1]$ nicht injektiv und nicht surjektiv in das Intervall $[-2,-1]$ abbildet.

12. Bestimmen Sie den Definitionsbereich der Funktion $f(x) = \ln \frac{x+1}{x-1}$.

13. Geben sie den Definitionsbereich der Funktionen $f(x) = \frac{1}{x-3}$ und $g(x) = (x-1)^2$ an. Bilden Sie die Kompositionen $f \circ g$ und $g \circ f$ und bestimmen Sie deren Definitionsbereich.

14. Gegeben sei die Abbildung $f\colon (-\infty, \frac{1}{4}] \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \sqrt{-8x+2}$. Bestimmen sie gegebenenfalls die Umkehrfunktion von f.

15. Gegeben sei die Abbildung $x \to f(x) = \frac{2x-1}{3x+2}$. Bestimmen Sie den Definitionsbereich und das Bild von f. Ist f injektiv? Geben Sie gegebenenfalls die Umkehrfunktion an.

16. Gegeben seien die folgenden Abbildungsvorschriften. Geben Sie jeweils den maximalen Definitionsbereich $D \subset \mathbb{R}$ an, so dass $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion definiert. Bestimmen Sie auch jeweils das Bild $f(D)$.

$$f_1(x) = \frac{1}{x^2}, \quad f_2(x) = \sqrt{7-x}\; - 1, \quad f_3(x) = \frac{1}{\sqrt{4-x^2}},$$
$$f_4(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-4}}, \quad f_5(x) = x^2 - x - 6.$$

17. Bestimmen Sie jeweils für die folgenden Funktionen, ob die Verkettungen $g \circ f$ und $f \circ g$ definiert sind. Falls nicht, schränken Sie den Definitionsbereich so ein, dass die Verkettungen definiert sind. Untersuchen Sie auch, ob $g \circ f = f \circ g$ gilt.

    (a) $f : (1,\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x-1}$, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = x^2 - x - 5$
    (b) $f : \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x^2-1}$, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = x + 1$.

18. f und g seien Funktionen, welche an der Stelle x_0 jeweils einen Grenzwert besitzen. Sind folgende Aussagen richtig?

    (a) $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to x_0} f(x)}{\lim_{x\to x_0} g(x)}$.
    (b) $\lim_{x\to x_0} f(x)g(x) = f(x_0)g(x_0)$.

    (Es können auch beide Aussagen richtig oder beide Aussagen falsch sein).

19. Zeigen Sie, dass -1 und 1 Häufungspunkte der Menge $\left\{(-1)^n + \frac{1}{n} :\ n \in \mathbb{N}\right\}$ sind.

20. Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:

$$\text{(a)}\ \lim_{x\to 0}(3x^2+7x-12)\,, \qquad \text{(b)}\ \lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3}\,, \qquad \text{(c)}\ \lim_{x\to 2}\frac{x^2+2x-5}{x^3-2x}\,.$$

21. Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte

$$(a)\lim_{x\to 3}\sqrt[3]{(x^2-1)^2}, \qquad (b)\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{(x^2-1)|x|}, \qquad (c)\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{(x^2-1)|x|}.$$

22. Berechnen Sie den Grenzwert $\lim_{x\to 3}\frac{x^2-x-6}{x-3}$.

23. Ist die Funktionen $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $x\to f(x)=\sqrt{e^{\frac{1}{1+x^2}}+x^2}$ stetig?

24. Zeichnen Sie den Graph einer Funktion f mit folgenden 4 Eigenschaften: $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$, $\lim_{x\to\infty} f(x) = 1$, $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \infty$, $\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$.

25. Berechnen Sie die Grenzwerte $\lim_{x\to-2}\frac{x^3+8}{x+2}$ und $\lim_{x\to 3}\frac{\frac{1}{x}-2}{1-x^2}$.

26. Berechnen Sie den Grenzwert $\lim_{x\to-3}\frac{x^3+4x^2+5x+6}{x+3}$.

27. Für welche Werte von $a\in\mathbb{R}$ sind die einseitigen Grenzwerte von

$$f(x)=\begin{cases}(ax)^2+3ax-1 & x\le -1\\ 3x^3+2x^2-a & x>-1\end{cases}$$

bei $x=-1$ gleich.

28. Ist folgende Aussage richtig: Wenn eine Funktion $f\colon I\to\mathbb{R}$ an einer Stelle $x_0\in I$ einen Grenzwert besitzt, dann ist sie an dieser Stelle stetig.
Begründen Sie ihre Antwort.

29. Es sei $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x)=\begin{cases}x & x\le 0\\ x-x^2 & 0<x\le 1\\ \frac{1}{2}(x-1) & x>1\end{cases}.$$

Ist f in $x=0$ und $x=1$ stetig? Skizzieren Sie den Graph von f.

30. Für welche Werte von a ist die Abbildung $f(x)=\begin{cases}x^2 & x<1\\ ax-3 & x\ge 1\end{cases}$ stetig?

31. Es sei $V(s)=s^3$ das Volumen (in m^3) eines Würfels der Kantenlänge s (in m). Sie sollen nun einen Würfel konstruieren, dessen Volumen nicht um mehr als $\varepsilon=0.1m^3$ von einem vorgegebenem Wert V_0 abweichen darf. Mit welcher Toleranz δ dürfen Sie die Seitenlänge s_0 wählen, falls $V_0=V(s_0)=1m^3$ ist? Welche Toleranz müssen Sie für $V_0=8m^3$ einhalten?