**Höhere Mathematik I**
**Blatt 9 12.1.2010**

49. Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte

$$\lim_{x\to\infty} x \ln \frac{x+1}{x-1}, \quad \lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[3]{9-x}-2}{1-x}, \quad \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{x-\frac{\pi}{2}}{\sin x}, \quad \lim_{x\to 0} \frac{\tan 2x}{\arctan(-3x)}$$

50. Zeigen sie daß die Gleichung $2x - \cos(2x) = 0$ genau eine Lösung im Intervall $[0, \frac{\pi}{4}]$ hat. Berechnen Sie diese Lösung mit dem Newtonverfahren mit einer Genauigkeit von 4 Nachkommastellen.

51. Bestimmen und klassifizieren Sie die kritischen Stellen von $f(x) = 6\sqrt{x} - x\sqrt{x}$.

52. Ein kegelförmiges Gefäß mit Durchmesser 8 cm und 6 cm Tiefe ist mit Wasser gefüllt. Am Boden des Gefäßes befindet sich ein Leck, durch welches Wasser mit einer Rate von 2 $\text{cm}^3/\text{min}$ tropft. Wie rasch sinkt der Wasserspiegel im Becher in jenem Moment, in dem der Wasserstand gerade 3 cm beträgt.

53. Gegeben sei die Funktion $x \to f(x) = \frac{x^2+1}{x^2-4}$. Bestimmen Sie $\lim_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim_{x\to\infty} f(x)$, sowie maximale Intervalle, auf welchen $f$ monoton steigt bzw. fällt und maximale Intervalle, auf welchen $f$ konvex bzw. konkav ist. Skizzieren Sie die Funktion.

54. Ein horizontal in einer Höhe von 1 Meile fliegendes Flugzeug beginnt den Sinkflug 4 Meilen westlich der Landebahn. Die Flugbahn während der Sinkphase wird durch eine Funktion $f\colon [-4, 0] \to [0, 1]$ beschrieben.
    (a) Geben Sie 4 Bedingungen an, welche eine stetig differenzierbare Flugbahn sicher stellen.
    (b) Es sei nun $f$ ein Polynom. Wie groß muß dessen Grad sein, damit es durch die Bedingungen aus a) eindeutig bestimmt wird. Berechnen Sie die Koeffizienten des Polynoms.
    (c) In welcher Entfernung von der Landebahn ist die Sinkgeschwindigkeit des Flugzeuges (bei konstanter horizontaler Geschwindigkeit) am größten.

    Zusatzfrage: Vergleichen Sie die maximale und die mittlere Sinkgeschwindigkeit.

**Arbeiten Sie folgende Beispiele schriftlich aus (Korrektur durch Fr. Boiger)**

1. Es sei $g\colon [-1, 1] \to \mathbb{R}$ beschränkt und $f(x) = x^\alpha g(x)$ . Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ existiert $f'(0)$ und ist gleich Null.

2. Die Funktionen $f$ und $g\colon (-\sigma, \sigma) \to \mathbb{R}$, $\sigma > 0$, seien differenzierbar und $f(0) = 0$. Ferner gelte $f(x)g(x) = x$ für alle $x \in (-\sigma, \sigma)$. Zeigen Sie, daß dann $g(0) \neq 0$ gelten muß.