Höhere Mathematik I
Blatt 7 1.12.2009

37. Gegeben sei die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 3x - e^x$. Hat f eine Nullstelle im Intervall $[0,1]$? Berechnen Sie gebenenfalls eine Nullstelle von f mit einer Genauigkeit von 3 Nachkommastellen (Taschenrechner, MATLAB).

38. Es sei $(x_n) \subset \mathbb{R}$ eine Nullfolge. Begründen sie die Existenz des Grenzwertes
$$\lim_{n\to\infty} \frac{\alpha x_n + \beta x_n^2 + \cos x_n^3}{2 - e^{x_n}}$$
und bestimmen Sie dessen Wert.

39. Bestimmen Sie die Grenzwerte der Folgen
$$\Big(\frac{\sqrt{n+1}+2n}{\sqrt{9n^2+n-1}}\Big), \qquad \Big(\sqrt{n+\sqrt{n}} - \sqrt{n-\sqrt{n}}\Big), \qquad \Big((1+\frac{1}{n})^{1/(2n)}\Big),$$
$$\Big(\tan^2(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{n}) - \frac{\sin(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{n})}{\cos^2(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{n})}\Big)$$

40. Altersbestimmungen von Erdschichten und archäologischen Fundstücken führt man mit Hilfe der Kohlenstoffmethode durch. Kohlenstoff besteht aus den beiden Isotopen ^{12}C und ^{14}C. Von dem Isotop ^{14}C zefällt jährlich 0,0121%. Der Kohlenstoff ^{12}C ist stabil.
    (a) Angenommen, vor 10000 Jahren wären 100g des Kohlenstoffes ^{14}C vorhanden gewesen, wieviel wären es dann heute?
    (b) Berechnen Sie die Zeitdauer, in der die Hälfte von ^{14}C zerfallen ist.
    (c) In einer alten Feuerstelle der Steinzeit fand man 7350g Holzkohle. In neuer Holzkohle kennt man das Verhältnis von ^{12}C zu ^{14}C: wenn die Holzkohle neu gewesen wäre, hätten 0,00735 μg Kohlenstoff ^{14}C in der Holzkohle vorhanden sein müssen. Tatsächlich stellte man nur 0,001558 μg ^{14}C fest. Die Holzkohle musste daher alt sein. Bestimmen Sie das ungefähre Alter der Holzkohle.

41. Die Bevölkerung der USA ist bis zum Jahr 1900 ungefähr exponentiell gewachsen. Seitdem ist der Zuwachs relativ flacher geworden, und dies kann vielleicht wie folgt erklärt werden. Im ungeheuer großen Lebensraum der USA entwickelt sich die Population zunächst ungehemmt, je größer die Population, desto mehr Nachkommen. Mit immer dichterer Bevölkerung werden aber Mechanismen wirksam, die das Wachstum einbremsen, geringere Kinderfreudigkeit und/oder erhöhte Sterblichkeit bewirken. Ein empirisches Modell für diese Effekte ist durch die logistische Funktion gegeben:
$$P(t) = \frac{K}{1+\exp[-(t-t_0)/\tau]}$$
Folgende Bevölkerungsdaten (in Einheiten zu hundert-millionen Einwohnern) sind gemessen worden: $P(0 \text{ Jahr}) = 1$, $P(10\ln(2) \text{ Jahr}) = 4/3$ und $P(10\ln(4) \text{ Jahr}) = 8/5$, wobei $t = 0$ dem Jahr 1900 entspricht. Bestimmen Sie die Parameter K (Kapazität), t_0 (Wendezeit) und τ (Zeitskala) im logistischen Modell.

42. Gegeben seien die beiden Datensätze

h	1/11	1/31	1/51	1/71	1/91
e	0.142	0.051	0.031	0.022	0.0173

x	0.1	0.4	0.8	1.2	1.6
y	0.9	1.65	2.65	4.05	6.75

Stellen Sie die Datensätze halb-, bzw. doppelt logarithmisch dar und entscheiden Sie, welcher der Datensätze besser durch ein Exponentialgesetz $f(x) = ce^{\lambda x}$ bzw. ein Potenzgesetz $f(x) = cx^{\lambda}$ dargestellt wird. Bestimmen sie eine Schätzung für c und λ.