Höhere Mathematik I
Blatt 6 17.11.2009

31. Es sei

$$f(x) = \begin{cases} 3x - 5, & x \leq 2, \\ 2x^2 - 3x + 4, & x > 2. \end{cases}$$

Berechnen Sie die einseitigen Grenzwerte von f an der Stelle $x_0 = 2$.

32. (a) Die Funktionen $f\colon I \to \mathbb{R}$ und $g\colon J \to \mathbb{R}$ seien stetig. Begründen Sie die Stetigkeit der Funktionen $h = \frac{\alpha f + \beta g + \gamma f g}{1+g^2}$, $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, $k = \sqrt{1 + (f \circ g)^2}$. Unter welchen zusätzlichen Voraussetzungen sind diese Funktionen sinnvoll definiert?

(b) Begründen Sie die Stetigkeit der Funktionen $h,\ k\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h(x) = \frac{e^x - \sin(x) - 3e^x \sin(x)}{1+(sin(x))^2}$ und $k(x) = \sqrt{1 + \ln(1 + |x|)}$. Sie dürfen dabei die Stetigkeit der beteiligten elementaren Funktionen (welcher?) verwenden.

33. Die Konzentration eines Medikamentes entwickle sich gemäß $c(t) = \frac{2t+1}{t+1}$ (t in Stunden). Berechnen Sie die Gleichgewichtskonzentration $c^* = \lim_{t\to\infty} c(t)$. Nach wie vielen Stunden bleibt die Abweichung der Konzentration kleiner als 1% des Gleichgewichtswertes.
(Tip: Ist c monoton?)

34. Für welche Werte von $a \in \mathbb{R}$ ist die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + 3x - 1, & x \leq -1, \\ 3x^3 + 2x^2 - a, & x > -1, \end{cases}$$

an der Stelle $x_0 = -1$ stetig.

35. Es sei $\gamma\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Funktion $x \to x - \lfloor x \rfloor$. Wo ist γ stetig? Informieren Sie sich über den Begriff der links- bzw. rechtsseitigen Stetigkeit. Ist γ linksseitig, rechtsseitig stetig?

36. Gegeben sei die Funktion $f\colon [-2, \infty) \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x+2}-1}{x+1}, & x \neq -1, \\ \alpha, & x = -1. \end{cases}$$

Kann man $\alpha \in \mathbb{R}$ so wählen, daß f stetig in $x = -1$ ist?