Höhere Mathematik I WS 2009 / 2010
Blatt 5 10.11.2009

25. Berechnen Sie, falls existent, folgende Grenzwerte

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^4-1}{x-1}, \quad \lim_{x\to 0} \frac{|x|}{x}, \quad \lim_{x\to 9} \frac{x-3}{\sqrt{x}-3}.$$

26. (a) Es seien $f,\ g\colon I \to \mathbb{R}$ Funktionen, $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $x_0 \in I$. Ferner sei f beschränkt und es gelte $\lim_{x\to x_0} g(x) = 0$. Zeigen Sie: Es existiert $\lim_{x\to x_0} f(x)g(x)$ und es ist $\lim_{x\to x_0} f(x)g(x) = 0$.

    (b) Existieren die Limiten $\lim_{x\to 0} x\sin(\frac{1}{x})$, beziehungsweise $\lim_{x\to 0}(x+1)\sin(\frac{1}{x})$? Berechnen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.

27. Für eine Funktion $f\colon D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$, gelte $\lim_{x\to x_0} f(x) = f_0$ in einem Häufungspunkt x_0 von D. Berechnen Sie

$$\lim_{x\to x_0} \frac{1-2f(x)-3f(x)^2}{1+f(x)^4}$$

und begründen Sie Ihre Rechnung.

28. Geben Sie eine möglichst große Definitionsmenge $D \subset \mathbb{R}$ an, auf der die reelle Funktion $f: D \to \mathbb{R}$ durch $f(x) = \dfrac{x^2-1-|x+1|}{x+1}$ definiert werden kann. Berechnen Sie:

$$\lim_{x\to 0} f(x), \quad \lim_{x\to 5^-} f(x), \quad \lim_{x\to \infty} f(x), \quad \lim_{x\to -\infty} f(x), \quad \lim_{x\to -1^+} f(x), \quad \lim_{x\to -1^-} f(x).$$

Skizzieren Sie den Graphen von f! Ist f auf ganz D stetig?

29. Geben Sie eine möglichst große Definitionsmenge $D \subset \mathbb{R}$ an, auf der die reelle Funktion $h: D \to \mathbb{R}$ durch $h(x) = \dfrac{x+2}{x^2-x-6}$ definiert werden kann. Berechnen Sie:

$$\lim_{x\to 0} h(x), \quad \lim_{x\to -2} h(x), \quad \lim_{x\to \infty} h(x).$$

Existiert $\lim_{x\to 3} h(x)$? Ist die Funktion h auf ganz D stetig?

30. Berechnen Sie gegebenenfalls folgende Grenzwerte

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2-3}{-x^2+5x+1}, \qquad \lim_{x\to -\infty} \frac{x-1}{x^3+x-1}, \qquad \lim_{x\to\infty} \frac{x^4-2x^2+1}{x^3+x^2+2}.$$