Höhere Mathematik I WS 2009 / 2010
Blatt 3 27.10.2009

13. Bestimmen Sie den (maximalen) Definitionsbereich der Funktionen

$$a)\quad x \to \sqrt{\frac{x-1}{x+2}}, \qquad b)\quad x \to \ln(\sin x), \qquad c)\quad x \to \frac{1}{1+\tan x}, \qquad d)\quad x \to \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}.$$

14. Gegeben seien die Funktionen f und g. Wie müssen Sie die Definitionsbereiche f und g wählen, sodaß die Verknüpfungen $f \circ g$ und $g \circ f$ sinnvoll definiert sind . Bestimmen Sie $g \circ f$ und $f \circ g$.

   (a) $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$, $\quad g(x) = \frac{1}{1+2x}$,

   (b) $f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$, $\quad g(x) = \frac{x}{x^2-1}$.

15. Bestimmen Sie bild f und gegebenenfalls die Umkehrfunktion für folgende Funktionen.

$$a)\quad x \to \frac{3x+2}{4-3x}, \qquad b)\quad x \to \frac{x}{|x|+1}.$$

16. Es sei $f(x) = \sqrt{x^2+x-2}$. Untersuchen Sie die Injektivität von f auf a) $(-\infty,-2] \cup [1,\infty)$, b) $(-\infty,-2]$, c) $[1,\infty)$ und geben Sie gegebenenfalls die Umkehrfunktion an.

17. Bestimmen Sie für folgende Funktionen jene Teilmengen des Definitionsbereichs, in denen sie (streng) monoton sind:

   (a) $f_1\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$, $f_1(x) = \sqrt{x}$,

   (b) $f_2\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_2(x) = \sqrt{x^2+x+1}$,

   (c) $f_3\colon \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$, $f_3(x) = \frac{2-x}{x-1}$,

   (d) $f_4\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_4(x) = \lfloor x \rfloor := \max\{k \in \mathbb{Z}\colon\ k \le x\}$ (d.h. die eindeutig bestimmte größte ganze Zahl kleiner oder gleich x).

18. Es sei $f(x) = x^2$, $x \in [-1,1]$, $a \neq 0$, $g_a\colon x \to x+a$, $h_a\colon x \to ax$. Skizzieren Sie die Graphen von $f \circ g_a$, $f \circ h_a$, $g_a \circ f$, $h_a \circ f$ und beschreiben Sie die Unterschiede dieser Graphen zum Graphen von f.