Höhere Mathematik I
Blatt 11 26.1.2010

Dieses Übungsblatt benötigt den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung. Informieren Sie sich gegebenenfalls auch über die Techniken der partiellen Integration (= Produktintegration) und Integration durch Substitution.

61. Bestimmen Sie jene Stammfunktion F von $x \to f(x) = 4x^3 - 2e^{-2x} + 3cos(\pi x)$, welche $F(0) = 1$ erfüllt.

62. Es sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig, die Funktionen φ, $\psi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ seien differenzierbar. Zeigen Sie:
$$\frac{d}{dx}\int_{\psi(x)}^{\varphi(x)} f(s)\ ds = f(\varphi(x))\varphi'(x) - f(\psi(x))\psi'(x).$$

63. Berechnen Sie
$$\text{a)}\ \frac{d}{dx}\int_0^{x^3} t\cos t\,dt, \qquad \text{b)}\ \int_0^3 \Big(\frac{d}{dx}\sqrt{4+x^2}\Big)dx.$$

64. Berechnen Sie folgende Integrale mit (gegebenenfalls wiederholter) partieller Integration:
$$\int x^3\ln(x)\,dx, \qquad \int_0^1 e^x\sin(\pi x)\,dx, \qquad \int x^3e^{-2x}\,dx.$$

65. Berechnen Sie folgende Integrale mit einer geeigneten Substitution:
$$\begin{array}{rlrl} i) & \int_0^1 \frac{t}{(4t^2+9)^2}dt, & ii) & \int t^2(5t^3+9)^{10}dt,\\ iii) & \int_0^1 \cos^2\frac{\pi}{2}x\sin\frac{\pi}{2}x\,dx, & iv) & \int_0^1 \frac{x+3}{\sqrt{x+1}}dx. \end{array}$$

66. Zu der Aufgabe:
Die Funktionen f und $g\colon(-\sigma,\sigma) \to \mathbb{R}$, $\sigma > 0$, seien differenzierbar und $f(0) = 0$. Ferner gelte $f(x)g(x) = x$ für alle $x \in (-\sigma,\sigma)$. Zeigen Sie, daß dann $g(0) \neq 0$ gelten muß.
wurde folgende Lösung vorgeschlagen:

Lösung. Aus $f(x)g(x) = x$ folgt $\lim_{x\to 0}(f'(x)g(x) + f(x)g'(x)) = 1$.
Also: $\lim_{x\to 0}(f'(x)g(x)) + \lim_{x\to 0}(f(x)g'(x)) = 1$
Also: $\lim_{x\to 0} f'(x)\lim_{x\to 0} g(x)+\lim_{x\to 0} f(x)\lim_{x\to 0} g'(x) = 1$. Daraus folgt $\lim_{x\to 0} f'(x)g(0)+ f(0)\lim_{x\to 0} g'(x) = 1$ und somit $\lim_{x\to 0} f'(x)g(0) = 1$. Da f differenzierbar ist, also $\lim_{x\to 0} f'(x) \neq \infty$ muß $g(0) \neq 0$ gelten. □

Ist diese Argumentation korrekt? Wenn nein, finden sie die Fehler.