

Höhere Mathematik I
Blatt 10 19.1.2010

55. Durch die Gleichung $y^3 - x^2 - 4 = 0$ wird implizit eine Funktion $x \rightarrow y(x)$ mit $y(2) = 2$ bestimmt. Berechnen Sie die erste und zweite Ableitung dieser Funktion in $x = 2$ auf zwei Arten (direkt und implizit).

56. Eine Handelskette hat erhoben, daß die Kosten K für die Bestellung und Lagerhaltung von x Einheiten einer Ware

$$K(x) = 2x + \frac{300000}{x}$$

betragen. Pro Bestellung kann der LKW höchstens 300 Einheiten der Ware liefern. Bei welcher Größe der Bestellung sind die Kosten minimal. Könnte man die Kosten reduzieren, wenn man einen LKW verwendet, der 400 Einheiten pro Bestellung zustellen kann.

57. Ein Architekt möchte ein Fenster entwerfen, das die Form eines Rechtecks hat, welchem ein Halbkreis aufgesetzt ist. Der Umfang der Fensteröffnung sollte 4 m betragen. Welche Abmessungen muß der Architekt wählen, damit der Lichteinfall maximal wird.

58. Führen Sie eine Kurvendiskussion für den Graph der Funktion $x \rightarrow \frac{1}{2}(\sqrt{x^2 + x + 1} + \sqrt{x^2 - x + 1})$ durch.

59. Führen Sie eine Kurvendiskussion für den Graph der Funktion $x \rightarrow \sqrt{|1 - x^2|}$ durch.

60. Sei $f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und differenzierbar auf $(0, \infty)$. Ferner gelte $f(0) = 0$ und f' sei (streng) monoton wachsend auf $(0, \infty)$. Zeigen Sie: Die Funktion $x \rightarrow \frac{f(x)}{x}$ ist (streng) monoton wachsend auf $(0, \infty)$.

(Hinweis: Kombinieren Sie den Mittelwertsatz mit einem geeigneten Kriterium für die Monotonie der Funktion $x \rightarrow \frac{f(x)}{x}$.)