Name: Matrikel:

Höhere Mathematik II

Klausur, 4.7.2007

1. Erklären sie den Begriff Reihe.
2. Formulieren sie das Wurzelkriterium für Reihen.
3. Formulieren sie den Satz von Taylor.
4. Berechnen Sie das Taylorpolynom $\mathcal{T}_2$ für $f(x) = \ln \sin x$ um $x_0 = \frac{\pi}{3}$ und geben Sie das Restglied $\mathcal{R}_3$ an.
5. Bestimmen sie den Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum_{j=0}^{\infty} \frac{j+1}{3^j} x^j$.
6. Gegeben seien die Vektoren a, b und $c \in \mathbb{R}^3$. Geben sie das Volumen des von den Vektoren a, b und c aufgespannten Parallelepipeds an.
7. Gegeben seien die Vektoren $a = (1, 0, -1)$, $b = (2, -1, 3)$. Geben sie den Flächeninhalt des von den Vektoren a und b aufgespannten Parallelogramms an.
8. Gegeben sei die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. Zeigen Sie, daß der Vektor $(-2, 1, 2)$ ein Eigenvektor von A ist. Was ist der zugehörige Eigenwert?
9. Durch den Gaußschen Algorithmus wurde ein lineares Gleichungssystem in die folgende äquivalente Staffelform übergeführt:

$$\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

   (a) Geben Sie die allgemeine Lösung des linearen Gleichungssystems an.
   (b) Geben Sie eine maximale Anzahl von linear unabhängigen Lösungen des homogenen Gleichungssystems an.
   (c) Wie groß ist die Dimension des Kerns der Koeffizientenmatrix.
   (d) Wie groß ist der Rang der erweiterten Matrix.

10. Wie stellt man fest, ob die Vektoren $x_1, \ldots, x_k \in \mathbb{R}^n$ linear abhängig sind?
11. Für $\mathbb{R}^3$ sind die beiden geordneten Basen

$$\mathcal{A} = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \right), \mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$$

   gegeben. Geben Sie die Basiswechselmatrix zum Basiswechsel von $\mathcal{A}$ zu $\mathcal{B}$ an (Es ist nicht notwendig, auftretende Matrizenprodukte oder Inversionen durchzuführen).