

Differentialgleichungen und Funktionentheorie für LAK SS 2014
5. Übungsblatt 11.4.2014

1. Es sei $y(\cdot)$ die Lösung des Anfangswertproblems

$$y'(x) = \frac{1}{2}(y^2 + x^2), \quad y(0) = 0.$$

- (a) Zeigen Sie, dass die Lösung auf dem Intervall $[0, 1]$ existiert und dort $|y(x)| \leq 1$ gilt.
- (b) Schreiben Sie das Euler Verfahren zur Berechnung der Lösung an den Stellen $x_i = \frac{i}{n}$, $i = 0, \dots, n$ und $n \in \mathbb{N}$, $n \gg 1$ auf.
- (c) Wie groß muß man n wählen, dass der kumulative Diskretisierungsfehler an jeder Stelle x_i kleiner ist als 0.0001.
Hinweis: Führen Sie die in der Fehleranalyse, welche in der Vorlesung durchgeführt wurde, benötigten Abschätzungen auf dem Rechteck $R = [0, 1] \times [-1, 1]$ aus.

2. Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$y'(x) = \frac{1}{2}(y^2 + x^2), \quad y(0) = 1.$$

Zeigen Sie: die Lösung φ hat eine vertikale Asymptote in x^* für ein $x^* \in [\frac{\pi}{4}, 1]$.
(Hinweis: $x^* \leq 1$ ergibt sich durch Integration der Ungleichung $\varphi'(x) \leq \varphi^2(x)$, $\varphi(0) = 1$; $x^* \geq \frac{\pi}{4}$ folgt durch Integration der Ungleichung $\varphi'(x) \leq 1 + \varphi^2(x)$, $0 \leq x \leq 1$.)