Differentialgleichungen und Funktionentheorie für LAK SS 2014
4. Übungsblatt 7.4.2014

1. Wir betrachte wieder das Anfangswertproblem

$$y'(x) = f(x, y(x)), \qquad y(x_0) = y_0.$$

   Es sei $f\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig und erfülle auf jedem vertikalen Streifen $[-a, a] \times \mathbb{R}$ eine Lipschitzbedingung in y, also

$$|f(x, y) - f(x, \tilde{y})| \leq \beta(x)|y - \tilde{y}|,$$

   wobei $\beta\colon [-a, a] \to \mathbb{R}$ eine stetige nichtnegative Funktion bezeichnet, welche von der Wahl von a (also des Streifens) abhängen kann. Zeigen Sie, dass die Lösung des Anfangswertproblems eindeutig ist und auf R existiert.

   (Hinweis: Zeigen Sie, dass die Lösung in jedem Streifen $[-a, a] \times \mathbb{R}$ beschränkt ist, solange sie existiert. Eine Schranke für die Lösung erhalten Sie aus der Darstellung

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, y_0)\, ds + \int_{x_0}^{x} (f(s, y(s)) - f(s, y_0))\, ds.$$

2. Zeigen Sie mit Beispiel 1, dass die Lösung des Anfangswertproblems

$$y'(x) = \frac{y^3 e^x}{1 + y^2} + x \sin y, \qquad y(x_0) = y_0$$

   auf R existiert.

3. Skizzieren sie das Richtungsfeld für folgende Differentialgleichungen. Können sie den Verlauf der Lösungen erkennen?

   (a) $y'(x) = y - y^2$,

   (b) $y'(x) = 2xy + x$