Proseminar
Numerische Mathematik für LAK
Blatt 8 22.6.2006

36. Zeigen Sie, dass die *Trapezregel*

$$T(f) = \frac{b-a}{2}\big(f(a) + f(b)\big) \tag{1}$$

jede lineare und die *Simpson-Regel*

$$S(f) = \frac{b-a}{6}\Big(f(a) + 4f\Big(\frac{a+b}{2}\Big) + f(b)\Big) \tag{2}$$

jedes kubische Polynom exakt integriert.

37. Wenden Sie die *Rechteckregel*

$$R(f) = (b-a)f(a),$$

die *Mittelpunktsregel*

$$M(f) = (b-a)f\Big(\frac{a+b}{2}\Big),$$

die Trapezregel (1) und die Simpsonregel (2) über dem Intervall $[0, \frac{1}{2}]$ auf die Funktion $f(x) = x^4$ an. Vergleichen Sie den tatsächlich erhaltenen Fehler bei diesen Näherungen mit den theoretisch Resultaten:

$$\begin{aligned}
|E_R| &\le \frac{\|f'\|_\infty}{2}\,(b-a)^2,\\
|E_M| &\le \frac{\|f''\|_\infty}{24}\,(b-a)^3,\\
|E_T| &\le \frac{\|f''\|_\infty}{12}\,(b-a)^3,\\
|E_S| &\le \frac{\|f^{(iv)}\|_\infty}{2880}\,(b-a)^5.
\end{aligned}$$

38. Um die Genauigkeit der numerischen Integration zu verbessern, unterteilt man das Integrationsintervall in kleinere Teilintervalle und wendet auf jedes Teilintervall die Quadraturformel an. Der Einfachheit halber betrachten wir eine äquidistante Unterteilung des Integrationsbereiches $[a, b]$ und bezeichnen mit n die Anzahl der Teilintervalle, welche dann die Länge $h = \frac{b-a}{n}$ haben. Ferner sei $T_i(f)$ die Trapezregel auf dem i-ten Teilintervall. Implementieren Sie die *zusammengesetzte Trapezregel*

$$\mathcal{T}_n(f) = \sum_{i=1}^{n} T_i(f).$$

39. Berechnen Sie mit Hilfe der zusammengesetzte Trapezregel folgende Integrale

$$\int_0^1 e^{-x^2}\, dx \doteq 0.74682413281234,$$

$$\int_0^1 \sqrt{x}\, dx = \frac{2}{3},$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{dx}{2 + cosx} = \frac{2\pi}{\sqrt{2}}.$$

für $n = 2, \ldots, 256$ und untersuchen Sie numerisch die Konvergenzrate.

40. Zeigen Sie, daß für $f \in C^2([a, b])$ der Quadraturfehler bei der Trapezregel gegeben ist durch

$$\int_a^b f(x)\, dx - T(f) = -\frac{h^3}{12} f''(c)$$

für ein $c \in [a, b]$. Zeigen Sie ferner für die zusammengesetzte Trapezregel folgende Darstellung des Quadraturfehlers

$$\int_a^b f(x)\, dx - \mathcal{T}_n(f) = -\frac{h^2}{12}(b - a) f''(c).$$

Hinweis: Verwenden Sie im 1. Teil die Fehlerformel für lineare Interpolation und den Mittelwertsatz der Integralrechnung.