Proseminar
Numerische Mathematik für LAK
Blatt 6 17.5.2006

26. Zeigen Sie folgenden Aussagen:
    (a) Produkte von unteren (oberen) Dreiecksmatrizen sind untere (obere) Dreiecksmatrizen.
    (b) Inverse von regulären unteren (oberen) Dreiecksmatrizen sind untere (obere) Dreiecksmatrizen.

27. Es sei L_i die Frobenius Matrix

$$L_i = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & -l_{i+1,i} & 1 & & \\ & & \vdots & & \ddots & \\ & & -l_{n,i} & & & 1 \end{pmatrix}, \quad i = 1, \ldots, n-1.$$

Zeigen sie folgende Aussagen:

(a) Die Inverse von L_i erhält man, indem man die Vorzeichen der Matrixelemente außerhalb der Hauptdiagonalen umkehrt.

(b) Für das Produkt von L_i^{-1} gilt

$$L_1^{-1} \ldots L_{n-1}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ l_{2,1} & 1 & & & \\ l_{3,1} & l_{3,2} & 1 & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \\ l_{n,1} & l_{n,2} & \ldots & l_{n,n-1} & 1 \end{pmatrix}$$

28. Es sei A eine reguläre Matrix mit zwei Zerlegungen $A = LU = \hat{L}\hat{U}$, wobei L und $\hat{L}$ untere Dreiecksmatrizen mit Einesen auf der Hauptdiagonalen und U und $\hat{U}$ obere Dreiecksmatrizen sind. Zeigen Sie $\hat{L} = L$ und $\hat{U} = U$. Gilt diese Behauptung auch, wenn man auf die Normierung der Haupdiagonale von L verzichtet?

29. Ein lineares Gleichungssystems $Ax = b$ mit tridiagonaler Matrix A wird effizient folgendermaßen gelöst: Zuerst berechne man die LU-Faktorisierung von $A = LU$

$$\begin{pmatrix} b_1 & c_1 & & & \\ a_2 & b_2 & c_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & a_{n-1} & b_{n-1} & c_{n-1} \\ & & & a_n & b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ \alpha_2 & 1 & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & \alpha_{n-1} & 1 & \\ & & & \alpha_n & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 & c_1 & & & \\ & \beta_2 & c_2 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \beta_{n-1} & c_{n-1} \\ & & & & \beta_n \end{pmatrix}$$

wobei

$$\begin{aligned}
&\beta_1 = b_1 \\
&\alpha_j = \frac{a_j}{\beta_{j-1}}, \qquad \beta_j = b_j - \alpha_j c_{j-1}, \qquad j = 2, \dots, n.
\end{aligned}$$

Die Lösung von $Ax = b$ ist mit $Ly = f$ und $Ux = y$ bestimmt durch

$$\begin{aligned}
y_1 &= f_1, \\
y_j &= f_j - \alpha_j y_{j-1}, \qquad && j = 2, 3, \dots, n \\
x_n &= \frac{y_n}{\beta_n}, \\
x_j &= \frac{y_j - c_j x_{j+1}}{\beta_j}, \qquad && j = n-1, \dots, 2, 1.
\end{aligned}$$

(a) Wenden Sie das Gauß Eliminations Verfahren auf die Tridiagonalmatrix A an und verifizieren Sie die angegebene LU-Zerlegung.

(b) Implementieren Sie das skizzierte Lösungsverfahren. Beenden Sie ihr Programm mit einer entsprechenden Warnung, wenn die LU Faktorisierung mit dem angegebenen Algorithmus nicht berechnet werden kann.

(c) Lösen Sie mit dem Algorithmus aus Beispiel 28 eines der Randwertprobleme von Blatt 5.

30. Implementieren Sie die Gauß Elimination ohne Pivotstrategie für eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Beenden Sie das Programm mit einer Warnung, wenn das Verfahren nicht durchführbar ist. Verwenden Sie möglichst wenige `for`-Schleifen.