

Proseminar
Numerische Mathematik für LAK
Blatt 5 5.5.2006

21. Diskretisieren Sie das Zweipunkt Randwertproblem

$$v'' + 2xv' - x^2v = x^2, \quad v(0) = 1, v(1) = 0,$$

mittels symmetrischer Differenzen und schreiben Sie für $h = \frac{1}{4}$ die resultierenden Differenzgleichungen explizit an.

22. Wiederholen sie Beispiel 21 unter Verwendung der "upwind" Approximation für v'

$$v'(x) = \begin{cases} \frac{1}{h}(v_{i+1} - v_i) & \text{falls } b_i < 0, \\ \frac{1}{h}(v_i - v_{i+1}) & \text{falls } b_i \geq 0. \end{cases}$$

Diese Definition bezieht sich auf die lineare Differentialgleichung 2. Ordnung

$$v''(x) = b(x)v'(x) + c(x)v(x) + d(x).$$

23. Wiederholen sie Beispiel 21 und 22 für die Randbedingungen $v'(0) = 1, v(1) = 0$ und dann für $v'(0) + v(0) = 1, v'(1) + \frac{1}{2}v(1) = 0$.
24. Implementieren sie die Verfahren aus Beispiel 21 - 23 und untersuchen Sie numerisch die jeweilige Konvergenzrate.
25. Leiten Sie die zentralen Differenzen Approximationen für v' und v'' mit Hilfe von Interpolationspolynomen her: es seien p und q Polynome vom Grad 1 bzw. 2, welche den Gleichungen $p(x \pm h) = v(x \pm h)$, bzw. $q(x) = v(x)$ und $q(x \pm h) = v(x \pm h)$ genügen. Die Approximationen sind durch $l'(x)$ bzw. $q''(x)$ gegeben.