Integral- und Differentialrechnung für USW

4. Übungsblatt 11. November 2015

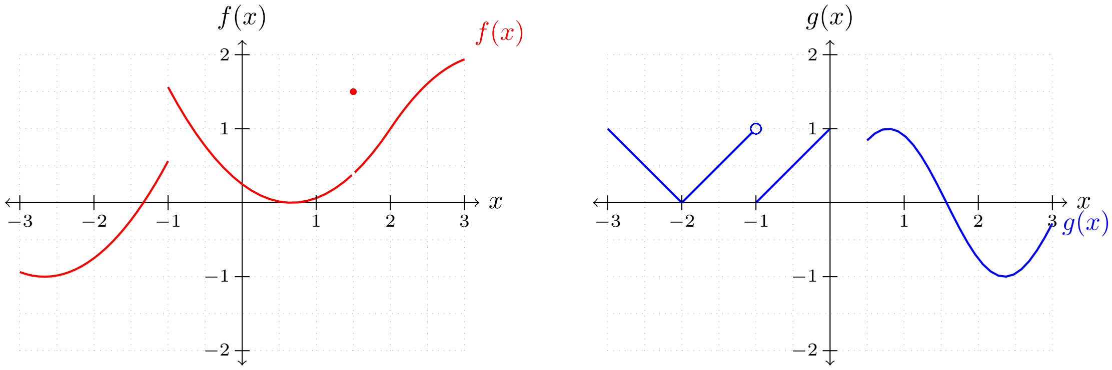
30. Existieren die folgenden Grenzwerte? Falls nicht, existieren die einseitigen uneigentlichen Grenzwerte?

a) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{3}{8-x^3}$ b) $\lim\limits_{x\to -4} \frac{x^3-x+1}{x^4+4x^3-x^2-3x+4}$

31. Argumentieren Sie (anhand der Definitionen von *Stetigkeit* und *Grenzwert*) in welchen Punkten die dargestellten Funktionen

$$f:[-3,3]\longrightarrow \mathbb{R} \text{ und } g:[-3,0]\cup\left(\frac{1}{2},3\right]\longrightarrow \mathbb{R}$$

nicht stetig sind, und an welchen Stellen der Grenzwert existiert.



32. *(Anwendung bzgl. Stetigkeit):* Für Kondensatoren gibt es den Ausdruck der *Sprungantwort der Kapazität.* Diese wird durch

$$i(t)=\begin{cases} 0 & \text{falls } -\infty<t<t_0 \\ l & \text{falls } t_0<t<\infty \end{cases}$$

beschrieben, wobei $l>0$ gilt. Argumentieren Sie ob die Funktion i stetig ist, bzw. ob für alle $t\in\mathbb{R}$ die Grenzwerte der Funktion existieren.

33. *(Anwendung bzgl. Grenzeigenschaften):* Der Gesamtwiderstand R einer Paralleschaltung (mit drei Einzelwiderständen) wird in der Elektrotechnik durch

$$\frac{1}{R}=\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}$$

beschrieben.

a) Formen Sie die Gleichung um, sodass der Gesamtwiderstand R als Funktion $R(R_1,R_2,R_3)$ geschrieben werden kann. (Vereinfachen Sie die Gleichung, sodass keine Doppelbrüche mehr vorkommen).

b) Bestimmen Sie den Defninitionsbereich der Funktion $R(R_1,R_2,R_3)$.

c) Berechnen Sie den Grenzwert $\lim\limits_{R_2\to\infty} R(R_1,R_2,R_3)$.
Interpretieren Sie was ein *unendlich* großer Widerstand in der Realität bedeutet (versuchen Sie sich an Ihre Schulphysik zu erinnern)!

d) Berechnen Sie den Grenzwert $\lim\limits_{R_3\to 0} R(R_1,R_2,R_3)$.
Interpretieren Sie was ein *unendlich* kleiner Widerstand in der Realität bedeutet (versuchen Sie sich an Ihre Schulphysik zu erinnern)!

34. Bestimmen Sie folgende Grenzwerte:

a) $\lim\limits_{x\to -2} \sqrt[6]{x^2 + \frac{723-x}{(x^4-15)}}$

b) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{1-\frac{1}{5+\sqrt{\left(\frac{9x^2-2}{(x+1)^2}\right)}}}$

Begründen Sie Ihre Rechnung! (Eine *Korrekte* Argumentation Ihrer Rechnung ist notwendig!)

35. Es seien $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Für ein $x_0 \in I$ gelte $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f_0$, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f_0$ und $|f_0| \neq 1$. Berechnen Sie

$$\lim_{x\to x_0} \frac{(1+f(x))(f(x)^3 - xf(x))}{1-f(x)^2}$$

und begründen Sie ihre Rechnung.

36. Entscheiden Sie für folgende Funktionen, ob Sie die Lücke(n) in deren Definitionsbereichen (eine möglichst große Teilmenge von $\mathbb{R}$) schließen können, sodass die fortgesetzten Funktionen stetig sind.

a) $f(x) = \frac{x+3}{x^2+x-6}$

b) $g(x) = \frac{1}{(x-1)(x+2)}$

c) $l(x) = \frac{x-3}{x^3-3x^2+x-3}$

37. Es seien die Funktionen $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig auf $\mathbb{R}$. Weiters sei bekannt, dass $f(2k\pi) = 0$ und $g((2k+1)\pi) = 0$ gilt für alle $k \in \mathbb{N}$ und dass es keine weiteren Nullstellen gibt. Begründen Sie ob fogende Funktionen stetig sind. Falls nicht, bestimmen Sie **alle** Punkte $x_0 \in \mathbb{R}$ an welchen die Funktionen unstetig sind.

a) $h(x) = (f \circ g)(x)$

b) $h(x) = \left(\frac{f}{g}\right)(x)$

c) $h(x) = \frac{1}{f(x)g(x)}$

d) $h(x) = \frac{1}{f(x)^2+g(x)^2}$

38. Bestimmen Sie folgende Grenzwerte und begründen Sie Ihre Rechnung.

$$\lim_{x\to 1} \sqrt{1+\frac{1}{2+x^2}}, \qquad \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{1+2x^2}}{\sqrt{x^2-3x+100}}$$

39. Wir betrachten die Funktion $h(x) = -4x^4 + 10x^2 - 3$.
   a) Zeigen Sie, dass die Funktion h im Intervall $[0,1]$ mindestends eine Nullstelle besitzt.
   b) Berechnen Sie **alle** Nullstellen der Funktion h.
   c) Verwenden Sie das Bisektionsverfahren, um eine Nullstelle im Intervall $[0,1]$ nachzurechnen. Führen Sie mindestends 3 Schritte des Verfahrens aus.
   d) Wie groß ist der Fehler Ihrer Nullstellenberechnung bzgl. x und bzgl. $h(x)$?

40. Argumentieren Sie warum die Funktionen $f(x) = x^3$ und $g(x) = \sqrt{x+2}$ mindestens einen Schnittpunkt $x \in [1,2]$ besitzen. (Das Argument soll **nicht** graphisch sein!!)

41. Wir betrachten die Funktion $f(x) = (x-1)(x+4)$.
   a) Stellen Sie die Funktion f graphisch dar.
   b) Stellen sie eine Funktion f_1 dar, deren Graph aus jenem von f durch Verschiebung um 2 Einheiten nach rechts entlang der x- Achse entsteht. Geben Sie die Abbildungsvorschrift von f_1 an.
   c) Stellen sie eine Funktion f_2 dar, deren Graph aus jenem von f durch die Spiegelung um die x-Achse entsteht. Geben Sie die Abbildungsvorschrift von f_2 an.
   d) Stellen sie eine Funktion f_3 dar, deren Graph aus jenem von f durch die Verdoppelung der Funktionswerte und durch anschließendes spiegeln um die y-Achse entsteht. Geben Sie die Abbildungsvorschrift von f_3 an.