Proseminar
Numerische Mathematik für LAK
Blatt 3 29.3.2006

11. Es seien L_i, $0 \le i \le n$, die zu den Stützstellen $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$ gehörenden Lagrange Polynome. Zeigen sie die Identität
$$\sum_{i=0}^{n} L_i = 1.$$

12. Berechnen sie die stückweise linearen, bzw. quadratisch interpolierende Funktion zu der folgenden Wertetabelle:

x	0	1/6	1/3	1/2	2/3	5/6	1
f	1	4	1	-1	2	4	0

Man berechne für den Interpolanten Fehlerschranken auf dem Intervall $[0, 1]$ unter der Voraussetzung, daß die Ableitungen von f die Ungleichungen $|f''(z)| \le 4$, $|f'''(z)| \le 10$ für $z \in [0, 1]$ erfüllen.

13. Betrachten Sie folgenden Ausschnitt aus einer Wertetabelle der Exponentialfunktion

x	e^x
.80	2.225541
.81	2.247908
.82	2.270500
.83	2.293319
⋮	⋮
.90	2.459603

Bestimmen Sie eine quadratische Interpolation für $e^{0.826}$. Bestimmen Sie eine möglichst scharfe Schranke für den Interpolationsfehler. Wie groß kann dieser höchstens auf dem Intervall $[0.8, 0.9]$ werden?

14. Der Interpolationsfehler ist gegeben durch $f(x) - I_n(x) = \Psi_n(x)\frac{f^{(n+1)}(\xi_x)}{(n+1)!}$ mit
$$\Psi_n(x) = (x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_n).$$
Schreiben Sie eine MATLAB Routine, welche für eine beliebige Wahl von Stützstellen das Polynom Ψ_n graphisch darstellt. Betrachten Sie speziell $x_i = i$, $0 \le i \le n$, für $n = 3, \ldots 8$. Interpretieren Sie Ihre Beobachtung.
Tip: MATLAB stellt spezielle Routinen für Polynome zur Verfügung. Informieren Sie sich mit `help polyfun`

15. Interpolieren Sie $e^{0.25}$ linear über den Stützstellen $x_0 = 0$ und $x_1 = 0.5$, ebenso $e^{0.75}$ mit $x_0 = 0.5$ und $x_1 = 1$. Interpolieren Sie $e^{0.25}$ und $e^{0.75}$ quadratisch über den Stützstellen $x_0 = 0$, $x_1 = 1$ und $x_2 = 2$. Welche Approximationen sind besser? Warum?

x	0	0.5	1.0	2.0
e^x	1.00000	1.64872	2.71828	7.38906