

Integral- und Differentialrechnung für USW

3. Übungsblatt

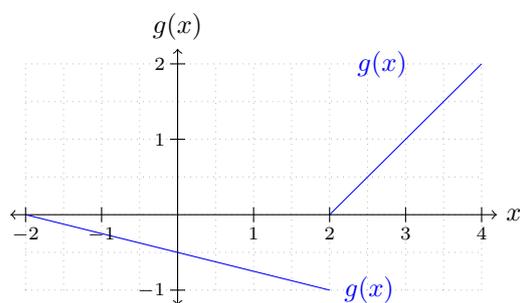
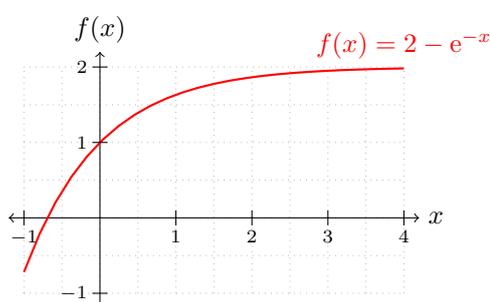
21. Oktober 2015

1. Wir betrachten die Funktion

$$f: \begin{cases} D & \rightarrow W \\ x & \mapsto \sqrt{(x-3)^2 + 4} \end{cases}$$

Für welchen der folgenden Fälle kann die Umkehrfunktion bestimmt werden? Bestimmen Sie gegebenenfalls f^{-1} .

- $D = [3, \infty)$ und $W = [2, \infty)$.
 - $D = (-\infty, 3]$ und $W = [2, \infty)$.
 - $D = [-5, 5]$ und $W = [2, \sqrt{68}]$.
 - $D = \{-5, 5, 0, -2, 2\}$ und $W = \{\sqrt{5}, \sqrt{8}, \sqrt{13}, \sqrt{29}, \sqrt{68}\}$
2. Wir betrachten folgende dargestellte Funktionen:



Wobei wir für f den Definitionsbereich $D_f = \mathbb{R}$ und den Wertebereich $W_f = (-\infty, 2)$, und für g den Definitionsbereich $D_g = [-2, 4]$ und den Wertebereich $W_g = [-1, 2]$ annehmen.

- Zeichnen Sie die Umkehrfunktion für zur Funktion f .
 - Stellen Sie die Funktionsgleichung für g auf, berechnen **und** zeichnen Sie die Umkehrfunktion zur Funktion g .
3. Bestimmen Sie folgende Grenzwerte:

- $\lim_{x \rightarrow 2} (4x^2 - 2x + 1)$
- $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{4x^3 + 12x^2 - 15x + 4}{4x^2 - 4x + 1}$
- $\lim_{x \rightarrow -1} \left((x+1) \left(4 - \frac{2}{x^2 - 1} \right) \right)$

(Tipp: Erinnern Sie sich an die Polynomdivision!)

4. Bestimmen Sie folgende (möglicherweise uneigentliche) Grenzwerte:

- $\lim_{x \rightarrow \infty} (x-2)(4-x)$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{16x-2}{-x^2+3x-6}$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^4 + x^3 - 7}{2(x^2-1)(x^2+1)}$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{1-x^2} \left(1 + \frac{5x+1}{10x-3} \right)$

5. Gegeben sei folgende Funktion:

$$f(x) = \begin{cases} (x-a)^2 & \text{für } x < 1 \\ a \cdot x + 5 & \text{für } x \geq 1 \end{cases} .$$

Bestimmen Sie **alle** möglichen Lösungen $a \in \mathbb{R}$, sodass f stetig ist.

6. Verwenden Sie Argumente aus der Vorlesung um zu begründen, dass die Funktionen $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \sqrt{2(x+1)^2 + e^{4+\cos(x)}}, \quad g(x) = \frac{\cos(x) + |x^2 - 1| - x \cdot \sin(x)}{\sin(x) - 1,25}$$

stetig sind. (Sie sollen dabei die Stetigkeit der beteiligten elementaren Funktionen verwenden.)

7. Skizzieren Sie **eine** Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ die **alle** folgenden Eigenschaften besitzt:

- monoton
- $f(-3) = 4$
- $f(0) = 4$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} = -2$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} = 6$
- $\lim_{x \rightarrow -4^-} = 0$
- $\lim_{x \rightarrow -4^+} = 1$

8. Bei der Osmose zwischen zwei Zellkammern wird der Verlauf der Zuckerkonzentration durch die Funktion

$$z(t) = \frac{7t - 2}{4 + 3t}$$

beschrieben.

Bestimmen Sie die *Gleichgewichts - Konzentration* $z^* = \lim_{t \rightarrow \infty} z(t)$. Berechnen Sie den Zeitpunkt, an welchem die Abweichung vom Gleichgewichtszustand weniger als 5% beträgt.