Integral- und Differentialrechnung für USW

2. Übungsblatt 14. Oktober 2015

1. Es seien $x = 2 \cdot 3i$, $y = 4 - 3i$ und $z = -2 + 3i$ komplexe Zahlen.
   a) Bestimmen Sie folgende komplexe Zahlen: $x + y$ und $x \cdot y$
   b) Bestimmen Sie folgende komplexe Zahl: $\dfrac{z}{\overline{y}}$
   c) Bestimmen Sie folgende reelle Zahlen: $\Re(x)$ (... Realteil) und $\Im\left(\dfrac{1}{y}\right)$ (... Imaginärteil)

   (Hinweis: Eine komplexe Zahl ist genau dann bestimmt, wenn Realteil und Imaginärteil bestimmt sind.)

2. Betrachte:
$$f : \begin{cases} \{0,2\} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ \qquad x & \longmapsto 2x \end{cases} \qquad\qquad g : \begin{cases} \{0,2\} & \longrightarrow \{0,4\} \\ \qquad x & \longmapsto x^2 \end{cases}$$
   Sind die Funktionen f und g gleich?
   (Hinweis: Für *gleich* müssen Sie die Eigenschaften aus der VO, bzw. dem Skript, nachrechnen. Für *ungleich* genügt ein Gegenargument.)

3. Es seien
$$f : \begin{cases} A \longrightarrow B \\ f(x) = (x-1)^4 \end{cases} \qquad\qquad g : \begin{cases} C \to D \\ g(x) = x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1 \end{cases}$$
   In welchen der folgenden Fälle sind die Funktionen f und g gleich?
   a) Sei $A = C = \{-8, 1, 3, 6\}$ und $B = D = \mathbb{R}$.
   b) Sei $A = C = [0, \infty)$, $B = \mathbb{R}$ und $D = [0, \infty)$.
   c) Sei $A = \mathbb{R}$, $C = [0, \infty)$ und $B = D = \mathbb{R}$.

4. Bestimmen Sie den maximalen Definitionsbereich $D(g) \subset \mathbb{R}$, sodass das Bild eine reelle Zahl ist, für die folgenden Funktionen:
   a) $g(x) = \sqrt{4x - 2}$ b) $g(x) = \dfrac{1}{\ln(x - 12)}$ c) $g(x) = \sqrt{x^2 + 3x - 5} + 2x^2$.

5. Es sei $f : D \longrightarrow W$ mit $f(x) = \frac{3}{8 - x^3}$.
   a) Ist die Wahl $D = [0, \infty)$ und $W = \mathbb{R}$ sinnvoll? Falls *ja*, finden Sie eine Zahl in $\mathbb{R} \setminus D$ welche **nicht** im Definitionsbereich sein darf. Falls *nicht*, wie müsste man D oder W ändern damit die Wahl richtig ist? (Wobei D möglichst groß und eine Teilmenge von $[0, \infty)$ sein soll!)
   b) Bestimmen Sie das Bild $f(D) \subset W$ (mit D, W wie in (5a) gewählt).

6. Es seien $\lambda = -1$ und
$$f : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto x^2 - 8 \end{cases}, \qquad g : \begin{cases} \mathbb{R} \setminus \{1\} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ \qquad x & \longmapsto \frac{1}{x^2 - 1} \end{cases}.$$
   Bestimmen Sie die Funktionen λf, λg, $g + f$ sowie $\frac{\lambda f}{g}$ (also Definitionsbereich, Wertebereich sowie die explizite Darstellung abhängig von x) UND bestimmen Sie den Wert an der Stelle $x = 2$.

7. Zeichnen Sie die Graphen dreier Funktionen $h_1, h_2, h_3 : [0, 10] \to [-\pi, 3 \cdot e]$, sodass
   - h_1 bijektiv
   - h_2 injektiv, jedoch nicht surjektiv
   - h_3 weder surjektiv noch injektiv ist.

8. Untersuchen Sie ob die Funktionen *injektiv*, *surjektiv* oder *bijektiv* sind.

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto x^2 + 2x - 3 \end{cases}, \qquad g : \begin{cases} [1, \infty) & \longrightarrow [0, \infty) \\ x & \longmapsto x^2 + 2x - 3 \end{cases}$$

9. Es seien $\Omega = \{-7, -3, 4, 5, 6\}$, $\Gamma = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \xi\}$ und $\Lambda = \{A, B, C, D, E, F, G\}$. Weiters seien $f : \Omega \longrightarrow \Gamma$ und $g : \Gamma \longrightarrow \Lambda$ zwei Funktionen die durch folgende Tabellen gegeben sind:

f

x	-3	4	5	6	-7
$f(x)$	δ	γ	α	ξ	β

g

x	α	β	γ	δ	ε	ξ
$g(x)$	G	A	C	F	F	B

   a) Falls möglich, bestimmen Sie eine Tabelle für die zusammengesetzten Funktionen $f \circ g$ und $g \circ f$.

   b) Sind $f \circ g$ und $g \circ f$ (falls diese existieren) *injektiv*, *surjektiv* oder sogar *bijektiv*?

10. Ein *Hobbyzüchter* arbeitet mit $H = \{h_1, h_2, \dots h_{30}\}$ Hamster. Er versucht so viel Energie wie möglich aus den Hamsterrädern herauszuholen. Dazu schreibt der Züchter mit wieviel Futter die Hamster pro Tag fressen, und bezeichnet dies (in Gramm) mit $F = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots 50\}$. Für die nähere Berechnung führt er zwei Funktionen ein:

$$f : \begin{cases} H & \longrightarrow F \\ h & \longmapsto f(h) \end{cases} \qquad \text{und} \qquad g : \begin{cases} \{x \in \mathbb{N} | x \geq 10\} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto \sqrt{x - 10} \end{cases}$$

Er stellt fest, dass sich die Energie, welche ein Hamster abhängig von der verbrauchten Futtermenge produziert, durch die Funktion g berechnen lässt. f beschreibt hierbei wieviel Futter ein Hamster pro Tag frisst.
Nur die Hamster h_2 und h_6 fressen weniger als 10 Gramm pro Tag. Bestimmen Sie die Komposition der Funktionen $g \circ f$ mit einem geeigneten Definitions und Wertebereich, sodass sich die Energieproduktion des jeweiligen Hamsters berechnen lässt. (Hinweis: $f(h)$ ist eine *Zahl* in F, wenn Sie die Komposition bilden können Sie *einfach* $f(h)$ als die entsprechende Variable einsetzten.)

11. Geben Sie für zwei Funktionen $f, g : D \longrightarrow W$ den jeweils maximalen Definitionsbereich an und bestimmen Sie den Definitionsbereich der Hintereinanderausführung $f \circ g$ und $g \circ f$.

   a) $f(x) = x - 3 - \sqrt{x^2 - 8}$ und $g(x) = x - 3$.

   b) $f(x) = \frac{1}{x^2}$ und $g(x) = \frac{1}{1-2x}$.

12. Es seien $D, W \subseteq \mathbb{R}$. Bestimmen Sie für folgende Funktionen einen passenden, möglichst großen, Definitionsbereich D und das Bild W. Untersuchen Sie ob die Funktionen *injektiv*, *surjektiv* oder *bijektiv* sind und bestimmen Sie gegebenenfalls die Umkehrfunktionen f^{-1} und g^{-1}.

$$f : \begin{cases} D & \longrightarrow W \\ x & \longmapsto (3 - x)^3 - 4 \end{cases}, \qquad g : \begin{cases} D & \longrightarrow W \\ x & \longmapsto \frac{2x+1}{x+2} \end{cases}$$