Proseminar
Numerische Mathematik für LAK
Blatt 2 21.3.2006

6. Es sei $A\colon \mathbb{C}^{n\times n}$ und $||\cdot||\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$ eine Norm in $\mathbb{C}^n$. Zeigen Sie, daß durch

$$|||A||| \stackrel{def}{=} \max_{||x||\leq 1} ||Ax||$$

eine Norm in $\mathbb{C}^{n\times n}$ definiert wird. Man nennt $|||\cdot|||$ Matrixnorm, genauer: die durch die Vektornorm $||\cdot||$ induzierte Matrixnorm.

7. Zeigen Sie, daß die durch die Vektornorm $||\cdot||$ induzierte Matrixnorm $|||\cdot|||$ auch gegeben ist durch

$$|||A||| = \max_{||x||=1} ||Ax|| = \max_{x\neq 0} \frac{||Ax||}{||x||}.$$

8. Zeigen Sie folgende Aussagen:
   (a) Jede induzierte Matrixnorm ist mit der zugrunde liegenden Vektornorm verträglich, d.h. es gilt
   $$||Ax|| \leq |||A|||\cdot||x||, \qquad x\in\mathbb{C}^n.$$
   (b) $|||AB||| \leq |||A|||\cdot|||B|||$.

9. Die Norm $||x||_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$ in $\mathbb{C}^n$ induziert in $\mathbb{C}^{n\times n}$ die Norm

$$||A|| = \max_{1\leq j\leq n} \sum_{i=1}^n |A_{ij}|.$$

10. Die Abbildung $||\cdot||_F\colon \mathbb{C}^{n\times n}\to\mathbb{R}^+$ sei gegeben durch $||A||_F = (\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |A_{ij}|^2)^{1/2}$. Zeigen Sie folgende Aussagen:
   (a) $||\cdot||_F$ ist eine Norm, die Frobenius Norm, auf $\mathbb{C}^{n\times n}$.
   (b) Die Frobenius Norm ist verträglich mit der euklidischen Norm $||\cdot||_2$ in $\mathbb{C}^n$, d.h. es gilt für alle $x\in\mathbb{C}^n$
   $$||Ax||_2 \leq ||A||_F||x||_2.$$
   (c) Gibt es in $\mathbb{C}^n$ eine Norm, welche die Frobeniusnorm induziert? (Hinweis: Betrachten Sie die Norm der Einheitsmatrix)