Proseminar
Numerische Mathematik für LAK
Blatt 1 Lösungen

5.) Zeigen Sie, daß das Verfahren

$$y_{k+1} = y_k + hf(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{h}{2} f(x_k, y_k)), \qquad k \in \mathbb{N}_0$$

von zweiter Ordnung ist (Mittelpunktsregel).

Lösung. Es handelt sich um ein Einschrittverfahren mit

$$\phi(x, y) = f(x + \frac{h}{2}, y + \frac{h}{2} f(x, y)), \qquad x \in [a, b].$$

Somit ist der lokale Diskretisierungsfehler gegeben durch

$$L(x, h) = \frac{1}{h}(y(x + h) - y(x)) - \phi(x, y(x)).$$

Wir notieren folgende Formeln, die sich aus dem Satz von Taylor und der Kettenregel ergeben:

$$\begin{aligned} y(x + h) &= y(x) + hy'(x) + \frac{h^2}{2} y''(x) + \frac{h^3}{6} y'''(\xi), \\ y'(x) &= f(x, y(x)), \\ y''(x) &= f_x + f_y y' = f_x + f f_y \end{aligned}$$

Weiters machen wir folgende Annahme

$$M_0 = \sup_{x\in[a,b]} |y'''(x)| < \infty, \qquad M_1 = \sup_{x\in[a,b],y\in\mathbb{R}} |f_y(x, y)| < \infty \qquad M_2 = \sup_{x\in[a,b],y\in\mathbb{R}} ||\mathcal{H}_f(x, y)||_2 < \infty,$$

wobei $\mathcal{H}_f(x, y)$ die Hesse Matrix von f an der Stelle (x, y) bezeichnet. Dann erhalten wir für den lokalen Diskretisierungsfehler

$$\begin{aligned} L(x, h) &= f(x, y(x)) - f(x + \frac{h}{2}, y(x) + \frac{h}{2} f(x, y(x)) - \frac{h}{2}\ y''(x) + \frac{h^2}{6} y'''(\xi) \\ &= -\frac{h}{2} \underbrace{(f_x + f f_y - y'')}_{=0} + \frac{h^2}{6} y'''(\xi) - \frac{1}{2}(\frac{h}{2}, \frac{h}{2} f)\mathcal{H}_f(\xi, \eta) \begin{pmatrix} \frac{h}{2} \\ \frac{h}{2} f \end{pmatrix} \end{aligned}$$

mit einer Zwischenstelle (ξ, η). Somit

$$\begin{aligned} L(h) &\stackrel{def}{=} \max_{x\in[a,b]} |L(x, h)| \le h^2(\frac{1}{6} M_0 + \frac{1}{8} \max ||\mathcal{H}_f||\, ||(1, f)||^2) \\ &\le h^2(\frac{1}{6} M_0 + \frac{1}{8} M_2(1 + |f(\cdot, y(\cdot)))|^2) \equiv h^2 M. \end{aligned}$$

Wir schätzen nun den globalen Fehler ab und bezeichnen mit

$$e_k = y(x_k) - y_k$$

den Fehler im k-ten Schritt, somit

$$\begin{aligned} e_{k+1} &= y(x_{k+1}) - y_{k+1} \\ &= y(x_k) + h\phi(x_k, y(x_k)) + hL(x_k, h) - y_k - h\phi(x_k, y_k) \\ &= e_k + h(\phi(x_k, y(x_k)) - \phi(x_k, y_k)) + hL(x_k, h). \end{aligned}$$

Mit Hilfe des Satzes von Taylor finden wir

$$
\begin{aligned}
\phi(x_k, y(x_k)) - \phi(x_k, y_k)) &= f(x_k + \frac{h}{2}, y(x_k) + \frac{h}{2} f(x_k, y(x_k)) - f(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{h}{2} f(x_k, y_k)) \\
&= f_y(x_k + \frac{h}{2}, y_k^*)\,(y(x_k) - y_k + \frac{h}{2}(f(x_k, y(x_k)) - f(x_k, y_k)) \\
&= f_y(x_k + \frac{h}{2}, y_k^*)\,(e_k + \frac{h}{2} f_y(x_k, y_k^{**}) e_k)) \\
&= f_y(x_k + \frac{h}{2}, y_k^*)\,(1 + \frac{h}{2} f_y(x_k, y_k^{**})) e_k
\end{aligned}
$$

und somit

$$
|\phi(x_k, y(x_k)) - \phi(x_k, y_k))| \leq M_1(1 + \frac{h}{2} M_1)|e_k| \leq M_3 |e_k|
$$

Insgesamt erhalten wir

$$
\begin{aligned}
|e_{k+1} &\leq |e_k| + h|\phi(x_k, y(x_k)) - \phi(x_k, y_k))| + hL(h) \\
&\leq (1 + hM_3)|e_k| + hL(h).
\end{aligned}
$$

Wie in der Vorlesung ergibt sich daraus

$$
|e_k| \leq \frac{e^{khM_3}}{M_3} L(h) \leq \frac{e^{khM_3}}{M_3} M h^2.
$$

□