Analysis I

Gunther H. Peichl

Skriptum zur Vorlesung im SS 2008

Institut für Mathematik
Karl–Franzens–Universität Graz

Das vorliegende Skriptum zu den Vorlesungen Analysis I, II im Studienjahr 1994/95 soll dem Studienanfänger das Aneignen der Grundbegriffe erleichtern. Aus diesem Grunde sind die meisten Beweise sehr detailliert dargestellt, da man auch „einfache“ Argumentationen einmal gesehen haben muß, um sie dann selbst anwenden zu können. Der Leser sei daher aufgefordert, sich von der Gültigkeit von Ergebnissen zu überzeugen, deren Beweise mit dem Hinweis auf analoge Situationen erledigt wurden. Eindringlich wird auch vor einer bloß passiven Auseinandersetzung mit dem Stoff gewarnt: Mathematik Lernen heißt „learning by doing“. Daher kann und soll dieses Skriptum auch nicht den Blick in ein Lehrbuch ersetzen. Als Hilfe für die Gewichtung der Bedeutung der Resultate wurde die übliche Gruppierung in Satz – Lemma – Korollar (= Folgerung) beibehalten.
An dieser Stelle möchte ich Dr. W. Prager und Dr. G. Propst für zahlreiche Diskusssionen und insbesondere für das mühsame Korrekturlesen des Skriptums danken. Ich ersuche um Mitteilung von Fehlern, Irrtümern und Unklarheiten, welche mir unterlaufen sind. Mein besonderer Dank gilt Fr. Krois für die perfekte Erstellung der TEX–Version des Skriptums.

Mai 1995

Ich möchte Herrn Dr. Prager für die neuerliche genaue Durchsicht des Textes und für zahlreiche Verbesserungsvorschläge danken.

November 2002

Auch in diesem Semester habe ich mich am bisherigen Aufbau der Analysis orientiert und vorerst die wesentlichen Konzepte der Analysis für Funktionen in einer Veränderlichen im Wesentlichen aus der axiomatischen Beschreibung der reellen Zahlen abgeleitet. Aus Zeitgründen war es mir nicht möglich, auch die Differentialrechnung zu begründen. An Stelle dessen habe ich den abstrakten Rahmen für die multivariate Analysis vorbereitet. Im Gegensatz zu meiner bisherigen Lehrveranstaltung habe ich dafür konsequent den Rahmen normierter Räume gewählt und auf die Einführung metrischer Räume verzichtet. Die Analysis II wird auf diesen Grundlagen aufbauen. Da das Skriptum noch "work in progressïst, ersuche ich um Nachsicht für mögliche Irrtümer, Druckfehler und sonstige Unklarheiten und bitte, diese mir mitzuteilen.

Juni 2008

KAPITEL i

Begriffe der Logik und Mengenlehre

In den ersten Abschnitten dieses Kapitels wird ein Formalismus vorgestellt, der es ermöglicht, mathematische Zusammenhänge präzise und kompakt so zu formulieren, daß deren logische Struktur besonders klar hervortritt. Wir beschränken uns dabei auf einige grundlegende Begriffe der Aussagen- und Prädikatenlogik, bzw. der Mengenlehre, für eine strenge Einführung in diese Theorien sei auf die angegebene Literatur verwiesen. Bei manchen Beispielen setzen wir, jedoch nur in diesem Kapitel, Kenntnisse der üblichen Schulmathematik voraus.

1. Aussagenlogik

Eine **Aussage** beschreibt einen Sachverhalt, von dem es sinnvoll ist zu fragen, ob er zutrifft oder nicht. Eine Aussage ist entweder wahr oder falsch, aber nicht beides zugleich. Für die Eigenschaft eine Aussage zu sein, ist es belanglos, ob wir den Wahrheitsgehalt einer Aussage tatsächlich kennen oder entscheiden können. Etwa sind „*Wien ist die Hauptstadt Österreichs*“, „*11 ist eine Primzahl* “ wahre Aussagen, „*Alle Menschen sind gleich groß* “, „$5 < 4$“ sind falsche Aussagen. „*Jede gerade Zahl* ≥ 4 *ist die Summe zweier Primzahlen*“ ist ein Beispiel für eine Aussage, deren Wahrheitswert noch nicht bekannt ist. „$x < 5$“ ist keine Aussage, wenn nicht feststeht, welches Objekt mit x gemeint ist.
In der Umgangssprache ändern wir oft Sätze, etwa durch Verneinen, oder verbinden mehrere Sätze zu neuen. Dies ist auch bei Aussagen möglich.

Definition 1.1. *Für Aussagen p und q definieren wir folgende logische Verknüpfungen.*

***Konjunktion**:* *p und q, $p \wedge q$*
trifft zu, falls beide Aussagen wahr sind.

***Disjunktion**:* *p oder q, $p \vee q$*
trifft zu, falls mindestens eine der beiden Aussagen wahr ist.

***Implikation**:* *wenn p, dann q, $p \Rightarrow q$*
trifft zu, falls p und q wahr sind, oder falls p falsch ist.

***Äquivalenz**:* *p genau dann, wenn q, $p \Leftrightarrow q$*
trifft zu, falls p und q denselben Wahrheitswert besitzen.

***Negation**:* *non p, $\neg p$*
trifft zu, falls p falsch ist.

Wir fassen diese Definition in einer **Wahrheitstafel** zusammen:

p	q	$\neg p$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \Rightarrow q$	$p \Leftrightarrow q$
w	w	f	w	w	w	w
w	f	f	f	w	f	f
f	w	w	f	w	w	f
f	f	w	f	f	w	w

In der Logik wird also „p oder q" nicht im Sinne einer Alternative, d.h. es kann *entweder* nur p, *oder* nur q zutreffen, gebraucht, sondern es ist durchaus die Möglichkeit zugelassen, daß beide Aussagen p und q gelten.
Es mag merkwürdig erscheinen, daß „$p \Rightarrow q$" für beliebiges q wahr gesetzt wurde, falls p falsch ist (ex falso quodlibet). Dies steht nicht unbedingt im Gegensatz zum alltäglichen Gebrauch von „wenn ..., dann ...". Betrachten wir folgende Aussage von Hans: „Wenn die Sonne scheint (p), gehe ich spazieren (q)". Nur in jenem Falle, daß tatsächlich die Sonne scheint, Hans aber nicht spazieren geht, werden wir sagen, Hans habe gelogen. Unternimmt Hans um Mitternacht einen Spaziergang, wird dies nicht seine Glaubwürdigkeit beeinträchtigen. Desgleichen, wenn er um diese Zeit bereits zu Bett gegangen ist. Beide Male werden wir seine Behauptung „$p \Rightarrow q$" als gültig akzeptieren.

Es ist wichtig zu betonen, daß eine Implikation nur eine Beziehung zwischen zwei Aussagen p und q herstellt. Es wird nichts über die Gültigkeit von p bzw. q selbst ausgesagt. Die Gültigkeit der Aussage „Wenn π irrational ist, dann auch $\sqrt{\pi}$" war schon seit langem bekannt (wir werden sie später beweisen). Aber erst 1766 zeigte J.H. Lambert, daß π tatsächlich irrational ist. Wegen der Gültigkeit der Implikation können wir nun nach einem Blick auf die Wahrheitstafel schließen, daß folglich auch „$\sqrt{\pi}$ ist irrational" zutreffen muß. In einer Implikation „$p \Rightarrow q$" nennt man p Voraussetzung oder Prämisse und q Folgerung oder Conclusio. Ist die Voraussetzung p gesichert, und die Implikation „$p \Rightarrow q$" gültig, kann man auf die Gültigkeit von q schließen.

Für eine sprachlich griffigere Übersetzung einer formalisierten Aussage ist es manchmal vorteilhaft, äquivalente Formulierungen für manche logische Verknüpfungen zu verwenden:

$p \wedge q$: p und q; sowohl p, als auch q; nicht nur p, sondern auch q; ...
$p \Rightarrow q$: wenn p, so q; p impliziert q; aus p folgt q;
p ist hinreichend für q; q ist notwendig für p; ...
$p \Leftrightarrow q$: p genau dann, wenn q; p dann und nur dann, wenn q;
p ist notwendig und hinreichend für q; p ist äquivalent (gleichbedeutend) mit q; aus p folgt q und umgekehrt; ...

Mit Hilfe der logischen Verknüpfungen können aus einfachen Aussagen komplexere Aussagen aufgebaut werden, deren Wahrheitswert an Hand von Wahrheitstafeln bestimmt werden kann. Fassen wir nun $p, q, \ldots$ nicht mehr als Namen für eine konkrete

Aussage, sondern als Platzhalter für Aussagen auf. In diesem Falle nennt man p, q **Aussagenvariable**. Verknüpft man Aussagenvariable, etwa p, q, r zu $(p \wedge q) \Rightarrow r$, allgemeiner $p, q, \dots$ zu $F(p, q, \dots)$ erhält man eine aussagenlogische **Formel**. Ersetzt man in einer Formel $F(p, q, \dots)$ $p, q, \dots$ durch konkrete Aussagen, so ist auch $F(p, q, \dots)$ eine Aussage. Von besonderem Interesse sind Formeln $F(p, q, \dots)$ die bei beliebiger Ersetzung der Aussagenvariablen $p, q, \dots$ immer wahr sind. Etwa ist $F(p) = p \vee \neg p$ wahr, egal welche Aussage man für p in $F(p)$ einsetzt. Eine derartige Formel nennt man **Tautologie** oder auch ein Theorem der Aussagenlogik.
Im folgenden Beispiel geben wir einige wichtige Tautologien an: (um die Lesbarkeit zu erleichtern, verwenden wir Klammern)

Beispiel 1.2.

(1)	$p \Leftrightarrow \neg(\neg p)$	doppelte Negation
(2)	$p \vee \neg p$	tertium non datur
(3)	$\neg(p \wedge \neg p)$	principium contradictionis
(4)	$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$	Kontraposition
(5)	$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow \neg(p \wedge \neg q)$	
(6)	$\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow (\neg p) \vee (\neg q)$ $\neg(p \vee q) \Leftrightarrow (\neg p) \wedge (\neg q)$	de Morgansche Regeln
(7)	$(p \wedge (p \Rightarrow q)) \Rightarrow q$	modus ponens
(8)	$(p \Rightarrow (q \wedge \neg q)) \Rightarrow \neg p$	Absurdität
(9)	$((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$	Syllogismus (Kettenschluß)
(10)	$[p \Rightarrow (q \Rightarrow r)] \Leftrightarrow [(p \wedge q) \Rightarrow r]$	
(11)	$(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow [(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)]$	
(12)	$[(p \vee q) \wedge r] \Leftrightarrow [(p \wedge r) \vee (q \wedge r)]$ $[(p \wedge q) \vee r] \Leftrightarrow [(p \vee r) \wedge (q \vee r)]$	Distributivgesetze

Zur Demonstration beweisen wir (10):

p	q	r	$q \Rightarrow r$	$p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$	$p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$ $\Leftrightarrow$ $(p \wedge q) \Rightarrow r$	$(p \wedge q) \Rightarrow r$	$p \wedge q$
w	w	w	w	w	w	w	w
w	w	f	f	f	w	f	w
w	f	w	w	w	w	w	f
w	f	f	w	w	w	w	f
f	w	w	w	w	w	w	f
f	w	f	f	w	w	w	f
f	f	w	w	w	w	w	f
f	f	f	w	w	w	w	f

Da in der 6-ten Spalte der Wahrheitstafel nur die Wahrheitswerte wahr auftreten, ist die tautologische Wahrheit von (10) nachgewiesen.
Tautologien spielen beim logischen Schließen eine große Rolle: Man sagt eine Formel

P ist aus Q aussagenlogisch ableitbar, wenn $P \Rightarrow Q$ eine Tautologie ist. Jede der in Beispiel 1.2 angegebenen Implikationen begründet somit eine entsprechende Schlußregel. Der modus ponens etwa ist die Grundlage für den bereits erwähnten und häufig verwendeten Schluß: wenn für zwei Aussagen p, q sowohl p als auch $p \Rightarrow q$ wahr sind, muß auch q wahr sein.

Der bisher entwickelte Formalismus ist für unsere Zwecke noch zu grob, da inhaltliche Aspekte von Aussagen vollkommen vom Kriterium „wahr“ oder „falsch“ verdrängt werden. Etwa ist die sinnvolle Schlußfolgerung „*Wenn: Alle Menschen müssen sterben* (p) *und Sokrates ist eine Mensch* (q), *dann: Sokrates muß sterben* (r)“ nicht durch die Aussagenlogik gedeckt. Diese Aussage besitzt die Struktur $(p \wedge q) \Rightarrow r$ und dies ist natürlich keine Tautologie. Ersetzt man etwa p durch die ebenfalls wahre Aussage „*3 ist eine Primzahl*“ und q durch „*die Sonne ist heiß*“ erhält man eine ebenfalls wahre Implikation „*Wenn 3 eine Primzahl ist und die Sonne heiß ist, dann muß Sokrates sterben*“. Allerdings ist alles, was uns ursprünglich zwingend erschien, verloren gegangen. Der Einwand, daß in der ersten Formulierung des Beispiels alle Aussagen p, q und r sich auf Menschen bezogen, trifft zu und deckt die innere logische Struktur dieses Beispiels auf: Wenn alle Subjekte x die Eigenschaft P haben und x_0 eines dieser Subjekte ist, dann hat auch x_0 die Eigenschaft P. Für diese innere Differenzierung bedarf es einer Erweiterung der logischen Symbolik.

2. Prädikatenlogik

Die Zeichenfolgen „$x < 5$“, „$x < y$“ sind keine Aussagen. Ersetzt man allerdings x durch 4 und y durch 1 erhält man die wahre Aussage $4 < 5$ und die falsche Aussage $4 < 1$. „$x < 5$“, „$x < y$“ sind Beispiele für **Aussageformen** (**Prädikate**) , welche für reelle Zahlen sinnvoll sind. Aussageformen unterscheiden sich von Aussagen dadurch, daß sie **freie Variable** (**Individuenvariable**) enthalten. Aussageformen sind jedoch nur dann sinnvoll, wenn für die in ihnen vorkommenden Variablen ein Grundbereich (**Individuenbereich**) festgelegt ist, der den Anwendungsbereich der Aussageform begrenzt. Tritt in einer Aussageform nur eine Variable auf (wie in „$x < 5$“), spricht man von einer einstelligen Aussageform, treten mehrere Variable auf (wie in „$x < y$“), so nennt man sie eine **mehrstellige Aussageform**. Einstellige Aussageformen sind Eigenschaften, mehrstellige Aussageformen heißen auch Relationen.
Neben dem Ersetzen aller Individuenvariablen in einer Aussageform durch spezielle Subjekte des Individuenbereiches, sind noch andere Möglichkeiten von Interesse, aus Aussageformen Ausagen zu bilden: Betrachten wir etwa die Aussageform $P(x)$ „*x ist eine Primzahl*“. Dann ist „*Für alle natürlichen Zahlen x gilt: x ist eine Primzahl*“ eine falsche Aussage und „*Es gibt eine natürliche Zahl x, für die gilt: x ist eine Primzahl*“ eine wahre Aussage. Man sagt, die Aussageform $P(x)$ wird duch den Vorsatz „Für alle x aus dem Individuenbereich“ bzw. „Es gibt ein x im Individuenbereich“ **quantifiziert**, die vorgesetzten Ausdrücke selbst heißen **Quantoren**. Eine glattere

Formulierung obiger Aussagen wäre etwa „*Alle natürlichen Zahlen sind Primzahlen*“, bzw. „*Unter den natürlichen Zahlen gibt es Primzahlen*“.

Definition 2.1. *(Symbole der Prädikatenlogik) Es sei $P(x)$ eine Aussageform bezüglich eines Individuenbereiches X.*

i) $\forall x \in X\colon P(x)$ *steht für „Für alle x des Individuenbereiches X trifft $P(x)$ zu.“*
ii) $\exists x \in X\colon P(x)$ *steht für „Es gibt ein x im Individuenbereich X, für welches $P(x)$ zutrifft.“*

Die Symbole $\forall, \exists$ heißen ***All-****, bzw.* ***Existenzquantor****.*

Besteht der Individuenbereich nur aus endlich vielen, etwa n, Subjekten $x_1, x_2, \dots, x_n$, dann gilt

$$\begin{aligned} \forall x\colon P(x) \quad &\Leftrightarrow \quad P(x_1) \wedge P(x_2) \wedge \cdots \wedge P(x_n) \\ \exists x\colon P(x) \quad &\Leftrightarrow \quad P(x_1) \vee P(x_2) \vee \cdots \vee P(x_n). \end{aligned}$$

Der Allquantor (Existenzquantor) kann somit als Verallgemeinerung der Konjunktion (Disjunktion) angesehen werden.

Durch Quantifizierung werden freie Variable in einer Aussageform gebunden. Damit ist folgendes gemeint: Während man in einer Aussageform freie Variable durch beliebige Individuen ersetzen darf und dadurch eine wahre oder falsche Aussage erhält, ist dies bei gebundenen Variablen nicht mehr möglich. Die Gültigkeit der Allaussage $\forall x \in X\colon P(x)$ erfordert doch offensichtlich, daß alle Individuen die Eigenschaft $P(x)$ aufweisen. Die Existenzaussage $\exists x \in X\colon P(x)$ trifft zu, wenn es mindesens ein Element c in X mit der Eigenschaft $P(c)$ gibt. In beiden Fällen können die Individuenvariablen nicht mehr willkürlich gewählt werden.
Sind keine Mißverständnisse möglich, verzichten wir im folgenden der Einfachheit halber auf die explizite Anführung des Individuenbereiches und schreiben

$$\begin{gathered} \forall x\colon P(x) \text{ anstelle von } \forall x \in X\colon P(x) \\ \exists x\colon P(x) \text{ anstelle von } \exists x \in X\colon P(x). \end{gathered}$$

Manchmal schreiben wir auch $P(x)$, $x \in X$, für $\forall x \in X\colon P(x)$. Manche Autoren verwenden andere Schreibweisen:

Für $\forall x\colon P(x)$	etwa $(\forall x)(P(x))$	oder auch $\bigwedge_x P(x)$,
für $\exists x\colon P(x)$	etwa $(\exists x)(P(x))$	oder auch $\bigvee_x P(x)$.

Der Wahrheitswert einer quantifizierten Aussageform hängt oft vom zugrundegelegten Individuenbereich ab. Bedeutet $P(x)$ die Aussageform „$2x = 5$“, so ist $\exists x\colon P(x)$ falsch, wenn man als Individuenbereich die natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ wählt, und wahr, wenn als Individuenbereich die rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ gewählt werden. Um Unklarheiten zu vermeiden, schreibt man daher besser $\exists x \in \mathbb{N}\colon 2x = 5$ bzw. $\exists x \in \mathbb{Q}\colon 2x = 5$. Steht $P(x)$ für „$x^2 \geq 0$“, dann ist $\forall x\colon P(x)$ innerhalb der reellen Zahlen eine wahre Aussage, läßt man jedoch auch komplexe Zahlen zu, ist die Aussage falsch.

Die Allaussage $\forall x\colon P(x)$ ist widerlegt, falls man im zugrundegelegten Individuenbereich ein Subjekt x_0 finden kann, für welches $P(x_0)$ nicht zutrifft. Die Existenzaussage $\exists x_0\colon P(x_0)$ ist falsch, wenn für alle Subjekte x des Individuenbereiches $P(x)$ nicht gilt, d.h.:

$$\begin{aligned}\neg(\forall x\colon P(x)) &\Leftrightarrow \exists x_0\colon \neg P(x_0),\\ \neg(\exists x_0\colon P(x_0)) &\Leftrightarrow \forall x\colon \neg P(x),\end{aligned}$$

wobei $\neg P(x)$ jene Aussageform bezeichnet, welche genau für die Objekte wahr ist, für welche $P(x)$ falsch ist.
Eine Aussageform $P(x)$ heißt **erfüllbar**, wenn die Aussage $\exists x\colon P(x)$ wahr ist, $P(x)$ heißt **unerfüllbar**, wenn $\forall x\colon \neg P(x)$ wahr ist, und $P(x)$ heißt **allgemeingültig**, wenn $\forall x\colon P(x)$ wahr ist.

Zwei Aussageformen $P(x)$ und $Q(x)$ über demselben Individuenbereich lassen sich mit Hilfe der aussagenlogischen Verknüpfungen zu neuen Ausageformen $P(x) \wedge Q(x)$, $P(x) \vee Q(x)$, $P(x) \Rightarrow Q(x)$, $P(x) \Leftrightarrow Q(x)$ verbinden. Setzt man ein spezielles Individuum x_0 in $P(x) \wedge Q(x)$ ein, so ist $P(x_0) \wedge Q(x_0)$ genau dann wahr, wenn beide Aussagen $P(x_0)$ und $Q(x_0)$ wahr sind. Man nennt $P(x)$ **äquivalent** (gleichbedeutend mit) $Q(x)$, wenn $P(x) \Leftrightarrow Q(x)$ allgemeingültig ist, d.h. wenn die zugehörige Allaussage $\forall x\colon P(x) \Leftrightarrow Q(x)$ zutrifft. Bei einer Implikation $P(x) \Rightarrow Q(x)$ interessiert man sich nicht nur für jene Subjekte, für welche die Implikation zutrifft (oder nicht). Von größerem Interesse ist oft, ob diese Aussageform allgemein gültig ist, d.h. ob die Allaussage $\forall x\colon P(x) \Rightarrow Q(x)$ wahr ist. Dieser Sachverhalt wird oft ebenfalls durch $P(x) \Rightarrow Q(x)$ ausgedrückt und man sagt $Q(x)$ *folgt aus* $P(x)$. Etwa meint man mit der Sprechweise „Aus $a > 0$ und $b > 0$ folgt $ab > 0$“ genauer $\forall a \in \mathbb{R}\, \forall b \in \mathbb{R}\colon a > 0 \wedge b > 0 \Rightarrow ab > 0$“. Die Implikation ist tatsächlich allgemein gültig: Ist einer der beiden Faktoren nicht positiv, so ist die Prämisse nicht erfüllt und die Implikation per definitionem wahr, sind beide Faktoren positiv, so folgt die Gültigkeit der Behauptung (Conclusio) aus den bekannten Rechengesetzen für reelle Zahlen. In allen Fällen, in denen $a > 0$ und $b > 0$ ist, (aber nicht nur in diesen) gilt somit auch die Behauptung $ab > 0$. Dies rechtfertigt die Sprechweisen „$ab > 0$ folgt aus $a > 0$ und $b > 0$“, „$a > 0$ und $b > 0$ ist eine hinreichende Bedingung für $ab > 0$“, bzw. „$ab > 0$ ist eine notwendige Bedingung dafür, daß $a > 0$ und $b > 0$ gilt“.
Analog zu Tautologien gibt es auch in der Prädikatenlogik Aussagen, die nur auf Grund ihrer aussagenlogischen und prädikatenlogischen Struktur wahr sind. Insbesondere wird ihr Wahrheitswert nicht durch einen Austausch von Individuenbereich oder Prädikat beeinflußt. Solche Aussagen nennt man **prädikatenlogisch wahr** oder auch **prädikatenlogische Identität**. Zum Beispiel ist die am Ende von Abschnitt 1.1 erwähnte Struktur $(\forall x \in X\colon P(x)) \wedge x_0 \in X \Rightarrow P(x_0)$ prädikatenlogisch wahr, da es kein Individuum geben kann, für welches die angegebene Implikation falsch ist. Es wurde bereits erwähnt, daß diese Aussage aber keine Tautologie darstellt.

Beispiel 2.2. Prädikatenlogische Identitäten. Es seien $P(x)$ und $Q(x)$ Aussageformen über demselben Individuenbereich und p eine Aussage, welche von x unabhängig ist.

(1) $\neg(\forall x\colon P(x)) \Leftrightarrow \exists x\colon \neg P(x)$
(2) $\neg(\exists x\colon P(x)) \Leftrightarrow \forall x\colon \neg P(x)$
(3) $\forall x(P(x) \wedge Q(x)) \Leftrightarrow (\forall x\colon P(x)) \wedge (\forall x\colon Q(x))$
(4) $\exists x(P(x) \vee Q(x)) \Leftrightarrow (\exists x\colon P(x)) \vee (\exists x\colon Q(x))$
(5) $p \wedge \exists x\colon P(x) \Leftrightarrow \exists x(P(x) \wedge p)$
(6) $p \vee \forall x\colon P(x) \Leftrightarrow \forall x(P(x) \vee p)$
(7) $[\forall x(P(x) \Rightarrow p)] \Leftrightarrow [(\exists x\colon P(x)) \Rightarrow p]$
(8) $[\forall x(p \Rightarrow P(x))] \Leftrightarrow [p \Rightarrow \forall x\colon P(x)]$

Wir ergänzen diese Liste mit folgenden einleuchtenden Schlußregeln: Kann man für ein beliebiges Individuum x eines Individuenbereiches X eine Eigenschaft $P(x)$ nachweisen, so kann man auf die Allaussage $\forall x \in X: P(x)$ schließen und umgekehrt kann man aus dem Zutreffen von $\forall x \in X: P(x)$ schließen, daß jedes beliebige Individuum x in X die Eigenschaft $P(x)$ besitzt. Auf die Existenz eines Individuums mit einer gewissen Eigenschaft $P(x)$, d.h. auf die Aussage $\exists x \in X: P(x)$ läßt sich schließen, falls man ein derartiges Individuum im Individuenbereich X angeben kann. Betrachten wir nun die zweistellige Aussageform $x < y$ über den natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$. Durch Quantifizierung kann man folgende Aussagen bilden:

(1)	$\exists x \in \mathbb{N}\, \exists y \in \mathbb{N}\colon x < y$	es gibt natürliche Zahlen x und y mit $x < y$
(2)	$\exists y \in \mathbb{N}\, \exists x \in \mathbb{N}\colon x < y$	es gibt natürliche Zahlen y und x mit $x < y$
(3)	$\exists x \in \mathbb{N}\, \forall y \in \mathbb{N}\colon x < y$	es gibt eine natürliche Zahl, die kleiner ist als alle natürlichen Zahlen
(4)	$\forall y \in \mathbb{N}\, \exists x \in \mathbb{N}\colon x < y$	zu jeder natürlichen Zahl gibt es eine kleinere
(5)	$\forall x \in \mathbb{N}\, \exists y \in \mathbb{N}\colon x < y$	zu jeder natürlichen Zahl gibt es eine größere
(6)	$\exists y \in \mathbb{N}\, \forall x \in \mathbb{N}\colon x < y$	es gibt eine natürliche Zahl, die größer ist als alle natürlichen Zahlen
(7)	$\forall x \in \mathbb{N}\, \forall y \in \mathbb{N}\colon x < y$	für alle natürlichen Zahlen x und y gilt $x < y$
(8)	$\forall y \in \mathbb{N}\, \forall x \in \mathbb{N}\colon x < y$	für alle natürlichen Zahlen y und x gilt $x < y$

Die Aussagen (1), (2), (5) sind wahr, alle übrigen falsch. Die Aussage (3) ist falsch, da x eine zulässige Wahl für y darstellt und $x < x$ falsch ist. Ersetzt man jedoch in (3) $<$ durch $\leq$, erhält man die wahre Aussage „*Es gibt eine kleinste natürliche Zahl*“. Offensichtlich sind die Aussagen (1) und (2), bzw. (7) und (8) jeweils äquivalent. Die Beispiele (3) – (6) zeigen, daß die Interpretation von mehrfach quantifizierten Aussageformen sehr stark von der Reihenfolge der Quantoren abhängt. Wir zeigen die Gültigkeit von $\forall x \in \mathbb{N}\,(\exists y \in \mathbb{N}\colon x < y)$. Die Allaussage ist bewiesen, wenn wir für eine *beliebige* natürliche Zahl x die Eigenschaft $\exists y \in \mathbb{N}\colon x < y$ verifizieren. Aus den Rechenregeln für natürliche Zahlen, die wir hier als bewiesen voraussetzen, folgt $x < x + 1$. Somit erfüllt $y = x + 1$ die Relation $x < y$, folglich gilt auch $\exists y \in \mathbb{N}\colon x < y$. Offensichtlich ist y nicht eindeutig bestimmt, im Gegenteil, es gibt sogar unendlich viele natürliche Zahlen y, die der Bedingung $x < y$ (bei festem x) genügen.

Es wird auch deutlich, daß y von der jeweiligen Wahl von x abhängt. Um derartige Abhängigkeiten, welche häufig übersehen werden, hervorzuheben, schreibt man oft $\forall x \exists y(x)\colon P(x,y)$. Die Negation von $\forall x(\exists y\colon x < y)$ ergibt sich aus den Identitäten (1), (2) in Beispiel 2.2:

$$\neg(\forall x(\exists y\colon x < y)) \Leftrightarrow \exists x \neg(\exists y\colon x < y) \Leftrightarrow \exists x \forall y\colon \neg(x < y) \Leftrightarrow \exists x \forall y\colon x \geq y.$$

Bemerkung 2.3. (1) In einer mehrfach quantifizierten Aussageform darf man benachbarte, gleichartige Quantoren vertauschen.
(2) Individuenvariable, welche durch einen Existenzquantor gebunden werden, hängen von sämtlichen *voraus* gehenden Individuenvariablen ab, welche durch einen Allquantor gebunden sind.
(3) Eine mehrfach quantifizierte Aussageform wird negiert, indem man die Quantoren „$\forall$“ durch „$\exists$“ und „$\exists$“ durch „$\forall$“ ersetzt und anschließend die Aussageform negiert.

Abschließend zeigen wir noch einige häufig auftretende Fehlerquellen auf:
(1) Verwechseln Sie nicht $p \Rightarrow q$ und $q \Rightarrow p$. Die Aussage $p \Rightarrow q$ ist *nicht* äquivalent zu $\neg p \Rightarrow \neg q$. Die Negation von $p \Rightarrow q$ ist *nicht* $p \Rightarrow \neg q$, sondern $p \wedge \neg q$.
(2) $\forall x(P(x) \vee Q(x))$ impliziert *nicht* $(\forall x\colon P(x)) \vee (\forall x\colon Q(x))$. Zum Beispiel stehe $P(x)$ für „*x ist gerade*“ und $Q(x)$ für „*x ist ungerade*“. Als Individuen lassen wir nur natürliche Zahlen zu. Dann ist die erste Aussage „*jede natürliche Zahl ist gerade oder ungerade*“ wahr, die zweite Aussage „*Alle natürlichen Zahlen sind gerade oder alle natürlichen Zahlen sind ungerade*“ hingegen ist offensichtlich falsch. Es gilt jedoch die Implikation

$$(\forall x\colon P(x)) \vee (\forall x\colon Q(x)) \Rightarrow (\forall x\colon P(x) \vee Q(x)).$$

(3)$(\exists x\colon P(x)) \wedge (\exists x\colon Q(x))$ impliziert *nicht* $\exists x\colon (P(x) \wedge Q(x))$. Bedeutet $P(x)$ zum Beispiel „$x > 0$“ und $Q(x)$ „$x < 0$“ und steht x für eine reelle Zahl, dann ist die Aussage $(\exists x \in \mathbb{R}\colon P(x)) \wedge (\exists x \in \mathbb{R}\colon Q(x))$, d.h. „*es gibt positive reelle Zahlen und es gibt negative reelle Zahlen*“ wahr, aber $\exists x \in \mathbb{R}(P(x) \wedge Q(x))$, d.h. „*es gibt eine reelle Zahl, die sowohl positiv als auch negativ ist*“ trifft nicht zu. Es gilt aber die umgekehrte Implikation

$$(\exists x\colon (P(x) \wedge Q(x))) \Rightarrow (\exists x\colon P(x)) \wedge (\exists x\colon Q(x)).$$

(4) Vereinbart man, daß die Bindekraft der logischen Symbole in der Reihenfolge $\neg - \exists, \forall - \wedge - \vee - \Rightarrow - \Leftrightarrow$ abnimmt, lassen sich Klammern bei zusammengesetzten Aussagen weitgehend vermeiden. Eine sparsame Klammerung erleichtert oft die Lesbarkeit einer komplizierten Aussage, manchmal sind Klammern jedoch unerläßlich: Vergleichen Sie zum Beispiel die Aussagen

$$\forall x \in \mathbb{R}[(\forall y \in \mathbb{N}\colon y \geq x) \Rightarrow x \leq 1]$$

und

$$\forall x \in \mathbb{R}\, \forall y \in \mathbb{N}(y \geq x \Rightarrow x \leq 1).$$

3. Beweise

Während die Inhalte der Mathematik im Laufe der Jahrhunderte großen Änderungen unterworfen waren, hat sich an den Ansichten über die grundlegende mathematische Methode seit Euklid nichts geändert: Jede Aussage ist zu beweisen. Als Erkenntnis wird in eine Theorie nur das aufgenommen, was bewiesen wurde. Es ist hier nicht möglich, den Begriff Beweis rigoros zu definieren. Wir beschränken uns auf die Feststellung, daß ein mathematischer Beweis folgendermaßen aufgebaut ist: Nach Festlegung der Voraussetzungen wird ausgehend von Axiomen und bereits bewiesenen Aussagen (Sätzen) mit Hilfe logischer Schlußregeln die Gültigkeit der Behauptung abgeleitet. Die verwendeten Schlußregeln beruhen u.a. auf den in Beispiel 1.2, 2.2 genannten Identitäten. Ein Beweis sollte soviele Einzelheiten beinhalten, daß ein Fachkollegen sich von der Schlüssigkeit der Argumente überzeugen kann. Natürlich sollte man selbst einen eigenen Beweis auch nach einer geraumen Zeit noch nachvollziehen können. Ein Beweis dient aber nicht nur dazu, sich selbst und andere von der Gültigkeit eines Sachverhaltes zu überzeugen, er legt oft auch dar, warum der betreffende Sachverhalt gelten muß. Beim Ringen um einen Beweis werden manchmal auch Zusammenhänge sichtbar, welche ursprünglich verborgen waren.

Die zu beweisende Behauptung exakt zu formulieren und sich über die geltenden Voraussetzungen Klarheit zu verschaffen, ist der erste wesentliche Schritt in jedem Beweis. Verwendet man bei der Formulierung der Behauptung den in den beiden vorangehenden Abschnitten entwickelten Formalismus, tritt die logische Struktur der Behauptung besonders deutlich hervor. Im folgenden präsentieren wir exemplarisch einige gängige Beweismethoden.

3.1. Direkter Beweis.

Behauptung: Für alle $x \in (0,1)$ gilt $x^2 < x$, bzw. $\forall x \in (0,1)\colon x^2 < x$.

Zu den Voraussetzungen zählen die Axiome und Rechenregeln der reellen Zahlen, sowie die Definition der Symbole $(0,1)$, x^2. Ein Beweis könnte somit folgendermaßen verlaufen:

Beweis. Es sei $x \in (0,1)$ beliebig gewählt. Es gilt $x \in (0,1)$, d.h. $x > 0$ und $x < 1$. Multipliziert man die Ungleichung $x < 1$ mit x, folgt wegen der Gültigkeit der Regel $\forall a,b,c \in \mathbb{R}\colon a < b \wedge c > 0 \Rightarrow ac < bc$ die behauptete Ungleichung $x^2 < x$. Da $x \in (0,1)$ beliebig gewählt wurde, ist somit die ursprüngliche Allaussage bewiesen. □

3.2. Widerspruchbeweise.

Ein Widerspruchsbeweis einer Behauptung p geht von der Annahme aus, p sei falsch und folgert daraus, daß dann eine bereits als wahr erkannte Aussage ebenfalls falsch ist oder eine getroffene Voraussetzung verletzt wird. Dieser Vorgangsweise liegt die Tautologie (8) im Beispiel 1.2 zugrunde. Die Wirksamkeit indirekter Beweise beruht wesentlich darauf, daß neben den gegebenen Voraussetzungen noch zusätzlich angenommen wird, die Behauptung sei falsch.

Behauptung: Für jede reelle Zahl x gilt $\sin x + \cos x \neq \frac{3}{2}$.

Beweis. (durch Widerspruch): Wir nehmen an, es gäbe eine reelle Zahl x_0 mit $\sin x_0 + \cos x_0 = \frac{3}{2}$. Durch Quadrieren folgt $\sin^2 x_0 + \cos^2 x_0 + 2\sin x_0 \cos x_0 = \frac{9}{4}$, bzw. $1+\sin 2x_0 = \frac{9}{4}$. Dies hat $\sin 2x_0 = \frac{5}{4} > 1$ zur Folge. Somit müßte auch $\exists x \in \mathbb{R}\colon\ \sin x > 1$ zutreffen. Dies ist jedoch ein Widerspruch zu der als bewiesen vorausgesetzten Aussage $\forall x \in \mathbb{R}\colon |\sin x| \leq 1$. □

Wir demonstrieren dieses Prinzip nun bei einer Implikation:

Behauptung: Für beliebige reelle Zahlen x, y mit $0 < y < x$ gilt $\frac{y}{1+y} < \frac{x}{1+x}$, d.h. $\forall x, y \in \mathbb{R}\colon \left(0 < y < x \Rightarrow \frac{y}{1+y} < \frac{x}{1+x}\right)$

Beweis. (durch Widerspruch): Wir nehmen an, die Behauptung sei falsch, d.h. (siehe 2.2-(1) und 1.2-(5))

$$\exists \xi, \eta \in \mathbb{R}\colon 0 < \eta < \xi \text{ und } \frac{\eta}{1+\eta} \geq \frac{\xi}{1+\xi}.$$

Es ist also $1+\xi > 0$ und $1+\eta > 0$. Daher darf man die Ungleichung $\frac{\eta}{1+\eta} \geq \frac{\xi}{1+\xi}$ mit $(1+\xi)(1+\eta)$ multiplizieren und erhält

$$\eta(1+\xi) \geq \xi(1+\eta), \quad \text{somit} \quad \eta \geq \xi,$$

im Widerspruch zu der Voraussetzung $\eta < \xi$. □

3.3. Indirekter Beweis.

Bei Implikationen ist es manchmal einfacher, anstelle $p \Rightarrow q$ das logische Äquivalent $\neg q \Rightarrow \neg p$ zu beweisen.

Behauptung: Wenn x irrational ist, dann ist auch $\sqrt{x}$ irrational.

Natürlich ist diese Aussage nur für nichtnegative reelle Zahlen sinnvoll. Sie ist äquivalent zu „wenn $\sqrt{x}$ rational ist, dann ist auch x rational“ oder formalisiert

$$(*) \qquad \forall x \geq 0\, (\sqrt{x} \in \mathbb{Q} \Rightarrow x \in \mathbb{Q})$$

Beweis. Wir führen einen direkten Beweis für die kontraponierte Behauptung $(*)$. Es sei also $x \geq 0$ und $\sqrt{x} \in \mathbb{Q}$ beliebig gewählt. Somit gibt es natürliche Zahlen m, n, sodaß $\sqrt{x} = \frac{m}{n}$. Aus $x = \sqrt{x}\sqrt{x} = \frac{m^2}{n^2}$ folgt die Behauptung. □

Es sei darauf hingewiesen, daß ein direkter Beweis der ursprünglichen Behauptung nicht so einfach zu führen ist.

3.4. Rückschluß.

Wenn man nicht weiß, wie man den Beweis einer Aussage beginnen soll, ist es manchmal zweckmäßig, von der Gültigkeit der Behauptung auszugehen und zu versuchen eine bereits als wahr erkannte Aussage abzuleiten. Läßt sich jeder Schluß in dieser Kette umkehren, ergibt sich ein Beweis der ursprünglichen Behauptung.
Behauptung: Es gilt $6 > \frac{1}{3-2\sqrt{2}}$.

Beweis. Wir nehmen an, daß $6 > \frac{1}{3-2\sqrt{2}}$ gilt.

$$6 > \frac{1}{3-2\sqrt{2}} \quad \Leftrightarrow \quad 6 > \frac{3+2\sqrt{2}}{(3-2\sqrt{2})(3+2\sqrt{2})} \Leftrightarrow 6 > 3+2\sqrt{2}$$
$$\Leftrightarrow \quad 3 > 2\sqrt{2} \Leftrightarrow 9 > 8$$

Da die letzte Behauptung wahr ist und jeder Schluß umkehrbar ist, ist $6 > \frac{1}{3-2\sqrt{2}}$ bewiesen. □

Vorwiegend findet diese Methode beim Lösen von Gleichungen und Ungleichungen Verwendung.

3.5. Vollständige Induktion.

Viele Aussagen haben die Form $\forall n \in \mathbb{N}\colon P(n)$. Der direkte Beweis, $P(n)$ für eine beliebige natürliche Zahl zu zeigen, ist oft nicht möglich. In diesen Fällen kann man auf das Prinzip von der **vollständigen Induktion** zurückgreifen, das im nächsten Kapitel begründet wird.
Prinzip der vollständigen Induktion: Kann man von einer Aussageform $P(n)$ über den natürlichen Zahlen nachweisen, daß die Aussagen

i) $P(1)$
ii) $\forall n \in \mathbb{N}\colon (P(n) \Rightarrow P(n+1))$

zutreffen, dann gilt auch $\forall n \in \mathbb{N}\colon P(n)$.
Der Nachweis von $P(1)$ heißt **Induktionsanfang**, die Implikation $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ nennt man **Induktionsschritt**. Beide Teile sind unverzichtbare Bestandteile eines Induktionsbeweises. Die Effizienz der Methode beruht darauf, daß meist $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ leichter nachzuweisen ist, als $P(n)$ selbst.
Behauptung: Die Summe dreier aufeinander folgender Kubikzahlen ist stets durch 9 teilbar, bzw.

$$\forall n \in \mathbb{N}\colon n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3 \text{ ist durch 9 teilbar.}$$

Beweis. (1) Induktionsanfang: $n = 1$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 = 36 \text{ ist durch 9 teilbar, d.h. es gilt } P(1).$$

(2) Induktionsschritt: $P(n) \Rightarrow P(n+1)$

Voraussetzung: $n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3$ ist durch 9 teilbar,
zu zeigen: $(n+1)^3 + (n+2)^3 + (n+3)^3$ ist durch 9 teilbar.

Wir schließen

$$\begin{aligned}(n+1)^3+(n+2)^3+(n+3)^3 &= (n+1)^3+(n+2)^3+n^3+9n^2+27n+27\\ &= n^3+(n+1)^3+(n+2)^3+9(n^2+3n+3).\end{aligned}$$

Dies ist durch 9 teilbar, da die Gültigkeit von $P(n)$ vorausgesetzt wurde, d.h. es gilt $P(n+1)$. □

Das nächste Beispiel zeigt, daß auf die Verankerung der Induktion nicht verzichtet werden kann:

Falsche Behauptung: Für $q \neq 1$ hat die Summe $1+q+\cdots+q^n$ den Wert $s_n = \frac{q^{n+1}-q}{q-1}$, bzw.

$$\forall q \neq 1 \forall n \in \mathbb{N}\colon s_n = \frac{q^{n+1}-q}{q-1}.$$

Beweis des Induktionsschrittes:

Voraussetzung:	$s_n = \frac{q^{n+1}-q}{q-1}$
zu zeigen:	$s_{n+1} = \frac{q^{n+2}-q}{q-1}$

Eine einfache Rechnung ergibt

$$s_{n+1} = 1+q+\cdots+q^n+q^{n+1} = \frac{q^{n+1}-q}{q-1}+q^{n+1} = \frac{q^{n+2}-q}{q-1}.$$

Trotzdem hat die Summe nicht den Wert $\frac{q^{n+1}-q}{q-1}$, sondern $\frac{q^{n+1}-1}{q-1}$. Es fehlt nämlich der Induktionsanfang: es ist $s_1 = 1+q$, während die Formel $s_1 = \frac{q^2-q}{q-1} = q$ liefert.

Von Leonhard Euler (1707–1783) stammt ein berühmtes Beispiel dafür, daß auch sehr viele Einzelverifikationen nicht für einen allgemeinen Beweis ausreichen: Die Aussage „n^2+n+41“ ist eine Primzahl“ ist wahr für $n = 1, 2, \ldots, 39$, aber nicht für $n = 40$ (denn $40^2+40+41 = 41 \cdot 41$). Eine Allaussage ist ja bereits durch die Angabe eines einzigen Gegenbeispieles widerlegt.

4. Mengen

An den Anfang unserer Ausführungen stellen wir die historische Definition von Georg CANTOR (1897):

Definition 4.1. *Unter einer „**Menge**“ verstehen wir jede Zusammenfassung M von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten unserer Anschauung oder unseres Denkens (welche „**Elemente**“ von M genannt werden) zu einem Ganzen.*

Für „x ist Element der Menge M“ schreibt man heute allgemein $x \in M$. Für die Negation $\neg(x \in M)$ ist die Abkürzung $x \notin M$ üblich.

Gemäß Cantors Definition können wir etwa folgende Mengen bilden:

- die Menge der Leser dieses Skriptums,
- die Menge der Lösungen der Gleichung $(x-5)(x-3) = 0$,
- die Menge der Buchstaben a, b, c.

Diese Mengen haben jeweils endlich viele Elemente. Es gibt auch Mengen mit „unendlich vielen“ Elementen (der Begriff „unendlich viele“ wird später ausführlicher analysiert):

$\mathbb{N}$	die Menge der natürlichen Zahlen 1,2,3,...,
$\mathbb{N}_0$	die Menge der natürlichen Zahlen einschließlich der Null,
$\mathbb{Z}$	die Menge der ganzen Zahlen $0, \pm 1, \pm 2, \dots$,
$\mathbb{Q}$	die Menge der rationalen Zahlen $\frac{p}{q}, p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}$,
$\mathbb{R}$	die Menge der reellen Zahlen.

Für den Nachweis, daß $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \dots$ usw. Mengen sind, verweisen wir auf ausführlichere Lehrbücher der Mengenlehre. Betrachten wir die Menge der Lösungen der Gleichung $(x-3)(x-5) = 0$, d.h. die Menge der natürlichen Zahlen 3 und 5. Diese Menge, nennen wir sie A, läßt sich zumindest auf zwei Arten anschreiben:

$$A = \{3, 5\} \text{ bzw. } A = \{x \in \mathbb{R} \colon (x-3)(x-5) = 0\}.$$

Man kann Mengen also deklarieren, indem man sämtliche Elemente der Menge aufzählt. Sind etwa $a, b, \dots, z$ irgendwelche Objekte, dann bezeichnet $\{a, b, \dots, z\}$ die Menge mit den Elementen $a, b, \dots, z$. Allerdings läßt sich nicht jede Menge auf diese Weise angeben, z.B. $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$. Eine andere Möglichkeit der Mengendeklaration ist die Angabe einer die Elemente charakterisierenden Eigenschaft: ist $P(x)$ eine Aussageform, dann bezeichnet $\{x \colon P(x)\}$ die Erfüllungsmenge von P, d.h. die Menge aller Objekte x, für welche $P(x)$ zutrifft.
Die Definition Cantors läßt vollkommen offen, welche Objekte zu einem Ganzen zusammengefaßt werden. Cantor vertrat die Auffassung, daß durch $\{x \colon P(x)\}$ für jede beliebige Aussageform eine Menge definiert wird. Bertrand Russell zeigte 1901, daß dies auf Widersprüche führt. Zum Verständnis der Russelschen Antinomie bemerken wir, daß Mengen, als Objekte unseres Denkens selbst wieder Elemente anderer Mengen sein können, z.B. in $\{1, 2, \{1, 2\}, \{1\}\}$. Die meisten Mengen werden jedoch nicht die ungewöhnliche, aber in Definition 4.1 zulässige, Eigenschaft haben, sich selbst als Element zu enthalten.

Satz 4.2. *(Russellsche Antinomie)*

$$R = \{X \colon X \textit{ ist eine Menge } \wedge X \notin X\}$$

definiert keine Menge.

Beweis. Wir führen einen Widerspruchsbeweis und nehmen an, R sei eine Menge. Somit gilt entweder $R \notin R$ oder $R \in R$. Trifft $R \in R$ zu, so müßte wegen der Definition von R auch $R \notin R$ gelten. Das ist nicht möglich. Gilt hingegen $R \notin R$, dann müßte, R wird ja als Menge angenommen, wieder wegen der Definition von R auch $R \in R$ gelten. Die Annahme, R sei eine Menge, führt also in jedem Fall auf einen Widerspruch. $\square$

Um den mit einer inhaltlichen Definition des Mengenbegriffes unvermeidlichen Schwierigkeiten aus dem Wege zu gehen, werden in der axiomatischen Mengenlehre der Begriff der Menge und die Elementbeziehung $x \in M$ als (undefinierte) Grundbegriffe angesehen. Für diese und für die Bildung neuer Mengen aus gegebenen Mengen werden Axiome bereitgestellt. Wir können hier nicht auf eines der existierenden Axiomensysteme der Mengenlehre eingehen, sondern verweisen auf die angegebene Literatur. Wir werden es immer mit „wohldefinierten" Mengen M zu tun haben, d.h. es wird stets entweder „$x \in M$" oder „$x \notin M$" wahr sein. Ebenso werden die angegebenen Operationen, nach welchen aus vorgegebenen Mengen neue Mengen gebildet werden, zu keinen Widersprüchen führen. Im folgenden gehen wir stets von einer Grundmenge X von Objekten und Aussageformen $P(x)$ über X aus; $A, B, \dots$ sind meist Symbole für Mengen und $a, b, c, \dots$ Symbole für deren Elemente.
Cantors Vorstellung einer Menge findet sich wieder in folgendem Axiom:

Axiom 4.3. *(Aussonderungsaxiom) Zu jeder Menge X und jeder Aussageform $P(x)$ über X gibt es eine Menge A, deren Elemente genau jene $x \in X$ sind, für die $P(x)$ gilt. Es wird also durch*

$$A = \{x \in X \colon P(x)\}$$

eine Menge definiert.

Dieses Axiom schränkt Cantors Auffassung insofern ein, als man zur Bildung neuer Mengen durch Angabe einer charakterisierenden Eigenschaft auch eine Menge festlegen muß, aus der die Elemente genommen werden.

Definition 4.4. *A und B seien Mengen.*

i) *Zwei Mengen A und B sind gleich, $A = B \underset{Def}{\Leftrightarrow} \forall x(x \in A \Leftrightarrow x \in B)$.*
ii) *A heißt **Teilmenge** von B, $A \subset B \underset{Def}{\Leftrightarrow} \forall x(x \in A \Rightarrow x \in B)$.*
*B heißt dann **Obermenge** von A, $B \supset A$.*
iii) *A heißt **echte Teilmenge** von B, $A \subsetneqq B \underset{Def}{\Leftrightarrow} A \subset B \wedge \exists x(x \in B \wedge x \notin A)$.*

Bemerkung 4.5. (1) In einer Definition trennt das Symbol „$\underset{\text{Def}}{\Leftrightarrow}$" (lies: per definitionem genau dann, wenn) den neu eingeführten Begriff vom definierenden Umstand. Rechts von „$\underset{\text{Def}}{\Leftrightarrow}$" dürfen also nur bereits bekannte Symbole oder Begriffe verwendet werden. Bei der Definition neuer Symbole verwendet man manchmal auch das Zeichen „:=".
(2) Gemäß Definition 4.4 sind zwei Mengen genau dann gleich, wenn sie dieselben Elemente haben. Anstelle von $\neg(A = B)$ schreibt man $A \neq B$. Wegen $A = B \Leftrightarrow A \subset B \wedge B \subset A$ kann der Nachweis der Gleichheit von zwei Mengen A und B erbracht werden, indem man $A \subset B$ und $B \subset A$ zeigt.
(3) Aus der Definition der Gleichheit von Mengen folgt z.B.: $\{1, 2, 3\} = \{2, 1, 3\} = \{2, 2, 1, 3, 3, 3\}$. Definiert man also eine Menge durch Aufzählen ihrer Elemente sind Reihenfolge und Wiederholungen von Elementen belanglos.

Wählen wir für eine beliebige Menge M für $P(x)$ die Aussageform $x \neq x$, dann sichert das Aussonderungsaxiom, daß $\{x \in M : x \neq x\}$ eine Menge $\emptyset_M$ definiert. Offensichtlich enthält jede dieser Mengen $\emptyset_M$ keine Elemente, sie sind daher alle gleich. Die folgende Definition ist daher sinnvoll:

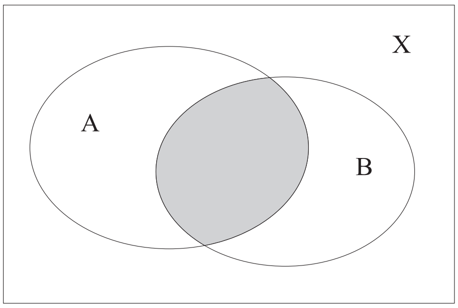
Definition 4.6. $\emptyset := \{x \in M : x \neq x\}$ *heißt* ***leere Menge***.

Eine andere Schreibweise für die leere Menge ist $\{\ \}$. Man unterscheide sorgfältig die Mengen $\emptyset$ und $\{\emptyset\}$.

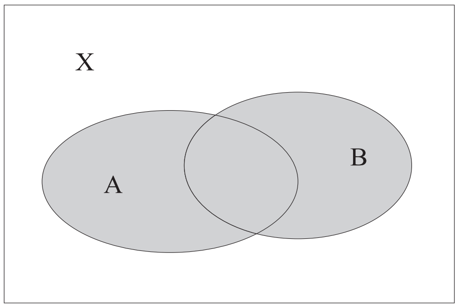
Bemerkung 4.7. Die leere Menge ist Teilmenge jeder Menge M. Es kann nämlich kein Element x geben, für welches $x \notin M \wedge x \in \emptyset$ gilt.

Definition 4.8. *Sei X eine Menge und A, B Teilmengen von X.*
*i) $A \cap B := \{x \in X : x \in A \wedge x \in B\}$ heißt der **Durchschnitt** von A und B,*
*ii) Die Mengen A und B heißen **disjunkt** (elementfremd) $\underset{Def}{\Leftrightarrow} A \cap B = \emptyset$,*
*iii) $A \cup B := \{x \in X : x \in A \vee x \in B\}$ heißt die **Vereinigung** von A und B.*

Wir veranschaulichen die eingeführten Mengenoperationen in einem sogenannten Venn-Diagramm. Das Rechteck symbolisiert dabei die Grundmenge X.



$A \cap B$



$A \cup B$

Satz 4.9. *Es seien A, B, C Mengen. Dann gilt*

$$\begin{array}{ll}
A \cap A = A, \qquad A \cup A = A, & \textit{Idempotenz} \\
(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C), & \\
(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C), & \textit{Assoziativgesetze} \\
A \cap B = B \cap A, \quad A \cup B = B \cup A, & \textit{Kommutativgesetze} \\
A \cap (A \cup B) = A, \quad A \cup (A \cap B) = A, & \textit{Adjunktivgesetze} \\
A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C), & \\
A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C), & \textit{Distributivgesetze} \\
A \cap \emptyset = \emptyset, \quad A \cup \emptyset = A, & \\
A \subset B \Leftrightarrow A \cap B = A \Leftrightarrow A \cup B = B. &
\end{array}$$

Beweis. Wir beweisen exemplarisch eines der Distributivgesetze:

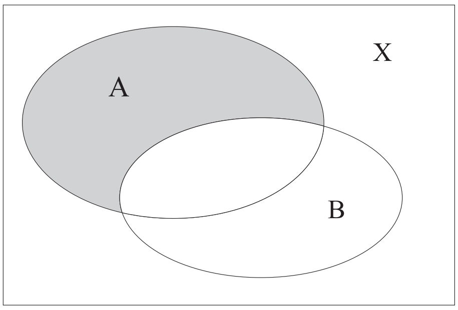
$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

Dies folgt aus

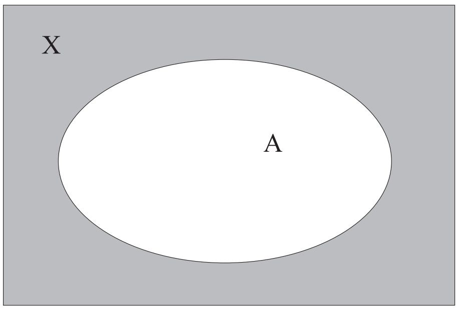
$$\begin{aligned} x \in A \cap (B \cup C) &\Leftrightarrow x \in A \wedge (x \in B \vee x \in C) \\ &\Leftrightarrow (x \in A \wedge x \in B) \vee (x \in A \wedge x \in C) \\ &\Leftrightarrow x \in (A \cap B) \cup (A \cap C). \end{aligned}$$

Für die mittlere Äquivalenz berufen wir uns auf die Tautologie 12 in Beispiel 1.2, die beiden anderen Äquivalenzen folgen aus Definition 4.8. □

Definition 4.10. *i)* $A \setminus B := \{x\colon x \in A \wedge x \notin B\}$ *heißt die* ***Differenzmenge*** *von* B *in* A.
ii) Es sei $A \subset X$. $\complement_X A := X \setminus A$ *heißt das* ***Komplement*** *von* A *in* X.



$A \setminus B$



$\complement_X A$

Wenn aus dem Zusammenhang bekannt ist, auf welche Grundmenge sich das Komplement bezieht, schreibt man die Grundmenge oft nicht an: $\complement A$. Manche Autoren schreiben auch $\bar{A}$ für das Komplement von A.

Satz 4.11. *Im Folgenden sei* $A \subset X$ *und* $B \subset X$. *Dann gilt:*

$$\left.\begin{aligned} \complement(A \cap B) &= \complement A \cup \complement B, \\ \complement(A \cup B) &= \complement A \cap \complement B, \end{aligned}\right\} \quad \textit{de Morgansche Regeln}$$

$$A \cap \complement A = \emptyset, \qquad A \cup \complement A = X,$$

$$\complement(\complement A) = A, \qquad \complement\emptyset = X, \qquad \complement X = \emptyset,$$

$$A \subset B \Leftrightarrow \complement B \subset \complement A.$$

Beweis. Wir beweisen wieder nur exemplarisch eine der de Morganschen Regeln, nämlich $\complement(A \cap B) = \complement A \cup \complement B$. Es sei $x \in \complement(A \cap B)$ beliebig gewählt. Es gilt

$$\begin{aligned} x \in \complement(A \cap B) \quad &\Leftrightarrow \quad x \notin A \cap B \wedge x \in X \\ &\Leftrightarrow \quad \neg(x \in A \wedge x \in B) \wedge x \in X \\ &\Leftrightarrow \quad (\neg(x \in A) \vee \neg(x \in B)) \wedge x \in X \\ &\Leftrightarrow \quad (x \notin A \wedge x \in X) \vee (x \notin B \wedge x \in X) \\ &\Leftrightarrow \quad (x \in \complement A) \vee (x \in \complement B) \Leftrightarrow x \in \complement A \cup \complement B. \end{aligned}$$

Bei den Umformungen wurden die Tautologien aus Beispiel 1.2 verwendet. □

Definition 4.12. *Es sei A eine Menge.*

$$\mathcal{P}(A) := \{M\colon M \subset A\} \text{ heißt die } \textbf{Potenzmenge} \text{ von } A.$$

Als Beispiel sei erwähnt

$$\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}, \qquad \mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset)) = \mathcal{P}(\{\emptyset\}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$$
$$\mathcal{P}(\{1,2\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}.$$

Der Beweis des folgenden Satzes sei dem Leser als Übung überlassen.

Satz 4.13. *Die Potenzmenge einer Menge von n Elementen hat 2^n Elemente.*

Die Existenz der Potenzmenge ist ein weiteres Beispiel für ein Axiom der Mengenlehre. Vereinigung, Durchschnitt und Komplement können ohne Schwierigkeit auf Mengensysteme (d.h. Mengen von Mengen) erweitert werden.

Definition 4.14. *Es sei X eine Menge und $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ ein nichtleeres Mengensystem. Man nennt*

i) $\bigcup_{A\in\mathcal{A}} A := \{x \in X\colon \exists A \in \mathcal{A}\colon x \in A\}$ ***Vereinigung*** *des Mengensystems $\mathcal{A}$*
ii) $\bigcap_{A\in\mathcal{A}} A := \{x \in X\colon \forall A \in \mathcal{A}\colon x \in A\}$ ***Durchschnitt*** *des Mengensystems $\mathcal{A}$.*

Anstelle von $\bigcup_{A\in\mathcal{A}} A$ sind auch die Schreibweisen $\bigcup \mathcal{A}$, $\bigcup\{A\colon A \in \mathcal{A}\}$ üblich, für $\bigcap_{A\in\mathcal{A}}$ schreibt man auch $\bigcap \mathcal{A}$, bzw. $\bigcap\{A\colon A \in \mathcal{A}\}$. Es gelten die de Morganschen Formeln:

$$\complement \bigcup_{A\in\mathcal{A}} A = \bigcap_{A\in\mathcal{A}} \complement A$$
$$\complement \bigcap_{A\in\mathcal{A}} A = \bigcup_{A\in\mathcal{A}} \complement A$$

5. Relationen

Nach Definition 4.4 wird eine Menge einzig durch ihre Elemente bestimmt. Die Mengen $\{x, y\}$ und $\{y, x\}$ sind daher gleich. Vielfach genügt es aber nicht, Objekte ungeordnet zu einer Menge zusammenzufassen, insbesondere wenn jedem Objekt eine eigene Rolle zukommt. Man denke etwa an die Koordinaten eines Punktes in der analytischen Geometrie. Eine geordnete Zusammenfassung von Objekten läßt sich auch innerhalb der Mengenlehre durchführen.

Definition 5.1. *i) $(a, b) := \{\{a\}, \{a, b\}\}$ heißt das* ***geordnete Paar*** *mit a als erstem und b als zweitem Element.*
ii) A, B seien Mengen.
$A \times B = \{(a, b)\colon a \in A \wedge b \in B\}$ heißt das ***Cartesische Produkt*** *von A und B.*

SATZ 5.2. *$(a,b) = (c,d) \Leftrightarrow a = c$ und $b = d$.*

BEWEIS. a) „$\Leftarrow$“ ist klar.
b) „$\Rightarrow$“: Wir machen eine **Fallunterscheidung** nach $a = b$ und $a \neq b$ und zeigen, daß die Implikation in jedem Fall zutrifft. Wir nehmen also zunächst an, es gelte
Fall 1: $a = b$

$$a = b \Rightarrow (a,b) = (a,a) = \{\{a\}\}.$$

Nach Voraussetzung ist $(a,b) = (c,d)$, daher

$$\{\{c\},\{c,d\}\} = \{\{a\}\}.$$

Aus der Gleichheit der Elemente schließen wir

$$\begin{array}{ccc} \{a\} = \{c\} & \text{und} & \{c,d\}=\{a\} \qquad \text{folglich} \\ a = c & \text{und} & \{a,d\}=\{a\}. \end{array}$$

Die letzte Gleichheit kann nur für $a = d$ bestehen, sodaß $a = b = c = d$ gilt.
Fall 2: $a \neq b$
Dies hat $\{a\} \neq \{a,b\}$ zur Folge. Die Gleichheit

$$(a,b) = (c,d) \quad \text{also} \quad \{\{a\},\{a,b\}\} = \{\{c\},\{c,d\}\}$$

kann dann nur gelten, wenn $\{c\} \neq \{c,d\}$, d.h. $c \neq d$ ist. Somit folgt

$$\{a\} = \{c\} \text{ und } \{a,b\} = \{c,d\}, \qquad \text{d.h. } a = c \text{ und } \{c,b\} = \{c,d\}.$$

Dies ist genau dann der Fall, wenn $a = c$ und $b = d$ gilt. □

DEFINITION 5.3. *i) $(a_1,\dots,a_n) := (a_1,(a_2,\dots,a_n))$, $n \geq 3$, heißt das* ***geordnete n-Tupel*** *mit a_i, $i = 1,\dots,n$, als i-tem Element.*
ii) $A_1,\dots,A_n$ seien Mengen

$$A_1 \times \dots \times A_n := \{(a_1,\dots,a_n)\colon a_i \in A_i, i = 1,\dots,n\}$$

heißt das Cartesische Produkt der Mengen $A_1,\dots,A_n$.

Gilt $A_i = A$, $i = 1,\dots,n$, so schreiben wir auch A^n an Stelle von $\underbrace{A \times \dots \times A}_{n\text{-mal}}$.

Natürlich hätte man auch, mit demselben Ziel, nämlich eine Reihenfolge zum Ausdruck zu bringen, das geordnete Paar $((a_1,\dots,a_{n-1}),a_n)$ für die Definition des geordneten n-Tupels heranziehen können. Wir bemerken $A \times B$ und $B \times A$ sind im allgemeinen nicht gleich. Ferner gilt

$$A \times B = \emptyset \Leftrightarrow A = \emptyset \vee B = \emptyset.$$

DEFINITION 5.4. *Es seien A und B Mengen.*
R heißt ***binäre*** *(zweistellige)* ***Relation*** *zwischen A und $B \underset{Def}{\Leftrightarrow} R \subset A \times B$.*

Für $(a,b) \in R$ (in Worten: a steht zu b in Relation R) schreiben wir auch aRb, $a\not{R}b := \neg(aRb)$. Ist $A = B$, so sprechen wir von einer Relation auf A.

Dieser Definition liegt die Vorstellung zugrunde, daß wir eine bestimmte Beziehung zwischen A und B, d.h. eine Eigenschaft, die jedem Paar $(a, b) \in A \times B$ zukommt, gleichsetzen mit der Menge genau jener Paare, die diese Eigenschaft aufweisen.

Beispiel: $A = \mathcal{P}(M), \quad \forall X, Y \in \mathcal{P}(M)\colon XRY \Leftrightarrow X \subset Y.$

Genauer versteht man manchmal unter einer Relation zwischen A und B das geordnete Tripel (A, B, R) und nennt dann R den **Graph** der Relation. Ist R eine Relation auf A, schreibt man (A, R) anstelle von (A, A, R).

Definition 5.5. *R sei eine Relation zwischen A und B.*

i) $\operatorname{def} R := \{a \in A\colon \exists b \in B\colon aRb\}$ *heißt* ***Definitionsbereich*** *(Argumentbereich) von R.*
ii) $\operatorname{bild} R := \{b \in B\colon \exists a \in A\colon aRb\}$ *heißt* ***Bildbereich*** *(Wertebereich) von R.*
iii) $R^{-1} := \{(b, a) \in B \times A\colon aRb\}$ *heißt die zu R* ***inverse Relation****.*

Definition 5.6. *(Eigenschaften einer Relation R auf A)*

i) *R heißt* ***reflexiv*** $\underset{Def}{\Leftrightarrow} \forall a \in A\colon aRa$
ii) *R heißt* ***symmetrisch*** $\underset{Def}{\Leftrightarrow} \forall a, b \in A\colon aRb \Rightarrow bRa$
iii) *R heißt* ***transitiv*** $\underset{Def}{\Leftrightarrow} \forall a, b, c \in A\colon aRb \wedge bRc \Rightarrow aRc$
iv) *R heißt* ***antisymmetrisch*** $\underset{Def}{\Leftrightarrow} \forall a, b \in A\colon aRb \wedge bRa \Rightarrow a = b$
v) *R heißt* ***asymmetrisch*** $\underset{Def}{\Leftrightarrow} \forall a, b \in A\colon aRb \Rightarrow \neg(bRa)$

Definition 5.7. *R sei eine Relation auf A*

i) *R heißt* ***Äquivalenzrelation*** $\underset{Def}{\Leftrightarrow}$ *R ist reflexiv, symmetrisch und transitiv.*
ii) *R heißt* ***Ordnung*** *(Halbordnung) auf A* $\underset{Def}{\Leftrightarrow}$ *R ist reflexiv, antisymmetrisch und transitiv.*
Das Paar (A, R) heißt (halb) ***geordnete Menge****.*

Beispiel 5.8. (1) Es sei M eine Menge mit endlich vielen Elementen. Auf $\mathcal{P}(M)$ erklären wir die Relation R durch ARB genau dann, wenn A und B gleich viele Elemente haben. R ist eine Äquivalenzrelation.
(2) Wir betrachten die Relation „$\subset$“ auf $\mathcal{P}(M)$, M beliebig. $(\mathcal{P}(M), \subset)$ ist eine geordnete Menge. Es ist klar, daß unter „$\subset$“ im allgemeinen nicht alle Teilmengen von M vergleichbar sind. Dies erklärt auch die von manchen Autoren verwendete Bezeichnung Halbordnung.
(3) $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ unter der natürlichen Ordnung $\leq$ sind geordnete Mengen. Im Gegensatz zum vorausgehenden Beispiel sind alle Elemente vergleichbar, d.h. für ein beliebiges Paar x, y gilt stets $x \leq y \vee y \leq x$. Man nennt die Aussageform $x \leq y$ Ungleichung.

Definition 5.9. *Es sei (A, R) eine geordnete Menge.*
*R heißt **lineare** (totale) **Ordnung** auf A* $\underset{Def}{\Leftrightarrow}$

(1) *R ist eine Ordnung auf A,*
(2) $\forall (x, y) \in A \times A\colon xRy \vee yRx$.

*(A, R) heißt **linear (total) geordnete Menge**.*

Definition 5.10. *S sei eine Relation auf A.*
*S heißt **strikte Ordnung** auf A $\underset{Def}{\Leftrightarrow}$ S ist asymmetrisch und transitiv.*

Bemerkung 5.11. (1) Eine Ordnung auf einer Menge A bringt man meist durch das Symbol $\leq$ (oder ein dazu verwandtes) zum Ausdruck. Für $a \leq b \wedge a \neq b$ schreibt man $a < b$. Die Relation $<$ ist keine Ordnung auf A. Sie ist transitiv und asymmetrisch, d.h. eine strikte Ordnung auf A.
(2) Für die zu einer Ordnungsrelation $\leq$ inverse Relation ist das Symbol $\geq$ gebräuchlich. Analog ist $>$ erklärt. Anstelle von $x \leq y \wedge y \leq z$ schreibt man oft $x \leq y \leq z$. (analog für $<$.)
(3) In einer durch $\leq$ linear geordneten Menge A gilt für beliebige $x, y \in A$ entweder $x < y$, oder $x = y$ oder $y < x$ (Trichotomie).

Der nächste Satz zeigt, daß die Relationen $\leq$ und $<$ wechselweise für die Beschreibung einer Ordnung herangezogen werden können:

Satz 5.12. *(i) Es sei R eine Ordnung auf A.Dann ist die Relation S auf A, erklärt durch*

$$aSb \underset{Def}{\Leftrightarrow} aRb \wedge a \neq b$$

eine strikte Ordnung auf A.
(ii) Es sei S eine strikte Ordnung auf A. Dann ist die Relation R auf A, erklärt durch

$$aRb \underset{Def}{\Leftrightarrow} aSb \vee a = b$$

eine Ordnung auf A.

Beweis. (i) Es sei aSb und bSc. Für beliebige a, b, $c \in A$ gilt

$$(*) \quad aSb \wedge bSc \Leftrightarrow (aRb \wedge a \neq b) \wedge (bRc \wedge b \neq c) \Leftrightarrow (aRb \wedge bRc) \wedge (a \neq b \wedge b \neq c).$$

Aus der Antisymmetrie von R folgt im Falle $c = a$ der Widerspruch

$$aSb \wedge bSa \Rightarrow (aRb) \wedge (bRa) \wedge a \neq b \Rightarrow a = b \wedge a \neq b.$$

Somit ist S ist asymmetrisch. Für $a, b, c \in A$, $a \neq c$, folgt aus $(*)$

$$aSb \wedge bSc \wedge a \neq c \Rightarrow aRc \wedge (a \neq b \wedge b \neq c \wedge a \neq c) \Rightarrow aRc \wedge a \neq c,$$

d.h. S ist transitiv.
(ii) Übung. $\square$

6. Abbildungen

Die Definition einer Relation R zwischen X und Y läßt $xRy \wedge xRz$ mit $x \in X$, $y, z \in Y$ und $y \neq z$ zu. Ein Element des Definitionsbereichs von R kann also ohne weiteres mit verschiedenen Elementen des Bildbereiches in Relation stehen. Eine wichtige Klasse von Relationen bilden jene, bei denen dieser Umstand nicht auftritt.

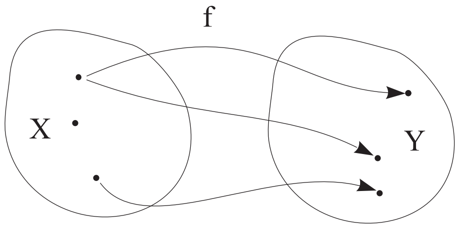
Definition 6.1. *f sei eine Relation zwischen X und Y.*

i) *f heißt* ***Abbildung*** *(Funktion) von X nach Y* $\underset{Def}{\Leftrightarrow}$

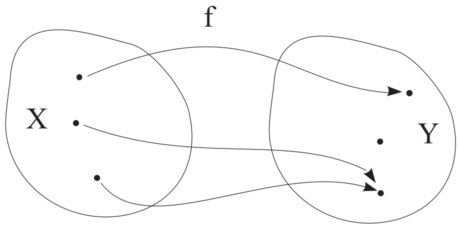
1) $\operatorname{def} f = X$
2) $\forall x \in X, \forall y, z \in Y : xfy \wedge xfz \Rightarrow y = z.$
Anstelle von xfy schreibt man $y = f(x)$.

ii) *Gilt $y = f(x)$, dann heißt x* ***Urbild*** *von y und y* ***Bild*** *von x.*

iii) *Die Menge $G(f) = \{(x, y) \in X \times Y : y = f(x)\}$ heißt* ***Graph*** *von f.*



f ist keine Funktion



f ist Funktion

Bei einer Funktion interessiert man sich oft primär nicht so sehr für das Bild $f(x)$ selbst, als vielmehr für das Verhalten von $f(x)$, wenn sich x verändert. Man nennt daher x auch *unabhängige Variable* oder *Argument* von f und $f(x)$ *abhängige Variable*. Für die Definition einer Funktion f von X nach Y verwendet man folgende Schreibweise:

$$f\colon \begin{cases} X \to Y \\ x \mapsto f(x) \end{cases}$$

Dabei ist $f(x)$ durch die jeweilige Abbildungsvorschrift zu ersetzen.

Zwei Funktionen $f\colon X \to Y$ und $g\colon U \to V$ sind nach Definition 6.1 genau dann gleich, wenn $X = U$, $Y = V$ und $\forall x \in X\colon f(x) = g(x)$ gilt. Die Bedingung $Y = V$ wird manchmal weggelassen.

Definition 6.2. *(i) Es sei $f\colon X \to Y$, $A \subset X$.*

$f|_A$ heißt ***Einschränkung*** *von f auf A* $\underset{Def}{\Leftrightarrow} f|_A\colon \begin{cases} A \to Y \\ x \mapsto f(x). \end{cases}$

(ii) Es sei $g\colon A \to Y$ eine Funktion und $X \supset A$.
$f\colon X \to Y$ heißt eine ***Fortsetzung*** *von g* $\underset{Def}{\Leftrightarrow} f|_A = g$ *nach X.*

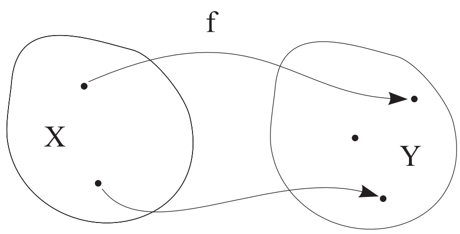
Es ist klar, daß Einschränkungen einer Funktion stets eindeutig bestimmt sind, während eine Fortsetzung auf eine Obermenge des Definitionsbereiches auf vielfältige Weise möglich ist.

Definition 6.3. *f sei eine Abbildung von X nach Y, $A \subset X$ und $B \subset Y$.*

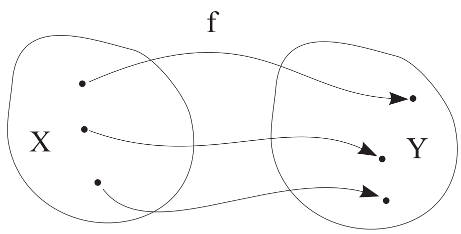
i) *$f(A) := \{y \in Y : \exists x \in A(f(x) = y)\}$ heißt **Bild** von A unter f,*
ii) *$f^{-1}(B) := \{x \in X : f(x) \in B\}$ heißt **Urbild** von B unter f,*
iii) *f heißt **surjektiv** (Abbildung auf Y) $\underset{Def}{\Leftrightarrow} f(X) = Y$,*
iv) *f heißt **injektiv** (eineindeutig) $\underset{Def}{\Leftrightarrow} \forall x, y \in X : f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$,*
v) *f heißt **bijektiv** (eineindeutig auf Y) $\underset{Def}{\Leftrightarrow}$ f ist surjektiv und injektiv.*

Die Surjektivität einer Abbildung bedeutet, daß jedes Element des Wertevorrates Y mindestens *einmal* als Bild angenommen wird, die Injektivität garantiert, daß jedes Element aus Y *höchstens* einmal als Bild vorkommt. Diese Begriffe sind bei der Lösung einer Gleichung $y = f(x)$ sehr nützlich. Dabei ist y eine vorgegebene Größe, und man sucht ein Element x, welches durch f auf y abgebildet wird. Falls $y \notin \operatorname{bild} f$, kann es keine Lösung der Gleichung $y = f(x)$ geben. Ist f injektiv, ist die Eindeutigkeit der Lösung, falls sie existiert, gesichert. Die Surjektivität von f garantiert Existenz mindestens einer Lösung unabhängig von der Wahl von y. Im idealen Fall der Bijektivität von f besitzt $y = f(x)$ für jede Wahl von y genau eine Lösung.

Beispiel 6.4. Es sei $X = \{1, 2, 3\}$, $Y = \{1, 2, 3, 4\}$, $A = \{1, 2\}$ und $f = \{(1, 1), (2, 4), (3, 1)\}$. Dann ist $\operatorname{bild} f = \{1, 4\} = f(X)$, $f^{-1}(\{1\}) = \{1, 3\}$, $f^{-1}(\{2, 3\}) = \emptyset$, f ist nicht injektiv und nicht bijektiv. Die Einschränkung von f auf A ist die Funktion $f|_A = \{(1, 1), (2, 4)\}$. $g = \{(1, 1), (2, 4)\}$ ist eine Bijektion von $\{1, 2\}$ auf $\{1, 4\}$, $f|_A$ ist jedoch nicht surjektiv. Manchmal verzichtet man allerdings auf eine formale Unterscheidung von $f|_A$ und g, und sagt der Einfachheit halber, $f|_A$ bildet A auf $\{1, 4\}$ ab.



f ist injektiv



f ist bijektiv

Satz 6.5. *f sei eine Abbildung von X nach Y.*

(1) *Für alle $A \subset X$ und $B \subset X$ gilt:*

$$\begin{array}{rrcl} \textit{i)} & f(A \cup B) & = & f(A) \cup f(B) \\ \textit{ii)} & f(A \cap B) & \subset & f(A) \cap f(B) \\ \textit{iii)} & f(A \setminus B) & \supset & f(A) \setminus f(B) \end{array}$$

(2) *Für alle $U \subset Y$ und $V \subset Y$ gilt:*

$$\begin{array}{rrcl} i) & f^{-1}(U \cup V) & = & f^{-1}(U) \cup f^{-1}(V) \\ ii) & f^{-1}(U \cap V) & = & f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V) \\ iii) & f^{-1}(U \setminus V) & = & f^{-1}(U) \setminus f^{-1}(V) \end{array}$$

Beweis. Wir beweisen nur 1-(iii): es sei $y \in f(A) \setminus f(B)$, d.h. $y \in f(A)$ und $y \notin f(B)$. Aus $y \in f(A)$ folgert man die Existenz eines Elementes $x \in A$ mit $y = f(x)$. Wegen $y \notin f(B)$ ist $y \neq f(b)$ für alle $b \in B$, somit muß $x \notin B$ gelten. Insgesamt ergibt sich also $x \in A \setminus B$ und somit $y \in f(A \setminus B)$. □

Das Urbild von Mengen hat demnach bessere mengenalgebraische Eigenschaften als das Bild. Wir verifizieren nun, daß die Inklusionen in Satz 6.5 tatsächlich strikt sein können.

Beispiel 6.6. Es sei $f\colon X \to X$, $X = \{1,2,3,4,5,6\}$, $A = \{1,2,3\}$, $B = \{4,5\}$ und $f = \{(1,5),(2,3),(3,4),(4,3),(5,1),(6,6)\}$. Dann ist

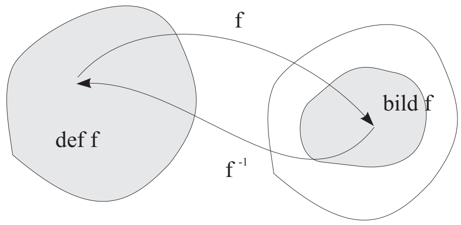
$$\begin{array}{ll} f(A \cap B) = f(\emptyset) = \emptyset, & f(A) \cap f(B) = \{3\} \text{ und} \\ f(A) \setminus f(B) = \{5,4\}, & f(A \setminus B) = \{5,3,4\}. \end{array}$$

Ist $f\colon X \to Y$ injektiv, dann entspricht jedem Element $y \in f(X)$ genau ein Element $x \in X$ mit $y = f(x)$. Die Vorschrift, die jedem $y \in f(X)$ das eindeutig bestimmte Urbild zuordnet, ist dann eine Funktion von $f(X)$ auf X.

Definition 6.7. *Die Abbildung $f\colon X \to Y$ sei injektiv.*

$$f^{-1}\colon f(X) \to X \text{ erklärt durch}$$
$$\forall y \in f(X) \forall x \in X\colon f^{-1}(y) = x \underset{Def}{\Leftrightarrow} y = f(x)$$

heißt ***Umkehrfunktion*** *von f.*



Umkehrfunktion

Die Bezeichnung Umkehrfunktion ist eigentlich noch nicht gerechtfertigt. Durch die Definition 6.7 wird vorerst ja nur eine Relation in $f(X) \times X$ erklärt: es gilt $(y,x) \in f^{-1}$ genau dann, wenn es ein Element $x \in X$ gibt mit (xfy), bzw. da f eine Abbildung ist $y = f(x)$. Dies ist offensichtlich für alle $y \in f(X)$ der Fall. Also ist def $f^{-1} = f(X)$. Es seien nun $y \in f(X)$ und x, $\tilde{x} \in X$ mit $f^{-1}(y) = x$ und $f^{-1}(y) = \tilde{x}$ (als Relation geschrieben: $(yf^{-1}x)$ und $(yf^{-1}\tilde{x})$). Wegen der Definition von f^{-1} bedeutet dies $f(x) = y$ und $f(\tilde{x}) = y$. Weil f injektiv ist, folgt $x = y$. Die Umkehrfunktion

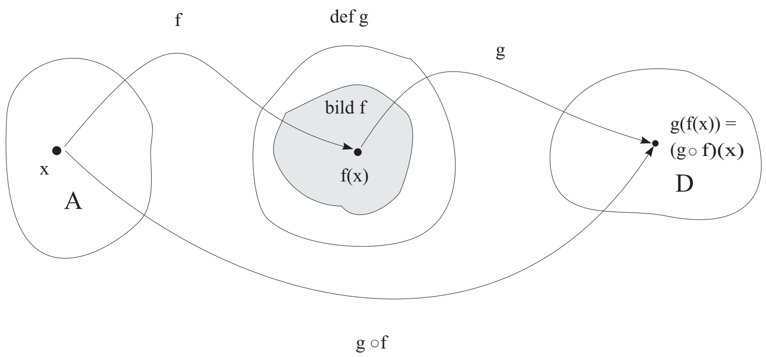
ist sogar eine Bijektion von $\operatorname{bild} f$ auf X. Es sei $x \in X$ beliebig gewählt. Wegen $\operatorname{def} f = X$ gibt es ein $y \in Y$ mit $y = f(x)$, also $y \in f(X)$. Dies ist jedoch gleichwertig mit $f^{-1}(y) = x$. Somit ist f^{-1} surjektiv. Für den Nachweis der Injektivität von f^{-1} nehmen wir an, es gäbe $y, \tilde{y}$ mit $f^{-1}(y) = f^{-1}(\tilde{y})$. Es sei x das gemeinsame Bildelement $f^{-1}(y) = f^{-1}(\tilde{y}) = x$. Daraus folgt $f(x) = y$ und $f(x) = \tilde{y}$. Da f eine Abbildung ist, muß $y = \tilde{y}$ gelten. Also ist f^{-1} injektiv.
Aus historischen Gründen findet das Symbol f^{-1} sowohl bei der Benennung des Urbildes einer Menge, welches immer existiert, als auch für die Bezeichnung der Umkehrfunktion, welche nur für injektive Abbildungen erklärt ist, Verwendung. Die jeweilige Bedeutung geht aus dem Zusammenhang und dem Typ des Arguments hervor. Ohne Argument geschrieben bedeutet f^{-1} stets die Umkehrfunktion von f.

Eine weitere Möglichkeit, neue Funktionen aus bereits bekannten zu erzeugen, ist das Hintereinanderausführen von Funktionen. Will man etwa auf das Bild $f(x)$ eine weitere Abbildung g anwenden, muß natürlich $f(x) \in \operatorname{def} g$ sein.

Definition 6.8. *$f\colon A \to B$, $g\colon C \to D$ seien Abbildungen und* $\operatorname{bild} f \subset C$. *Die Abbildung*

$$g \circ f\colon \begin{cases} A \to D \\ x \mapsto g(f(x)) \end{cases}$$

heißt ***Komposition*** *(Hintereinanderausführung) der Funktionen g und f.*



Komposition von g und f

Beispiel 6.9. Es sei $A = \{1,2,3\}$, $B = \{a,b,c,d\}$, $C = \{a,b,c\}$, $D = \{1,2\}$, $f = \{(1,a),(2,b),(3,a)\}$ und $g = \{(a,2),(b,1),(c,1)\}$. Dann ist $\operatorname{bild} f = \{a,b\} \subset \operatorname{def} g$ und $\operatorname{bild} g = \{2,1\} \subset \operatorname{def} f$, somit existieren $g \circ f$ und $f \circ g$. Trotzdem ist

$$g \circ f = \{(1,2),(2,1),(3,2)\} \neq \{(a,b),(b,a),(c,a)\} = f \circ g$$

Dieses Beispiel demonstriert, daß die Hintereinanderausführung von Abbildungen i.a. nicht kommutativ ist.

Satz 6.10. *(Assoziativität der Komposition)*
Es seien $f\colon A \to B$, $g\colon C \to D$, $h\colon E \to F$ *Abbildungen und es gelte* $\operatorname{bild} f \subset C$, $\operatorname{bild} g \subset E$. *Dann sind auch die Abbildungen* $h \circ (g \circ f)$, $(h \circ g) \circ f\colon A \to F$ *erklärt und es gilt*

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$

.

Beweis. Wegen $\operatorname{bild} f \subset C$ und $\operatorname{bild} g \subset E$ existieren die Abbildungen $g \circ f\colon A \to D$ und $h \circ g\colon C \to F$. Aus $(g \circ f)(A) = g(f(A)) \subset g(C)$ folgt $\operatorname{bild} g \circ f \subset \operatorname{bild} g \subset E$, somit existieren $h \circ (g \circ f)$ und analog $(h \circ g) \circ f$. Die Gleichheit dieser Abbildungen folgt aus der Gleichheit der Bilder für beliebige $a \in A$:

$$(h \circ (g \circ f))(a) = h((g \circ f)(a)) = h(g(f(a))) = (h \circ g)(f(a)) = ((h \circ g) \circ f)(a).$$

□

Definition 6.11. *M sei eine Menge. Die Abbildung*

$$\mathrm{id}_M\colon \begin{cases} M \to M \\ x \mapsto x \end{cases}$$

heißt ***Identität*** *(identische Abbildung) auf M.*

Satz 6.12. *i) $f\colon X \to Y$ sei eine injektive Abbildung. Dann ist*

$$f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_{\operatorname{bild} f} \qquad f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_X$$

ii) $f\colon X \to Y$ sei bijektiv. Dann ist $(f^{-1})^{-1} = f$.

Beweis. i) Es sei $y \in \operatorname{bild} f$, d.h. es existiert genau ein $x \in X : y = f(x)$. Es folgt

$$(f \circ f^{-1})(y) = f(f^{-1}(y)) = f(x) = y = \mathrm{id}_{\operatorname{bild} f}(y),$$

d.h. $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_{\operatorname{bild} f}$. Die zweite Beziehung folgt analog.
ii) Es wurde bereits erwähnt, daß f^{-1} eine Bijektion von $\operatorname{bild} f$ auf X darstellt. Somit existiert $(f^{-1})^{-1}\colon X \to Y$ und ist bijektiv. Für jedes $x \in X$ gilt

$$(f^{-1})^{-1}(x) = y \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow f(x) = y.$$

□

Satz 6.13. *$f\colon X \to Y$ sei eine Abbildung. Folgende Aussagen sind äquivalent.*

i) *f ist injektiv,*
ii) *Es gibt eine Abbildung $g\colon \operatorname{bild} f \to X$ derart, daß $g \circ f = \mathrm{id}_X$.*

Beweis. i) $\Rightarrow$ ii) $g = f^{-1}$ und Satz 6.12.
ii) $\Rightarrow$ i) Es sei $x, y \in X$ und $f(x) = f(y)$. Dann gilt

$$x = \mathrm{id}_X(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(f(y)) = (g \circ f)(y) = \mathrm{id}_X(y) = y,$$

also ist f ist injektiv. □

Satz 6.14. *$f\colon X \to Y$ sei eine Abbildung. Folgende Aussagen sind äquivalent.*

i) *f ist surjektiv,*

ii) *Es gibt eine Abbildung $g\colon Y \to X$ derart, daß $f \circ g = \mathrm{id}_Y$.*

Beweis. i) $\Rightarrow$ ii) Es gilt $\forall y \in Y: f^{-1}(\{y\}) \neq \emptyset$. Für jedes $y \in Y$ wählen wir aus dem Urbild $f^{-1}(\{y\})$ genau ein Element x aus und setzen $g(y) = x$. Auf diese Weise definiert man eine Funktion, $g\colon Y \to X$. Es folgt

$$(f \circ g)(y) = f(g(y)) = f(x) = y, \text{ dh. } f \circ g = \mathrm{id}_Y\,.$$

ii) $\Rightarrow$ i) Übung □

Es sei erwähnt, daß die Möglichkeit der Wahl von x im letzten Beweis durch ein weiteres Axiom der Mengenlehre, das Auswahlaxiom, garantiert wird. Wir können nun zeigen, daß durch Satz 6.12-(i) die Umkehrabbildung charakterisiert wird.

Korollar 6.15. Es seien $f\colon X \to Y$, $g\colon \operatorname{bild} f \to X$ Funktionen.

i) Falls $g \circ f = \mathrm{id}_X$, dann existiert f^{-1} und es ist $g = f^{-1}$.

ii) Ist f injektiv und $f \circ g = \mathrm{id}_{\operatorname{bild} f}$, dann ist $g = f^{-1}$.

Beweis. i) Wegen Satz 6.13 ist f injektiv, somit existiert f^{-1} und es folgt

$$g = g \circ \mathrm{id}_{\operatorname{bild} f} = g \circ (f \circ f^{-1}) = (g \circ f) \circ f^{-1} = \mathrm{id}_X \circ f^{-1} = f^{-1}.$$

ii) Die Behauptung ergibt sich aus

$$g = \mathrm{id}_X \circ g = (f^{-1} \circ f) \circ g = f^{-1} \circ (f \circ g) = f^{-1} \circ \mathrm{id}_{\operatorname{bild} f} = f^{-1}.$$

□

Korollar 6.16. Folgende Aussagen sind gleichwertig.

i) $f\colon X \to Y$ ist bijektiv.

ii) Es gibt eine Abbildung $g\colon Y \to X$ derart, daß $g \circ f = \mathrm{id}_X$ und $f \circ g = \mathrm{id}_Y$.

Satz 6.17. *$f\colon X \to Y$, $g\colon U \to V$ seien Abbildungen derart, daß* $\operatorname{bild} f \subset U$.

i) *Sind f, g surjektiv und $Y = U$, dann ist auch $g \circ f$ surjektiv*

ii) *Sind f und g injektiv, dann ist auch $g \circ f$ injektiv. Ist zusätzlich* $\operatorname{bild} f = U$, *dann ist $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.*

Beweis. Wir zeigen nur $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$. Die rechte Seite ist definiert, falls $\operatorname{bild} g^{-1} \subset \operatorname{def} f^{-1}$. Dies ist äquivalent zu $U \subset \operatorname{bild} f$. Wegen $\operatorname{bild} f \subset U$ ist dies gleichwertig mit $\operatorname{bild} f = U$. Die Darstellung von $(f \circ g)^{-1}$ folgt aus Korollar 6.15 und

$$\begin{aligned}(g \circ f) \circ (f^{-1} \circ g^{-1}) &= g \circ (f \circ f^{-1}) \circ g^{-1} = g \circ \mathrm{id}_{\operatorname{bild} f} \circ g^{-1}\\ &= g \circ \mathrm{id}_U \circ g^{-1} = g \circ g^{-1} = \mathrm{id}_{\operatorname{bild} g} = \mathrm{id}_{\operatorname{bild} g \circ f}\,.\end{aligned}$$

Man beachte $\operatorname{bild} g \circ f = \operatorname{bild} g$. Dies ist eine unmittelbare Konsequenz aus $\operatorname{bild} f = U$. □

Korollar 6.18. $f\colon X \to Y$, $g\colon Y \to V$ seien bijektiv. Dann ist $g \circ f$ bijektiv und $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

Wir zeigen schließlich, daß auf die Bedingung bild $f = U$ in Satz 6.17 nicht verzichtet werden kann:

Beispiel 6.19. Es sei $X = \{\alpha, \beta\}$, $Y = U = \{a, b, c\}$, $V = \{1, 2, 3, 4\}$, ferner $f = \{(\alpha, b), (\beta, c)\}$ und $g = \{(a, 1), (b, 2), (c, 4)\}$. Dann ist $g \circ f = \{(\alpha, 2), (\beta, 4)\}$, $(g \circ f)^{-1} = \{(2, \alpha), (4, \beta)\}$, $f^{-1} = \{(b, \alpha), (c, \beta)\}$, $g^{-1} = \{(1, a), (2, b), (4, c)\}$. Wegen $a \notin \operatorname{def} f^{-1}$ ist $f^{-1} \circ g^{-1}$ nicht definiert.

KAPITEL ii

Reelle und komplexe Zahlen

1. Axiomatische Beschreibung der reellen Zahlen

Ein streng axiomatischer Aufbau der Analysis würde erfordern, das System der reellen Zahlen von möglichst einfachen Bausteinen ausgehend, etwa den natürlichen Zahlen, zu entwickeln. Dieser Weg soll hier nicht beschritten werden, hat doch jeder einzelne bereits im Laufe der Zeit mühsam eine intuitive Vorstellung von den reellen (oder zumindest rationalen) Zahlen entwickelt. Wir knüpfen an diese Vorstellung an und beschreiben die für das weitere Rechnen grundlegenden Beziehungen zwischen reellen Zahlen durch eine Reihe sorgfältig gewählter Axiome.

Wir gehen davon aus, daß auf der Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen zwei binäre Operationen, Addition und Multiplikation erklärt sind. Somit wird jedem Paar $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ eindeutig eine reelle Zahl $x + y$ (die Summe von x und y) und ebenso eindeutig eine weitere reelle Zahl xy, manchmal $x \cdot y$ geschrieben (das Produkt von x und y) zugeordnet. Wie diese Summen und Produkte zu bilden sind, spielt dabei keine Rolle. Wesentlich ist nur, daß sie folgenden Axiomen genügen.

($\mathcal{A}$) **Axiome für die Addition**

($\mathcal{A}1$)	$\forall x, y, z \in \mathbb{R} : (x + y) + z = x + (y + z)$	Assoziativgesetz
($\mathcal{A}2$)	$\forall x, y \in \mathbb{R} : x + y = y + x$	Kommutativgesetz
($\mathcal{A}3$)	$\exists 0 \in \mathbb{R}\, \forall x \in \mathbb{R} : x + 0 = x$	additives Neutralelement
($\mathcal{A}4$)	$\forall x \in \mathbb{R}\, \exists \xi \in \mathbb{R} : x + \xi = 0$	additives inverses Element

($\mathcal{M}$) **Axiome für die Multiplikation**

($\mathcal{M}1$)	$\forall x, y, z \in \mathbb{R} : (xy)z = x(yz)$	Assoziativgesetz
($\mathcal{M}2$)	$\forall x, y \in \mathbb{R} : xy = yx$	Kommutativgesetz
($\mathcal{M}3$)	$\exists 1 \in \mathbb{R} : (1 \neq 0 \wedge \forall x \in \mathbb{R} : 1x = x)$	multiplikatives Neutralelement
($\mathcal{M}4$)	$\forall x \neq 0\, \exists \bar{x} \in \mathbb{R} : x\bar{x} = 1$	multiplikatives inverses Element

Die nächsten Axiome verknüpfen Addition und Multiplikation:

($\mathcal{D}$) **Distributivgesetz**

$\forall x, y, z \in \mathbb{R} : x(y + z) = xy + xz$

($\mathcal{O}$) **Ordnungsaxiom:**
Auf $\mathbb{R}$ ist eine Totalordnung $\leq$ erklärt, welche mit der Addition und Multiplikation verträglich ist:

$$\left.\begin{array}{lll} (\mathcal{OA}) & \forall x, y, z \in \mathbb{R}\colon & x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z \\ (\mathcal{OM}) & \forall x, y, z \in \mathbb{R}\colon & x \leq y \wedge 0 \leq z \Rightarrow xz \leq yz \end{array}\right\} \text{Monotoniegesetze}$$

Wir erinnern daran, daß jede Ordnung $\leq$ eine strikte Ordnung $<$ in $\mathbb{R}$ induziert (vgl I-5.11, I-5.12). Da $\mathbb{R}$ linear geordnet ist, gilt in $\mathbb{R}$ die Trichotomie. Man kann bei der axiomatischen Beschreibung von $\mathbb{R}$ auch davon ausgehen, daß in $\mathbb{R}$ eine strikte Ordnung $<$ existiert. In diesem Fall muß man allerdings die Monotoniegesetze durch ein weiteres Axiom ergänzen, das die Gültigkeit der Trichotomie in $\mathbb{R}$ verlangt. Die strikte Ordnung $<$ induziert dann eine lineare Ordnung $\leq$ auf $\mathbb{R}$.
Eine vollständige Charakterisierung der reellen Zahlen erfordert ein weiteres Axiom, durch welches Lücken in der Menge der reellen Zahlen ausgeschlossen werden.

($\mathcal{V}$) **Vollständigkeitsaxiom** (R. Dedekind)
Zu jedem Paar von Teilmengen A, B von $\mathbb{R}$ mit
i) $A \neq \emptyset \wedge B \neq \emptyset$
ii) $A \cup B = \mathbb{R}$
iii) $\forall a, b \in \mathbb{R} : a \in A \wedge b \in B \Rightarrow a < b$
gibt es genau ein $\xi \in \mathbb{R}$, sodaß
a) $\forall a \in \mathbb{R} : a < \xi \Rightarrow a \in A$
b) $\forall b \in \mathbb{R} : \xi < b \Rightarrow b \in B$

Man nennt das geordnete Paar (A, B) einen Dedekindschen Schnitt und die durch ihn eindeutig bestimmte Zahl ξ Schnittzahl. Wegen der Eigenschaften eines Schnittes liegt die Schnittzahl ξ entweder in A oder in B. Gilt $\xi \in A$, so sind die Eigenschaften a) und b) von ξ gleichwertig mit $A = \{a \in \mathbb{R}\colon a \leq \xi\}$ und $B = \mathbb{R} \setminus A$, liegt jedoch ξ in B, dann ist $B = \{b \in \mathbb{R}\colon b \geq \xi\}$ und $A = \mathbb{R} \setminus B$. Insbesondere folgt also $a \leq \xi < b$ oder $a < \xi \leq b$ für alle $a \in A$ und für alle $b \in B$.

Bemerkung 1.1. (1) Die Assoziativgesetze erlauben es, die Ausdrücke $x+y+z$ bzw. xyz sinnvoll zu interpretieren, da jede Klammerung zum selben Ergebnis führt.
(2) Die auffallende Ähnlichkeit der Axiome für die Addition und Multiplikation ist nicht zufällig. Allgemein nennt man eine Menge in der eine binäre Operation erklärt ist, welche den unter $\mathcal{A}$ angegebenen Axiomen genügt, eine **Abelsche Gruppe**. Die Axiome $\mathcal{A}$ bringen somit zum Ausdruck, daß $(\mathbb{R}, +)$ eine additive Abelsche Gruppe ist, $\mathcal{M}$ bedeutet, daß $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$ eine multiplikative Abelsche Gruppe darstellt. Jede Menge K, die diese beiden algebraischen Strukturen aufweist und in der außerdem das Distributivgesetz $\mathcal{D}$ gilt, nennt man **Körper**. Ist in K noch zusätzlich eine Totalordnung erklärt, welche den Monotoniegesetzen $\mathcal{OA}$ und $\mathcal{OM}$ genügt, spricht man von einem **geordneten Körper**. Somit kann man die Axiome $\mathcal{A}, \mathcal{M}, \mathcal{D}, \mathcal{O}$ zusammenfassen in der Feststellung: $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$ ist ein geordneter Körper. Gilt in einem geordneten Körper überdies das Vollständigkeitsaxiom $\mathcal{V}$, spricht man von einem **vollständigen geordneten Körper**.

(3) $\mathbb{R}^+ := \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$ ist die Menge der **nicht negativen** reellen Zahlen,
$\mathbb{R}^- := \{x \in \mathbb{R} : x \leq 0\}$ die Menge der **nicht positiven** reellen Zahlen,
$\mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$ bzw. $\mathbb{R}^- \setminus \{0\}$ bezeichnet die Menge der **positiven** bzw. **negativen** reellen Zahlen.

Ohne Beweis teilen wir folgenden Satz mit

SATZ 1.2. *Es gibt eine Menge $\mathbb{R}$, welche den Axiomen $\mathcal{A}, \mathcal{M}, \mathcal{D}, \mathcal{O}$ und $\mathcal{V}$ genügt.*

Es ist allerdings denkbar, daß es verschiedene vollständige geordnete Körper gibt, etwa $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$ und $(\tilde{\mathbb{R}}, \oplus, \odot, \preceq)$. Man kann jedoch zeigen, daß es eine Bijektion $f : \mathbb{R} \to \tilde{\mathbb{R}}$ gibt, die mit der algebraischen Struktur und der Ordnungsstruktur in $\mathbb{R}$ verträglich ist, d.h. für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned} f(x+y) &= f(x) \oplus f(y) \\ f(x \cdot y) &= f(x) \odot f(y) \\ x \leq y &\Leftrightarrow f(x) \preceq f(y). \end{aligned}$$

Vom mathematischen Standpunkt aus ist es also nicht notwendig, verschiedene Modelle von $\mathbb{R}$ zu unterscheiden.

2. Folgerungen aus den Körperaxiomen

Aus der Bedeutung der Gleichheit ergibt sich unmittelbar folgendes einleuchtende Resultat.

SATZ 2.1. *Es seien x, y reelle Zahlen und $x = y$. Dann gilt $x + z = y + z$ und $xz = yz$ für alle $z \in \mathbb{R}$.*

SATZ 2.2. *i) Das Neutralelement der Addition ist eindeutig bestimmt.*
ii) Für jede reelle Zahl ist das additive inverse Element ξ eindeutig bestimmt.

BEWEIS. *i)* Es seien 0 und $\tilde{0}$ Neutralelemente der Addition. Setzt man in $(\mathcal{A}3)$ für x das Element $\tilde{0}$ ein, folgt $\tilde{0} + 0 = \tilde{0}$. Da $\tilde{0}$ ein weiteres Neutralelement bezüglich der Addition ist, gilt $\forall x \in \mathbb{R} : x + \tilde{0} = x$, somit auch $0 + \tilde{0} = 0$. Mit $(\mathcal{A}2)$ schließt man $\tilde{0} + 0 = 0$ und wegen $\tilde{0} + 0 = \tilde{0}$ folgt $0 = \tilde{0}$.
ii) Wir nehmen an, ξ und $\tilde{\xi}$ seien zu x inverse Elemente bezüglich der Addition, d.h. $x + \xi = 0$ und $x + \tilde{\xi} = 0$. Addiert man zu der ersten Gleichung $\tilde{\xi}$, folgt

$$(x + \xi) + \tilde{\xi} = 0 + \tilde{\xi} = \tilde{\xi} + 0 = \tilde{\xi}.$$

Andererseits findet man für $(x + \xi) + \tilde{\xi}$ auch die Darstellung

$$(x + \xi) + \tilde{\xi} = x + (\xi + \tilde{\xi}) = x + (\tilde{\xi} + \xi) = (x + \tilde{\xi}) + \xi = 0 + \xi = \xi.$$

Somit gilt $\xi = \tilde{\xi}$. $\square$

Wir bemerken, daß der Beweis des Satzes nur die Axiome $\mathcal{A}$ benützt. Die Aussage des Satzes trifft somit auf jede Abelsche Gruppe (vgl. Bemerkung 1.1) zu, insbesondere auch auf $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$. Es gilt somit auch folgender Satz:

Satz 2.3. *i) Das Neutralelement der Multiplikation ist eindeutig bestimmt.*
ii) Für jede Zahl $x \neq 0$ ist das multiplikative inverse Element $\bar{x}$ eindeutig bestimmt.

Es ist somit gerechtfertigt, die Neutralelemente mit 0 bzw. 1 zu bezeichnen. Das additive Inverse von x bezeichnet man mit $-x$, das multiplikative Inverse mit x^{-1}. Ferner schreibt man oft $x - y$, $\frac{x}{y}$ anstelle von $x + (-y)$ und xy^{-1}.
Es gilt auch eine teilweise Umkehrung von Satz 2.1.

Satz 2.4. *Für alle reellen Zahlen x, y und z gelten folgende Kürzungsregeln:*
i) *Aus $x + z = y + z$ folgt $x = y$.*
ii) *Aus $xz = yz$ und $z \neq 0$ folgt $x = y$.*

Beweis. Wir zeigen nur die zweite Regel. Es sei $x, y, z \in \mathbb{R}$, $z \neq 0$ und $xz = yz$. Nach $\mathcal{M}4$ existiert das multiplikative inverse Element z^{-1} und es gilt $zz^{-1} = 1$. Aus $xz = yz$ folgt mit Satz 2.1 $(xz)z^{-1} = (yz)z^{-1}$. Dies ergibt wegen $\mathcal{M}1$ $x(zz^{-1}) = y(zz^{-1})$, also $x \cdot 1 = y \cdot 1$. Wegen $\mathcal{M}2$ ist dies gleichwertig mit $1 \cdot x = 1 \cdot y$ und mit $\mathcal{M}3$ schließen wir auf $x = y$. $\square$

Nun können wir bereits zeigen, daß die Gleichungen $a + x = b$ und $cy = d$, $c \neq 0$, in $\mathbb{R}$ die eindeutigen Lösungen $x = b - a$ bzw. $y = \frac{c}{d}$ besitzen. Man beachte, daß zwei Behauptungen zu beweisen sind: nämlich die Eindeutigkeit einer Lösung und daß die angegebenen Zahlen tatsächlich die Gleichungen lösen. Wir beginnen mit der Eindeutigkeit einer Lösung von $a+x = b$. Wir gehen von der *Annahme* aus, x sei eine Lösung, und zeigen, daß notwendigerweise $x = b - a$ folgt. Addiert man zu $a + x = b$ das additive inverse Element $-a$, erhält man $(a+x)+(-a) = b+(-a)$. Für die linke Seite ergibt sich $(a + x) + (-a) = (x + a) + (-a) = x + (a + (-a)) = x + 0 = x$, wobei wir der Reihe nach $\mathcal{A}2$, $\mathcal{A}1$, $\mathcal{A}4$ und $\mathcal{A}13$ verwendet haben. Es fehlt noch der Nachweis, daß $x = b - a$ Lösung ist. Dazu berechnen wir $a + x$ und erhalten $a + x = a + (b - a) = a + ((-a) + b) = (a + (-a)) + b = 0 + b = b$. Dieser Beweis verwendet nur Gruppenaxiome, das Resultat gilt daher in jeder Gruppe, insbesondere in $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$. Eine eigene Diskussion der Gleichung $cy = d$ ist daher nicht notwendig.

Satz 2.5. *Für alle $x, y, z, w \in \mathbb{R}$, $z \neq 0$ und $w \neq 0$ gilt:*

a) $0x = 0$	*f)* $(-x) + (-y) = -(x + y)$
b) $-(-x) = x$	*g)* $(-x)(-y) = xy$
c) $(w^{-1})^{-1} = w$	*h)* $\frac{x}{z}\frac{y}{w} = \frac{xy}{zw}$
d) $(-1)x = -x$	*i)* $\frac{x}{z} + \frac{y}{w} = \frac{xw+zy}{zw}$
e) $x(-y) = -(xy) = (-x)y$	

Beweis. a) Aus $0 + 0 = 0$ folgt mit Satz 2.1 $(0 + 0)x = 0x$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Das Distributivgesetz $\mathcal{D}$ ergibt $0x + 0x = 0x$, mit $\mathcal{A}3$ folgt $0x + 0x = 0x + 0 = 0 + 0x$ und schließlich mit Satz 2.4 $0x = 0$.
b) Das additive inverse Element zu x bzw. $-x$ erfüllt $x + (-x) = 0$ bzw. $(-x) + (-(-x)) = 0$. Mit Hilfe von $\mathcal{A}2$ folgert man

$$x + (-x) = (-(-x)) + (-x).$$

Dies ergibt mit Satz 2.4 $x = -(-x)$.
c) analog zu b).
d) Wir zeigen: $(-1)x$ ist das additive inverse Element zu x, d.h. $(-1)x + x = 0$. Dies folgt aus

$$(-1)x + x \overset{\mathcal{M}3}{=} (-1)x + 1x \overset{\mathcal{D}}{=} (-1+1)x \overset{\mathcal{A}4}{=} 0x \overset{\text{a)}}{=} 0.$$

e) Mit Hilfe des Assoziativgesetzes $\mathcal{M}1$ und der bereits bewiesenen Regel d) schließt man

$$x(-y) \overset{\text{d)}}{=} x((-1)y) \overset{\mathcal{M}1}{=} (x(-1))y \overset{\mathcal{M}2}{=} ((-1)x)y \overset{d)}{=} (-x)y$$

und weiter

$$(-x)y \overset{d)}{=} ((-1)x)y \overset{\mathcal{M}1}{=} (-1)(xy) \overset{d)}{=} -(xy).$$

f) Wir zeigen, $(-x) + (-y)$ ist das additive inverse Element zu $x + y$. Dies folgt aus

$$\begin{aligned}(x+y) + ((-x) + (-y)) &\overset{\mathcal{A}2}{=} (x+y) + \big((-y) + (-x)\big)\\ &\overset{\mathcal{A}1}{=} \big((x+y) + (-y)\big) + (-x) \overset{\mathcal{A}1}{=} \big(x + (y + (-y))\big) + (-x)\\ &\overset{\mathcal{A}2}{=} ((y + (-y)) + x) + (-x) \overset{\mathcal{A}1}{=} (y + (-y)) + (x + (-x)) \overset{\mathcal{A}4}{=} 0 + 0 \overset{\mathcal{A}3}{=} 0.\end{aligned}$$

g) Die Behauptung folgt aus

$$(-x)(-y) \overset{\text{e)}}{=} -\big((-x)y\big) \overset{\text{e)}}{=} \big(-(-x)\big)y \overset{\text{b)}}{=} xy.$$

h) Wir zeigen zuerst: $\frac{1}{z}\frac{1}{w} = \frac{1}{zw}$, d.h. $z^{-1}w^{-1} = (zw)^{-1}$ $(*)$
Dies folgt aus

$$(zw)\cdot(z^{-1}w^{-1}) \overset{\mathcal{M}2}{=} (wz)(z^{-1}w^{-1}) \overset{\mathcal{M}1}{=} w(zz^{-1})w^{-1} \overset{\mathcal{M}4}{=} w(1w^{-1}) \overset{\mathcal{M}3}{=} ww^{-1} \overset{\mathcal{M}4}{=} 1.$$

Somit gilt:

$$\frac{x}{z}\frac{y}{w} = (xz^{-1})(yw^{-1}) = x(z^{-1}y)w^{-1} = (xy)(z^{-1}w^{-1}) \overset{(*)}{=} xy(zw)^{-1} = \frac{xy}{zw}.$$

i) Mit Hilfe von h) ergibt sich

$$\begin{aligned}\frac{x}{z} + \frac{y}{w} &= \frac{x}{z}\cdot 1 + \frac{y}{w}\cdot 1 = \frac{x}{z}\frac{w}{w} + \frac{y}{w}\frac{z}{z}\\ &\overset{h)}{=} \frac{xw}{zw} + \frac{yz}{wz} \overset{\mathcal{D}}{=} (xw + yz)(zw)^{-1} = \frac{xw + yz}{zw}\end{aligned}$$

□

Satz 2.6. *Das Produkt von zwei reellen Zahlen ist genau dann ungleich Null, wenn beide Faktoren ungleich Null sind, d.h.* $\forall xy \in \mathbb{R}\colon xy \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 0 \wedge y \neq 0$.

Beweis. i) „$\Leftarrow$" Wir führen einen Widerspruchsbeweis: Angenommen es gäbe $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x \neq 0$, $y \neq 0$ und $xy = 0$. Somit existiert das multiplikative inverse Element x^{-1} zu x und es gilt $xx^{-1} = 1$. Aus $xy = yx = 0$ folgt mit Satz 2.1 $(yx)x^{-1} = 0\cdot x^{-1} = 0$, also $0 = (yx)x^{-1} = y(xx^{-1}) = y\cdot 1 = y$ im Widerspruch zur Voraussetzung $y \neq 0$.

ii) „$\Rightarrow$" Wir führen den Beweis indirekt und zeigen:
$\forall x, y \in \mathbb{R} : x = 0 \vee y = 0 \Rightarrow xy = 0$. Dies folgt jedoch unmittelbar aus 2.5 (a). □

Bemerkung 2.7. 1) Satz 2.6 ist äquivalent zu der Feststellung, daß das Produkt zweier reeller Zahlen genau dann Null ist, wenn mindestens einer der beiden Faktoren Null ist. In den Anwendungen führt diese Situation häufig zu einer Fallunterscheidung.
2.) Die Beweise dieses Abschnittes verwenden nur die Axiome $\mathcal{A}, \mathcal{M}, \mathcal{D}$. Die Behauptungen treffen daher in jedem Körper zu.

3. Folgerungen aus den Ordnungsaxiomen

Wir erinnern an den Zusammenhang zwischen der Ordnung $\leq$ und der strikten Ordnung $<$ auf $\mathbb{R}$: $x \leq y \Leftrightarrow x < y \vee x = y$ bzw. $x < y \Leftrightarrow x \leq y \wedge x \neq y$ (vgl. I-5.12). Da $\mathbb{R}$ total geordnet ist, trifft für alle $x, y \in \mathbb{R}$ genau eine der drei Alternativen $x < y$, $x = y$, $y < x$ zu. Gilt für $x, y \in \mathbb{R}$, $x \leq y$ und $y \leq x$, folgt daher $x = y$. Auch die strikte Ordnung ist mit der Addition und Multiplikation verträglich, es gilt

($\mathcal{OA}^*$) $\forall x, y, z \in \mathbb{R}\colon x < y \Rightarrow x + z < y + z$,

($\mathcal{OM}^*$) $\forall x, y, z \in \mathbb{R}\colon x < y \wedge 0 < z \Rightarrow xz < yz$,

denn wäre etwa $x + z = y + z$, so müßte nach Satz 2.4 $x = y$ gelten. Wir überlassen es dem Leser, die folgenden Resultate für die strikte Ordnung $<$ auf die Ordnung $\leq$ zu übertragen.

Satz 3.1. *Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt*

a) $x < 0 \Leftrightarrow -x > 0$ *c)* $x < y \Leftrightarrow y - x > 0$
b) $x > 0 \Leftrightarrow -x < 0$ *d)* $x < y \Leftrightarrow -y < -x$.

Beweis. c) „$\Rightarrow$: " Aus $x < y$ folgt mit $\mathcal{OA}^*$ $x + (-x) < y + (-x)$, also $0 < y - x$.
„$\Leftarrow$: " Es sei $y - x > 0$. Mit $\mathcal{OA}^*$ folgt $y + (-x) + x > 0 + x$, somit $y + 0 > x$. Dies hat $x < y$ zur Folge.
a) Setze $y = 0$ in c).
b) Ersetze x durch $-x$ in a) und verwende $-(-x) = x$ (Satz 2.5-b).
d) $x < y \overset{c)}{\Leftrightarrow} y - x > 0 \Leftrightarrow -x - (-y) > 0 \overset{c)}{\Leftrightarrow} -y < -x$. □

Satz 3.2. *Für alle $x, y, z, w \in \mathbb{R}$ gilt*

a) $x < y \wedge z < w \Rightarrow x + z < y + w$,
b) $0 < x < y \wedge 0 < z < w \Rightarrow xz < yw$.

Beweis. a) Es seien $x, y, z, w \in \mathbb{R}$, $x < y$ und $z < w$. Wegen $\mathcal{OA}^*$ gilt dann auch $x + z < y + z$ und $y + z < y + w$. Da die strikte Ordnung $<$ transitiv ist, folgt $x + z < y + w$.
b) analog. □

Satz 3.2 stellt also sicher, daß gleichsinnige Ungleichungen addiert werden dürfen; gleichsinnige Ungleichungen, in denen sämtliche Glieder nicht negativ sind, dürfen multipliziert werden.

SATZ 3.3. *Das Produkt zweier reeller Zahlen ist genau dann positiv, wenn beide Faktoren ungleich Null sind und dasselbe Vorzeichen haben.*

BEWEIS. „$\Leftarrow$: “ Für $x > 0$ und $y > 0$ folgt die Behauptung aus $\mathcal{OM}^*$ und Satz 2.5. Falls $x < 0$ und $y < 0$ folgt $-x > 0$ und $-y > 0$. Nach dem vorhin Bewiesenen gilt daher $(-x)(-y) > 0$. Nach Satz 2.5 ist aber $(-x)(-y) = xy$, somit gilt $xy > 0$.
„$\Rightarrow$: “ Wir führen einen Widerspruchsbeweis und nehmen ohne Beschränkung der Allgemeinheit an, es gäbe relle Zahlen x, y mit $xy > 0$, $x \leq 0$ und $y > 0$. Ist $x = 0$ ergibt sich ein Widerspruch zu Satz 2.5–(a). Es sei $x < 0$, also nach Satz 3.1 $-x > 0$, und nach dem ersten Teil des Beweises ergibt sich

$$(-x)y = -(xy) > 0.$$

Mit Satz 3.1 folgert man $xy < 0$. □

KOROLLAR 3.4. Für jede reelle Zahl x ungleich Null gilt $x \cdot x > 0$. Insbesondere folgt $1 > 0$.

SATZ 3.5. *Für alle $x, y, z \in \mathbb{R}$ gilt*

i) $x < y \wedge z < 0 \Rightarrow yz < xz$,
ii) $0 < x \Rightarrow 0 < x^{-1}$,
iii) $0 < x < y \Rightarrow 0 < y^{-1} < x^{-1}$.

BEWEIS. i) Es sei $z < 0$, also $-z > 0$. Multipliziert man die Ungleichung $x < y$ mit $(-z)$, erhält man $x(-z) < y(-z)$, bzw. $-(xz) < -(yz)$. Nach Satz 3.1 ist dies gleichwertig mit $yz < xz$.
ii) Aus dem Korollar 3.4 ergibt sich $0 < 1 = xx^{-1}$, wegen Satz 3.3 und $0 < x$ muß auch $0 < x^{-1}$ gelten.
iii) Man zeige $x^{-1}y^{-1} > 0$ und multipliziere $0 < x < y$ mit $x^{-1}y^{-1}$. □

Der Beweis der folgenden einfachen Aussage über das **arithmetische Mittel** $\frac{a+b}{2}$ zweier reeller Zahlen a und b sei dem Leser überlassen. Das Symbol 2 steht für die reelle Zahl $1 + 1$.

SATZ 3.6. *Zwischen zwei verschiedenen reellen Zahlen liegt stets eine weitere reelle Zahl, genauer $\forall a, b \in \mathbb{R}\colon a < b \Rightarrow a < \frac{a+b}{2} < b$.*

Insbesondere folgt aus Satz 3.6, daß es keine kleinste positive reelle Zahl gibt.

KOROLLAR 3.7. Es seien $a, b \in \mathbb{R}$ und $a < b + \varepsilon$ für beliebiges $\varepsilon > 0$. Dann ist $a \leq b$.

BEWEIS. Wir führen einen Beweis durch Widerspruch und nehmen an es gäbe reelle Zahlen a, b mit $a > b$ und $a < b + \varepsilon$ für alle $\varepsilon > 0$. Dann ist $a - b > 0$ und daher auch $b < b + \frac{a-b}{2} = \frac{a+b}{2}$. Wegen Satz 3.6 muß $\frac{a+b}{2} < a$ gelten, dies widerspricht der Voraussetzung $a < b + \varepsilon$ für $\varepsilon = \frac{a-b}{2} > 0$. □

Wir notieren den nützlichen Spezialfall $a \geq 0$ und $b = 0$:

KOROLLAR 3.8. Es sei $x \geq 0$ und für alle $\varepsilon > 0$ gelte $x \leq \varepsilon$. Dann ist $x = 0$.

DEFINITION 3.9. *Für jede reelle Zahl x heißt*

$$|x| := \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ -x, & x < 0, \end{cases}$$

absoluter Betrag *(Betrag) von x und*

$$\mathit{sign}\, x := \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

heißt ***Signum (Vorzeichen)*** *von x.*

Das Vorzeichen und der Betrag einer reellen Zahl x sind verknüpft durch die Beziehung

$$x = |x| \operatorname{sign} x.$$

Folgende Eigenschaften des Betrages sind eine unmittelbare Konsequenz der Definition.

LEMMA 3.10. *Es seien x, $b \in \mathbb{R}$ und $b \geq 0$. Dann gilt*
a) $x \leq |x|$ *b)* $|x| = |-x|$,
c) $|x| \geq 0$ *d)* $|x| \leq b \Leftrightarrow -b \leq x \leq b$.

BEWEIS. Wir zeigen nur die Eigenschaft d). Es seien x, $b \in \mathbb{R}$, $b \geq 0$ und $|x| \leq b$. Wir machen eine Fallunterscheidung nach dem Vorzeichen von x. Ist $x \geq 0$, dann gilt $|x| = x$, also auch $x \leq b$. Die zweite Ungleichung $x \geq -b$ folgt aus der Transitivität der Ordnung. Ist $x \leq 0$, also $|x| = -x$, ist die Ungleichung $|x| \leq b$ gleichwertig mit $-x \leq b$. Aus Satz 3.1 folgt $x \geq -b$. Die Ungleichung $x \leq b$ ist wieder trivialerweise erfüllt. In jedem Falle gilt somit $-b \leq x \leq b$. Gehen wir nun umgekehrt von den Ungleichungen $x \leq b$ und $x \geq -b$ aus. Für $x \geq 0$ folgt direkt $|x| \leq b$. Ist $x \leq 0$ schließen wir von $x \geq -b$ auf $-x \leq b$. Dies ist gleichwertig mit $|x| \leq b$ □

SATZ 3.11. *Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt*

a) $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
b) $|xy| = |x||y|$
c) $|x + y| \leq |x| + |y|$ ***Dreiecksungleichung***
d) $\big||x| - |y|\big| \leq |x - y|$.
e) $2|x||y| \leq |x||x| + |y||y|$

BEWEIS. a) Für $x = 0$ folgt aus der Definition $|x| = 0$. Ist $x \neq 0$, dann ist auch $-x \neq 0$, somit ergibt sich ebenfalls $|x| \neq 0$.
b) Wir machen eine Fallunterscheidung und betrachten zuerst den Fall $x \geq 0$ und $y \geq 0$. Dann gilt $xy \geq 0$, $|x| = x$ und $|y| = y$. Es folgt $|xy| = xy = |x||y|$.

Als zweiten Fall untersuchen wir $x \geq 0$ und $y \leq 0$. Nun ist $xy \leq 0$, $|x| = x$ und $|y| = -y$. Es folgt $|xy| = -(xy) = x(-y) = |x||y|$.
Durch Vertauschen von x und y führt man den Fall $x \leq 0$ und $y \geq 0$ auf die eben betrachteten Situationen zurück. Es bleibt der Fall $x \leq 0$ und $y \leq 0$. Dann ist nach Satz 3.3 $xy \geq 0$ und $|x| = -x$, $|y| = -y$. Aus Satz 2.5-g folgt somit $|x| \cdot |y| = (-x)(-y) = xy = |xy|$.
c) Aus Lemma 3.10 folgt $-|x| \leq x \leq |x|$ und $-|y| \leq y \leq |y|$. Addiert man die Ungleichungen ergibt sich

$$-(|x| + |y|) = -|x| - |y| \leq x + y \leq |x| + |y|,$$

also $|x + y| \leq |x| + |y|$ nach 3.10-d).
d) Mit Hilfe der Dreiecksungleichung ergibt sich $|x| = |(x-y)+y| \overset{c}{\leq} |x-y|+|y|$ und somit $|x|-|y| \leq |x-y|$. Vertauscht man x und y erhält man $|y|-|x| \leq |y-x| = |x-y|$ und daraus mit Satz 3.1 $-|x-y| \leq -(|y|-|x|) = |x|-|y|$. Insgesamt finden wir also $-|x-y| \leq |x|-|y| \leq |x-y|$, und daher

$$\big||x| - |y|\big| \leq |x - y|.$$

e) Mit Hilfe von Korollar 3.4 schließen wir $0 \leq (|x|-|y|)(|x|-|y|) = |x||x| - |x||y| - |y||x| + |y||y| = |x||x| - (1+1)|x||y| + |y||y| = |x||x| - 2|x||y| + |y||y|$. Wegen $\mathcal{OA}$ zeigt dies die behauptete Ungleichung. □

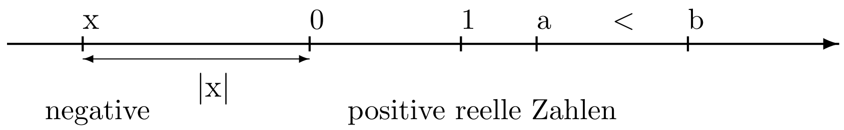
Bemerkung 3.12. Die Beweise dieses Abschnittes stützen sich nur auf Eigenschaften, die für jeden Körper zutreffen, und auf das Axiom $\mathcal{O}$. Die Behauptungen gelten demnach in jedem geordneten Körper.

Definition 3.13. *Es seien $a, b \in \mathbb{R}$ und $a \leq b$.*

i) $[a,b] := \{x \in \mathbb{R} \colon a \leq x \leq b\}$ *heißt **abgeschlossenes Intervall**,*
ii) $(a,b) := \{x \in \mathbb{R} \colon a < x < b\}$ *heißt **offenes Intervall**,*
iii) $(a,b] := \{x \in \mathbb{R} \colon a < x \leq b\}$, $[a,b) := \{x \in \mathbb{R} \colon a \leq x < b\}$ *heißen **halboffene Intervalle**.*

*a ist **linker**, b **rechter Endpunkt** des Intervalls.*

Ist $a = b$, so ist $[a, b] = \{a\}$, die anderen Intervalle sind leer.
Da $\mathbb{R}$ linear geordnet ist, läßt sich $\mathbb{R}$ (wie jede linear geordnete Menge) mit Hilfe einer Geraden folgendermaßen veranschaulichen: Auf einer beliebigen Geraden in der Ebene werden zwei Punkte ausgezeichnet, die wir mit den reellen Zahlen 0 und 1 identifizieren. Es liege etwa 0 links von 1. Jeder reellen Zahl entspricht ein eindeutig bestimmter Punkt auf dieser Zahlengeraden. Es gilt $a < b$ genau dann, wenn der Punkt a links von b liegt. Den positiven reellen Zahlen entsprechen also Punkte jenes Halbstrahles, in dem der mit 1 bezeichnete Punkt liegt. In dieser Phase der Diskussion von $\mathbb{R}$ können wir aber noch nicht sicherstellen, daß umgekehrt jedem Punkt der Geraden tatsächlich genau eine reelle Zahl entspricht.



Reelle Zahlengerade

4. Die natürlichen Zahlen

Wir sind von einer axiomatischen Beschreibung der reellen Zahlen ausgegangen. Obwohl die natürlichen Zahlen vertraute Objekte sind, müssen wir nun zeigen, wie sie mit Hilfe unseres Axiomensystems als Teilmenge von $\mathbb{R}$ charakterisiert werden können.

Definition 4.1. *1) Für jedes $x \in \mathbb{R}$ heißt $x+1$ Nachfolger von x.*
*2) Eine Teilmenge $I \subset \mathbb{R}$ heißt **induktiv** $\underset{Def}{\Leftrightarrow}$*

i) $1 \in I$
ii) $\forall x \in \mathbb{R} \colon x \in I \Rightarrow x+1 \in I.$

Beispielsweise sind die Mengen $\mathbb{R}$ und $\{x \in \mathbb{R} : x \geq 1\}$ induktiv.

Lemma 4.2. *Es sei $\mathcal{A} \neq \emptyset$ eine Familie induktiver Mengen. Dann ist auch $\cap\mathcal{A}$ induktiv.*

Beweis. Da $1 \in A$ für jedes $A \in \mathcal{A}$ gilt, folgt $1 \in \cap\mathcal{A}$. Es sei nun $x \in \cap\mathcal{A}$, d.h. $x \in A$ für alle $A \in \mathcal{A}$. Da jede Menge A in $\mathcal{A}$ induktiv ist, folgt $x+1 \in A$ für jedes $A \in \mathcal{A}$, d.h. $x+1 \in \cap\mathcal{A}$. □

Es bezeichne $\mathfrak{J}$ das System aller induktiven Mengen. Wir haben uns bereits von $\mathfrak{J} \neq \emptyset$ überzeugt. Nach Lemma 4.2 ist $\cap\mathfrak{J}$ selbst induktiv. Offenbar ist $\cap\mathfrak{J}$ die kleinste induktive Menge.

Definition 4.3. *i) $\mathbb{N} := \cap\mathfrak{J}$ heißt die Menge der **natürlichen Zahlen**. Ferner setzen wir $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$.*
ii) $n \in \mathbb{N}$ heißt gerade $\underset{Def}{\Leftrightarrow} \exists m \in \mathbb{N} \colon n = 2m$
$n \in \mathbb{N}$ heißt ungerade $\underset{Def}{\Leftrightarrow} \exists m \in \mathbb{N}_0 \colon n = 2m+1$

Es ist üblich und zweckmäßig, für folgende Nachfolger von 1 spezielle Symbole zu verwenden: $2 := 1+1$, $3 := 2+1, \ldots, 10 := 9+1$. Wir werden später zeigen, daß wir mit den Symbolen $(0, 1, ..., 9, +, -,$ „,“) sämtliche reellen Zahlen darstellen können.

Aus der Definition 4.3 ergibt sich für jede induktive Menge A, $\mathbb{N} \subset A$. Dieser Umstand ist die Grundlage für das überaus nützliche Induktionsprinzip.

Satz 4.4 (Prinzip der vollständigen Induktion). *Es sei $P(n)$ eine Aussageform über $\mathbb{N}$ und es gelte*

i) $P(1)$,
ii) $\forall n \in \mathbb{N} \colon P(n) \Rightarrow P(n+1)$.

Dann gilt $P(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$, d.h. $\forall n \in \mathbb{N} \colon P(n)$.

BEWEIS. Es sei $E = \{n \in \mathbb{N} \colon P(n)\} \subset \mathbb{N}$ die Erfüllungsmenge von P. Wegen der Voraussetzungen ist E induktiv, daher gilt auch $\mathbb{N} \subset E$. Somit folgt $\mathbb{N} = E$. □

BEMERKUNG 4.5. Oft trifft eine Aussageform $P(n)$ erst für $n_0 > 1$ zu. Man überzeuge sich davon, daß das Prinzip der vollständigen Induktion auch für beliebigen Induktionsanfang $n_0 \in \mathbb{N}$ gilt. Mit Hilfe der Transformation $n = n_0 + k - 1$ und $\tilde{P}(k) = P(n_0 + k - 1)$ führt man den Fall $n_0 > 1$ auf Satz 4.4 zurück.

SATZ 4.6. *Es seien $n, m \in \mathbb{N}$. Dann gilt*

$$\begin{array}{llll} a) & n \geq 1, & c) & n + m \in \mathbb{N}, \\ b) & n - 1 \in \mathbb{N}_0, & d) & nm \in \mathbb{N}. \end{array}$$

BEWEIS. a) Übung.
b) Es sei $G = \{n \in \mathbb{N} \colon n - 1 \in \mathbb{N}_0\} \subseteq \mathbb{N}$. Wir zeigen: G ist induktiv. Offensichtlich gilt $1 \in G$. Für $n \in G$ schließt man

$$(n + 1) - 1 = n + (1 - 1) = n \in \mathbb{N}_0, \text{ d.h. } n + 1 \in G. \text{ Es folgt } G = \mathbb{N}.$$

c) Es sei $P(n)$ die Aussageform $\forall m \in \mathbb{N} \colon n + m \in \mathbb{N}$. Wegen der Induktivität von $\mathbb{N}$ gilt $\forall m \in \mathbb{N} \colon 1 + m \in \mathbb{N}$, d.h. $P(1)$. Es gelte $P(n)$, d.h. $n + m \in \mathbb{N}$ für jedes $m \in \mathbb{N}$. Wir verwenden moch einmal die Induktivität von $\mathbb{N}$, und folgern $(n + m) + 1 = (n+1) + m \in \mathbb{N}$ für alle $m \in \mathbb{N}$, also $\forall m \in \mathbb{N} \colon (n+1) + m \in \mathbb{N}$, d.h. $P(n+1)$. Wegen Satz 4.4 trifft $P(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ zu.
d) Übung. □

$\mathbb{N}$ ist somit abgeschlossen bezüglich der Addition und Multiplikation.

SATZ 4.7. *Für natürliche Zahlen n und m gilt $n > m$ genau dann, wenn $n - m \in \mathbb{N}$.*

BEWEIS. "$\Rightarrow$" Es sei $P(m)$ die Aussageform $\forall n \in \mathbb{N} \colon m < n \Rightarrow n - m \in \mathbb{N}$. Aus $1 < n$ folgt mit $(\mathcal{OA}^*)$ $0 < n - 1$. Nach Satz 4.6 trifft $n - 1 \in \mathbb{N}_0$ zu, also $n - 1 = 0$ oder $n - 1 \in \mathbb{N}$. Wegen $n - 1 > 0$ gilt zwangsläufig $n - 1 \in \mathbb{N}$, d.h. $P(1)$. Es gelte nun $P(m)$ und $n \in \mathbb{N}$ erfülle $m + 1 < n$, (n sonst beliebig), d.h. $m < n - 1$. Aus $1 \leq m < n - 1$ schließen wir auf $n - 1 \in \mathbb{N}$. Somit folgt aus $m < n - 1$ wegen $P(m)$ die Gültigkeit von $(n - 1) - m = n - (m + 1) \in \mathbb{N}$, also von $P(m + 1)$.
"$\Leftarrow$" Es sei $n - m = l$ für ein $l \in \mathbb{N}$. Die Behauptung folgt nun aus $n - m = l \geq 1 > 0$ durch Addition von m. □

KOROLLAR 4.8. Für natürliche Zahlen n und m gilt $n > m$ genau dann, wenn $n \geq m + 1$.

KOROLLAR 4.9. Zwischen zwei unmittelbar aufeinander folgenden natürlichen Zahlen und zwischen Null und 1 liegt keine weitere natürliche Zahl.

BEWEIS. Formal geschrieben lautet die Behauptung $\forall m \in \mathbb{N}_0 \colon (m, m+1) \cap \mathbb{N} = \emptyset$. Wir führen den Beweis durch Widerspruch und nehmen vorerst an, es gäbe n, $m \in \mathbb{N}$ mit $m < n < m + 1$. Wegen Satz 4.7 gilt $n - m \in \mathbb{N}$, also nach Satz 4.6 $n - m \geq 1$.

Aus $n < m+1$ ergibt sich der Widerspruch $n-m < 1$. Für $m = 0$ erhalten wir einen Widerspruch zu 4.6–(a). □

Definition 4.10. *$M \subset \mathbb{R}$ sei nicht leer.*

i) *$\mu \in \mathbb{R}$ heißt **Minimum** von M, $\mu = \min M$, $\underset{Def}{\Leftrightarrow} \mu \in M \wedge \forall x \in M\colon \mu \leq x$.*

ii) *$\nu \in \mathbb{R}$ heißt **Maximum** von M, $\nu = \max M$, $\underset{Def}{\Leftrightarrow} \nu \in M \wedge \forall x \in M\colon x \leq \nu$.*

Nicht jede Teilmenge reeller Zahlen besitzt Minimum oder Maximum, z.B. $\mathbb{R}$ oder $(0,1)$. Existiert ein Maximum (Minimum) einer Teilmenge reeller Zahlen, so ist diese Zahl wegen der linearen Ordnung in $\mathbb{R}$ natürlich eindeutig bestimmt.

Satz 4.11 (Wohlordnungssatz). *Jede nicht leere Menge von natürlichen Zahlen besitzt ein Minimum.*

Beweis. Nehmen wir an, es gäbe $A \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \setminus \emptyset$ und A besitze kein Minimum. Ferner sei $S = \{n \in \mathbb{N}\colon (\forall a \in A\colon n < a)\}$. Wegen Satz 4.6 a) ist $1 \in S$, sonst wäre $1 = \min A$. Es sei $n \in S$ und somit nach Korollar 4.8 $n+1 \leq a$ für alle $a \in A$. Wäre $n+1$ nicht Element von S, dann gäbe es $\mu \in A$ mit $n < \mu \leq n+1$. Wegen Korollar 4.9 müßte $\mu = n+1$ gelten. Dies hätte $\mu = \min A$ zur Folge, im Widerspruch zur Wahl von A. Also gilt $n+1 \in S$ und somit $S = \mathbb{N}$. Dies ist ein Widerspruch zu $S \subsetneq \mathbb{N}$. □

Manchmal kommt es vor, daß für den Induktionsschritt nicht nur die unmittelbar vorangehende Aussage gebraucht wird, sondern alle vorausgehenden. Als Anwendung des Wohlordnungssatzes zeigen wir folgende Variante des Induktionsprinzipes.

Satz 4.12. *$P(n)$ sei eine Aussageform über $\mathbb{N}$, $n_0 \in \mathbb{N}$ mit den Eigenschaften:*

i) *$P(n_0)$,*

ii) *$\forall n \geq n_0 \forall k \in \mathbb{N}\colon (n_0 \leq k \leq n \wedge P(k)) \Rightarrow P(n+1)$.*

Dann gilt $P(n)$ für alle $n \geq n_0$.

Beweis. Wir führen einen Widerspruchsbeweis und nehmen an, es gelte i) und ii), aber die Aussageform $P(n)$ trifft nicht für alle $n \in \mathbb{N}$ zu. Dann ist die Menge $\{n \in \mathbb{N}\colon n \geq n_0 \wedge \neg P(n)\}$ nicht leer und besitzt wegen des Wohlordnungssatzes ein Minimum $m_0 \in \mathbb{N}$. Dann gilt $P(k)$ für alle $n_0 \leq k \leq m_0 - 1$ und somit wegen ii) auch für $k = m_0$. Dies ist wegen der Bedeutung des Index m_0 nicht möglich. □

Definition 4.13. *$x \in \mathbb{R}$ heißt **ganze Zahl** $\underset{Def}{\Leftrightarrow} x \in \mathbb{N}_0 \vee -x \in \mathbb{N}_0$.*

Die Menge der ganzen Zahlen wird mit $\mathbb{Z}$ bezeichnet.

Es sei dem Leser überlassen, die Sätze 4.6 c), d), 4.7 und Korollar 4.8, 4.9 auf $\mathbb{Z}$ zu übertragen.

Das Prinzip der vollständigen Induktion ist auch die Grundlage für sogenannte *rekursive Definitionen*, bei denen für alle $n \in \mathbb{N}$ Begriffe $B(n)$ definiert werden, indem man auf die bereits erklärten Begriffe $B(1), \ldots, B(n-1)$ zurückgreift. Betrachten wir zum Beispiel die Folge 1, 2, 4, 8, 16,... (der Begriff einer Folge wird später genauer definiert). Die Ellipsis ... suggeriert das Bildungsgesetz $a_n = 2^{n-1}$, $n \in \mathbb{N}$. Dieselbe Folge kann jedoch auch rekursiv beschrieben werden. Dazu setzt man $a_1 = 1$ und $a_{n+1} = 2a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Aus a_1 ergibt sich a_2, aus a_2 wiederum a_3 usw. Durch die Rekursionsvorschrift wird zumindest in diesem Beispiel eine Folge eindeutig bestimmt. Das rekursive Vorgehen kann durch folgenden Satz gerechtfertigt werden.

Satz 4.14 (Rekursionssatz). *Es sei B eine nichtleere Menge und $b \in B$. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei eine Abbildung $F_n\colon B^n \to B$ gegeben. Dann gibt es genau eine Abbildung $\varphi\colon \mathbb{N}_0 \to B$ mit den Eigenschaften*

(1) $\varphi(0) = b$.

(2) $\varphi(n+1) = F_{n+1}(\varphi(0), \ldots, \varphi(n))$ *für alle* $n \in \mathbb{N}_0$.

Natürlich kann die Rekursion auch bei jedem $n_0 \in \mathbb{N}_0$ beginnen.

Beweis. Wir zeigen zunächst durch vollständige Induktion, daß es höchstens eine derartige Abbildung φ geben kann. Angenommen es gäbe zwei Abbildungen φ und $\psi\colon \mathbb{N}_0 \to B$ mit $\varphi(0) = \psi(0) = b$ und

$$\begin{aligned} \varphi(n+1) &= F_{n+1}(\varphi(0), \ldots, \varphi(n)) \\ \psi(n+1) &= F_{n+1}(\psi(0), \ldots, \psi(n)) \end{aligned}$$

für $n \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt $\varphi(0) = \psi(0)$. Aus der Induktionsannahme $\varphi(k) = \psi(k)$ für $0 \leq k \leq n$ folgt $\varphi(n+1) = \psi(n+1)$ und daher $\varphi = \psi$ nach dem Induktionsprinzip in der Form von Satz 4.12. Wir konstruieren nun die gesuchte Funktion φ aus Hilfsfunktionen $\varphi_n\colon \{0, \ldots, n\} \to B$, $n \in \mathbb{N}_0$, mit folgenden Eigenschaften

$$\begin{aligned} \varphi_n(0) &= b, \\ \varphi_n(k) &= \varphi_k(k), \\ \varphi_n(k+1) &= F_{k+1}(\varphi(0), \ldots, \varphi(k)), \qquad 0 \leq k \leq n-1. \end{aligned} \tag{$*$}$$

Definiert man nun $\varphi\colon \mathbb{N}_0 \to B$ durch

$$\varphi(n) = \begin{cases} b, & n = 0, \\ \varphi_n(n), & n \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

folgt aus den Eigenschaften von ϕ_n

$$\begin{aligned} \varphi(n+1) &= \varphi_{n+1}(n+1) = F_{n+1}(\varphi_{n+1}(0), \ldots, \varphi_{n+1}(n)) \\ &= F_{n+1}(\varphi_0(0), \ldots, \varphi_n(n)) = F_{n+1}(\varphi(0), \ldots, \varphi(n)), \end{aligned}$$

d.h. φ ist die gesucht Funktion.

Wir zeigen nun induktiv die Existenz der Hilfsfunktionen φ_n. Für $n = 0$ ist φ_0 allein durch $\varphi_0(0) = b$ bestimmt. Die beiden zusätzlichen Eigenschaften in $(*)$ sind trivial erfüllt, da es keine natürliche Zahl $0 \leq k < 0$ gibt, für welche sie nicht zutreffen könnten. Für den Induktionsschritt nehmen wir an, es seien bereits Funktionen

$\varphi_0, \ldots, \varphi_n$ mit den in $(*)$ geforderten Eigenschaften konstruiert und setzen

$$\varphi_{n+1}(k) = \begin{cases} \varphi_n(k) & 0 \le k \le n \\ F_{n+1}(\varphi_n(0), \ldots, \varphi_n(n) & k = n+1. \end{cases}$$

Aus der Induktionsvoraussetzung ergibt sich dann

$$\varphi_{n+1}(k) = \varphi_n(k) = \varphi_k(k), \qquad 0 \le k \le n$$

(für $k = n$ entspricht dies der Definition von φ_{n+1}) und auch

$$\begin{aligned} \varphi_{n+1}(k+1) = \varphi_n(k+1) &= F_{k+1}(\varphi_n(0), \ldots, \varphi_n(k)) \\ &= F_{k+1}(\varphi_{n+1}(0), \ldots, \varphi_{n+1}(k)), \qquad 0 \le k \le n-1. \end{aligned}$$

Für $k = n$ ergibt sich ebenfalls

$$\begin{aligned} \varphi_{n+1}(n+1) &= F_{n+1}(\varphi_n(0), \ldots, \varphi_n(n)) \\ &= F_{n+1}(\varphi_{n+1}(0), \ldots, \varphi_{n+1}(n)). \end{aligned}$$

Somit ist der Induktionsschritt bewiesen und die Existenz der Funktionen φ_k gesichert. □

Definition 4.15. *Es sei $x \in \mathbb{R}$. Wir definieren*

$$x^1 := x, \quad x^{n+1} := x^n x, \quad n \in \mathbb{N},$$

Man nennt x^n, $n \in \mathbb{N}_0$, n-te ***Potenz*** *von x, x heißt* **Basis** *und n* **Exponent**.
Für $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$setzen wir

$$x^0 := 1, \quad x^{-n} := (x^n)^{-1}, n \in \mathbb{N}.$$

Diese Definition kann folgendermaßen auf den Rekursionssatz zurückgeführt werden: setze $B = \mathbb{R}$, $b = x$ und $F_n \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $F_n(x_1 \ldots, x_n) = x_n x$. Die Funktion φ erfüllt dann $\varphi(1) = x$ und $\varphi(n+1) = \varphi(n)x$, $n \in \mathbb{N}$. Anstelle von $\varphi(n)$ schreibt man x^n.

Lemma 4.16. *Es sei $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}$ und $x \neq 0$. Dann gilt $(x^n)^{-1} = (\frac{1}{x})^n$.*

Beweis. Wir führen einen Induktionsbeweis. Für $n = 1$ stimmt die Behauptung mit der Definition des multiplikativen inversen Elementes von x überein. Es gelte $\frac{1}{x^n} = (\frac{1}{x})^n$. Der Induktionsschritt ergibt sich aus

$$(\frac{1}{x})^{n+1} = (\frac{1}{x})^n \frac{1}{x} = \frac{1}{x^n}\frac{1}{x} = \frac{1}{x^n x} = \frac{1}{x^{n+1}} = (x^{n+1})^{-1}.$$

□

Satz 4.17 (Potenzgesetze). *1.) Für $x, y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $n, m \in \mathbb{Z}$ gilt*

a) $x^m x^n = x^{m+n}$,
b) $x^n y^n = (xy)^n$,
c) $(x^m)^n = x^{mn}$,

Für $n, m \in \mathbb{N}$ gelten a)–c) für $x, y \in \mathbb{R}$.
2.) Für $n \in \mathbb{N}$ und $x \geq 0, y > 0$ gilt

$$x < y \Leftrightarrow x^n < y^n.$$

Beweis. Wir zeigen nur a), die übrigen Aussagen möge der Leser als Übung beweisen. Für $m = 0$ oder $n = 0$ ist die Behauptung klar. Es sei $m \in \mathbb{Z}$ beliebig gewählt und $P(n)$ das Prädikat $x^m x^n = x^{m+n}$ für $n \in \mathbb{N}$. Für $m \in \mathbb{N}$ ist $P(1)$ äquivalent zur rekursiven Definition der Potenz. Für $m < 0$ ergibt sich

$$x^m x = \frac{x}{x^{|m|}} = \frac{x}{x^{|m|-1}x} = \frac{1}{x^{|m|-1}} = \frac{1}{x^{-(m+1)}} = x^{m+1},$$

d.h. es gilt $P(1)$. (Die zweite Gleichheit begründet man mit der Definition 4.15). Es gelte nun $P(n)$. Verwendet man die Definition 4.15 und $P(n)$, ergibt sich

$$x^m x^{n+1} = x^m(x^n x) = (x^m x^n)x = x^{m+n}x = x^{m+n+1},$$

also $P(n + 1)$. Die letzte Gleichheit wird durch $P(1)$ mit $m + n$ anstelle von m gerechtfertigt. Schließlich seien n, $m \in \mathbb{Z}$, $n, m < 0$. Dann gilt

$$x^n x^m = \frac{1}{x^{|n|}} \frac{1}{x^{|m|}} = \frac{1}{x^{|n|}x^{|m|}} = \frac{1}{x^{|n|+|m|}} = x^{-(|n|+|m|)} = x^{n+m}.$$

□

Wir beenden diesen Abschnitt mit weiteren Beispielen zur vollständigen Induktion.

Lemma 4.18 (Bernoullische Ungleichung). *Es sei $x \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$.*
Für $x > -1$, $x \neq 0$ und $n > 1$ gilt dann

$$(1 + x)^n > 1 + nx.$$

Beweis. i) Induktionsanfang: Für $n = 2$ gilt $(1 + x)^2 > 1 + 2x$.
ii) Induktionsschritt: Es sei $n \in \mathbb{N}$ und es gelte $(1+x)^n > 1+nx$. Nach Voraussetzung ist $1+x > 0$. Somit folgt aus der Induktionsvoraussetzung $(1+x)^{n+1} > (1+nx)(1+x)$. Die Abschätzung

$$(1 + nx)(1 + x) = 1 + (n + 1)x + nx^2 > 1 + (n + 1)x$$

ergibt wegen der Transitivität von $>$ die gewünschte Ungleichung

$$(1 + x)^{n+1} > 1 + (n + 1)x.$$

□

Ein weiteres Beispiel einer rekursiven Definition ist folgende kompakte Schreibweise für endliche Summen $a_0 + a_2 + \cdots + a_n$ und endliche Produkte $a_0 \cdots a_n$. Die rekursive Definition präzisiert die Bedeutung der Ellipsis. Dazu setzen wir im Rekursionssatz 4.14 $B = \mathbb{R}$, $F_n \colon B^n \to B$, $F_n(x_0, \ldots, x_{n-1}) = x_{n-1} * a_n$ und erhalten so eine Funktion $\varphi\colon \mathbb{N}_0 \to B$ mit $\varphi(0) = a_0$ und $\varphi(n + 1) = \varphi(n) * a_{n+1}$. Bezeichnet $*$ die Addition in $\mathbb{R}$, schreibt man $\sum_{k=0}^{n} a_k$ für $\varphi(n)$, steht $*$ für die Multiplikation, schreibt man $\prod_{k=0}^{n} a_k$:

Definition 4.19. *Es seien* $a_0, a_1, \ldots, \in \mathbb{R}$.

i) $\sum_{j=0}^{0} a_j := a_0$ *und* $\sum_{j=0}^{n} a_j := \sum_{j=0}^{n-1} a_j + a_n$, $n \in \mathbb{N}$.
ii) $\prod_{j=0}^{0} a_j = a_0$ *und* $\prod_{j=0}^{n} a_j = \prod_{j=0}^{n-1} a_j \cdot a_n$, $n \in \mathbb{N}$.

Für die leere summe vereinbaren wir den Wert 0, das leere Produkt erhält den Wert 1.

$\sum$ heißt Summenzeichen, der Buchstabe j ist ein Summationsindex. Er kann beliebig umbenannt werden. Analoges gilt für das Produkt.

Definition 4.20. *Die Zahlen*

i) $0! := 1, \forall n \in \mathbb{N}_0\colon (n+1)! = n!(n+1)$ *heißen* ***Fakultäten***.
ii) *Für* $n \in \mathbb{N}_0$ *und* $0 \leq k \leq n$ *heißt*

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Binomialkoeffizient *(*$\binom{n}{k}$ *wird „n über k“ gelesen).*

Es gilt also $n! = \prod_{i=1}^{n} i$. Die Fakultäten wachsen sehr rasch an: $1! = 1, 2! = 2, 3! = 6, 4! = 24, 10! = 3\ 628\ 800$. Diese Zahlen werden bei Abzählproblemen verwendet. Beispielsweise ist $n!$ die Anzahl der Möglichkeiten, n unterscheidbare Objekte in verschiedener Reihenfolge anzuordnen. Der Binomialkoeffizient $\binom{n}{k}$ gibt die Anzahl der Teilmengen mit k Elementen in einer Grundmenge von n Elementen.

Lemma 4.21. *Für alle* $n, k \in \mathbb{N}_0$, $0 \leq k \leq n-1$ *gilt*

i) $\binom{n}{k} \in \mathbb{N}$, $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$.
ii) $\binom{n}{k+1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k+1}$,

Beweis. Übung. □

Ordnet man die Binomialkoeffizenten im sogenannten **Pascalschen Dreieck** an,

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1
\end{array}$$

dann sagt Lemma 4.21-ii), daß man die Binomialkoeffizienten der $n+1$-ten Reihe als Summe der beiden unmittelbar darüber stehenden Binomialkoeffizienten berechnen kann

Satz 4.22 (Binomischer Satz). *Es seien* x, y *reelle Zahlen. Dann gilt für alle* $n \in \mathbb{N}$:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k.$$

Beweis. 1) Induktionsanfang: Für $n = 1$ ergibt sich

$$x + y = \binom{1}{0} x^1 y^0 + \binom{1}{1} x^0 y^1 = x + y.$$

2) Induktionsschritt: Sei $n \in \mathbb{N}$ und es gelte $(x+y)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$. Durch Multiplikation mit $x + y$ folgt

$$\begin{aligned}
(x+y)^{n+1} &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n+1-k} y^k + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^{k+1} \\
&= x^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} x^{n+1-k} y^k + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} x^{n-k} y^{k+1} + y^{n+1}.
\end{aligned}$$

Ersetzt man in der zweiten Summe den Summationsindex k durch $j - 1$, ergibt sich weiter

$$\begin{aligned}
(x+y)^{n+1} &= x^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} x^{n+1-k} y^k + \sum_{j=1}^{n} \binom{n}{j-1} x^{n+1-j} y^j + y^{n+1} \\
&= x^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \left[\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \right] x^{n+1-k} y^k + y^{n+1} \\
&\overset{4.21}{=} \binom{n+1}{0} x^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} x^{n+1-k} y^k + \binom{n+1}{n+1} y^{n+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} x^{n+1-k} y^k
\end{aligned}$$

□

Ohne Beweis notieren wir die Identitäten:

Lemma 4.23. i) $\forall n \in \mathbb{N}\, \forall q \in \mathbb{R} \setminus \{1\}\colon \sum\limits_{k=0}^{n} q^k = \frac{q^{n+1}-1}{q-1}$,

ii) $\forall n \in \mathbb{N}\, \forall x, y \in \mathbb{R}\colon x^n - y^n = (x-y) \sum\limits_{i=0}^{n-1} x^{n-1-i} y^i$ *(Hornersche Regeln).*

5. Die rationalen Zahlen

Definition 5.1.

$$\mathbb{Q} := \{x \in \mathbb{R} : x = \frac{p}{q}, p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}\}$$

heißt die Menge der ***rationalen Zahlen****. $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ist die Menge der* ***irrationalen Zahlen****.*

Es kann leicht gezeigt werden, daß für $x, y \in \mathbb{Q}$ auch $-x, x+y, xy$ und, falls $x \neq 0$, auch x^{-1} zu $\mathbb{Q}$ gehören. $\mathbb{Q}$ erfüllt die Axiome $\mathcal{A}, \mathcal{M}, \mathcal{D}, \mathcal{O}$. $\mathbb{Q}$ ist somit ein geordneter Unterkörper von $\mathbb{R}$, in dem alle bisher abgeleiteten Sätze gelten. Jedoch besitzen bereits sehr einfache Probleme keine Lösung in $\mathbb{Q}$:

Satz 5.2. *Die Gleichung $x^2 = 2$ besitzt keine Lösung in $\mathbb{Q}$.*

Beweis. Angenommen es gäbe ein $x \in \mathbb{Q}$ mit $x^2 = 2$. Es ist $x = \frac{p}{q}$, $p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}$. O.B.d.A. seien p und q nicht beide zugleich gerade. Aus $p^2 = 2q^2$ folgt p^2 und somit auch p ist gerade, d.h. es existiert eine ganze Zahl n mit $p = 2n$. Dies hat $4n^2 = 2q^2$, also $q^2 = 2n^2$ zur Folge. Somit ist auch q^2 und damit auch q gerade. Dies ist ein Widerspruch zur Wahl von p und q. In diesem Beweis haben wir folgende Eigenschaft ganzer Zahlen verwendet, deren einfachen Nachweis wir dem Leser überlassen: $\forall p \in \mathbb{Z}\colon p^2$ gerade $\Rightarrow p$ gerade. $\square$

Analysieren wir diesen Sachverhalt genauer: Es sei

$$A = \{p \in \mathbb{Q} : p < 0 \vee p^2 < 2\} \text{ und } B = \{p \in \mathbb{Q} : p \geq 0, p^2 > 2\}.$$

Wir zeigen: A besitzt kein Maximum und B kein Minimum in $\mathbb{Q}$. Zu diesem Zweck definieren wir für jedes rationale $p > 0$ die Zahl $q \in \mathbb{Q}$ durch

$$q = p - \frac{p^2 - 2}{p + 2} \begin{cases} > p & \text{für } p \in A \text{ und } p \geq 0, \\ < p & \text{für } p \in B. \end{cases}$$

Eine einfache Rechnung zeigt

$$q^2 - 2 = 2\frac{p^2 - 2}{(p+2)^2} \begin{cases} < 0 & \text{für } p \in A, \\ > 0 & \text{für } p \in B. \end{cases}$$

Aus diesen Beziehungen folgt für jedes nicht negative $p \in A$ einerseits $p < q$, andererseits $q^2 - 2 < 0$, d.h. $q \in A$. Es gibt somit kein Maximum in A. Für jedes $p \in B$ ergibt sich $q < p$ und $q^2 - 2 > 0$, d.h. $q \in B$. B hat demnach kein Minimum. Andererseits ist $A \cup B = \mathbb{Q}$. Das Paar (A, B) definiert einen Dedekindschen Schnitt in $\mathbb{Q}$, aber es existiert keine Schnittzahl in $\mathbb{Q}$. Das System der rationalen Zahlen hat also Lücken, welche in $\mathbb{R}$ durch das Vollständigkeitsaxiom geschlossen werden.

6. Folgerungen aus dem Vollständigkeitsaxiom

Definition 6.1. *Es sei $M \subset \mathbb{R}$.*

(1) *Eine reelle Zahl o heißt **obere Schranke** für $M \underset{Def}{\Leftrightarrow} \forall x \in M : x \leq o$.*
*M heißt nach **oben beschränkt**, wenn M eine obere Schranke besitzt.*

(2) *Eine reelle Zahl u heißt **untere Schranke** für $M \underset{Def}{\Leftrightarrow} \forall x \in M : x \geq u$.*
*M heißt nach **unten beschränkt**, wenn M eine untere Schranke besitzt.*

(3) *$M \subset \mathbb{R}$ ist **beschränkt** $\underset{Def}{\Leftrightarrow}$ M ist nach oben und unten beschränkt.*

DEFINITION 6.2. *a) Es sei $M \subset \mathbb{R}$ nach oben beschränkt.*
$\alpha \in \mathbb{R}$ *heißt* ***Supremum*** *von M, $\alpha = \sup M \underset{Def}{\Leftrightarrow}$*

i) *α ist obere Schranke von M,*
ii) *$\forall x \in \mathbb{R} : x < \alpha \Rightarrow x$ ist nicht obere Schranke von M.*

b) Es sei $M \subset \mathbb{R}$ nach unten beschränkt.
$\beta \in \mathbb{R}$ *heißt* ***Infimum*** *von M, $\beta = \inf M \underset{Def}{\Leftrightarrow}$*

i) *β ist untere Schranke von M,*
ii) *$\forall x \in \mathbb{R} : \beta < x \Rightarrow x$ ist nicht untere Schranke von M.*

Das Supremum (Infimum) einer Menge, soferne es existiert, ist demnach die kleinste obere (größte untere) Schranke. Eine Menge kann also höchstens ein Supremum (Infimum) besitzen. Ist das Supremum einer Menge M selbst Element von M, gilt $\sup M = \max M$. Umgekehrt, besitzt eine Menge M ein Maximum, so ist natürlich auch $\max M = \sup M$.

BEISPIEL 6.3. a) $M = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 1\}$ ist nicht nach oben beschränkt. M besitzt somit kein Supremum, M ist nach unten beschränkt ($x \geq 1 \Rightarrow 1$ ist untere Schranke) und $1 \in M$. Somit gilt $\inf M = \min M = 1$.
2) Für $N = (0, 1]$ gilt $\sup N = \max N = 1 \in N$, $\inf N = 0 \notin N$.
3) Die leere Menge besitzt in $\mathbb{R}$ weder Supremum noch Infimum.

Häufig verwendet man folgende Charakterisierung des Supremums.

SATZ 6.4. *Es sei $\emptyset \neq M \subset \mathbb{R}$. Dann ist $\alpha = \sup M$ charakterisiert durch*

i) *$x \leq \alpha$ für alle $x \in M$,*
ii) *Für alle $\varepsilon > 0$ gibt es $y \in M$ mit $y > \alpha - \varepsilon$.*

BEWEIS. Die erste Eigenschaft besagt, daß α eine obere Schranke für M dastellt. Die Eigenschaft ii) stellt fest, daß jede reelle Zahl $z < \alpha$ keine obere Schranke für M sein kann. $\square$

Wir formulieren nun eine wichtige Konsequenz aus dem Vollständigkeitsaxiom:

SATZ 6.5 (Supremum Prinzip). *Jede nicht leere, nach oben beschränkte Menge reeller Zahlen besitzt ein Supremum in $\mathbb{R}$.*

BEWEIS. Es sei $M \subset \mathbb{R}$, $M \neq \emptyset$, nach oben beschränkt. Ferner sei B die Menge aller oberen Schranken von M und $A = \mathbb{R} \setminus B$. Da M nicht leer ist, gibt es $x \in M$. Es folgt $x - 1 \in A$. Somit gilt $A \neq \emptyset$ und $B \neq \emptyset$, $A \cup B = \mathbb{R}$. Es seien $a \in A$ und $b \in B$ beliebig gewählt. Dann ist a keine obere Schranke für M, also gibt es $x \in M$ mit $a < x \leq b$, d.h. es ist $a < b$. Die Mengen A und B definieren also einen Dedekindschen Schnitt. Das Vollständigkeitsaxioms $\mathcal{V}$ sichert die Existenz einer eindeutig bestimmten Schnittzahl ξ, sodaß entweder $A = \{x \in \mathbb{R}\colon x \leq \xi\}$ und $B = \mathbb{R} \setminus A$ oder $B = \{x \in \mathbb{R}\colon x \geq \xi\}$ und $A = \mathbb{R} \setminus B$ gilt. Insbesondere folgt aus diesen Beziehungen

$$(*) \qquad \forall a \in A : a \leq \xi,$$

$$(**) \qquad \forall b \in B : \xi \leq b$$

Wäre $\xi \in A$, gäbe es (wie vorher) $x \in M$, sodaß $\xi < x$. Wegen Satz 3.6 würde auch $\xi < \frac{\xi+x}{2} < x$ gelten, d.h. $\frac{\xi+x}{2} \in A$. Die Ungleichung $\xi < \frac{\xi+x}{2}$ ist ein Widerspruch zu $(*)$. Es folgt $\xi = B$. Somit ist ξ eine obere Schranke für M und wegen $(**)$ sogar die kleinste, d.h. $\xi = \sup M$. $\square$

Korollar 6.6. Jede nicht leere, nach unten beschränkte Menge reeller Zahlen besitzt ein Infimum in $\mathbb{R}$.

Beweis. Es sei $N \subset \mathbb{R}$, $N \neq \emptyset$, nach unten beschränkt und U die Menge der unteren Schranken. Somit ist $U \neq \emptyset$ und jedes Element aus N ist eine obere Schranke für U. Wegen Satz 6.5 existiert $s = \sup U$. Wir behaupten $s = \inf N$. Dies folgt aus $s \in U$. Angenommen, es wäre $s \notin U$, dann gäbe es $x \in N$, sodaß $x < s = \sup U$. Da s die kleinste obere Schranke von U ist, kann x nicht obere Schranke von U sein. Somit existiert $y \in U$ mit $x < y$. Dies jedoch widerspricht der Definition von U. $\square$

Ein einfacherer Beweis kann auf die Beobachtung aufgebaut werden, daß $N \subset \mathbb{R}$ genau dann nach unten beschränkt ist, wenn $-N := \{t \in \mathbb{R}\colon -t \in N\}$ nach oben beschränkt ist. Die angegebene Beweisvariante verwendet keine speziellen Eigenschaften von $\mathbb{R}$. In jeder linear geordneten Menge folgt daher aus dem Supremumprinzip das Infimumprinzip und umgekehrt.

Satz 6.7. $\mathbb{N}$ *ist nicht nach oben beschränkt.*

Beweis. Angenommen, $\mathbb{N}$ ist nach oben beschränkt. Nach Satz 6.5 existiert dann $\alpha = \sup \mathbb{N}$. Da $\alpha - 1$ keine obere Schranke für $\mathbb{N}$ sein kann, existiert $n \in \mathbb{N}$, sodaß $\alpha - 1 < n$. Es folgt $\alpha < n + 1$, ein Widerspruch zu $\forall m \in \mathbb{N} : m \leq \alpha$. $\square$

Korollar 6.8. $\mathbb{R}$ ist **archimedisch** geordnet, d.h. für alle $a, b \in \mathbb{R}$, $a > 0$, existiert $n \in \mathbb{N}$, sodaß $na > b$.

Beweis. Da $\mathbb{N}$ nicht nach oben beschränkt ist, gibt es $n \in \mathbb{N}$, sodaß $\frac{b}{a} < n$. $\square$

Korollar 6.9. $\forall \varepsilon > 0\ \exists n \in \mathbb{N}\colon \frac{1}{n} < \varepsilon$.

Beweis. Wähle $b = 1, a = \varepsilon$ in Korollar 6.8. $\square$

Satz 6.10. *Es sei $x \in \mathbb{R}$. Dann gibt es eine eindeutig bestimmte ganze Zahl g, sodaß*

$$(*) \qquad g \leq x < g + 1, \qquad (\Leftrightarrow x - 1 < g \leq x).$$

*Man nennt g **Größtes Ganzes** von x und bezeichnet diese Zahl mit $[x]$.*

Beweis. Wir zeigen zunächst die Eindeutigkeit und nehmen an, es gäbe zwei verschiedene Zahlen $g, \tilde{g} \in \mathbb{Z}$, o.B.d.A. $g < \tilde{g}$, sodaß $(*)$ gilt. Es folgt $0 < \tilde{g} - g \in \mathbb{N}$ und $\tilde{g} \leq x < g + 1$, d.h. $\tilde{g} - g < 1$. Insgesamt gilt $0 < \tilde{g} - g < 1$, dies widerspricht Korollar 4.9. Die Menge $\{n \in \mathbb{N}\colon |x| < n\}$ ist nicht leer und besitzt daher ein kleinstes Element n_0 (Satz 4.11). Somit gilt $n_0 - 1 \leq x < n_0$, falls $x \geq 0$ und $-n_0 < x \leq -(n_0 - 1)$ falls $x < 0$. Wenn $x \geq 0$, wähle $g = n_0 - 1$. Ist $x < 0$, setze $g = -n_0$ falls $x \notin \mathbb{Z}$ und $g = -n_0 + 1$ falls $x \in \mathbb{Z}$. $\square$

Wir zeigen nun, daß die rationalen Zahlen „dicht“ in $\mathbb{R}$ liegen.

SATZ 6.11. *Zwischen zwei verschiedenen reellen Zahlen liegt stets eine rationale Zahl.*

BEWEIS. Es seien x, y reelle Zahlen und $x \neq y$. O.B.d.A. können wir $0 < x < y$ annehmen (man addiere eine geeignete natürliche Zahl). Nach Korollar 6.9 existiert $n_0 \in \mathbb{N}$, sodaß $0 < \frac{1}{n_0} < y - x$, d.h. $1 + n_0 x < n_0 y$. Nach Satz 6.10 (mit $1 + n_0 x$ anstelle von x) folgt die Existenz von $k_0 \in \mathbb{N}$, mit $n_0 x < k_0 \leq n_0 x + 1 < n_0 y$. Für $p_0 = \frac{k_0}{n_0} \in \mathbb{Q}$ gilt dann
$x < p_0 < y$. □

Dieser Satz hat ein merkwürdiges Häufungsphänomen zur Folge: Besitzt eine nicht leere Menge M ein Supremum, jedoch kein Maximum, so liegen für jedes $\varepsilon > 0$ „unendlich“ viele Elemente von M zwischen $\sup M - \varepsilon$ und $\sup M$.

DEFINITION 6.12. *Es seien $A, B \subset \mathbb{R}$ nicht leer und $r \in \mathbb{R}$. Wir definieren*

$$\begin{aligned} A + B &:= \{a + b : a \in A, b \in B\}, \\ AB &:= \{ab : a \in A, b \in B\}, \\ rA &:= \{ra : a \in A\}. \end{aligned}$$

SATZ 6.13. *$A, B \subset \mathbb{R}$ seien nicht leer und nach oben beschränkt. Dann gilt*

i) *Falls $A \subset B$, dann gilt* $\sup A \leq \sup B$,
ii) $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$,
iii) $\forall r \geq 0 : \sup(rA) = r \sup A$,
iv) $\forall r \leq 0 : \inf(rA) = r \sup A$,
v) $A \subset \mathbb{R}^+ \wedge B \subset \mathbb{R}^+ \Rightarrow \sup AB = \sup A \cdot \sup B$.

Sind A und B nach unten beschränkt, so gilt ein entsprechender Satz für das Infimum.

Der Beweis sei dem Leser als Übung überlassen.

SATZ 6.14 (Intervallschachtelung). *Es sei $\{I_n\}_{n=1}^{\infty}$ eine Familie abgeschlossener Intervalle $I_n := [a_n, b_n]$, $a_n \leq b_n$, in $\mathbb{R}$ mit folgenden Eigenschaften:*

a) $\forall n \in \mathbb{N}\colon I_{n+1} \subset I_n$,
b) $\forall \varepsilon > 0\ \exists n \in \mathbb{N}\colon b_n - a_n < \varepsilon$.

Dann gibt es genau ein $z \in \mathbb{R}$, sodaß $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \{z\}$.

BEWEIS. Wegen a) gilt: $a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dies hat

$$\forall n, k \in \mathbb{N}\colon a_n \leq b_k. \tag{1}$$

zur Folge. Angenommen, es gäbe Indizes $n_0, k_0 \in \mathbb{N}$ mit $b_{k_0} < a_{n_0}$. Ist $n_0 \leq k_0$, müßte auch $b_{k_0} < a_{n_0} \leq a_{k_0}$ gelten, im Widerspruch zu $a_{k_0} \leq b_{k_0}$. Ist $k_0 < n_0$, dann folgt $b_{n_0} \leq b_{k_0} < a_{n_0}$ im Gegensatz zu $a_{n_0} \leq b_{n_0}$. Setzt man $A = \{a_n\colon n \in \mathbb{N}\}$ und $B = \{b_n\colon n \in \mathbb{N}\}$, ergibt sich aus (1), daß jedes b_n eine obere Schranke für A, und jedes a_n eine untere Schranke für B darstellt. Somit existieren $\alpha = \sup A$ und $\beta := \inf B$ und es gilt $\alpha \leq b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Es ist also α eine untere Schranke für B, was $\alpha \leq \beta$ zur Folge hat. Ferner gilt $a_n \leq \alpha \leq \beta \leq b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, d.h.

$[\alpha, \beta] \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$. Es folgt $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n \neq \emptyset$. Wäre $\alpha < \beta$, dann müßte auch $b_n - a_n \geq \beta - \alpha$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gelten. Dies widerspricht jedoch der Voraussetzung b). Es gilt somit $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \sup A = \inf B$. □

7. Wurzeln

Mit Hilfe des Supremumprinzips kann man die Existenz n-ter Wurzeln aus nichtnegativen Zahlen zeigen.

Satz 7.1. *Es sei $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $a \in \mathbb{R}$ und $a \geq 0$. Dann gibt es eine eindeutig bestimmte Zahl ξ, sodaß $\xi \geq 0$ und $\xi^n = a$.*

Beweis. Die Eindeutigkeit folgt aus Satz 4.17- 2. Für $a = 0$ setzen wir $\xi = 0$, für $a = 1$ ist die Lösung $\xi = 1$. Wir betrachten zuerst den Fall $a > 1$. Mit vollständiger Induktion zeigt man, daß $a^n > a$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Für $x > a$ oder $0 \leq x \leq 1$ folgt daher

$$x^n > a^n > a \quad \text{oder } 0 \leq x^n \leq 1 < a,$$

also kann $x > a$ oder $x \in [0, 1]$ keine Lösung der Gleichung $x^n = a$ sein. Wir suchen daher eine Lösung im Intervall $[1, a]$ und betrachten dazu die Menge

$$A = \{x \in \mathbb{R} \colon x \leq 1 \wedge x^n \leq a\}.$$

Sie ist nicht leer ($1 \in A$) und beschränkt($A \subset [1, a]$) und besitzt daher ein Supremum, $s = \sup A$. Wir zeigen $s^n = a$, indem wir die Annahme $s^n \neq a$ zum Widerspruch führen. Hiefür ist folgende Überlegung zweckmäßig: für $\alpha \in \mathbb{R}$ mit $|\alpha| < 1$ betrachten wir die Abschätzung

$$(*) \quad \begin{aligned} |\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} s^k \alpha^{n-k}| &= |\alpha| |\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} s^k \alpha^{n-k-1}| \\ &\leq |\alpha| \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} s^k |\alpha|^{n-k-1} \leq |\alpha| \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} s^k \leq |\alpha|(1+s)^n \end{aligned}$$

und wählen $\varepsilon \in \mathbb{R}$ mit $0 < \varepsilon < \min\{s, \frac{|s^n - a|}{(1+s)^n}\}$. Es sei $s^n < a$, dann folgt $s + \varepsilon \in A$. Es gilt nämlich (wähle $\alpha = \varepsilon$ in (*))

$$\begin{aligned} (s+\varepsilon)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} s^k \varepsilon^{n-k} = s^n + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} s^k \varepsilon^{n-k} \\ &\overset{(*)}{\leq} s^n + \varepsilon(1+s)^n < s^n + |s^n - a| = a. \end{aligned}$$

Wegen $s = \sup A$ ist $s + \varepsilon \in A$, $\varepsilon > 0$, nicht möglich.
Die Annahme $s^n > a$ hat $(s - \varepsilon)^n > a$ zur Folge: wählt man $\alpha = -\varepsilon$ in (*), erhält

man wie vorhin

$$(s-\varepsilon)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} s^k(-\varepsilon)^{n-k} = s^n + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} s^k(-\varepsilon)^{n-k}$$

$$\geq s^n - |\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} s^k(-\varepsilon)^{n-k}| \geq s^n - \varepsilon(1+s)^n > s^n - |s^n - a| = a.$$

Für $x \geq s-\varepsilon$ folgert man

$$x^n \geq (s-\varepsilon)^n > a,$$

d.h. $s-\varepsilon$ muß eine obere Schranke für A sein. Dies ist nicht möglich, da s die kleinste obere Schranke für A ist. Wegen der in R geltenden Trichotomie muß daher $s^n = a$ gelten. Schließlich betrachten wir den Fall $0 < a < 1$. Dann ist $b = \frac{1}{a} > 1$ und die Gleichung $y^n = b$ hat eine eindeutige positive Lösung η. Setzt man $\xi = \frac{1}{\eta}$, erhält man

$$\xi^n = (\frac{1}{\eta})^n = \frac{1}{\eta^n} = \frac{1}{b} = a.$$

□

KOROLLAR 7.2. Ist $n \in \mathbb{N}$ ungerade, dann besitzt die Gleichung $x^n = a$ für jedes $a \in \mathbb{R}$ genau eine Lösung $\xi \in \mathbb{R}$.

BEWEIS. Es genügt, den Fall $a < 0$ zu betrachten. Dann ist $-a > 0$ und die Gleichung $x^n = -a$ hat nach Satz 7.1 genau eine positive Lösung $\tilde{\xi}$. Setzt man $\xi = -\tilde{\xi}$, folgt

$$\xi^n = (-\tilde{\xi})^n = (-1)^n \tilde{\xi}^n = (-1)^n(-a) = -(-a) = a,$$

da n ungerade ist. □

DEFINITION 7.3 (Wurzel). *Es seien entweder $n \in \mathbb{N}$ gerade und $a \in \mathbb{R}^+$ oder $n \in \mathbb{N}$ ungerade und $a \in \mathbb{R}$. Dann bezeichnet man mit $\sqrt[n]{a}$ die eindeutig bestimmte Lösung in $\mathbb{R}^+$ (falls $n \in \mathbb{N}$ gerade), bzw. in $\mathbb{R}$ (falls $n \in \mathbb{N}$ ungerade) der Gleichung $x^n = a$. Man nennt $\sqrt[n]{a}$ die n-te Wurzel aus a. Anstelle von $\sqrt[n]{a}$ schreibt man auch $a^{\frac{1}{n}}$. Im Fall $n = 2$ ist die Notation $\sqrt{a}$ für $\sqrt[2]{a}$ gebräuchlich.*

BEMERKUNG 7.4. 1) Wegen Satz 7.1 gilt mit dieser Definition $(a^{\frac{1}{n}})^n = a$ für alle $a \in \mathbb{R}$ im Fall n ungerade und für alle $a \in \mathbb{R}^+$ im Fall n gerade.
2) Ist $n \in \mathbb{N}$ gerade und $a > 0$, dann liefert $a^{\frac{1}{n}}$ *eine* positive Lösung der Gleichung $x^n = a$. Ist n gerade und $a > 0$, dann ist $-\sqrt[n]{a}$ eine weitere Lösung der Gleichung $x^n = a$. Dies wird durch die Kurzschreibweise $x_{1,2} = \pm\sqrt[n]{a}$ zum Ausdruck gebracht. Dies darf keinesfalls dahingehend missverstanden werden, $\sqrt[n]{a}$ habe zweierlei Vorzeichen. Es gilt stets $\sqrt[n]{x} \geq 0$ für alle $x \geq 0$ und $n \in 2\mathbb{N}$.
3)Ein häufig auftretender Fehler ist es, $\sqrt{x^2} = x$ zu setzen. Richtig ist $\sqrt{x^2} = |x|$.
4) Die Definition der n-ten Wurzel ist nicht einheitlich: viele Autoren definieren $\sqrt[n]{a}$ nur für $a \geq 0$ für *alle* $n \in \mathbb{N}$.

Korollar 7.5. 1.) Für alle positiven reellen Zahlen a, b und $n, m \in \mathbb{N}$ gilt

i) $(ab)^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{1}{n}} b^{\frac{1}{n}}$, $(\frac{a}{b})^{\frac{1}{n}} = \frac{a^{\frac{1}{n}}}{b^{\frac{1}{n}}}$,

ii) $(a^{\frac{1}{n}})^m = (a^m)^{\frac{1}{n}}$,

iii) $(a^{\frac{1}{n}})^{\frac{1}{m}} = (a^{\frac{1}{m}})^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{1}{nm}}$.

2.) Ist a, $b > 0$, dann gilt

$$a < b \Leftrightarrow a^{\frac{1}{n}} < b^{\frac{1}{n}}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Für n ungerade gilt diese Beziehung für alle a, $b \in \mathbb{R}$.

Beweis. i) $(a^{\frac{1}{n}} b^{\frac{1}{n}})^n = (a^{\frac{1}{n}})^n (b^{\frac{1}{n}})^n = ab$. Wegen der Eindeutigkeit der Wurzel folgt daher $(ab)^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{1}{n}} b^{\frac{1}{n}}$.
ii) $[(a^{\frac{1}{n}})^m]^n = (a^{\frac{1}{n}})^{mn} = [(a^{\frac{1}{n}})^n]^m = a^m$.
iii) $[(a^{\frac{1}{n}})^{\frac{1}{m}}]^{nm} = [[(a^{\frac{1}{n}})^{\frac{1}{m}}]^m]^n = (a^{\frac{1}{n}})^n = a$.
Dies zeigt $(a^{\frac{1}{n}})^{\frac{1}{m}} = a^{\frac{1}{nm}}$. Wegen der Symmetrie bezüglich n und m in $a^{\frac{1}{nm}}$ folgt $(a^{\frac{1}{n}})^{\frac{1}{m}} = (a^{\frac{1}{m}})^{\frac{1}{n}}$.
2.) Für $0 < a < b$ folgt die Behauptung aus

$$a^{\frac{1}{n}} < b^{\frac{1}{n}} \overset{4.17}{\Leftrightarrow} (a^{\frac{1}{n}})^n < (b^{\frac{1}{n}})^n \overset{7.1}{\Leftrightarrow} a < b.$$

Es sei n ungerade und $a < b < 0$. Dies ist gleichwertig mit $0 < -b < -a$. Aus dem eben Bewiesenen folgt

$$0 < -b < -a \Leftrightarrow (-b)^{\frac{1}{n}} < (-a)^{\frac{1}{n}} \Leftrightarrow 0 < -b^{\frac{1}{n}} < -a^{\frac{1}{n}} \Leftrightarrow a^{\frac{1}{n}} < b^{\frac{1}{n}} < 0.$$

Die übrigen Fälle sind trivial. □

Die Darstellung rationaler Zahlen durch Brüche ist nicht eindeutig. Gilt etwa $p = \frac{r}{s} = \frac{u}{v} > 0$ d.h. $rv = us$ für $r, s, u, v \in \mathbb{N}$ und setzt man für $a > 0$ $x = (a^r)^{\frac{1}{s}}$, $y = (a^u)^{\frac{1}{v}}$, folgt

$$x^{sv} = (x^s)^v = (a^r)^v = a^{rv} = a^{us} = (a^u)^s = (y^v)^s = y^{vs},$$

wegen der Eindeutigkeit der Wurzel gilt dann $x = y$. Beachtet man noch Korollar 7.5-1 ergibt sich $(a^{\frac{1}{s}})^r = (a^r)^{\frac{1}{s}} = (a^u)^{\frac{1}{v}} = (a^{\frac{1}{v}})^u$. Es kommt somit auf die Reihenfolge des Potenzierens und Radizierens nicht an.
Somit ist folgende Definition sinnvoll:

Definition 7.6 (Potenz mit rationalen Exponenten). *Es sei $a > 0$ und $r = \frac{p}{q} > 0$, $p, q \in \mathbb{N}$.*

$$0^r := 0, \quad a^r := (a^p)^{\frac{1}{q}}, \quad a^{-r} := \frac{1}{a^r}.$$

Natürlich hätte man wegen Korollar 7.5. 1-(ii) auch $(a^{\frac{1}{q}})^p$ zur Definition von a^r verwenden können. Man beachte, daß diese Definition für $a < 0$ nicht immer sinnvoll ist. Als Beispiel betrachte man

$$\sqrt[6]{(-27)^2} = 3, \quad \text{aber } \sqrt[3]{-27} = -3.$$

Aus diesem Grunde wird häufig die n-te Wurzel nur für nicht negative reelle Zahlen definiert.

SATZ 7.7 (Potenzgesetze). *Es seien $a, b \in \mathbb{R}^+$ und $r, s \in \mathbb{Q}$. Folgende Regeln gelten, falls alle beteiligten Potenzen definiert sind.*

i) $a^r a^s = a^{r+s}$,
ii) $(a^r)^s = a^{rs}$,
iii) $a^r b^r = (ab)^r$,
iv) $a > 0 \Rightarrow \frac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$,
v) $b > 0 \Rightarrow \frac{a^r}{b^r} = (\frac{a}{b})^r$.

BEWEIS. Wir beweisen nur die erste Regel. Wir betrachten vorerst den Fall r, $s > 0$, also $r = \frac{p}{q}$, $s = \frac{m}{n}$ mit geeigneten natürlichen Zahlen p, q, n und m. Wegen $r = \frac{np}{nq}$ und $s = \frac{mq}{qn}$ kann man diesen Fall auf Satz 4.17 zurückführen:

$$a^r a^s = (a^{\frac{1}{nq}})^{np}(a^{\frac{1}{nq}})^{mq} = (a^{\frac{1}{nq}})^{np+mq} = a^{\frac{np+mq}{nq}} = a^{\frac{p}{q}+\frac{m}{n}} = a^{r+s}.$$

Es sei nun $rs < 0$ und ohne Beschränkung der Allgemeinheit $r < 0$, $s > 0$, also $r = -\frac{p}{q}$. Es folgt

$$\begin{aligned} a^r a^s &= \frac{a^s}{a^{|r|}} = \frac{(a^{\frac{1}{nq}})^{mq}}{(a^{\frac{1}{nq}})^{np}} = (a^{\frac{1}{nq}})^{mq-np} \\ &= \begin{cases} a^{\frac{mq-pn}{nq}} = a^{\frac{m}{n}-\frac{p}{q}} = a^{s+r} & mq - pn \geq 0, \\ \frac{1}{(a^{\frac{1}{nq}})^{pn-mq}} = \frac{1}{a^{\frac{p}{q}-\frac{m}{n}}} = \frac{1}{a^{-(r+s)}} = a^{r+s} & mq - pn < 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Schließlich betrachten wir noch den Fall $rs > 0$ und $r < 0$, und $s < 0$. Man erhält

$$a^r a^s = \frac{1}{a^{|r|}} \frac{1}{a^{|s|}} = \frac{1}{a^{|r|+|s|}} = a^{-|r|-|s|} = a^{r+s}.$$

□

SATZ 7.8. *Es sei $a > 0, b > 0$ und $r \in \mathbb{Q}$. Dann gilt*

i) $a < b \Leftrightarrow a^r < b^r$, *falls* $r > 0$,
ii) $a < b \Leftrightarrow b^r < a^r$, *falls* $r < 0$.

BEWEIS. i) folgt aus 7.5 iv) und Satz 4.17 2.). Für den Nachweis von ii) beachte man $a^r = \frac{1}{a^{|r|}}$. □

SATZ 7.9. *Es sei $a \in \mathbb{R}, a > 0$, $r, s \in \mathbb{Q}$ und $r < s$. Dann gilt*

i) $a^r < a^s \Leftrightarrow a > 1$,
ii) $a^r > a^s \Leftrightarrow a < 1$.

BEWEIS. i) Wegen $s - r > 0$ und $1^{s-r} = 1$ folgt

$$a > 1 \overset{7.8}{\Leftrightarrow} a^{s-r} > 1 \Leftrightarrow \frac{a^s}{a^r} > 1 \Leftrightarrow a^s > a^r.$$

ii) $a < 1 \Leftrightarrow \frac{1}{a} > 1$. □

8. Die erweiterten reellen Zahlen

Wir ergänzen das System der reellen Zahlen mit zwei verschiedenen festen Objekten, die wir mit „∞“ (gelesen: unendlich) und „$-\infty$“ bezeichnen. Diese Objekte sind *keine* reellen Zahlen. Wir bilden $\bar{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\infty, -\infty\}$ und nennen $\bar{\mathbb{R}}$ **erweiterte reelle Zahlen**. Behält man innerhalb von $\mathbb{R}$ die ursprüngliche Ordnung bei und setzt

i) $-\infty < \infty$,
ii) $\forall x \in \mathbb{R}\colon \; -\infty < x \wedge x < \infty$,

so wird damit eine strikte Ordnung auf $\bar{\mathbb{R}}$ erklärt. Für die neuen Symbole gelten folgende Regeln: Es sei $x \in \mathbb{R}$, dann gilt

i) $x + \infty = \infty + x = x - (-\infty) = \infty$,
$x + (-\infty) = -\infty + x = x - \infty = -\infty$.

ii) $x > 0\colon \quad \infty \cdot x = x \cdot \infty = \infty$
$\qquad (-\infty) \cdot x = x \cdot (-\infty) = -\infty$

$x < 0\colon \quad \infty \cdot x = x \cdot \infty = -\infty$
$\qquad (-\infty) \cdot x = x \cdot (-\infty) = \infty$

iii) $\infty + \infty = \infty, \quad (-\infty) + (-\infty) = -\infty, \quad \infty \cdot \infty = \infty$

Die Ausdrücke $\infty + (-\infty)$, $0 \cdot \infty$, $\frac{\infty}{\infty}$, ..., sind nicht definiert.

Definition 8.1. i) *$E \subset \bar{\mathbb{R}}$ sei nicht nach oben beschränkt (in $\mathbb{R}$). Man setzt ∞ für das Supremum von E,* $\sup E = \infty$.
ii) *$E \subset \bar{\mathbb{R}}$ sei nicht nach unten beschränkt (in $\mathbb{R}$). Man setzt $-\infty$ für das Infimum von E,* $\inf E = -\infty$.

Diese Definition stellt eine natürliche Verallgemeinerung des Supremums einer nicht leeren Menge reeller Zahlen dar. Jede reelle Zahl ist zugleich obere und untere Schranke für $\emptyset$. Dies hat die merkwürdige Konsequenz:

Bemerkung 8.2. $\sup \emptyset = -\infty$, $\inf \emptyset = \infty$.

Jede Teilmenge von $\bar{\mathbb{R}}$ besitzt also in $\bar{\mathbb{R}}$ sowohl Supremum als auch Infimum. Die Definition eines Intervalls 3.13 kann in offensichtlicher Weise auf $\bar{\mathbb{R}}$ übertragen werden.

9. Komplexe Zahlen

Aus Korollar 3.4 folgt, daß die Gleichung $x^2 + 1 = 0$ keine reelle Lösung besitzt. Will man erreichen, daß diese und viele andere in $\mathbb{R}$ nicht lösbare Gleichungen lösbar werden, ist eine Erweiterung des reellen Zahlensystems erforderlich.

Definition 9.1.

i) *z heißt **komplexe Zahl*** $\underset{Def}{\Leftrightarrow} z = (a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.
Die Menge der komplexen Zahlen bezeichnet man mit $\mathbb{C}$.

ii) *Auf* $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ *erklärt man Addition* $+$ *und Multiplikation* $\cdot$ *: Es sei* $z = (a, b)$*,* $w = (c, d)$*:*

$$z + w := (a + c, b + d)$$
$$z \cdot w = zw := (ac - bd, ad + bc)$$

$\mathbb{C}$ und $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ sind also als Mengen identisch, charakteristisch für $\mathbb{C}$ ist die durch Addition und Multiplikation aufgeprägte algebraische Struktur.

Satz 9.2. *Ersetzt man* $\mathbb{R}$ *durch* $\mathbb{C}$*,* 0 *durch* $(0, 0)$*,* 1 *durch* $(1, 0)$*, dann sind die Axiome* $\mathcal{A}, \mathcal{M}$ *und* $\mathcal{D}$ *erfüllt. Das Tripel* $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ *ist somit ein Körper.*

Beweis. Für $z = (a, b) \in \mathbb{C}$ ist die additive Inverse

$$-z = (-a, -b),$$

für $z = (a, b) \neq (0, 0)$ ist die multiplikative Inverse

$$z^{-1} = \left(\frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2} \right).$$

Exemplarisch zeigen wir die Assoziativität der Multiplikation: Es sei $x = (a, b)$, $y = (c, d)$ und $z = (e, f)$. Dann ist

$$\begin{aligned} x(yz) &= (a, b)(ce - df, cf + de) \\ &= (a(ce - df) - b(cf + de), b(ce - df) + a(cf + de)) \\ &= (ace - adf - bcf - bde, bce - bdf + acf + ade) \\ &= (ac - bd, ad + bc)(e, f) \\ &= (xy)z. \end{aligned}$$

□

Die Sätze aus Abschnitt 2 sowie jene Resultate, welche nicht auf die Ordnung in $\mathbb{R}$ Bezug nehmen, gelten daher auch in $\mathbb{C}$. Für die Paare $(a, 0), (b, 0) \in \mathbb{C}$ gilt

$$(a, 0) + (b, 0) = (a + b, 0)$$
$$(a, 0) \cdot (b, 0) = (ab, 0), \quad -(a, 0) = (-a, 0), \quad (a, 0)^{-1} = (a^{-1}, 0)$$

(für die letzte Beziehung setzen wir natürlich $a \neq 0$ voraus). Die Menge $\{(a, 0) \colon a \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{C}$ bildet also einen Unterkörper von $\mathbb{C}$, der dieselben arithmetischen Eigenschaften wie $\mathbb{R}$ besitzt. Man kann daher $\mathbb{R}$ und $\{(a, 0) \colon a \in \mathbb{R}\}$ identifizieren, indem man jeder reellen Zahl $a \in \mathbb{R}$ das geordnete Paar $(a, 0)$ zuordnet und umgekehrt. Es ist somit sinnvoll, die komplexen Zahlen $(a, 0)$ reell zu nennen und man schreibt anstelle von $(a, 0)$ kurz a.

Definition 9.3.

$i := (0, 1)$ *heißt* ***imaginäre Einheit****.*

Wegen

$$(0,1)(0,1) = (-1,0) = -(1,0)$$

folgt

$$i^2 = -1,$$

somit ist die komplexe Zahl i Lösung von $x^2 + 1 = 0$. Für $b \in \mathbb{R}$ folgt

$$ib = (0,1)(b,0) = (0,b).$$

Komplexe Zahlen dieser Form heißen **imaginär**. Wegen a, $b \in \mathbb{R}$ und

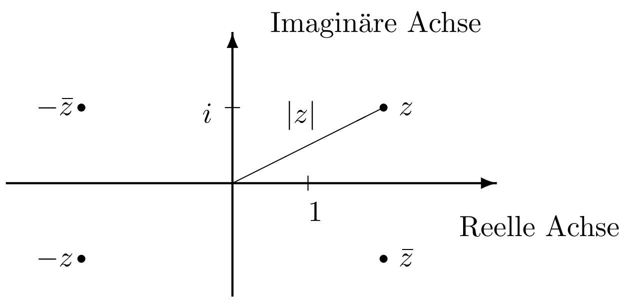
$$(a,b) = (a,0) + (0,b) = a + ib.$$

kann jede komplexe Zahl (a,b) in der bequemeren Form $a + ib$ geschrieben werden.

DEFINITION 9.4. *Es sei $z = a + ib \in \mathbb{C}$.*

i) $\operatorname{Re} z := a$ *heißt* ***Realteil*** *von z,*
   $\operatorname{Im} z := b$ *heißt* ***Imaginärteil*** *von z.*
ii) $\bar{z} := a - ib$ *heißt die zu z* ***konjungiert komplexe*** *Zahl,*
iii) $|z| := \sqrt{a^2 + b^2}$ *heißt* ***Absolutbetrag*** *von z.*
iv) $A \subset \mathbb{C}$ *heißt beschränkt* $\underset{Def}{\Leftrightarrow}$ $\{|z| \colon z \in A\}$ *ist beschränkt in $\mathbb{R}$.*

Wegen $i^2 = -1 < 0$ ist es nicht möglich, auf $\mathbb{C}$ eine Ordnung zu definieren, die den Axiomen $\mathcal{O}$ genügt. Es müßte dann nämlich $x^2 \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{C}$ gelten (vgl. Korollar 3.4). Die Ergebnisse aus Abschnitt 3 lassen sich daher *nicht* auf $\mathbb{C}$ übertragen: *Ungleichungen zwischen komplexen Zahlen sind sinnlos!*
Die komplexen Zahlen lassen sich als Menge geordneter Paare in der **Gaußschen Zahlenebene** veranschaulichen: Nach Wahl eines cartesischen Koordinatensystems wird die komplexe Zahl $z = x + iy$ durch den Punkt (x,y) dargestellt. Die reellen Zahlen werden mit den Punkten der reellen Achse identifiziert. $|z|$ ist der Abstand des Punktes (x,y) von 0. Die Definition des Absolutbetrages für komplexe Zahlen ist die natürliche Verallgemeinerung des Absolutbetrages reeller Zahlen als deren Abstand von dem mit Null bezeichneten Punkt auf der reellen Zahlengeraden.



Gaußsche Zahlenebene

SATZ 9.5. *Für $z, w \in \mathbb{C}$ gilt*

a)	$\overline{z+w} = \bar{z} + \bar{w}$,	*d)*	$\operatorname{Re} z = \frac{1}{2}(z+\bar{z})$, $\operatorname{Im} z = \frac{1}{2i}(z-\bar{z})$,
b)	$\overline{zw} = \bar{z} \cdot \bar{w}$,	*e)*	$z = \bar{z} \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$,
c)	$\overline{(\frac{1}{z})} = \frac{1}{\bar{z}}$ *falls* $z \neq 0$,	*f)*	$z\bar{z} = \lvert z\rvert^2$.

SATZ 9.6. *Für $z, w \in \mathbb{C}$ gilt*

a)	$\lvert z\rvert = 0 \Leftrightarrow z = 0$,	*d)*	$\lvert z\rvert = \lvert\bar{z}\rvert$,
b)	$\lvert zw\rvert = \lvert z\rvert\lvert w\rvert$,	*e)*	$\lvert\operatorname{Re} z\rvert \leq \lvert z\rvert$, $\lvert\operatorname{Im} z\rvert \leq \lvert z\rvert$,
c)	$\lvert z+w\rvert \leq \lvert z\rvert + \lvert w\rvert$,	*f)*	$\big\lvert\lvert z\rvert - \lvert w\rvert\big\rvert \leq \lvert z-w\rvert$

Die Ungleichung (c) nennt man Dreiecksungleichung.

BEWEIS. Für den Beweis von c) beachte man $\overline{z\bar{w}} = \bar{z}w$. Somit folgt

$$\begin{aligned} |z+w|^2 &= (z+w)\overline{(z+w)} = z\bar{z} + z\bar{w} + w\bar{z} + w\bar{w} \\ &= |z|^2 + 2\operatorname{Re}(z\bar{w}) + |w|^2 \\ &\leq |z|^2 + 2|z\bar{w}| + |w|^2 = |z|^2 + 2|z||\bar{w}| + |w|^2 \\ &= (|z|+|w|)^2 \end{aligned}$$

□

SATZ 9.7 (Ungleichung von Cauchy-Schwarz-Bunjakowski).
Es seien $a_1, \dots, a_n$ und $b_1, \dots, b_n$ komplexe Zahlen. Dann gilt

$$\Big|\sum_{j=1}^n a_j\bar{b_j}\Big|^2 \leq \sum_{j=1}^n |a_j|^2 \sum_{j=1}^n |b_j|^2.$$

Gleichheit gilt genau dann, wenn es ein $z \in \mathbb{C}$ gibt, sodaß $a_j = b_j z$, $j = 1, \dots, n$, oder $b_j = a_j z$, $j = 1, \dots, n$, gilt.

BEWEIS. Abkürzend schreiben wir $\alpha = \sum_{j=1}^n |a_j|^2$, $\beta = \sum_{j=1}^n |b_j|^2$ und $\gamma = \sum_{j=1}^n a_j\bar{b_j}$. O.B.d.A. können wir $\beta > 0$ annehmen (die Ungleichung ist für $\beta = 0$ trivial). Es folgt

$$\begin{aligned} 0 &\leq \sum_{j=1}^n |\beta a_j - \gamma b_j|^2 = \sum_{j=1}^n (\beta a_j - \gamma b_j)(\beta\bar{a}_j - \bar{\gamma}\bar{b_j}) \\ &= \sum_{j=1}^n (\beta^2|a_j|^2 - \beta\bar{\gamma}a_j\bar{b_j} - \beta\gamma b_j\bar{a}_j + |\gamma|^2|b_j|^2) \\ &= \beta^2\sum_{j=1}^n |a_j|^2 - \beta\bar{\gamma}\sum_{j=1}^n a_j\bar{b_j} - \beta\gamma\sum_{j=1}^n b_j\bar{a}_j + |\gamma|^2\sum_{j=1}^n |b_j|^2 \\ &= \beta^2\alpha - 2\beta|\gamma|^2 + \beta|\gamma|^2 = \beta^2\alpha - \beta|\gamma|^2 = \beta(\alpha\beta - |\gamma|^2). \end{aligned}$$

Wegen Satz 3.3 und $\beta > 0$ folgt $|\gamma|^2 \leq \alpha\beta$. Dies ist die gewünschte Ungleichung. Gleichheit tritt genau dann ein, wenn $\beta a_j = \gamma b_j$ für alle $j = 1, \dots, n$ gilt. Wegen $\beta > 0$ ist dies gleichbedeutend mit $a_j = \frac{\gamma}{\beta}b_j$, $j = 1, \dots, n$. □

Mit Hilfe der Ungleichung von Cauchy läßt sich die Dreicksungleichung 9.6-c) erheblich verallgemeinern.

Satz 9.8 (Minkowski Ungleichung). *Es seien $a_1, \ldots, a_n$ und $b_1, \ldots, b_n$ komplexe Zahlen. Dann gilt*

$$(*) \qquad \left(\sum_{j=1}^{n} |a_j + b_j|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\sum_{j=1}^{n} |a_j|^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{j=1}^{n} |b_j|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Gleichheit gilt genau dann, wenn es ein $z \in \mathbb{R}^+$ gibt, sodaß $a_j = b_j z$, $j = 1, \ldots, n$ oder $b_j = a_j z$, $j = 1, \ldots, n$ gilt.

Beweis. Es seien α, β und γ definiert wie im Beweis von 9.7 und es sei $\beta > 0$. Es folgt

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n} |a_j + b_j|^2 &= \alpha + \gamma + \bar{\gamma} + \beta = \alpha + 2\operatorname{Re}\gamma + \beta \\ &\leq \alpha + 2|\gamma| + \beta \\ &\leq \alpha + 2|\alpha|^{\frac{1}{2}}|\beta|^{\frac{1}{2}} + \beta = (\alpha^{\frac{1}{2}} + \beta^{\frac{1}{2}})^2.\end{aligned}$$

Angenommen es gilt in $(*)$ Gleichheit. Dann muß auch

$$|\gamma|^2 = \alpha\beta \quad \text{und} \quad |\gamma| = \operatorname{Re}\gamma$$

gelten. Aus $|\gamma|^2 = \alpha\beta$ folgt wegen $\beta > 0$ und 9.7 die Existenz von $z \in \mathbb{C}$ mit $a_j = b_j z$, $j = 1, \ldots, n$. Somit gilt $\gamma = z\beta$, wegen $|\gamma| = \operatorname{Re}\gamma$ ergibt sich schließlich $\operatorname{Im}\gamma = 0$, somit $z \in \mathbb{R}$ und $z \geq 0$. Umgekehrt zeigt man, daß die angegebenen Bedingungen hinreichend sind für die Gleichheit in $(*)$. $\square$

KAPITEL iii

Endliche und unendliche Mengen

1. Äquivalenz von Mengen

Ein Größenvergleich von zwei Mengen kann durch Abzählen der Elemente erfolgen. Naturgemäß ist man dabei auf endliche Mengen beschränkt. Der Größenvergleich kann auch durch eindeutiges Zuordnen der Elemente der einen Menge zu Elementen der anderen erfolgen. Diese Vorgangsweise ist bei beliebigen Mengen anwendbar. Im Folgenden beschränken wir uns auf die Darstellung einiger wesentlicher Ideen und verweisen für eine umfassende Diskussion auf die Speziallitertur.

Definition 1.1. *A und B seien Mengen.*

A heißt ***äquivalent*** *zu B (A und B besitzen gleiche Mächtigkeit),*
$A \sim B$, $\underset{Def}{\Leftrightarrow}$ es gibt eine bijektive Abbildung $f\colon A \to B$.

Beispiel 1.2. i) $A = \{a, b, c\}$, $B = \{1, 2, 3\}$, $f(a) = 2$, $f(b) = 1$, $f(c) = 3$.
ii) $A = \mathbb{N}$, $B = \{2n\colon n \in \mathbb{N}\}$, $f(n) = 2n$.
iii) $A = (0, 1)$, $B = (a, b)$, $a < b$, $a, b \in \mathbb{R}$ beliebig, und $f(x) = (b - a)x + a$.

Es kann leicht verifiziert werden, daß die angegebenen Abbildungen f jeweils Bijektionen von A auf B darstellen. Definition 1.1 hat somit beispielsweise die paradox erscheinende Konsequenz, daß $\mathbb{N}$ und die Menge der geraden natürlichen Zahlen gleiche Mächtigkeit besitzen.

Satz 1.3. *Die Äquivalenz von Mengen ist auf jedem Mengensystem $\mathcal{A}$ eine Äquivalenzrelation.*

Beweis. Für $A \in \mathcal{A}$ und $A \neq \emptyset$ ist id_A eine Bijektion auf A, für $A = \emptyset$ wähle $f = \emptyset$. Somit gilt $A \sim A$.
Es sei $A \sim B$, d.h. es gibt eine Bijektion von A auf B. Dann ist f^{-1} eine Bijektion von B auf A, d.h. $B \sim A$. Schließlich gelte $A \sim B$ und $B \sim C$. Es gibt also Bijektionen $f\colon A \to B$ und $g\colon B \to C$. Wegen $\operatorname{bild} f = \operatorname{def} g$ ist auch $g \circ f\colon A \to C$ eine Bijektion, d.h. $A \sim C$. □

Satz 1.4. *Für jede Menge A gilt $A \not\sim \mathcal{P}(A)$.*

Beweis. Dies ist klar für $A = \emptyset$, da dann $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset\}$. Wir führen einen Beweis durch Widerspruch und nehmen an es gäbe $A \neq \emptyset$ mit $A \sim \mathcal{P}(A)$. Dann gibt es eine Bijektion $f\colon A \to \mathcal{P}(A)$. Wir definieren nun eine Teilmenge X von A, sodaß $X \notin \operatorname{bild} f$ im Widerspruch zur Surjektivität von f. Es sei

$$X = \{a \in A : a \notin f(a)\}.$$

Es ist wird nicht ausgeschlossen, daß X leer ist. Angenommen, es wäre $X \in \operatorname{bild} f$, dann gäbe es $a_0 \in A\colon f(a_0) = X$. Es muß $a_0 \in X$ oder $a_0 \notin X$ gelten. Wegen

$$a_0 \in X \Rightarrow a_0 \notin f(a_0) = X \Rightarrow a_0 \notin X,$$
$$a_0 \notin X \Rightarrow a_0 \in f(a_0) \Rightarrow a_0 \in X,$$

sind beide Alternativen unmöglich, es gilt somit $X \notin \operatorname{bild} f$. □

2. Endliche, abzählbare und überabzählbare Mengen

Definition 2.1. *Es sei $n \in \mathbb{N}$ und A eine Menge.*

a) $\mathcal{I}(n) := \{k \in \mathbb{N}\colon 1 \leq k \leq n\}$ *heißt Abschnitt von* $\mathbb{N}$,

b) *A heißt **endlich*** $\underset{Def}{\Leftrightarrow}$ $A = \emptyset$ *oder* $\exists n \in \mathbb{N}\colon A \sim \mathcal{I}(n)$,

c) *A heißt **unendlich*** $\underset{Def}{\Leftrightarrow}$ *A ist nicht endlich.*

Das folgende Resultat entspricht zwar unserer Intuition, es muß aber aus der Definition 2.1 abgeleitet werden.

Satz 2.2. *1) Teilmengen endlicher Mengen sind endlich.*
2) Obermengen unendlicher Mengen sind unendlich.

Beweis. 1) Wir zeigen mit vollständiger Induktion eine etwas stärkere Aussage. Das Prädikat $P(n)$ sei folgendermaßen definiert: Es sei $n \in \mathbb{N}$, A eine beliebige Menge mit $A \sim \mathcal{I}(n)$ und $B \subset A$, $B \neq \emptyset$; dann existiert eine natürliche Zahl $k \leq n$ mit $B \sim \mathcal{I}(k)$. Da 1 die kleinste natürliche Zahl darstellt, folgt $\mathcal{P}(\mathcal{I}(1)) = \{\emptyset, \{1\}\}$. Es sei nun A eine beliebige Menge mit $A \sim \mathcal{I}(1)$, $B \subset A$ und $\varphi\colon A \to \mathcal{I}(1)$ eine Bijektion. Für $\varphi(B)$ gibt es dann nur die Möglichkeiten $\varphi(B) = \emptyset$, also $B = \emptyset$, oder $\varphi(B) = \{1\} = \varphi(A)$, also $B = A$. Somit gilt $P(1)$. Es gelte nun $P(n)$ und A sei eine beliebige Menge mit $A \sim \mathcal{I}(n+1)$, $B \subset A$, $B \neq \emptyset$ und $\varphi\colon A \to \mathcal{I}(n+1)$ eine Bijektion. Wir entfernen aus der Menge A das Element $\tilde{a} = \varphi^{-1}(n+1)$, $\tilde{A} = A \setminus \{\tilde{a}\}$, und schränken φ auf $\tilde{A}$ ein. Dann ist $\tilde{\varphi} = \varphi|_{\tilde{A}}\colon \tilde{A} \to \mathcal{I}(n)$ eine Bijektion. Im Fall $\tilde{a} \notin B$ folgt $B \subset \tilde{A}$, die Behauptung ergibt sich nun aus der Induktionsvoraussetzung. Im Fall $\tilde{a} \in B$ setzen wir $\tilde{B} = B \setminus \{\tilde{a}\}$, also gilt $\tilde{B} \subset \tilde{A}$. Wenn $\tilde{B}$ leer ist, folgt $B = \{\tilde{a}\}$. Dann ist die Abbildung $\psi\colon B \to \mathcal{I}(1)$, $\psi(\tilde{a}) = 1$, bijektiv, also gilt $P(n+1)$ mit $k = 1$. Es sei nun $\tilde{B} \neq \emptyset$. Wegen der Induktionsvoraussetzung gibt es eine natürliche Zahl $k \leq n$ und eine Bijektion $\tilde{\psi}\colon \tilde{B} \to \mathcal{I}(k)$. Definieren wir die Abbildung ψ durch $\psi = \tilde{\psi}$ auf $\tilde{B}$ und $\psi(\tilde{a}) = k+1$, dann ist $\psi\colon B \to \mathcal{I}(k+1)$ eine Bijektion. Somit gilt auch in diesem Fall $P(n+1)$.
2) Es sei A unendlich und $A \subset C$. Wegen 1) kann C nicht endlich sein. □

Satz 2.3. *Es gibt keine bijektive Abbildung von $\mathcal{I}(n)$ auf eine echte Teilmenge X von $\mathcal{I}(n)$ ($n \in \mathbb{N}$ beliebig).*

Beweis. Wir führen einen Induktionsbeweis. Die Behauptung stimmt für $n = 1$, da die einzige echte Teilmenge von $\mathcal{I}(1)$ die leere Menge ist. Die Behauptung gelte nun für n. Angenommen sie sei falsch für $n+1$, d.h. es gibt $X \subsetneq \mathcal{I}(n+1)$ und

eine Bijektion $f\colon \mathcal{I}(n+1) \to X$. Dann gibt es zwei Möglichkeiten: $n+1 \in X$ oder $n+1 \notin X$. Falls $n+1 \notin X$, d.h. $n+1 \notin \operatorname{bild} f$, folgt $X \subset \mathcal{I}(n)$ und $f(n+1) \neq n+1$. Dann ist die Einschränkung $f|_{\mathcal{I}(n)}$ eine Bijektion von $\mathcal{I}(n)$ auf $X \setminus \{f(n+1)\}$. Wegen $f(n+1) \in \mathcal{I}(n)$ gilt $X \setminus \{f(n+1)\} \subsetneq \mathcal{I}(n)$.
Es sei nun $n+1 \in X$, d.h. $\exists k_0 \in \mathcal{I}(n+1)\colon f(k_0) = n+1$. Falls $k_0 = n+1$ setzen wir $g = f|_{\mathcal{I}(n)}$, falls $k_0 \in \mathcal{I}(n)$ definieren wir $g\colon \mathcal{I}(n) \to X$ durch

$$g(i) = \begin{cases} f(i) & i \neq k_0 \\ f(n+1) & i = k_0. \end{cases}$$

In jedem Fall ist g injektiv und wegen $g(\mathcal{I}(n)) = f(\mathcal{I}(n+1)) \setminus \{f(k_0)\} = X \setminus \{n+1\}$ eine Bijektion von $\mathcal{I}(n)$ auf $X \setminus \{n+1\}$. Da $X \subsetneq \mathcal{I}(n+1)$ und $n+1 \in X$ folgt $X \setminus \{n+1\} \subsetneq \mathcal{I}(n)$. Somit führen beide Alternativen, $n+1 \in X$ und $n+1 \notin X$ auf einen Widerspruch zur Induktionsannahme. $\square$

Korollar 2.4. Es sei $A \sim \mathcal{I}(n)$ und $A \sim \mathcal{I}(m)$. Dann ist $n = m$.

Beweis. Es sei o.B.d.A. $n \leq m$, also $\mathcal{I}(n) \subseteq \mathcal{I}(m)$. Aus den Voraussetzungen folgt $\mathcal{I}(m) \sim \mathcal{I}(n)$, d.h. es gibt eine Bijektion $f\colon \mathcal{I}(m) \to \mathcal{I}(n)$. $\mathcal{I}(n) \subsetneq \mathcal{I}(m)$ ist nach Satz 2.3 nicht möglich, somit ist $\mathcal{I}(n) = \mathcal{I}(m)$, d.h. $n = m$. $\square$

Ist $A \sim \mathcal{I}(n)$, kann der Menge A daher eindeutig die Zahl $|A| = n$ zugeordnet werden. Man nennt $|A|$ die **Anzahl** der Elemente von M oder auch Kardinalzahl von A. Korollar 2.4 erscheint trivial für alltägliche endliche Mengen. Bei vielen Mengen ist jedoch a priori nicht klar, ob sie endlich sind und wieviele Elemente sie besitzen.

Korollar 2.5. *A sei eine endliche Menge. Es gibt keine Bijektion von A auf eine echte Teilmenge X von A.*

Beweis. Es gibt ein (eindeutiges) $n \in \mathbb{N}$, sodaß $A \sim \mathcal{I}(n)$. Es sei f eine Bijektion von A auf $\mathcal{I}(n)$. Angenommen, es gäbe eine Bijektion g von A auf eine echte Teilmenge X von A. Wegen $f(X) \subsetneq f(A) = \mathcal{I}(n)$ wäre $f \circ g \circ f^{-1}\colon \mathcal{I}(n) \to f(X)$ eine Bijektion von $\mathcal{I}(n)$ auf die echte Teilmenge $f(X)$ von $\mathcal{I}(n)$ im Widerspruch zu Satz 2.3. Wir veranschaulichen die Beweisidee mit folgendem Diagramm:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[d, "g"'] & \mathcal{I}(n) \arrow[l, "f^{-1}"'] \arrow[d, "f\circ g\circ f^{-1}"] \\ X \arrow[r, "f"'] & f(X) \end{tikzcd}$$

$\square$

Kann man also eine Bijektion von einer Menge A auf eine echte Teilmenge von A konstruieren, muß A unendlich sein. Mit Hilfe des Auswahlaxioms kann man zeigen, daß diese Eigenschaft charakteristisch ist für unendliche Mengen.

Satz 2.6. *Eine Menge A ist genau dann unendlich, wenn es eine Bijektion von A auf eine echte Teilmenge von A gibt.*

Korollar 2.7. $\mathbb{N}$ ist unendlich.

Beweis. Beispiel 1.2 (ii). □

Satz 2.8. *Jede unendliche Teilmenge von $\mathbb{N}$ ist äquivalent zu $\mathbb{N}$.*

Beweis. Es sei $X \subset \mathbb{N}$ unendlich. Wir definieren die Abbildung $f\colon \mathbb{N} \to X$ rekursiv durch $f(1) = \min X$, $f(n) = \min(X \setminus \{f(1), \ldots, f(n-1)\})$. Da X unendlich ist, folgt $X \setminus \{f(1), \ldots, f(n-1)\} \neq \emptyset$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Somit läßt sich diese Konstruktion durchführen. Es seien $n, m \in \mathbb{N}$ und $n < m$, d.h. $n \leq m - 1$. Es folgt

$$\begin{aligned} f(n) &= \min(X \setminus \{f(1), \ldots, f(n-1)\}) \\ &< \min(X \setminus \{f(1), \ldots, f(n-1), f(n), \ldots, f(m-1)\}) = f(m). \end{aligned}$$

Somit ist f injektiv. Es gilt sogar $\forall n, m \in \mathbb{N}\colon n < m \Rightarrow f(n) < f(m)$. Es gilt aber auch $f(n) \geq n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Wegen $f(1) \geq 1$ trifft dies für $n = 1$ zu. Es gelte $f(k) \geq k$ für $1 \leq k \leq n$. Dann folgt $f(n+1) = \min(X \setminus \{f(1), \ldots, f(n)\}) \geq \min(X \setminus \mathcal{J}(n)) \geq n+1$. Die Behauptung folgt nun aus Korollar II.4.12. Wir weisen nun die Surjektivität von f nach: Es sei $x_0 \in X$ beliebig gewählt. Gilt $x_0 = \min X$, so ist $x_0 = f(1)$. Ist $x_0 > \min X$, dann ist die Menge $A = \{n \in \mathbb{N}\colon f(n) < x_0\}$ nicht leer ($1 \in A$) und wegen $f(x_0) \geq x_0$ auch beschränkt und endlich. Somit existiert $m_0 = \max A$, welches $f(m_0) < x_0$ und $f(m_0 + 1) \geq x_0$ erfüllt. Wegen $x_0 \in X \setminus \{f(1), \ldots, f(m_0)\}$ folgt aber auch $x_0 \geq \min X \setminus \{f(1), \ldots, f(m_0)\} = f(m_0 + 1)$. Also gilt $x_0 = f(m_0 + 1)$, folglich ist f eine Bijektion und $X \sim \mathbb{N}$. □

Korollar 2.9. Es sei $A \sim \mathbb{N}$ und B eine unendliche Teilmenge von A. Dann ist $B \sim \mathbb{N}$.

Mit Hilfe des Auswahlaxioms läßt sich zeigen, daß jede unendliche Menge eine zu $\mathbb{N}$ äquivalente Teilmenge besitzt. $\mathbb{N}$ ist demnach eine unendliche Menge kleinster Mächtigkeit. Dies rechtfertigt folgende Definition:

Definition 2.10. *A sei eine Menge*

i) *A heißt **abzählbar unendlich** $\underset{Def}{\Leftrightarrow}$ $A \sim \mathbb{N}$,*
ii) *A heißt **abzählbar** $\underset{Def}{\Leftrightarrow}$ A ist endlich oder abzählbar unendlich,*
iii) *A heißt **überabzählbar** $\underset{Def}{\Leftrightarrow}$ A ist nicht abzählbar.*

Insbesondere ist $\mathbb{N}$ abzählbar. Wir wissen bereits, daß $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ nicht äquivalent ist zu $\mathbb{N}$. Nach Satz 2.6 ist $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ überabzählbar.
Für abzählbare Mengen vereinbaren wir die Schreibweise $A = \{a_i\}_{i=1}^n$, falls A endlich ist und $A = \{a_i\colon i \in \mathbb{N}\}$ falls A abzählbar unendlich ist. Man nennt $a_1, a_2, \ldots$ eine **Abzählung** von A.
In dieser Sprechweise kann man Korollar 2.9 verschärfen.

Korollar 2.11. Jede Teilmenge einer abzählbaren Menge ist abzählbar.

Satz 2.12. *$A \neq \emptyset$ sei eine Menge. Folgende Aussagen sind äquivalent.*

a) *A ist abzählbar,*
b) *es gibt eine surjektive Abbildung $g\colon \mathbb{N} \to A$,*
c) *es gibt eine injektive Abbildung $f\colon A \to \mathbb{N}$,*

Beweis. Wir zeigen (a) $\Rightarrow$ (b) $\Rightarrow$ (c) $\Rightarrow$ (a).
1. (a) $\Rightarrow$ (b): Es sei A endlich, $A = \{a_i\}_{i=1}^n$, $g\colon \mathbb{N} \to A$ kann definiert werden durch $g(i) = a_i$, $i < n$ und $g(i) = a_n$, $i \geq n$. Ist A abzählbar unendlich, existiert sogar eine Bijektion von $\mathbb{N}$ auf A.
2. (b) $\Rightarrow$ (c): Es sei $g(\mathbb{N}) = A$, d.h. $\forall a \in A : g^{-1}(\{a\}) \neq \emptyset$. Definiere $f\colon A \to \mathbb{N}$ durch $f(a) = \min g^{-1}(\{a\})$. Dann ist $g(f(a)) = a$, d.h. $g \circ f = \mathrm{id}_A$ und somit ist f nach Satz I-6.13 injektiv.
3. (c) $\Rightarrow$ (a): Es sei $f\colon A \to \mathbb{N}$ injektiv, also $f\colon A \to f(A)$ bijektiv. Da $f(A) \subset \mathbb{N}$ folgt mit Korollar 2.11 die Abzählbarkeit von $f(A)$. Wegen $A \sim f(A)$ ist auch A abzählbar. □

Satz 2.13. *i) $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ist abzählbar unendlich.*
ii) $\{A_i\}_{i=1}^\infty$ sei eine abzählbare Familie abzählbarer Mengen. Dann ist $\bigcup_{i=1}^\infty A_i$ abzählbar.

Beweis. i) Definiere $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ durch $f(n,m) = 2^n 3^m$. f ist injektiv: die Gleichung $f(n,m) = f(\tilde{n}, \tilde{m})$ ist gleichwertig mit $2^{n-\tilde{n}} = 3^{\tilde{m}-m}$. Diese Beziehung kann nur für $n = \tilde{n}$ und $m = \tilde{m}$ gelten (Beweis: Übung). Da $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ unendlich ist, folgt die Behauptung nach Satz 2.12.
ii) Ohne Einschränkung können wir annehmen, daß $A_i \neq \emptyset$ für alle $i \in \mathbb{N}$ gilt. Für jede Menge A_i betrachten wir eine Abzählung

$$a_1^{(i)}, a_2^{(i)}, \ldots,$$

(falls A_i endlich ist, etwa $A_i \sim \mathcal{I}(n)$, setzen wir $a_j^{(i)} = a_n^{(i)}$, $j \geq n$, vgl. Satz 2.12) und definieren eine Surjektion $g\colon \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \bigcup_{i=1}^\infty A_i$ durch $g(n,m) = a_m^{(n)}$. Ferner sei $f\colon \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine Bijektion, dann ist $g \circ f^{-1}\colon \mathbb{N} \to \bigcup_{i=1}^\infty A_i$ eine Surjektion. □

Korollar 2.14. $\mathbb{Q}$ ist abzählbar.

Beweis. Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $A_n := \{x \in \mathbb{Q}\colon\ (\exists p \in \mathbb{Z} : x = \frac{p}{n})\}$ abzählbar und $\mathbb{Q} = \bigcup_{n=1}^\infty A_n$. □

Satz 2.15. *Das Intervall $[0,1]$, somit auch jedes Intervall in $\mathbb{R}$, ist überabzählbar. Insbesondere ist $\mathbb{R}$ selbst überabzählbar.*

Beweis. $[0,1]$ ist eine unendliche Menge, denn es gilt etwa $\{\frac{1}{n}\colon n \in \mathbb{N}\} \subset [0,1]$. Angenommen $[0,1]$ wäre abzählbar, also abzählbar unendlich. Dann gäbe es eine Abzählung $[0,1] = \{x_n\colon n \in \mathbb{N}\}$. Wir konstruieren eine Zahl $z \in [0,1]$, die nicht in dieser Abzählung aufscheint und erhalten einen Widerspruch.

Es sei I_1 eines der Intervalle $[0, \frac{1}{3}]$, $[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$, $[\frac{2}{3}, 1]$ mit $x_1 \notin I_1$. Man fährt induktiv fort: Es sei I_n bestimmt und in drei abgeschlossene Intervalle gleicher Länge unterteilt. Liegt x_{n+1} nicht in I_n, so kann man für I_{n+1} jedes der drei Teilintervalle wählen, liegt x_{n+1} in I_n, dann nimmt man für I_{n+1} eines der Teilintervalle von I_n, das x_{n+1} nicht enthält. Auf diese Weise erhalten wir eine Folge abgeschlossener Intervalle $I_n = [a_n, b_n]$, mit $b_n - a_n = 3^{-n} < \frac{1}{n}$ (Induktion). Aus Satz II–6.14 folgt die Existenz einer Zahl $z \in [0, 1] = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ mit $z \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$, d.h. $z \in I_n$ und $x_n \notin I_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Somit folgt $z \neq x_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

$\square$

Da $\mathbb{Q}$ abzählbar ist, folgt aus diesem Satz ein neuer Beweis für die Existenz von irrationalen Zahlen.

Korollar 2.16. i) Die Menge der irrationalen Zahlen ist überabzählbar.
ii) Es sei $a, b \in \mathbb{R}$ und $a < b$. Dann gibt es eine irrationale Zahl ξ: $a < \xi < b$.

KAPITEL iv

Folgen und Reihen

Im Mittelpunkt unseres Interesses steht zwar die reelle Analysis, um jedoch unnötige Wiederholungen zu vermeiden, werden die grundlegenden Eigenschaften konvergenter Folgen und Reihen im Komplexen entwickelt. Wegen der Einbettung von $\mathbb{R}$ in $\mathbb{C}$ kann man im Folgenden stets $\mathbb{C}$ durch $\mathbb{R}$ ersetzen.

1. Konvergenz von Folgen

Definition 1.1. *i) Eine Abbildung $x\colon \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ $(\mathbb{R})$, heißt* ***Folge*** *komplexer (reeller) Zahlen. $x_n := x(n)$ wird* **n-tes Glied** *der Folge genannt.*
ii) Eine Abbildung $\varphi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ist **streng monoton wachsend** $\underset{Def}{\Leftrightarrow}$ $\forall n, m \in \mathbb{N}\colon n < m \Rightarrow \varphi(n) < \varphi(m)$.
iii) $x\colon \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ sei eine Folge und $\varphi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ streng monoton wachsend. Dann heißt $x \circ \varphi$ ***Teilfolge*** *von x.*

Es ist üblich, Folgen in der Form $(x_n)_{n\geq 1}$, $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, (x_n) oder $x_1, x_2, \ldots$, zu schreiben. Teilfolgen $(x_{\varphi(k)})_{k\geq 1}$ bezeichnet man oft auch mit $(x_{n_k})_{k\geq 1}$ (es wird dabei $\varphi(k)$ durch n_k ersetzt). Es ist also $n_1 < n_2 < \cdots$. Die Schreibweise $(x_n)_{n\geq 1} \subset X$ bedeutet, daß $x_n \in X$ für alle $n \in \mathbb{N}$ zutrifft. Die Indizierung einer Folge kann natürlich bei einem beliebigen $n_0 \in \mathbb{N}_0$ beginnen.

Beispiel 1.2.

(1)	$x_n = \frac{1}{n}$	:	$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$
(2)	$y_n = i^n$	:	$i, -1, -i, 1, i, -1, \ldots$
(3)	$z_n = \frac{n}{n+1}$	:	$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots$
(4)	$w_n = n^2$	:	$1, 4, 9, 16, \ldots.$

Diese Folgen weisen ein recht unterschiedliches Verhalten auf: Die Glieder x_n werden immer kleiner, z_n nähert sich immer mehr der Zahl 1, y_n nimmt abwechselnd die Werte $i, -1, -i, 1$ an und w_n wächst über alle Grenzen. Wir präzisieren nun die vage Formulierung, eine Folge nähere sich immer mehr einer bestimmten Zahl z.

Definition 1.3. *Es sei $(x_n)_{n\geq 1} \subset \mathbb{C}$ und $\alpha \in \mathbb{C}$.*
1) $(x_n)_{n\geq 1}$ ***konvergiert*** *gegen α* $\underset{Def}{\Leftrightarrow}$
$\forall \varepsilon > 0\, \exists N(\varepsilon)\, \forall n \in \mathbb{N}\colon n \geq N(\varepsilon) \Rightarrow |x_n - \alpha| < \varepsilon$.
In diesem Falle heißt α ***Grenzwert*** *von $(x_n)_{n\geq 1}$ und man schreibt*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \alpha \quad \text{oder auch} \quad x_n \to \alpha \quad \text{für } n \to \infty.$$

2) $(x_n)_{n\geq 1}$ *heißt* ***konvergent*** $\underset{Def}{\Leftrightarrow}$ $\exists \alpha \in \mathbb{C}\colon \lim_{n\to\infty} x_n = \alpha$.

3) $(x_n)_{n\geq 1}$ *heißt* ***divergent*** $\underset{Def}{\Leftrightarrow}$ $(x_n)_{n\geq 1}$ *ist nicht konvergent.*

Die Menge $K(\alpha, \varepsilon) := \{x \in \mathbb{C}\colon |x - \alpha| < \varepsilon\}$ kann in der Gaußschen Zahlenebene als Kreisscheibe (ohne Berandung) mit Mittelpunkt α und Radius ε veranschaulicht werden. Wir nennen $K(\alpha, \varepsilon)$ ε–Umgebung (oder kurz Umgebung) von α. $\lim_{n\to\infty} x_n = \alpha$ bedeutet demnach, daß in jeder beliebigen ε–Umgebung von α, *sei sie auch noch so klein*, alle Folgenglieder mit Ausnahme von höchstens endlich vielen liegen müssen. Außerhalb einer beliebigen ε–Umgebung können daher höchstens endlich viele Glieder der Folge liegen. Die Konvergenz einer Folge und ihr Grenzwert werden also nicht beeinflußt, wenn man endlich viele Glieder der Folge abändert. Durch formale Negation erhält man: „$(x_n)_{n\geq 1}$ konvergiert nicht gegen α“ ist gleichwertig mit:

$$\exists \varepsilon_0 > 0\, \forall N \in \mathbb{N}\, \exists n \in \mathbb{N}\colon n \geq N \wedge |x_n - \alpha| \geq \varepsilon_0.$$

BEMERKUNG 1.4. $(x_n)_{n\geq 1}$ konvergiert nicht gegen $\alpha \Leftrightarrow$ es gibt eine Teilfolge $(x_{\varphi(k)})_{k\geq 1}$ und $\varepsilon_0 > 0$ so, daß $\forall k \in \mathbb{N}\colon |x_{\varphi(k)} - \alpha| \geq \varepsilon_0$.

SATZ 1.5 (Eindeutigkeit des Grenzwertes).
Konvergiert $(x_n)_{n\geq 1} \subset \mathbb{C}$ *gegen* $\alpha \in \mathbb{C}$ *und gegen* $\beta \in \mathbb{C}$, *dann ist* $\alpha = \beta$.

BEWEIS. Nach Definition 1.3 gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ Indizes N_1 und N_2, sodaß

$$n \geq N_1 \Rightarrow |x_n - \alpha| < \varepsilon \quad \text{sowie} \quad n \geq N_2 \Rightarrow |x_n - \beta| < \varepsilon$$

gilt. Setzt man $N_0 = \max(N_1, N_2)$ gilt für $n \geq N_0$

$$|\alpha - \beta| \leq |\alpha - x_n| + |x_n - \beta| < 2\varepsilon,$$

wegen Korollar II-3.8 folgt $\alpha = \beta$. □

SATZ 1.6. *Es sei* $(z_n)_{n\geq 1} \subset \mathbb{C}$, $z_n = x_n + iy_n$, $x_n, y_n \in \mathbb{R}$.
(z_n) *ist konvergent genau dann, wenn die reellen Folgen* (x_n) *und* (y_n) *konvergent sind. In diesem Falle gilt*

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to\infty} x_n + i \lim_{n\to\infty} y_n.$$

BEWEIS. i) Es sei $\lim_{n\to\infty} z_n = z$ und $z = x + iy$. Aus $\max(|x - x_n|, |y - y_n|) \leq |z - z_n|$ schließen wir $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ und $\lim_{n\to\infty} y_n = y$.
ii) Aus $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ und $\lim_{n\to\infty} y_n = y$ folgt mit Hilfe der Abschätzung

$$|z - z_n| = |(x - x_n) + i(y - y_n)| \leq |x - x_n| + |y - y_n|.$$

die Konvergenz von (z_n) gegen z. □

Wir zeigen nun zwei nützliche notwendige Konvergenzbedingungen.

SATZ 1.7. *Es sei* $(x_n)_{n\geq 1} \subset \mathbb{C}$ *konvergent mit* $\lim_{n\to\infty} x_n = \alpha$. *Dann gilt:*

(1) $(x_n)_{n\geq 1}$ *ist beschränkt.*
(2) *Jede Teilfolge* $(x_{\varphi(n)})_{n\geq 1}$ *ist konvergent mit* $\lim_{n\to\infty} x_{\varphi(n)} = \alpha$.

Beweis. 1) Wir wählen $\varepsilon = 1$ in 1.3. Wegen $\lim_{n\to\infty} x_n = \alpha$ gibt es $N_0 \in \mathbb{N}$, sodaß $|x_n - \alpha| < 1$ für alle $n \geq N_0$ zutrifft. Für $n \geq N_0$ gilt dann auch

$$|x_n| \leq |x_n - \alpha| + |\alpha| < 1 + |\alpha|.$$

Setzt man $b_0 = \max\{|x_n|\colon 1 \leq n < N_0\}$ ergibt sich die Behauptung

$$\forall n \in \mathbb{N}\colon |x_n| \leq \max\{1 + |\alpha|, b_0\}.$$

2) Es sei $(x_{\varphi(n)})$ eine Teilfolge von (x_n). Für ein beliebig gewähltes $\varepsilon > 0$ gibt es einen Index $N(\varepsilon)$, sodaß $|x_n - \alpha| < \varepsilon$ für alle $n \geq N(\varepsilon)$ zutrifft. Als Übung beweise der Leser, daß $\varphi(n) \geq n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, falls $\varphi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ streng monoton wächst. Für $n \geq N(\varepsilon)$ gilt daher auch $\varphi(n) \geq \varphi(N(\varepsilon)) \geq N(\varepsilon)$ und somit $|x_{\varphi(n)} - \alpha| < \varepsilon$, d.h. $\lim_{n\to\infty} x_{\varphi(n)} = \alpha$. □

Satz 1.7 zeigt, daß die Folgen (y_n) und (w_n) in Beispiel 1.2 nicht konvergieren. Wir beenden diesen Abschnitt mit der Berechnung einiger nützlicher Grenzwerte.

Beispiel 1.8.

i) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$,
ii) $\forall p \in \mathbb{Q}\colon p > 0 \Rightarrow lim_{n\to\infty} n^{-p} = 0$,
iii) $\forall a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}\colon lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$,
iv) $lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$,
v) $\forall k \in \mathbb{N}_0 \forall z \in \mathbb{C}\colon |z| > 1 \Rightarrow lim_{n\to\infty} \frac{n^k}{z^n} = 0$

Beweis. i) Siehe Korollar II-6.9
ii) Zu $\varepsilon > 0$ wählen wir $N(\varepsilon) = [\varepsilon^{-\frac{1}{p}}] + 1$ ($[x]$ wurde in Satz II-6.10 definiert). Für $n > N(\varepsilon)$ folgt mit Satz II-7.8 $\frac{1}{n^p} < \frac{1}{N(\varepsilon)^p} < \varepsilon$.
iii) Die Behauptung ist trivial für $a = 1$. Es sei daher zunächst $a > 1$ und somit auch $\sqrt[n]{a} > 1$ (Korollar II-7.5). Setzt man $x_n = \sqrt[n]{a} - 1 > 0$, d.h. $a = (1 + x_n)^n$, folgt mit Hilfe der Bernoullischen Ungleichnung II.4.18 $a = (1 + x_n)^n > 1 + nx_n$, somit $0 < x_n < \frac{a-1}{n}$. Für beliebiges $\varepsilon > 0$ setzen wir $N(\varepsilon) = [\frac{a-1}{\varepsilon}] + 1$. Somit ergibt sich für $n \geq N(\varepsilon)$

$$|\sqrt[n]{a} - 1| = x_n \leq \frac{a-1}{N(\varepsilon)} < \varepsilon.$$

Der Beweis für $a \in (0, 1)$ wird vorerst zurückgestellt.
iv) Wir setzen wieder $x_n = \sqrt[n]{n} - 1 \geq 0$, d.h. $n = (1 + x_n)^n$. Mit Hilfe des binomischen Lehrsatzes II-4.22 erhält man

$$n = (1 + x_n)^n \geq 1 + \binom{n}{2} x_n^2 = 1 + \frac{1}{2} n(n-1) x_n^2$$

und folglich

$$x_n \leq \sqrt{\frac{2}{n}}.$$

Für $\varepsilon > 0$ wählen wir $N(\varepsilon) > \frac{2}{\varepsilon^2}$. Dann folgt für alle $n \geq N(\varepsilon)$

$$|\sqrt[n]{n} - 1| = x_n \leq \sqrt{\frac{2}{n}} \leq \sqrt{\frac{2}{N(\varepsilon)}} < \varepsilon.$$

v) Es sei $|z| = 1 + x$, $x > 0$, und $p \in \mathbb{N}$, $p > k$. Für jedes $n > 2p$ folgt aus der Binomialentwicklung

$$(1+x)^n > \binom{n}{p} x^p = \frac{n(n-1)\cdots(n-p+1)}{p!} x^p > \frac{n^p x^p}{2^p p!}$$

(wir benutzten $n - j > n - p > \frac{n}{2}, 0 \leq j \leq p-1$, und $p < \frac{n}{2}$). Somit folgt für $n > 2p$ (beachte $p - k > 0$)

$$\left|\frac{n^k}{z^n}\right| = \frac{n^k}{(1+x)^n} < \frac{2^p p!}{x^p} \frac{1}{n^{p-k}} < \frac{2^p p!}{x^p} \frac{1}{n}.$$

Folglich ist $|\frac{n^k}{z^n}| < \varepsilon$, soferne $n - 1 \geq N(\varepsilon) > \max\{2p, \frac{2^p p!}{x^p \varepsilon}\}$. □

Bemerkung 1.9. Das letzte Beispiel bringt zum Ausdruck, daß für $|z| > 1, z \in \mathbb{C}$, die Folge $(|z|^n)_{n \geq 1}$ schneller anwächst, als jede noch so große Potenz von n.

Satz 1.10. *Es sei $z \in \mathbb{C}$. Dann gilt*

(1) $\lim_{n\to\infty} z^n = 0$ *für* $|z| < 1$.
(2) $(z^n)_{n\geq 1}$ *ist divergent, falls* $|z| \geq 1$ *und* $z \neq 1$.

Beweis. (1) Die Behauptung ist trivial für $z = 0$. Es sei $0 < |z| < 1$, also $\frac{1}{|z|} > 1$. Ersetzt man z in Beispiel Beispiel 1.8–(v) durch $\frac{1}{z}$ und wählt $k = 0$, ergibt sich die Behauptung.
(2) Es sei nun $|z| \geq 1$ und $z \neq 1$. Dann ist auch $|z|^n \geq 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Wir nehmen an, $(z^n)_{n\geq 1}$ sei konvergent, d.h. es existiert $\alpha \in \mathbb{C}$ mit $\lim_{n\to\infty} z^n = \alpha$. Somit gibt es zu $\varepsilon = \frac{1}{3}|z-1| > 0$ einen Index $N(\varepsilon)$, sodaß $|z^n - \alpha| < \varepsilon$ für alle $n \geq N(\varepsilon)$. Dies hat zur Folge

$$\begin{aligned} 3\varepsilon = |z-1| &\leq |z^{N(\varepsilon)}||z-1| = |z^{N(\varepsilon)+1} - z^{N(\varepsilon)}| \\ &\leq |z^{N(\varepsilon)+1} - \alpha| + |\alpha - z^{N(\varepsilon)}| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Dieser Widerspruch zeigt die Divergenz von (z^n). □

2. Rechenregeln für konvergente Folgen

Die Konvergenzuntersuchung komplizierter Folgen läßt sich oft wesentlich vereinfachen, indem man sie auf die Untersuchung der Konvergenz einfacherer Folgen zurückführt.

Satz 2.1. *Es seien $(z_n)_{n\geq 1}$, $(w_n)_{n\geq 1}$ konvergente Folgen in $\mathbb{C}$. Dann gilt*

i) $\lim(z_n + w_n) = \lim z_n + \lim w_n$,
ii) $\forall a \in \mathbb{C}\colon\ \lim az_n = a \lim z_n$,
iii) $\lim z_n w_n = \lim z_n \lim w_n$,
iv) *Gilt* $\lim w_n \neq 0$ *und* $w_n \neq 0$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$, *dann ist* $\lim \frac{z_n}{w_n} = \frac{\lim z_n}{\lim w_n}$.

Beweis. Es sei $\lim z_n = z$ und $\lim w_n = w$.
i) Zu beliebig gewähltem $\varepsilon > 0$ gibt es Indizes $N_1(\varepsilon)$ und $N_2(\varepsilon)$ derart, daß

$$\forall n \in \mathbb{N}\colon n \geq N_1(\varepsilon) \Rightarrow |z_n - z| < \frac{\varepsilon}{2},$$
$$\forall n \in \mathbb{N}\colon n \geq N_2(\varepsilon) \Rightarrow |w_n - w| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Für $n \geq \max\{N_1(\varepsilon), N_2(\varepsilon)\}$ folgt dann

$$|(z_n + w_n) - (z + w)| \leq |z_n - z| + |w_n - w| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

iii) Nach Satz 1.7 gibt es $b > 0$, sodaß $|z_n| \leq b$ für alle $n \in \mathbb{N}$ zutrifft. Zu $\varepsilon > 0$ seien $N_1(\varepsilon)$ und $N_2(\varepsilon)$ so bestimmt, daß

$$\forall n \in \mathbb{N}\colon n \geq N_1(\varepsilon) \Rightarrow |z_n - z| < \frac{\varepsilon}{2(|w| + 1)},$$
$$\forall n \in \mathbb{N}\colon n \geq N_2(\varepsilon) \Rightarrow |w_n - w| < \frac{\varepsilon}{2b}.$$

Für $n \geq \max\{N_1(\varepsilon), N_2(\varepsilon)\}$ folgt

$$\begin{aligned}|z_n w_n - zw| &\leq |z_n w_n - z_n w| + |z_n w - zw| \\ &\leq |z_n||w_n - w| + |w||z_n - z| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\end{aligned}$$

ii) Folgt aus (iii) mit $w_n = a$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
iv) Wegen iii) genügt es $\lim \frac{1}{w_n} = \frac{1}{w}$ zu zeigen. Vorerst bestimmen wir einen Index $\tilde{N}$, sodaß $|w_n - w| < \frac{1}{2}|w|$ für alle $n \geq \tilde{N}$ gilt. Für $n \geq \tilde{N}$ folgt somit

$$|w_n| \geq |w| - |w_n - w| > \frac{1}{2}|w|.$$

Es sei nun $\varepsilon > 0$ beliebig gewählt und $N_1(\varepsilon)$ so bestimmt, daß $|w_n - w| < \frac{\varepsilon}{2}|w|^2$ für alle $n \geq N_1(\varepsilon)$ gilt. Für $n \geq \max\{N_1(\varepsilon), \tilde{N}\}$ ergibt sich

$$|\frac{1}{w_n} - \frac{1}{w}| = \frac{|w - w_n|}{|w||w_n|} < 2\frac{|w - w_n|}{|w|^2} < \varepsilon.$$

$\square$

Es soll noch einmal betont werden, daß diese Regeln nur auf konvergente Folgen angewendet werden dürfen. Es sei etwa $z_n = (-1)^n$ und $w_n = (-1)^{n+1}$. Die Folgen (z_n) und (w_n) sind divergent, trotzdem existieren die Grenzwerte

$$\lim_{n\to\infty}(z_n + w_n) = \lim_{n\to\infty}((-1)^n + (-1)^{n+1}) = 0,$$
$$\lim_{n\to\infty} z_n w_n = \lim_{n\to\infty}\frac{z_n}{w_n} = \lim_{n\to\infty}(-1)^n(-1)^{n+1} = -1.$$

Wir demonstrieren die Anwendung von Satz 2.1 an folgendem Beispiel:

Beispiel 2.2.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+n+3}{n^2+1} = \lim\frac{2+\frac{1}{n}+\frac{3}{n^2}}{1+\frac{1}{n^2}} \overset{(iv)}{=} \frac{\lim(2+\frac{1}{n}+\frac{3}{n^2})}{\lim(1+\frac{1}{n^2})}$$
$$\overset{(i)}{=} \frac{\lim 2 + \lim\frac{1}{n} + \lim\frac{3}{n^2}}{\lim 1 + \lim\frac{1}{n^2}} \overset{(ii)}{=} \frac{2+\lim\frac{1}{n}+3\lim\frac{1}{n^2}}{1+\lim\frac{1}{n^2}} = \frac{2+0+0}{1+0} = 2$$

Die vorletzte Gleichheit stützt sich auf Beispiel 1.8–(i), –(ii). Die zu Beginn getroffene Annahme, die Folge sei konvergent, wird durch die angedeuteten Argumente gerechtfertigt.

Wir können nun auch den Beweis von Beispiel 1.8–(iii) zu Ende führen.

Beispiel 2.3. $\forall a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}\colon \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a} = 1$

Beweis. In Beispiel 1.8 wurde bereits der Fall $a \geq 1$ erledigt. Es sei nun also $0 < a < 1$. Dann ist $\frac{1}{a} > 1$ und wegen Beispiel 1.8 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{a}} = 1$. Die Behauptung folgt nun aus der Identität $\sqrt[n]{a} = \frac{1}{\sqrt[n]{\frac{1}{a}}}$ und Satz 2.1. ☐

Satz 2.4. *i) Es sei $(z_n)_{n\geq 1} \subset \mathbb{C}$ eine* **Nullfolge**, *d.h.* $\lim_{n\to\infty} z_n = 0$, *und* $(w_n)_{n\geq 1} \subset \mathbb{C}$ *beschränkt. Dann gilt* $\lim_{n\to\infty} z_n w_n = 0$.
ii) Es sei $(z_n)_{n\geq 1} \subset \mathbb{C}$ konvergent und $\lim_{n\to\infty} z_n = z$. *Dann gilt* $\lim_{n\to\infty}|z_n| = |z|$.

Beweis. Es sei $\varepsilon > 0$ und $b > 0$ so, daß $|w_n| \leq b$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Da (z_n) eine Nullfolge ist, gibt es einen Index $N(\varepsilon)$, sodaß $|z_n| < \frac{\varepsilon}{b}$ für alle $n \geq N(\varepsilon)$ gilt. Für beliebiges $n \geq N(\varepsilon)$ folgt dann

$$|z_n w_n| = |z_n||w_n| \leq |z_n| b < \varepsilon.$$

ii) Dies folgt aus Satz II-9.6. ☐

Das nächste Resultat stellt sicher, daß sich Ungleichungen zwischen den Gliedern konvergenter Folgen auf deren Grenzwerte übertragen.

Satz 2.5. *Es seien $(x_n)_{n\geq 1}$, $(y_n)_{n\geq 1}$ reelle, konvergente Folgen und $N_0 \in \mathbb{N}$. Gilt $x_n \leq y_n$ für alle $n \geq N_0$, dann folgt* $\lim_{n\to\infty} x_n \leq \lim_{n\to\infty} y_n$.

Beweis. Es sei $x = \lim_{n\to\infty} x_n$, $y = \lim_{n\to\infty} y_n$ und $y < x$. Zu $\varepsilon = \frac{1}{2}(x-y) > 0$ gibt es einen Index $N_1 > N_0$, sodaß $|x_n - x| < \varepsilon$ und $|y_n - y| < \varepsilon$ für alle $n \geq N_1$ gilt. Für jedes $n \geq N_1$ folgt somit

$$y_n < y + \varepsilon = \frac{1}{2}(x+y) < x_n$$

im Widerspruch zu $x_n \leq y_n$ für $n \geq N_0$. □

Korollar 2.6. Es sei $(a_n)_{n\geq 1} \subset \mathbb{C}$ eine konvergente Folge mit $a = \lim_{n\to\infty} a_n$. Ferner seien $\alpha \in \mathbb{R}^+$, $z \in \mathbb{C}$ und $N \in \mathbb{N}$. Aus $|a_n - z| \leq \alpha$ für alle $n \geq N$ folgt die Ungleichung $|a - z| \leq \alpha$.

Beweis. Aus $a = \lim_{n\to\infty} a_n$ ergibt sich $\lim_{n\to\infty}(a_n - z) = a - z$ und wegen Satz 2.4 auch $|a - z| = \lim_{n\to\infty} |a_n - z|$. Die Behauptung folgt nun unmittelbar aus Satz 2.5. □

An Hand der Folge $(\frac{1}{n})_{n\geq 1}$ macht man sich klar, daß strikte Ungleichungen beim Übergang zum Grenzwert nicht immer erhalten bleiben. Der Beweis des folgenden Einschachtelungssatzes sei dem Leser als Übung überlassen.

Satz 2.7. *Es seien $(x_n)_{n\geq 1}$, $(y_n)_{n\geq 1}$ reelle, konvergente Folgen mit $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n$. Gilt für eine weitere Folge $(z_n)_{n\geq 1} \subset \mathbb{R}$ $x_n \leq z_n \leq y_n$, dann ist (z_n) konvergent mit $\lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to\infty} x_n$.*

3. Konvergenzkriterien

Bisher können wir Konvergenz einer Folge nur untersuchen, wenn wir den Grenzwert der Folge bereits kennen. Meistens ist aber der Grenzwert nicht bekannt und es ergibt sich die Frage, wie man aus Eigenschaften der Folgenglieder auf Konvergenz der Folge schließen kann.

Definition 3.1. *Eine reelle Folge $(x_n)_{n\geq 1}$ heißt*

(1) **monoton wachsend (fallend)** $\underset{Def}{\Leftrightarrow} \forall n \in \mathbb{N}\colon x_n \leq x_{n+1} \quad (x_n \geq x_{n+1})$
(2) **streng monoton wachsend (fallend)** $\underset{Def}{\Leftrightarrow} \forall n \in \mathbb{N}\colon x_n < x_{n+1} \quad (x_n > x_{n+1})$
(3) **monoton** $\underset{Def}{\Leftrightarrow}$ (x_n) *ist monoton wachsend oder monoton fallend*

Satz 3.2 (Monotoniekriterium). *Eine beschränkte, monoton wachsende (fallende) Folge (x_n) reeller Zahlen ist konvergent und es gilt*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \sup\{x_n \colon n \in \mathbb{N}\} \qquad (\lim_{n\to\infty} x_n = \inf\{x_n \colon n \in \mathbb{N}\})$$

Beweis. Es sei $(x_n)_{n\geq 1}$ eine monoton wachsende, beschränkte Folge. Das Supremum Prinzip II-6.5 sichert die Existenz von $\xi = \sup\{x_n \colon n \geq 1\}$. Wir behaupten: $\xi = \lim_{n\to\infty} x_n$. Für beliebiges $\varepsilon > 0$ gibt es nach Satz II-6.4 ein Folgenglied x_N mit $\xi - \varepsilon < x_N \leq \xi$. Wegen der Monotonie folgt für alle $n > N\colon \xi - \varepsilon < x_N \leq x_n \leq \xi < \xi + \varepsilon$, d.h. $|\xi - x_n| < \varepsilon$. Der Beweis für monoton fallende Folgen ist analog. □

Wegen Satz 1.7 konvergiert eine monotone Folge genau dann, wenn sie beschränkt ist. Ist eine Folge monoton wachsend (fallend), genügt eine obere (untere) Schranke für den Nachweis der Beschränktheit. Da die Konvergenz einer Folge und deren Grenzwert nicht durch eine endliches Anfangsstück der Folge beeinflusst werden, ist das Monotoniekriterium auch dann anwendbar, wenn die Folge erst ab einem Index $n_0 > 1$ monoton ist. Zur Illustration des Monotoniekriteriums betrachten wir folgende Beispiele:

Beispiel 3.3. Die rekursiv definierte Folge $(x_n)_{n\geq 1}$

$$x_1 = 1, \qquad x_{n+1} = \frac{x_n^2 + 2}{2x_n}$$

ist konvergent mit $\lim_{n\to\infty} x_n = \sqrt{2}$.

1) $\forall n \geq 2\colon x_n > \sqrt{2}$: Da $x_1 > 0$ ist, folgt induktiv $x_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$. Somit ist die Division durch x_n gerechtfertigt. Mit Satz II-3.11–(e) ergibt sich die Abschätzung

$$x_n^2 + 2 = 2x_{n+1}x_n \leq x_{n+1}^2 + x_n^2.$$

Dies impliziert $x_{n+1} \geq \sqrt{2}$, $n \in \mathbb{N}$. Wäre $x_{n_0} = \sqrt{2}$ für ein $n_0 \in \mathbb{N}$, dann müsste $x_n = \sqrt{2}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gelten. Wegen $x_1 \neq \sqrt{2}$ folgt $x_n > \sqrt{2}$ für $n \in \mathbb{N}$.
2) $\forall n \geq 2\colon x_{n+1} < x_n$, d.h. die Folge $(x_n)_{n\geq 2}$ ist strikt monoton fallend.
Es ist $x_3 = \frac{17}{12} < \frac{3}{2} = x_2$. Es gelte nun $x_n < x_{n-1}$. Die Ungleichung

$$x_{n+1} = \frac{x_n^2 + 2}{2x_n} < \frac{x_{n-1}^2 + 2}{2x_{n-1}} = x_n$$

ist äquivalent zu

$$\begin{gathered}2x_n^2 x_{n-1} + 4x_{n-1} < 2x_{n-1}^2 x_n + 4x_n \Leftrightarrow \\ 2x_n x_{n-1}(x_n - x_{n-1}) < 4(x_n - x_{n-1}) \Leftrightarrow x_n x_{n-1} > 2\end{gathered}$$

Die Gültigkeit der letzten Ungleichung ist eine Folge von 1). Die Behauptung folgt nun mit Hilfe des Induktionsprinzips.
3) Wegen $\sqrt{2} < x_n < x_2$, $n \geq 3$, ist (x_n) beschränkt, somit nach dem Monotoniekriterum konvergent. Es sei $\alpha = \lim x_n$. Wegen 1) und Satz 2.5 folgt $\alpha \geq \sqrt{2}$. Mit Hilfe der Regeln Satz 2.1 berechnet man

$$\alpha = \frac{\alpha^2 + 2}{2\alpha} \text{ d.h. } 2\alpha^2 = \alpha^2 + 2 \text{ und daher } \alpha^2 = 2.$$

Somit folgt $\alpha = \lim x_n = \sqrt{2}$.

Dieses Beispiel zeigt, daß man bei rekursiv definierten Folgen die Rekursionsvorschrift verwenden kann, um einen Kandidaten für den Grenzwert zu bestimmen. Der Nachweis der Konvergenz ist meist der schwierigere Teil der Konvergenzuntersuchung.

Beispiel 3.4 (Eulersche Zahl).
Für $n \in \mathbb{N}$ sei $a_n = (1 + \frac{1}{n})^n$ und $b_n = (1 + \frac{1}{n})^{n+1}$. Es gilt:

(1) (a_n) ist streng monoton wachsend, d.h. $\forall n \in \mathbb{N}$: $a_n < a_{n+1}$
(2) (b_n) ist streng monoton fallend, d.h. $\forall n \in \mathbb{N}$: $b_{n+1} < b_n$
(3) $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$.

Der gemeinsame Grenzwert der beiden Folgen heißt **Eulersche Zahl** e. Es gilt $2 < e < 4$.

Beweis. Für $n > 1$ schließen wir mit Hilfe der Bernoulli Ungleichung II-4.18

$$(*) \qquad \frac{a_n}{b_{n-1}} = (\frac{n+1}{n})^n(\frac{n}{n-1})^{-n} = (\frac{n^2-1}{n^2})^n = (1-\frac{1}{n^2})^n > 1-\frac{1}{n} = \frac{n-1}{n}$$

und

$$(\dagger) \qquad \frac{b_{n-1}}{a_n} = (\frac{n^2}{n^2-1})^n = (1+\frac{1}{n^2-1})^n > (1+\frac{1}{n^2})^n \overset{II-4.18}{>} 1+\frac{1}{n} = \frac{n+1}{n}.$$

Aus $(*)$ folgt

$$a_n > \frac{n-1}{n}(\frac{n}{n-1})^n = (\frac{n}{n-1})^{n-1} = (1+\frac{1}{n-1})^{n-1} = a_{n-1}$$

und aus $(\dagger)$

$$b_{n-1} > \frac{n+1}{n}(\frac{n+1}{n})^n = (1+\frac{1}{n})^{n+1} = b_n.$$

Für $n > 1$ folgt demnach

$$2 = a_1 < a_{n-1} < a_n < b_n < b_{n-1} < b_1 = 4.$$

Die Konvergenz der Folgen ergibt sich aus Satz 3.2. Aus Satz 2.5 folgt

$$2 < \lim a_n \leq \lim b_n < 4,$$

die beiden äußeren Ungleichungen sind strikt wegen der strikten Monotonie von (a_n) und (b_n). Wegen $b_n = (1+\frac{1}{n})a_n$ erhält man schließlich $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$. $\square$

Satz 3.5 (Bolzano–Weierstrass). *Jede beschränkte Folge in $\mathbb{C}$ besitzt eine konvergente Teilfolge.*

Beweis. Fall 1: $(x_n)_{n\geq 1}$ ist eine beschränkte reelle Folge.
Wegen der Beschränktheit gibt es $a_0, b_0 \in \mathbb{R}$ mit $a_0 \leq x_n \leq b_0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Halbiert man das Intervall $J_0 = [a_0, b_0]$, so liegen in mindestens einem der beiden Teilintervalle $[a_0, \frac{1}{2}(a_0+b_0)]$, $[\frac{1}{2}(a_0+b_0), b_0]$ unendlich viele Glieder der Folge. Wir bezeichnen dieses Intervall mit $J_1 = [a_1, b_1]$ und wenden das eben beschriebene Verfahren auf J_1 an. Man erhält somit eine Folge von abgeschlossenen Intervallen $J_k = [a_k, b_k]$, für welche $J_{k+1} \subset J_k$ gilt und deren Länge $b_k - a_k = 2^{-k}(b_0 - a_0)$ beträgt. Aus Beispiel 1.8-(v) folgert man $\lim_{k\to\infty}(b_k - a_k) = 0$. Die Folge von Intervallen $(J_k)_{k\geq 0}$ bildet daher eine Intervallschachtelung, welche eine reelle Zahl $\alpha \in \bigcap J_k$ eindeutig bestimmt. Wegen $\alpha \in [a_k, b_k]$, $k \in N$, folgt $0 \leq |a_k - \alpha| \leq b_k - a_k$ und mit Satz 2.7 weiter $\lim_{k\to\infty} a_k = \alpha$. Auf gleiche Weise erhält man $\lim_{k\to\infty} b_k = \alpha$. Wir wählen nun einen Index $\varphi(1)$,

sodaß $x_{\varphi(1)}$ in J_1 liegt. Da J_2 unendlich viele Glieder der Folge enthält, können wir $\varphi(2) > \varphi(1)$ bestimmen, sodaß $x_{\varphi(2)}$ in J_2 liegt, u.s.w. Im n–ten Schritt könnten wir zum Beispiel $\varphi(n) = \min\{k \in \mathbb{N} \colon x_k \in J_n, k > \varphi(n-1)\}\}$ wählen. Wir erhalten auf diese Weise eine streng monoton wachsende Folge $(\varphi(n))_{n\geq 1}$, die zugehörige Teilfolge $(x_{\varphi(n)})_{n\geq 1}$ erfüllt dann

$$a_n \leq x_{\varphi(n)} \leq b_n, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Die Konvergenz von $(x_{\varphi(n)})$ folgt nun aus Satz 2.7.
Fall 2: Es sei nun $(z_n)_{n\geq 1} \subset \mathbb{C}$ und beschränkt, d.h. es gibt $b > 0$ mit $|z_n| \leq b$, $n \in \mathbb{N}$. Ferner setzen wir $z_n = x_n + iy_n$. Wegen $\max\{|x_n|, |y_n|\} \leq |z_n|$ sind auch die reellen Folgen (x_n) und (y_n) beschränkt. Somit gibt es eine konvergente Teilfolge $(x_{\varphi(n)})_{n\geq 1}$ von (x_n), ihr Grenzwert sei x. Weiters enthält $(y_{\varphi(n)})_{n\geq 1}$ eine konvergente Teilfolge $(y_{(\psi\circ\varphi)(n)})_{n\geq 1}$ mit Grenzwert y. Mit Hilfe der Sätze 1.6 und 1.7 folgern wir

$$\lim_{n\to\infty} z_{(\psi\circ\varphi)(n)} = \lim_{n\to\infty} (x_{(\psi\circ\varphi)(n)} + iy_{(\psi\circ\varphi)(n)}) = x + iy.$$

□

Das Monotoniekriterium ist zwar, wie wir gesehen haben, recht bequem einzusetzen. Sein Anwendungsbereich ist allerdings auf eine doch recht spezielle Klasse *reeller* Folgen eingeschränkt. Das folgende Kriterium, das auf A. CAUCHY (1789 — 1857) zurückgeht, erlaubt es, die Konvergenz beliebiger Folgen zu untersuchen. Dazu benötigen wir einen neuen, fundamentalen Begriff.

DEFINITION 3.6. *Eine Folge komplexer Zahlen $(z_n)_{n\geq 1}$ heißt* ***Cauchy Folge*** $\underset{Def}{\Leftrightarrow}$

$$(*) \qquad \forall \varepsilon > 0\, \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}\, \forall n, m \in \mathbb{N} \colon (n \geq N(\varepsilon) \wedge m \geq N(\varepsilon)) \Rightarrow |z_n - z_m| < \varepsilon.$$

Anschaulich bedeutet diese Definition: Für jedes $\varepsilon > 0$, sei es auch noch so klein, gibt es einen Index $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ so, daß $|z_n - z_m| < \varepsilon$ für alle $n, m \geq N(\varepsilon)$ gilt.

SATZ 3.7. *Jede konvergente Folge $(z_n)_{n\geq 1} \subset \mathbb{C}$ ist eine Cauchy Folge.*

BEWEIS. Es sei $\lim_{n\to\infty} z_n = z$ und $\varepsilon > 0$. Dann gibt es einen Index $N(\varepsilon)$, sodaß $|z - z_n| < \frac{1}{2}\varepsilon$ für alle $n \geq N(\varepsilon)$ gilt. Ist $n \geq N(\varepsilon)$ und $m \geq N(\varepsilon)$, folgt

$$|z_n - z_m| \leq |z_n - z| + |z_m - z| < \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon.$$

□

SATZ 3.8. *Eine komplexe Folge $(z_n)_{n\geq 1}$ ist konvergent genau dann, wenn sie eine Cauchy Folge ist.*

BEWEIS. Die Notwendigkeit der Cauchy Bedingung $(*)$ für Konvergenz wurde bereits in Satz 3.7 nachgewiesen. Wir zeigen nun, daß sie auch hinreichend ist. Es sei also $(z_n)_{n\geq 1}$ eine Cauchy Folge. Für $\varepsilon = 1$ gibt es dann einen Index $N \in \mathbb{N}$ derart, daß $|z_n - z_m| < 1$ für alle $n, m \geq N$ zutrifft. Es folgt daher für $n \geq N$

$$|z_n| \leq |z_n - z_N| + |z_N| < 1 + |z_N|.$$

Somit ist $(z_n)_{n\geq 1}$ beschränkt durch $\max\{|z_1|, \ldots, |z_{N-1}|, 1 + |z_N|\}$ und besitzt nach dem Satz von Bolzano Weierstrass eine konvergente Teilfolge $(z_{\varphi(n)})_{n\geq 1}$. Es sei z deren Grenzwert. Zu $\varepsilon > 0$ gibt es dann natürliche Zahlen N_1, N_2 mit der Eigenschaft

$$\forall n, m \in \mathbb{N}\colon (n \geq N_1 \wedge m \geq N_1) \Rightarrow |z_n - z_m| < \frac{1}{2}\varepsilon$$
$$\forall n \in \mathbb{N}\colon n \geq N_2 \Rightarrow |z_{\varphi(n)} - z| < \frac{1}{2}\varepsilon.$$

Für $N = \max\{N_1, N_2\}$ ergibt sich nun für alle $n \geq N$ (man beachte, daß $\varphi(n) \geq n$, $n \in \mathbb{N}$, als Folge der strengen Monotonie von φ gelten muß)

$$|z_n - z| \leq |z_n - z_{\varphi(n)}| + |z_{\varphi(n)} - z| < \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon.$$

□

Bemerkung 3.9. 1.) Die Stärke des Cauchy Kriteriums ist seine Universalität: es ist auf jede Folge (vorerst in $\mathbb{C}$) anwendbar. Allerdings gibt es keinen Hinweis auf den Grenzwert.
2.) Durch Negieren erhalten wir folgende Divergenzbedingung: $(z_n)_{n\geq 1}$ ist divergent genau dann, wenn

$$\exists \varepsilon_0 > 0\, \forall N \in \mathbb{N}\, \exists n, m \in \mathbb{N}\colon n \geq N \wedge m \geq N \wedge |z_n - z_m| \geq \varepsilon_0.$$

Eine Folge (z_n) ist also genau dann divergent, wenn es nach jedem Glied der Folge weitere Folgenglieder gibt, deren Abstand voneinander größer als eine feste Schranke ist.

4. Limes inferior und Limes superior

Beschränkte Zahlenfolgen sind nicht notwendig konvergent, sie besitzen aber nach dem Satz von Bolzano Weierstrass 3.5 stets konvergente Teilfolgen. Es wird nun ein Begriff vorgestellt, der als Ersatz für den fehlenden Grenzwert einer Folge dienen kann. Da die Ordnung in $\mathbb{R}$ dabei eine wesentliche Rolle spielt, ist dieser Abschnitt auf *reelle* Folgen beschränkt. Ausgangspunkt ist folgende Beobachtung:
Betrachtet man für festes $k \in \mathbb{N}$ den k–ten „Folgenrest" $\{x_n\colon n \geq k\}$ einer beschränkten, reellen Folge $(x_n)_{n\geq 1}$, so ist wegen $\{x_n\colon n \geq k+1\} \subset \{x_n\colon n \geq k\}$ und Satz II-6.13 $\sup\{x_n\colon n \geq k+1\} \leq \sup\{x_n\colon n \geq k\}$ und $\inf\{x_n\colon n \geq k+1\} \geq \inf\{x_n\colon n \geq k\}$. Mit Hilfe des Monotoniekriteriums Satz 3.2 beweist diese Überlegung:

Lemma 4.1. *Es sei $(x_n)_{n\geq 1}$ beschränkt und*

$$s_k := \sup\{x_n\colon n \geq k\}, \quad \textit{und} \quad t_k := \inf\{x_n\colon n \geq k\}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Die Folge $(s_k)_{k\geq 1}$ ist monoton fallend, die Folge $(t_k)_{k\geq 1}$ ist monoton steigend und beide Folgen sind konvergent.

Definition 4.2. *Es sei $(x_n)_{n\geq 1} \subset \mathbb{R}$ beschränkt.*

(1) $\alpha \in \mathbb{R}$ *heißt* ***Limes superior*** *von* (x_n), $\alpha = \overline{\lim}_{n\to\infty} x_n$ *oder auch* $\alpha = \limsup_{n\to\infty} x_n \underset{Def}{\Leftrightarrow} \alpha = \lim_{k\to\infty} \sup\{x_n \colon n \geq k\}$.

(2) $\beta \in \mathbb{R}$ *heißt* ***Limes inferior*** *von* (x_n), $\beta = \underline{\lim}_{n\to\infty} x_n$ *oder auch* $\beta = \liminf_{n\to\infty} x_n \underset{Def}{\Leftrightarrow} \beta = \lim_{k\to\infty} \inf\{x_n \colon n \geq k\}$.

Beispiel 4.3. Es sei $(x_n)_{n\geq 1}$ definiert durch $x_n = (-1)^n(1 + \frac{1}{n})$. Es folgt für $k \in \mathbb{N}$

$$s_k = \begin{cases} 1 + \frac{1}{k} & k \text{ gerade} \\ 1 + \frac{1}{k+1} & k \text{ ungerade} \end{cases} \qquad t_k = \begin{cases} -(1 + \frac{1}{k+1}) & k \text{ gerade} \\ -(1 + \frac{1}{k}) & k \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Somit folgt

$$\limsup_{n\to\infty} x_n = 1 \quad \text{ und } \liminf_{n\to\infty} x_n = -1$$

Eine unmittelbare Folgerung aus Definition 4.2 ist:

Lemma 4.4. $(x_n)_{n\geq 1} \subset \mathbb{R}$ *sei beschränkt. Es gilt stets*

$$\liminf_{n\to\infty} x_n \leq \limsup_{n\to\infty} x_n$$

Beweis. Dies folgt aus $\inf\{x_n \colon n \geq k\} \leq \sup\{x_n \colon n \geq k\}$, $k \in \mathbb{N}$, und aus Satz 2.5 □

Wir stellen nun eine handlichere Charakterisierung des Limes superior (Limes inferior) bereit.

Satz 4.5. $(x_n)_{n\geq 1}$ *sei eine reelle beschränkte Folge.*

1) $\alpha = \limsup_{n\to\infty} x_n \quad \Leftrightarrow$
i) $\forall \varepsilon > 0\, \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}\, \forall n \in \mathbb{N} \colon n \geq N(\varepsilon) \Rightarrow x_n < \alpha + \varepsilon$,
ii) $\forall \varepsilon > 0 \colon \{n \in \mathbb{N} \colon x_n > \alpha - \varepsilon\}$ *ist unendlich.*

2) $\beta = \liminf_{n\to\infty} x_n \quad \Leftrightarrow$
i) $\forall \varepsilon > 0\, \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}\, \forall n \in \mathbb{N} \colon n \geq N(\varepsilon) \Rightarrow x_n > \beta - \varepsilon$,
ii) $\forall \varepsilon > 0 \colon \{n \in \mathbb{N} \colon x_n < \beta + \varepsilon\}$ *ist unendlich.*

Beweis. Wir führen den Beweis nur für die erste Behauptung. Die Charakterisierung des Limes inferior verläuft analog und sei dem Leser als Übung überlassen.
„$\Rightarrow$“ $\alpha = \limsup_{n\to\infty} x_n$ ist gleichwertig mit

$$(*) \qquad \forall \varepsilon > 0\, \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}\, \forall k \in \mathbb{N} \colon k \geq N(\varepsilon) \Rightarrow |\alpha - \sup\{x_n \colon n \geq k\}| < \varepsilon.$$

Daraus folgt für $k \geq N(\varepsilon)$

$$x_k \leq \sup\{x_n \colon n \geq N(\varepsilon)\} < \alpha + \varepsilon,$$

d.h. es gilt i). Wir ziehen nun eine weitere Folgerung aus $(*)$:

$$\forall k \geq N(\varepsilon) \colon \sup\{x_n \colon n \geq k\} > \alpha - \varepsilon.$$

Insbesondere gilt dies für $k = N(\varepsilon)$. Nach Satz II-6.4 existiert somit ein Index $\varphi(1) \in \mathbb{N}$, sodaß $\varphi(1) \geq N(\varepsilon)$ und $x_{\varphi(1)} > \alpha - \varepsilon$. Setzen wir $k = \varphi(1) + 1$, so können wir auf die Existenz von $\varphi(2) \in \mathbb{N}$ schließen mit $\varphi(2) > \varphi(1) \geq N(\varepsilon)$ und $x_{\varphi(2)} >$

$\alpha - \varepsilon$. Induktiv fortfahrend ergibt sich die Existenz einer streng monoton wachsenden Funktion $\varphi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ und einer zugehörigen Teilfolge $(x_{\varphi(n)})_{n\geq 1}$, sodaß $x_{\varphi(n)} > \alpha - \varepsilon$ für alle $n \in \mathbb{N}$ zutrifft, d.h. es ist auch die Bedingung ii) erfüllt.
„$\Leftarrow$" Umgekehrt erfülle nun $\alpha \in \mathbb{R}$ die Bedingungen i) und ii). Wir zeigen die zu $(*)$ gleichwertige Aussage (wir ersetzen dabei ε durch 2ε)

$$(**)\quad \forall\varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall k \in \mathbb{N}\colon k \geq N(\varepsilon) \Rightarrow \alpha - 2\varepsilon < \sup\{x_n\colon n \geq k\} < \alpha + 2\varepsilon.$$

Es sei $\varepsilon > 0$ beliebig gewählt und $N(\varepsilon)$ durch die Bedingung i) festgelegt. Aus Lemma 4.1 ergibt sich für alle $k \geq N(\varepsilon)$

$$\sup\{x_n\colon n \geq k\} \leq \sup\{x_n\colon n \geq N(\varepsilon)\} \leq \alpha + \varepsilon < \alpha + 2\varepsilon.$$

Aus der Bedingung ii) schließen wir, daß es zu jedem $k \geq N(\varepsilon)$ einen Index $m \geq k$ gibt mit $x_m > \alpha - \varepsilon$. Somit gilt auch für alle $k \geq N(\varepsilon)$

$$\sup\{x_n\colon n \geq k\} > \alpha - \varepsilon > \alpha - 2\varepsilon,$$

d.h. es gilt $(**)$ und somit $\alpha = \limsup_{n\to\infty} x_n$. □

Bemerkung 4.6. Läßt man in Satz 4.5 ε eine Nullfolge durchlaufen, kann man auf die Existenz einer Teilfolge $(x_{\varphi(n)})_{n\geq 1}$ schließen mit

$$\lim_{n\to\infty} x_{\varphi(n)} = \limsup_{n\to\infty} x_n.$$

Es gibt also eine Teilfolge von $(x_n)_{n\geq 1}$, die gegen den Limes superior konvergiert und analog eine im Allgemeinen verschiedene Teilfolge von $(y_n)_{n\geq 1}$, welche gegen den Limes inferior konvergiert. Wir verschärfen nun diese Beobachtung.

Korollar 4.7. Es sei $(x_n)_{n\geq 1} \subset \mathbb{R}$ beschränkt und

$$\mathfrak{L} = \{\xi \in \mathbb{R}\colon \text{es gibt eine Teilfolge } (x_{\varphi(n)})_{n\geq 1} \text{ mit } \lim_{n\to\infty} x_{\varphi(n)} = \xi\}.$$

Die Menge $\mathfrak{L}$ besitzt Minimum und Maximum und es gilt

$$\limsup_{n\to\infty} x_n = \max \mathfrak{L} \quad \text{und} \quad \liminf_{n\to\infty} x_n = \min \mathfrak{L}.$$

Beweis. Es wurde in Bemerkung 4.6 bereits festgestellt, daß $\limsup_{n\to\infty} x_n \in \mathfrak{L}$ und $\liminf_{n\to\infty} x_n \in \mathfrak{L}$.Wir zeigen nun

$$\forall\xi \in \mathbb{R}\colon \xi > \limsup_{n\to\infty} x_n \Rightarrow \xi \notin \mathfrak{L}.$$

Es sei $\xi > \limsup_{n\to\infty} x_n =: \alpha$. Angenommen es gibt eine Teilfolge $(x_{\varphi(n)})_{n\geq 1}$ von (x_n) mit $\lim_{n\to\infty} x_{\varphi(n)} = \xi$. Für $\varepsilon = \frac{1}{2}(\xi - \alpha)$ gibt es dann einen Index $N(\varepsilon)$, sodaß für alle $n \geq N(\varepsilon)$ auch

$$x_{\varphi(n)} \geq \xi - \varepsilon = \alpha + \varepsilon$$

zutrifft. Dies ist ein Widerspruch zu Bedingung i) in Satz 4.5–(1). Eine analoge Überlegung gilt auch für den Limes inferior. □

Mit Hilfe des Korollar 4.7 läßt sich nun leicht folgendes Konvergenzkriterium beweisen:

Satz 4.8. *Eine beschränkte reelle Folge* $(x_n)_{n\geq 1}$ *ist konvergent genau dann, wenn* $\limsup_{n\to\infty} x_n = \liminf_{n\to\infty} x_n$. *Im Falle der Konvergenz von* (x_n) *gilt* $\lim_{n\to\infty} x_n = \limsup_{n\to\infty} x_n$.

Beweis. Der Beweis dieser Behauptung folgt aus Satz 1.7, Bemerkung **??** und Korollar 4.7. □

Wir zeigen nun, daß für den Limes superior (Limes inferior) ähnliche Rechenregeln gelten, wie für den gewöhnlichen Limes.

Satz 4.9. *Es seien* $(a_n)_{n\geq 1}$, $(b_n)_{n\geq 1}$ *beschränkte, reelle Folgen. Es gelte* $a_n \leq b_n$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$. *Dann folgt*

$$\limsup_{n\to\infty} a_n \leq \limsup_{n\to\infty} b_n \quad \textit{und} \quad \liminf_{n\to\infty} a_n \leq \liminf_{n\to\infty} b_n.$$

Beweis. Der Beweis ergibt sich aus der Beobachtung

$$\begin{aligned} \sup\{a_n \colon n \geq k\} &\leq \sup\{b_n \colon n \geq k\} \\ \inf\{a_n \colon n \geq k\} &\leq \inf\{b_n \colon n \geq k\} \end{aligned}$$

□

Satz 4.10. *Es seien* $(a_n)_{n\geq 1}$, $(b_n)_{n\geq 1}$ *beschränkte, reelle Folgen. Dann gilt*

i) $\limsup_{n\to\infty}(a_n + b_n) \leq \limsup_{n\to\infty} a_n + \limsup_{n\to\infty} b_n$
ii) $\liminf_{n\to\infty} a_n + \liminf_{n\to\infty} b_n \leq \liminf_{n\to\infty}(a_n + b_n)$
iii) $\liminf_{n\to\infty}(a_n + b_n) \leq \liminf_{n\to\infty} a_n + \limsup_{n\to\infty} b_n \leq \limsup_{n\to\infty}(a_n + b_n)$
iv) $\forall \alpha \geq 0\colon \limsup_{n\to\infty} \alpha a_n = \alpha \limsup_{n\to\infty} a_n$
v) $\forall \alpha \leq 0\colon \limsup_{n\to\infty} \alpha a_n = \alpha \liminf_{n\to\infty} a_n$

Beweis. ii) Da die Folge $(a_n + b_n)$ beschränkt ist, gibt es nach Korollar 4.7 eine konvergente Teilfolge $(a_{\varphi(n)} + b_{\varphi(n)})_{n\geq 1}$ mit

$$\lim_{n\to\infty}(a_{\varphi(n)} + b_{\varphi(n)}) = \liminf_{n\to\infty}(a_n + b_n).$$

Man beachte, daß die Teilfolgen $(a_{\varphi(n)})$ und $(b_{\varphi(n)})$ selbst nicht konvergent sein müssen. Wir wählen daher aus $(a_{\varphi(n)})$ eine konvergente Teilfolge $(a_{(\psi\circ\varphi)(n)})$ und aus $(b_{(\psi\circ\varphi)(n)})$ eine konvergente Teilfolge $(b_{(\chi\circ\psi\circ\varphi)(n)})$ aus. Es sei $\nu = \chi \circ \psi \circ \varphi$. Dann sind die Folgen $(a_{\nu(n)})$, $(b_{\nu(n)})$ und $(a_{\nu(n)} + b_{\nu(n)})$ konvergent und es folgt

$$\liminf_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty}(a_{\nu(n)} + b_{\nu(n)}) = \lim_{n\to\infty} a_{\nu(n)} + \lim_{n\to\infty} b_{\nu(n)} \geq \liminf_{n\to\infty} a_n + \liminf_{n\to\infty} b_n.$$

i) Analog.
iii) Wir beweisen nur die Ungleichung

$$\liminf_{n\to\infty} a_n + \limsup_{n\to\infty} b_n \leq \limsup_{n\to\infty}(a_n + b_n).$$

Wegen Satz 4.5 gibt es für jedes beliebig gewählte $\varepsilon > 0$ einen Index $N_1(\varepsilon)$ und eine Teilfolge $(b_{\varphi(n)})_{n\geq 1}$ von (b_n) so, daß

$$(*) \qquad \begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}\colon n \geq N_1(\varepsilon) \Rightarrow a_n > \liminf_{k\to\infty} a_k - \varepsilon \\ \forall n \in \mathbb{N}\colon b_{\varphi(n)} > \limsup_{k\to\infty} b_k - \varepsilon \end{cases}$$

Da $(\varphi(n))_{n\geq 1}$ strikt monoton ist, gilt für alle $n \geq N_1(\varepsilon)$ auch $\varphi(n) \geq n \geq N_1(\varepsilon)$. Durch Addition der beiden Ungleichungen in $(*)$ folgt daher für alle $n \geq N_1(\varepsilon)$

$$a_{\varphi(n)} + b_{\varphi(n)} > \liminf_{k\to\infty} a_k + \limsup_{k\to\infty} b_k - 2\varepsilon.$$

Nun ist $(a_{\varphi(n)} + b_{\varphi(n)})_{n\geq 1}$ eine Teilfolge von $(a_n + b_n)$, somit folgt mit Satz 4.9

$$\limsup_{n\to\infty}(a_n + b_n) \geq \limsup_{n\to\infty}(a_{\varphi(n)} + b_{\varphi(n)}) \overset{4.9}{\geq} \liminf_{n\to\infty} a_n + \limsup_{n\to\infty} b_n - 2\varepsilon.$$

Wegen Korollar II-3.7 ist dies gleichwertig mit

$$\liminf_{n\to\infty} a_n + \limsup_{n\to\infty} b_n \leq \limsup_{n\to\infty}(a_n + b_n).$$

Der Beweis von $\liminf_{n\to\infty}(a_n + b_n) \leq \liminf_{n\to\infty} a_n + \limsup_{n\to\infty} b_n$ und der beiden restlichen Behauptungen sei dem Leser als Übung überlassen. $\square$

Bei manchen Konvergenzuntersuchungen ist folgendes Ergebnis nützlich.

Satz 4.11. *Es sei $(a_n)_{n\geq 1} \subset \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$ und beschränkt. Dann gilt*

$$(*) \qquad \liminf_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \liminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

Existiert insbesondere $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$, dann ist auch $(\sqrt[n]{a_n})_{n\geq 1}$ konvergent mit $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$.

Beweis. Wir zeigen nur die Ungleichung $\liminf_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \liminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$. Der Beweis der letzten Ungleichung in $(*)$ verläuft analog, die mittlere wurde bereits in Lemma 4.4 bewiesen. Es sei $\liminf_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \alpha \geq 0$. Ist $\alpha = 0$, gibt es nichts zu beweisen. Es sei also $\alpha > 0$. Zu $\varepsilon > 0$ gibt es nach Satz 4.5 einen Index $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, sodaß $\frac{a_{n+1}}{a_n} > \alpha - \varepsilon > 0$ für alle $n \geq N(\varepsilon)$ zutrifft. Eine einfache Induktion zeigt dann die Gültigkeit von

$$\frac{a_n}{a_{N(\varepsilon)}} = \prod_{i=N(\varepsilon)}^{n-1} \frac{a_{i+1}}{a_i} > (\alpha - \varepsilon)^{n-N(\varepsilon)}$$

d.h. von

$$a_n > (\alpha - \varepsilon)^{n-N(\varepsilon)} a_{N(\varepsilon)}$$

für alle $n > N(\varepsilon)$. Es folgt für $\alpha - \varepsilon > 0$

$$\sqrt[n]{a_n} > (\alpha - \varepsilon) \sqrt[n]{a_{N(\varepsilon)}(\alpha - \varepsilon)^{-N(\varepsilon)}}, \qquad n > N(\varepsilon).$$

Mit Hilfe der Sätze 4.9, Satz 4.8 und Beispiel 1.8-iii) ergibt sich

$$\liminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \geq (\alpha-\varepsilon) \liminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_{N(\varepsilon)}(\alpha-\varepsilon)^{-N(\varepsilon)}}$$
$$= (\alpha-\varepsilon) \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_{N(\varepsilon)}(\alpha-\varepsilon)^{-N(\varepsilon)}} = \alpha-\varepsilon.$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig wählbar war, folgt $\liminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \geq \alpha = \liminf_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$. Existiert $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ so gilt in $(*)$ nach Satz 4.8 überall die Gleichheit, daraus folgt die Behauptung. $\square$

Beispiel 4.12. Die Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ sei definiert durch $a_n = \frac{n^n}{n!}$. Es folgt $\frac{a_{n+1}}{a_n} = (1+\frac{1}{n})^n$ und mit Beispiel 3.4 ergibt sich $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = e$. Mit Satz 4.11 schließen wir dann $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = e$.

5. Uneigentliche Grenzwerte

Die Konvergenz von Folgen wurde bisher nur für beschränkte Folgen erklärt. Es ist aber manchmal sinnvoll, auch unbeschränkten reellen Folgen einen Grenzwert zuzuweisen.

Definition 5.1. *Es sei $(x_n)_{n\geq 1} \subset \bar{\mathbb{R}}$.*
Die Folge (x_n) hat den ***uneigentlichen Grenzwert*** *∞ $(-\infty)$, $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$ $(\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty)$*

$$\underset{Def}{\Leftrightarrow}$$

$$\forall \xi \in \mathbb{R}\, \exists N(\xi)\, \forall n \in \mathbb{N}\colon n \geq N(\xi) \Rightarrow x_n > \xi \quad (x_n < \xi).$$

Man sagt auch, die Folge (x_n) **divergiert** *nach ∞ $(-\infty)$.*

Eine unmittelbare Folge dieser Definition ist folgende Erweiterung des Monotoniekriteriums Satz 3.2.

Satz 5.2. *Jede monotone Folge in $\bar{\mathbb{R}}$ hat einen Grenzwert in $\bar{\mathbb{R}}$.*

Man kann sich leicht davon überzeugen, daß den Regeln für das „Rechnen" mit den Symbolen ∞, $-\infty$ aus II-8 Regeln für die Grenzwerte von Folgen in $\bar{\mathbb{R}}$ entsprechen, welche nach ∞ bzw. $-\infty$ divergieren. Es seien etwa $(x_n)_{n\geq 1} \subset \bar{\mathbb{R}}$ und $(y_n)_{n\geq 1} \subset \bar{\mathbb{R}}$ beide divergent nach ∞. Es folgt, daß auch die Folge $(x_n + y_n)_{n\geq 1}$ gegen ∞ divergiert. Auf analoge Weise können auch die übrigen Regeln in II-8 interpretiert werden. Divergieren die Folgen (x_n) und (y_n) gegen ∞, so können die Folgen $(x_n - y_n)$, $(\frac{x_n}{y_n})$ ein recht unterschiedliches Verhalten aufweisen:

Beispiel 5.3.

i)	$x_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$,	$\lim_{n\to\infty} x_n = 0$
ii)	$y_n = n - n^2$,	$\lim_{n\to\infty} y_n = -\infty$
iii)	$z_n = \frac{n}{n^2}$,	$\lim_{n\to\infty} z_n = 0$
iv)	$w_n = \frac{1+2+\cdots+n}{n^2}$,	$\lim_{n\to\infty} w_n = \frac{1}{2}$

Entsprechendes gilt auch für $(x_n y_n)$, falls $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ und $\lim_{n\to\infty} y_n = \infty$. Den Ausdrücken der Form $\infty - \infty$, $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ und $0 \cdot (\pm\infty)$ kann somit a priori kein sinnvoller Wert zugewiesen werden. Mann nennt sie deshalb auch **unbestimmte Ausdrücke**. Wegen Definition II-8.1 ist folgende Vereinbarung sinnvoll:

DEFINITION 5.4. *Es sei* $(x_n)_{n\geq 1} \subset \bar{\mathbb{R}}$.

(1) $\limsup_{n\to\infty} x_n = \infty \underset{Def}{\Leftrightarrow} (x_n)$ *ist nicht nach oben beschränkt*
(2) $\liminf_{n\to\infty} x_n = -\infty \underset{Def}{\Leftrightarrow} (x_n)$ *ist nicht nach unten beschränkt*

Man überzeuge sich davon, daß sich die Resultate aus Abschnitt 4 auch auf Folgen in $\bar{\mathbb{R}}$ übertragen lassen.

6. Doppelfolgen

DEFINITION 6.1. *Eine Abbildung* $x\colon \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ *heißt* ***Doppelfolge*** *komplexer Zahlen. Anstelle von* $x(n,m)$ *schreibt man* x_{nm}*, entsprechend bezeichnen wir eine Doppelfolge mit* $(x_{nm})_{n,m\geq 1}$.

Ein großer Teil der elementaren Theorie der Konvergenz einfacher Folgen läßt sich ohne große Änderungen auf Doppelfolgen übertragen. Wir beschränken uns daher auf die Darstellung einiger charakteristischer Unterschiede. Vorerst legen wir jedoch fest, was wir unter dem Grenzwert einer Doppelfolge verstehen:

DEFINITION 6.2. *Es sei* $(x_{nm})_{n,m\geq 1} \subset \mathbb{C}$ *eine Doppelfolge und* $\alpha \in \mathbb{C}$.

$$(x_{nm})_{n,m\geq 1}\textbf{konvergiert } \textit{gegen } \alpha \underset{Def}{\Leftrightarrow} \forall \varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}\ \forall n, m \in \mathbb{N}:$$
$$n \geq N(\varepsilon) \wedge m \geq N(\varepsilon) \Rightarrow |x_{nm} - \alpha| < \varepsilon.$$

Man schreibt $\lim_{n,m\to\infty} x_{nm} = \alpha$.

Die Eindeutigkeit des Grenzwertes, falls er existiert, läßt sich genauso wie in Satz 1.5 zeigen. Ebenso lassen sich die Rechenregeln für konvergente Folgen aus Abschnitt 2 auf Doppelfolgen übertragen. Es gilt auch ein Cauchy-Kriterium, welches wir ohne Beweis notieren:

SATZ 6.3. *Eine Doppelfolge* $(x_{nm})_{n,m\geq 1} \subset \mathbb{C}$ *ist genau dann konvergent, wenn sie eine Cauchy-Folge ist, d.h. wenn*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon)\ \forall n, m, r, s \in \mathbb{N}\colon n, m, r, s \geq N(\varepsilon) \Rightarrow |x_{nm} - x_{rs}| < \varepsilon.$$

Oft ordnet man die Glieder einer Doppelfolge (x_{nm}) in einem Rechteckschema an,

$$\begin{array}{cccccc}
x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1m}\dots & \longrightarrow & \xi_1 \\
x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2m}\dots & \longrightarrow & \xi_2 \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nm}\dots & \longrightarrow & \xi_n \\
\downarrow & \downarrow & & \downarrow & & \vdots \\
\eta_1 & \eta_2 & \dots & \eta_m\dots & &
\end{array}$$

und nennt den ersten Index von x_{nm} entsprechend Zeilenindex, den zweiten Index Spaltenindex. Es wird deutlich, daß man (x_{nm}) zumindest auf zwei Weisen als Folge von Folgen betrachten kann: Einerseits kann man die Folgen in den Zeilen des obigen Schemas betrachten. Falls diese Folgen konvergieren, für alle $n \in \mathbb{N}$ sei etwa $\lim_{m\to\infty} x_{nm} = \xi_n$, dann kann man auch die Folge $(\xi_n)_{n\geq 1}$ auf Konvergenz untersuchen. Es existiere $\xi = \lim_{n\to\infty} \xi_n$, ξ ist dann gegeben durch

$$\xi = \lim_{n\to\infty} (\lim_{m\to\infty} x_{nm})$$

und man nennt ξ den **zeileniterierten Grenzwert** der Doppelfolge (x_{nm}). Andererseits kann man die Folgen in den Spalten des Rechteckschemas betrachten. Bezeichnet man mit $\eta_m = \lim_{n\to\infty} x_{nm}$ und mit $\eta = \lim_{m\to\infty} \eta_m$ (soferne diese Grenzwerte existieren), gelangt man zum **spalteniterierten Grenzwert** η der Doppelfolge (x_{nm}),

$$\eta = \lim_{m\to\infty} (\lim_{n\to\infty} x_{nm}).$$

Einer Doppelfolge (x_{nm}) kann man also auf natürliche Weise drei charakteristische Größen zuordnen: Ihren Grenzwert $x = \lim_{n,m\to\infty} x_{nm}$, den man der Deutlichkeit halber manchmal auch als **Doppellimes** bezeichnet, und die beiden iterierten Grenzwerte. Natürlich stellt sich die Frage, wie diese Größen zusammenhängen. Wir demonstrieren an einem Beispiel, daß ohne Zusatzbedingung kein Zusammenhang zu erwarten ist.

Beispiel 6.4. 1) $x_{nm} = (-1)^{m+n}(\frac{1}{n} + \frac{1}{m})$. Es existiert $\lim_{n,m\to\infty} x_{nm} = 0$, aber es existiert keiner der beiden iterierten Grenzwerte, da etwa für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Folge $(x_{nm})_{m\geq 1}$ divergiert. Die Existenz des Doppellimes impliziert also nicht die Existenz der iterierten Grenzwerte.
2) $x_{nm} = (-1)^m(\frac{1}{n} + \frac{1}{m})$. Es gilt wieder $\lim_{n,m\to\infty} x_{nm} = 0$. Für jedes $m \in \mathbb{N}$ ist nun aber $\lim_{n\to\infty} x_{nm} = (-1)^m \lim_{n\to\infty}(\frac{1}{n} + \frac{1}{m}) = (-1)^m \frac{1}{m}$ und somit $\lim_{m\to\infty}(\lim_{n\to\infty} x_{nm}) = 0$. Der zeileniterierte Limes existiert nicht.
3) $x_{nm} = \frac{nm}{n^2+m^2}$. Halten wir $n \in \mathbb{N}$ fest, dann gilt $\lim_{m\to\infty} x_{nm} = 0$ und somit auch $\lim_{n\to\infty}(\lim_{m\to\infty} x_{nm}) = 0$. Aus Symmetriegründen gilt $\lim_{m\to\infty}(\lim_{n\to\infty} x_{nm}) = 0$. Die beiden iterierten Grenzwerte existieren und sind gleich, trotzdem existiert der Doppellimes nicht: Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist nämlich $x_{nn} = \frac{1}{2}$ und $x_{n,2n} = \frac{2}{5}$, das Cauchy-Kriterium 6.3 kann nicht erfüllt werden.
4) $x_{nm} = \frac{1}{n} + \frac{1}{m}$. In diesem Falle existieren alle drei Limiten und sind gleich Null.

Satz 6.5. *Es sei* $(x_{nm})_{n,m\geq 1} \subset \mathbb{C}$ *eine konvergente Doppelfolge. Existiert für jedes* $n \in \mathbb{N}$ *der Zeilenlimes* $\xi_n = \lim_{m\to\infty} x_{nm}$*, dann existiert der zeileniterierte Limes* $\lim_{n\to\infty}(\lim_{m\to\infty} x_{nm})$ *und es gilt*

$$\lim_{n,m\to\infty} x_{nm} = \lim_{n\to\infty}(\lim_{m\to\infty} x_{nm}).$$

Beweis. Aus der Existenz des Doppellimes x schließen wir für jedes $\varepsilon > 0$ auf einen Index $N(\varepsilon)$, sodaß $|x_{nm} - x| < \varepsilon$ für alle $n, m \geq N(\varepsilon)$ gilt. Nach Korollar 2.6 kann man in dieser Ungleichung den Grenzübergang $m \to \infty$ durchführen und erhält für alle $n \geq N(\varepsilon)$

$$|\xi_n - x| \leq \varepsilon,$$

d.h.

$$\lim_{n\to\infty} \xi_n = \lim_{n\to\infty}(\lim_{m\to\infty} x_{nm}) = x.$$

$\square$

Dieser Satz zeigt, daß bei einer konvergenten Doppelfolge die iterierten Limiten nur dann nicht existieren können, wenn die entsprechenden „inneren" Limiten nicht existieren. Genauer gilt

Korollar 6.6. Es sei $(x_{nm})_{n,m\geq 1} \subset \mathbb{C}$ eine konvergente Doppelfolge. Existieren für alle $n, m \in \mathbb{N}$ die einfachen Grenzwerte

$$\xi_n = \lim_{m\to\infty} x_{nm} \quad \text{und} \quad \eta_m = \lim_{n\to\infty} x_{nm},$$

dann existieren auch die beiden iterierten Grenzwerte und es gilt

$$\lim_{n,m\to\infty} x_{nm} = \lim_{n\to\infty}(\lim_{m\to\infty} x_{nm}) = \lim_{m\to\infty}(\lim_{n\to\infty} x_{nm}).$$

Wir untersuchen nun das letzte Beispiel in 6.4 etwas genauer: Für jedes n betrachten wir die Zeilenfolge $m \mapsto x_{nm}$. Es gilt $\lim_{m\to\infty} x_{nm} = \frac{1}{n}$, denn $|x_{nm} - \frac{1}{n}| = \frac{1}{m}$. Zu einem beliebigen $\varepsilon > 0$ wählen wir $N_0 \in \mathbb{N}$ mit $N_0 > \frac{1}{\varepsilon}$. *Für alle* $n \in \mathbb{N}$ folgt dann $|x_{nm} - \frac{1}{n}| = \frac{1}{m} < \frac{1}{N_0} < \varepsilon$ soferne $m \geq N_0$. Wir erkennen, daß für jede Zeilenfolge derselbe Index N_0 gewählt werden kann, um den Approximationsfehler unter eine vorgegebene Toleranzgrenze zu drücken. Die Möglichkeit einer gleichmäßigen Wahl von N_0 erlaubt es auch, aus der Existenz eines der iterierten Limiten auf den im allgemeinen komplizierter zu berechnenden Doppellimes zu schließen.

Definition 6.7. *Es seien* $\Lambda \neq \emptyset$ *eine Indexmenge und* $\{(x_{n\lambda})_{n\geq 1} \colon \lambda \in \Lambda\}$ *eine Familie konvergenter Folgen komplexer Zahlen, d.h. für alle* $\lambda \in \Lambda$ *existiert* $x_\lambda \in \mathbb{C}$ *mit* $x_\lambda = \lim_{n\to\infty} x_{n\lambda}$.
Die Folgen $(x_{n\lambda})$ *konvergieren* ***gleichmäßig*** *bezüglich* $\lambda \in \Lambda$ *gegen* $x_\lambda \underset{Def}{\Leftrightarrow}$

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}\ \forall \lambda \in \Lambda\ \forall n \in \mathbb{N} \colon n \geq N(\varepsilon) \Rightarrow |x_{n\lambda} - x_\lambda| < \varepsilon.$$

Lemma 6.8. $(x_{nm})_{n,m\geq 1} \subset \mathbb{C}$ *sei eine konvergente Doppelfolge. Falls für alle* $n \in \mathbb{N}$ *der Zeilenlimes* $\xi_n = \lim_{m\to\infty} x_{nm}$ *existiert, dann sind die Zeilenfolgen* $(x_{nm})_{m\geq 1}$*,* $n \in \mathbb{N}$*, gleichmäßig konvergent bezüglich* n*.*

Beweis. Wegen der Existenz des Doppellimes $x = \lim_{n,m\to\infty} x_{nm}$ existiert für alle $\varepsilon > 0$ ein Index $N_0(\varepsilon)$, sodaß für alle $n, m \geq N_0(\varepsilon)$

$$(*) \qquad |x_{nm} - x| < \varepsilon$$

zutrifft. Da aber auch für jedes $n \in \mathbb{N}$ der Zeilenlimes $\xi_n = \lim_{m\to\infty} x_{nm}$ existiert, kann man in $(*)$ den Grenzübergang $m \to \infty$ durchführen und erhält nach Korollar 2.6 für alle $n \geq N_0(\varepsilon)$

$$|\xi_n - x| \leq \varepsilon.$$

Somit folgt für $n, m \geq N_0(\varepsilon)$

$$(**) \qquad |x_{nm} - \xi_n| \leq |x_{nm} - x| + |x - \xi_n| < 2\varepsilon.$$

Es konvergieren auch die Zeilenfolgen mit $n = 1, \ldots, N_0(\varepsilon) - 1$. Da es sich nur um endlich viele Folgen handelt, gibt es einen Index $N_1(\varepsilon)$, sodaß

$$|x_{nm} - \xi_n| < \varepsilon$$

für $m \geq N_1(\varepsilon)$ und $n = 1, \ldots, N_0(\varepsilon) - 1$ zutrifft. Setzt man nun $N(\varepsilon) = \max\{N_0(\varepsilon), N_1(\varepsilon)\}$, so gilt $(**)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und für alle $m \geq N(\varepsilon)$. □

Dieses Lemma zeigt, daß unter der Voraussetzung der Existenz der Zeilenlimiten, die Gleichmäßigkeit ihrer Konvergenz eine notwendige Bedingung für die Existenz des Doppellimes ist. Im folgenden Satz wird gezeigt, daß umgekehrt diese Bedingung die Vertauschbarkeit von Zeilen– und Spaltenlimes sicherstellt.

Satz 6.9 (Iterierte Grenzwerte). *Existieren für alle $n, m \in \mathbb{N}$ die einfachen Grenzwerte*

$$\xi_n = \lim_{m\to\infty} x_{nm} \quad \textit{und} \quad \eta_m = \lim_{n\to\infty} x_{nm}$$

einer komplexen Doppelfolge $(x_{nm})_{n,m\geq 1}$ und ist die Konvergenz mindestens einer der beiden Familien von Folgen gleichmäßig, so existieren sowohl beide iterierte Grenzwerte, als auch der Doppellimes und es gilt

$$\lim_{n,m\to\infty} x_{nm} = \lim_{n\to\infty}\big(\lim_{m\to\infty} x_{nm}\big) = \lim_{m\to\infty}\big(\lim_{n\to\infty} x_{nm}\big).$$

Beweis. Wir nehmen an, die Konvergenz der Zeilenfolgen $(x_{nm})_{m\geq 1}, n \in \mathbb{N}$, gegen ξ_n sei gleichmäßig, d.h. für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es einen Index $N(\varepsilon)$, sodaß für alle $m \geq N(\varepsilon)$

$$|x_{nm} - \xi_n| < \varepsilon$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Wir zeigen, daß die Folge $(\xi_n)_{n\geq 1}$ eine Cauchy-Folge ist. Wir wählen einen festen Index $q \geq N(\varepsilon)$. Da nach Voraussetzung auch die Spaltenfolge $(x_{nq})_{n\geq 1}$ konvergiert, also eine Cauchy-Folge ist, gibt es zu dem bereits gewählten ε einen weiteren Index $K = K(\varepsilon, q) \geq N(\varepsilon)$, sodaß $|x_{rq} - x_{sq}| < \varepsilon$ für alle $r, s \geq K$ gilt. Somit folgt für $r, s \geq K(\varepsilon, q)$

$$|\xi_r - \xi_s| \leq |\xi_r - x_{rq}| + |x_{rq} - x_{sq}| + |x_{sq} - \xi_s| < 3\varepsilon.$$

Die Folge $(\xi_n)_{n\geq 1}$ ist also eine Cauchy-Folge und somit konvergent:

$$\lim_{n\to\infty}(\lim_{m\to\infty} x_{nm}) = \lim_{n\to\infty} \xi_n = x.$$

Es existiert also der zeileniterierte Limes. Wir zeigen nun die Existenz des Doppellimes. Wegen der Konvergenz von (ξ_n) gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ einen Index $M(\varepsilon)$, sodaß $|x - \xi_n| < \varepsilon$ für alle $n \geq M(\varepsilon)$ zutrifft. Setzt man $\tilde{N}(\varepsilon) = \max\{M(\varepsilon), N(\varepsilon)\}$ ergibt sich für $n, m \geq \tilde{N}(\varepsilon)$

$$|x_{nm} - x| \leq |x_{nm} - \xi_n| + |\xi_n - x| < 2\varepsilon,$$

d.h.

$$\lim_{n,m\to\infty} x_{nm} = x.$$

Die Existenz des spalteniterierten Grenzwertes und dessen Gleichheit mit dem Doppellimes folgt aus Satz 6.5. $\square$

7. Reihen

Das Paradoxon des Zenon von Elea *(495 – 435 v.Chr.): Ein Läufer, der eine konstante Geschwindigkeit einhält, kann niemals das Ende der Rennbahn erreichen.* Zenon argumentiert, der Läufer müsse ja zuerst die Hälfte der Strecke, dann die Hälfte der zweiten Hälfte, dann die Hälfte des verbleibenden Viertels, u.s.w, zurücklegen. Der Läufer muß also unendlich viele Teilstrecken durchlaufen, für welche er jeweils eine bestimmte Zeit benötigt. Somit kann der Läufer sein Ziel nie erreichen.
Nehmen wir an, der Läufer benötige für die erste Hälfte der Rennstrecke gerade eine Zeiteinheit. Das Durchlaufen des nächsten Viertels erfordert eine weitere halbe Zeiteinheit, das anschließende Achtel der Strecke wird in der nächsten viertel Zeiteinheit zurückgelegt. Die Bewältigung der ersten n Teilstrecken erfordert also

$$t_n = 1 + \frac{1}{2} + (\frac{1}{2})^2 + \cdots + (\frac{1}{2})^{n-1}$$

Zeiteinheiten. Zenon, der den Begriff des Grenzwertes noch nicht kannte, war also offensichtlich der Ansicht, die „Addition“ unendlich vieler Zeitintervalle, auch wenn diese immer kleiner werden, müsse eine unendlich große Zeitspanne ergeben. Wir können das Paradoxon klären, da wegen Lemma II-4.23 die Laufzeit für n Teilstrecken durch

$$t_n = 2 - (\frac{1}{2})^{n-1}$$

gegeben ist und somit die Gesamtlaufzeit $T = \lim_{n\to\infty} t_n = 2$ Zeiteinheiten beträgt. Dieses Beispiel zeigt auch, wie das Aufsummieren von „unendlich“ vielen Summanden präzisiert werden kann.

Definition 7.1. *Es sei $(a_k)_{k\geq 1} \subset \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$ und $\alpha \in \mathbb{C}$.*

i) *$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ heißt* ***n-te Partialsumme*** *der Folge (a_k).*

ii) *Die Folge der n-ten Partialsummen* $(S_n)_{n\geq 1}$ *heißt* ***unendliche Reihe****. Anstelle von* $(S_n)_{n\geq 1}$ *schreibt man* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$*. Man nennt* a_k *das* **k-te Glied** *der unendlichen Reihe.*

iii) $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *heißt* ***konvergent (divergent)*** $\underset{Def}{\Leftrightarrow}$ $(S_n)_{n\geq 1}$ *ist konvergent (divergent).* α *heißt* ***Summe*** *(Grenzwert) von* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$*,* $\alpha = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \underset{Def}{\Leftrightarrow} \alpha = \lim_{n\to\infty} S_n$.

Wir stellen fest, daß das Symbol $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ eine zweifache Bedeutung besitzt: Es bezeichnet einerseits die unendliche Reihe und andererseits, im Falle der Konvergenz, auch deren Grenzwert. Wir betonen nachdrücklich, daß die Summe einer konvergenten Reihe *nicht* als Ergebnis simultanen Aufsummierens unendlich vieler Summanden zu verstehen ist, sondern durch den Grenzwert der Folge der Partialsummen bestimmt ist. Die Reihenfolge der Reihenglieder geht also ganz wesentlich in die Definition der Summe einer Reihe ein (der Wert jeder einzelnen Partialsumme ist natürlich unabhängig von der Reihenfolge ihrer Summanden). Wir können somit viele Ergebnisse für Folgen unmittelbar auf Reihen übertragen.

SATZ 7.2 (Cauchykriterium). *Es sei* $(a_n)_{n\geq 1} \subset \mathbb{C}$*. Die unendliche Reihe* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konvergiert genau dann, wenn folgendes gilt:*

$$(*) \qquad \forall \varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}\ \forall n, m \in \mathbb{N}\colon n \geq m \geq N(\varepsilon) \Rightarrow \Big|\sum_{k=m+1}^{n} a_k\Big| < \varepsilon.$$

Für $n = m$ gilt wegen unserer Konvention über leere Summen $\sum_{k=m+1}^{n} a_k = 0$.

BEWEIS. Nach Satz 3.8 konvergiert $\sum_{n=1}^{\infty} a_k$ genau dann, wenn $(S_n)_{n\geq 1}$, $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$, eine Cauchyfolge ist, d.h. wenn für jedes $\varepsilon > 0$ ein Index $N(\varepsilon)$ existiert, sodaß für alle $n, m \geq N(\varepsilon)$ und $n \geq m$

$$|S_n - S_m| = \Big|\sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=1}^{m} a_k\Big| = \Big|\sum_{k=m+1}^{n} a_k\Big| < \varepsilon$$

zutrifft. □

BEMERKUNG 7.3. Führt man in $(*)$ den Grenzübergang $n \to \infty$ durch, ergibt sich eine notwendige Konvergenzbedingung:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ ist konvergent } \Rightarrow \forall \varepsilon > 0\, \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}\, \forall m \geq N(\varepsilon)\colon \Big|\sum_{k=m+1}^{\infty} a_k\Big| < \varepsilon.$$

KOROLLAR 7.4. Es sei $(a_n)_{n\geq 1} \subset \mathbb{C}$. Wenn $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert, dann gilt $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

BEWEIS. Wir setzen $n = m+1$ im Beweis von Satz 7.2 und erhalten für $m > N(\varepsilon)$

$$|S_{m+1} - S_m| = |a_{m+1}| < \varepsilon.$$

□

Satz 7.5 (Harmonische Reihe). *$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ ist divergent.*

Beweis. Es sei $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$, $n \in \mathbb{N}$. Wir zeigen

$$(*) \qquad \forall n \in \mathbb{N}\colon S_{2^n} \geq \frac{1}{2}(n+2),$$

somit ist $(S_n)_{n\geq 1}$ unbeschränkt und daher divergent. Den Nachweis von $(*)$ führen wir mit Hilfe vollständiger Induktion. Es ist $S_{2^1} = \frac{3}{2}$. Mit Hilfe von $S_{2^n} \geq \frac{1}{2}(n+2)$ schätzen wir $S_{2^{n+1}}$ folgendermaßen ab

$$\begin{aligned} S_{2^{n+1}} = S_{2^n} + \sum_{k=2^n+1}^{2^{n+1}} \frac{1}{k} &\geq \frac{1}{2}(n+2) + \sum_{k=2^n+1}^{2^{n+1}} 2^{-n-1} \\ &= \frac{1}{2}(n+2) + 2^{-n-1}(2^{n+1} - (2^n+1) + 1) \\ &= \frac{1}{2}(n+2) + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(n+3). \end{aligned}$$

□

Da (S_n) monoton wächst, können wir der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ den uneigentlichen Grenzwert ∞ zuweisen. Das Beispiel der harmonischen Reihe zeigt, daß die notwendige Konvergenzbedingung aus Korollar 7.4 nicht hinreichend ist.

Satz 7.6 (Geometrische Reihe). *Es sei $z \in \mathbb{C}$. Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ ist konvergent mit der Summe $\frac{1}{1-z}$ genau dann, wenn $|z| < 1$.*

Beweis. Nach Lemma II-4.23 ist die n-te Partialsumme gegeben durch

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} z^k = \frac{1-z^{n+1}}{1-z}.$$

Ist $|z| < 1$, folgt weiter aus den Sätzen 1.10 und 2.1

$$\lim S_n = \frac{1 - \lim z^n}{1-z} = \frac{1}{1-z}.$$

Für $|z| \geq 1$ ist $|z^n| \geq 1$. Somit ist nach Korollar 7.4 $\sum_{k=0}^{\infty} z^n$ divergent. □

Satz 7.7. *Es seien $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergente Reihen mit komplexen Gliedern und $c \in \mathbb{C}$. Dann konvergieren auch die Reihen $\sum_{n=1}^{\infty} ca_n$ und $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$. Ferner gilt*

i) $\sum_{n=1}^{\infty} ca_n = c\sum_{n=1}^{\infty} a_n$,
ii) $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Beweis. Satz 2.1 und Defintion 7.1. □

Es gibt allerdings kein entsprechendes Resultat für das Produkt konvergenter Reihen. Es ist möglich, daß die Reihen $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ beide konvergieren, die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ jedoch divergiert. Wir werden später zeigen, daß die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}}$

konvergiert, nach Satz 7.5 allerdings divergiert $\sum_{n=1}^{\infty}((-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}})((-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. Selbst wenn $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \alpha$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \beta$ und $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ konvergiert, besteht kein allgemein gültiger Zusammenhang zwischen der Summe von $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ und dem Produkt $\alpha\beta$.

8. Reelle Reihen mit nicht negativen Gliedern

Wir zeigen zuerst, daß aus der Konvergenz von $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ die Konvergenz von $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ folgt. Die Ergebnisse dieses Abschnittes sind auch bei Konvergenzuntersuchungen beliebiger komplexer Reihen nützlich. Wir bemerken, daß sich die Diskussion der bloßen Konvergenz von Reihen mit den Mitteln dieses Kapitels meist relativ leicht bewerkstelligen läßt, wesentlich schwieriger, oft sogar unmöglich, ist es, die Summe einer Reihe zu ermitteln.

Satz 8.1. *Es sei* $(a_n)_{n\geq 1} \subset \mathbb{C}$.
Konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$, *dann konvergiert auch* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Beweis. Bezeichnen wir mit $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ und $T_n = \sum_{k=1}^{n} |a_k|$, folgt die Behauptung mit Hilfe der Dreiecksungleichung (es sei $n > m$)

$$|S_n - S_m| = \Big|\sum_{k=m+1}^{n} a_k\Big| \leq \sum_{k=m+1}^{n} |a_k| = |T_n - T_m|,$$

und dem Cauchy-Kriterium. □

Satz 8.2. $(a_n)_{n\geq 1} \subset \mathbb{R}^+$. *Die Reihe* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konvergiert genau dann, wenn die Folge* $(S_n)_{n\geq 1}$ *der Partialsummen beschränkt ist.*

Beweis. Wegen $(a_n) \subset \mathbb{R}^+$ ist die Folge (S_n) monoton wachsend, d.h. für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $S_n \leq S_{n+1}$. Die Behauptung folgt nun aus dem Monotoniekriterium Satz 3.2. □

Satz 8.3 (Vergleichskriterium). *Es seien* $(a_n)_{n\geq 1}$, $(b_n)_{n\geq 1}$, *reelle Folgen und es gelte* $0 \leq a_n \leq b_n$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$. *Dann folgt*

i) $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *ist konvergent* $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *ist konvergent.*
Man nennt die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *eine* ***konvergente Majorante*** *für* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

ii) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *ist divergent* $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *ist divergent.*
Man nennt die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *eine* ***divergente Minorante*** $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Beweis. Wir bezeichnen die n-ten Partialsummen von $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ mit A_n und von $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ mit B_n. Es folgt

$$(*) \qquad A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \leq \sum_{k=1}^{n} b_k = B_n.$$

Beide Folgen (A_n) und (B_n) sind monoton wachsend. Konvergiert die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ so ist die Folge (B_n) und folglich auch (A_n) beschränkt. Daraus folgt die Konvergenz von $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ mit Satz 3.2. Ist die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ divergent, so ist die Folge (A_n) und wegen $(*)$ auch (B_n) unbeschränkt. Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ ist somit divergent. $\square$

Bemerkung 8.4. 1.) Da die Konvergenzeigenschaften einer Reihe nicht vom Verhalten endlich vieler Glieder abhängen, genügt es, wenn die Voraussetzung $0 \leq a_n \leq b_n$ erst ab einem bestimmten Index $N \geq 1$ zutrifft.
2.) Einer divergenten Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ mit nicht negativen Gliedern kann man auf Grund der Ausführungen in Abschnitt 5 den uneigentlichen Grenzwert ∞ zuweisen. Man sagt, die Reihe divergiere (aber nicht: konvergiere) nach ∞ und schreibt $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$.
3.) Es sei $(a_n)_{n\geq 1} \subset \mathbb{C}$ und $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ eine konvergente Majorante für die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$. Dann ist auch $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent.

Satz 8.5 (Verdichtungskriterium nach Cauchy). *Es sei $(a_n)_{n\geq 0}$ eine monoton fallende Folge nicht negativer Zahlen. Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergiert genau dann, wenn die „verdichtete" Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ konvergiert.*

(Wir beginnen die Indizierung der Reihenglieder mit 0, um die Darstellung des Beweises etwas zu vereinfachen.)

Beweis. Wir nehmen zuerst an, es konvergiere die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$. Wegen $a_{n+1} \leq a_n$, $n \in \mathbb{N}$, ergibt sich für $m \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{m} 2^n a_{2^n} &= \frac{1}{2}a_1 + a_2 + 2a_4 + 4a_8 + \cdots + 2^{m-1}a_{2^m} \\ &\leq a_1 + a_2 + (a_3 + a_4) + (a_5 + a_6 + a_7 + a_8) + \cdots + \\ &\quad + (a_{2^{m-1}+1} + a_{2^{m-1}+2} + \cdots + a_{2^m}) < \sum_{n=0}^{\infty} a_n.\end{aligned}$$

Mit Hilfe des Monotoniekriteriums ergibt sich die Konvergenz der verdichteten Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n}$. Es konvergiere nun die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n}$. Für $m \in \mathbb{N}$ sei $k \in \mathbb{N}$ so gewählt, daß $2^k > m$ gilt. Es folgt für die m-te Partialsumme von $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{m} a_n &\leq a_0 + a_1 + (a_2 + a_3) + (a_4 + a_5 + a_6 + a_7) + \dots \\ &\quad + (a_{2^k} + a_{2^k+1} + \cdots + a_{2^{k+1}-1}) \\ &\leq a_0 + a_1 + 2a_2 + 4a_4 + \cdots + 2^k a_{2^k} \leq a_0 + \sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k}.\end{aligned}$$

Dies hat die Konvergenz von $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ zur Folge:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_n = \lim_{m\to\infty} \sum_{n=0}^{m} a_n \leq a_0 + \sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k}.$$

Beide Teile des Beweises stützen sich auf die Tatsache, daß in $[2^k, 2^{k+1}-1] \cap \mathbb{N}$ genau 2^k natürliche Zahlen liegen. $\square$

SATZ 8.6. *Es sei $s \in \mathbb{Q}$. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ konvergiert genau dann, wenn $s > 1$.*

BEWEIS. Für $s < 0$ ist $(\frac{1}{n^s})$ nicht konvergent und somit die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ nach Korollar 7.4 divergent. Es sei also $s \geq 0$. Nach Satz 8.5 ist $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ konvergent genau dann, wenn

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \frac{1}{(2^n)^s} = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{(1-s)n}$$

konvergiert. Die geometrische Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{(1-s)n}$ konvergiert nach Satz 7.6 genau dann, wenn $2^{1-s} < 1$. Dies ist wegen Satz II-7.9 gleichbedeutend mit $s > 1$. $\square$

Die Gültigkeit dieses Satzes wird später auf alle $s \in \mathbb{R}$ ausgedehnt.
In vielen Fällen ist es schwierig, eine konvergente Majorante bzw. eine divergente Minorante für eine Reihe zu finden oder es ist nicht klar, ob nach einer konvergenten Majorante oder einer divergenten Minorante gesucht werden soll. In solchen Fällen kann das Grenzwertkriterium hilfreich sein.

SATZ 8.7 (Grenzwertkriterium). *Es seien $(a_n)_{n\geq 1}$, $(b_n)_{n\geq 1}$ Folgen positiver reeller Zahlen.*

i) *Ist $\overline{\lim} \frac{a_n}{b_n} < \infty$ und $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergent, dann konvergiert auch $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.*
ii) *Ist $\underline{\lim} \frac{a_n}{b_n} > 0$ und $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ divergent, dann divergiert auch $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.*

BEWEIS. i) Es sei $\overline{\lim} \frac{a_n}{b_n} < \beta < \infty$. Nach Satz 4.5 gibt es $N_0 \in \mathbb{N}$, sodaß $\frac{a_n}{b_n} < \beta$ gilt für alle $n \geq N_0$. Somit folgt $a_n < \beta b_n$ für $n \geq N_0$. Die Konvergenz von $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ zieht nun die Konvergenz von $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ unter Berufung auf das Vergleichskriterium Satz 8.3 nach sich.
ii) Es sei $\underline{\lim} \frac{a_n}{b_n} > \alpha > 0$ und $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ divergent. Nach Satz 4.5 gibt es $N_1 \in \mathbb{N}$, sodaß $\frac{a_n}{b_n} > \alpha$ zutrifft für alle $n \geq N_1$. Es folgt $a_n > \alpha b_n > 0$ für $n \geq N_1$ und wieder mit Hilfe des Vergleichskriteriums die Divergenz von $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. $\square$

Wir demonstrieren die Anwendung des Grenzwertkriteriums an einem Beispiel:

BEISPIEL 8.8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n^{2/3}}$ ist konvergent.

BEWEIS. Wegen $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$ verhält sich das n-te Glied der Reihe für große n wie (man sagt dafür auch n ist „**asymptotisch gleich**“) $\frac{1}{2} n^{-\frac{7}{6}}$. Dies legt nahe, als einfachere Vergleichsreihe $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\frac{7}{6}}$ zu wählen. Wegen Satz 8.6 ist diese Reihe konvergent und aus

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{n^{2/3}} \cdot n^{\frac{7}{6}} = (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})\sqrt{n} = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$$

folgt $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{1}{2}$ und mit Hilfe von Satz 8.7 auch die Konvergenz der ursprünglichen Reihe. $\square$

9. Alternierende Reihen

Wir wenden uns nun einer wichtigen Klasse von Reihen zu, nämlich jenen, deren Glieder reell und abwechselnd positiv und negativ sind. Solche Reihen nennt man **alternierend**.

SATZ 9.1 (Leibniz Kriterium). *Es sei* $(a_n)_{n\geq 1}$*, eine Folge reeller, nicht negativer Zahlen. Gilt darüber hinaus*

i) $\forall n \in \mathbb{N}$: $a_{n+1} \leq a_n$,
ii) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$,

dann ist die alternierende Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$ *konvergent.*

BEWEIS. Es sei $S_n = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}a_k$. Wir zeigen, daß die Folgen der geraden und ungeraden Partialsummen konvergieren und ihre Grenzwerte gleich sind, d.h. $\lim_{n\to\infty} S_{2n} = \lim_{n\to\infty} S_{2n+1} = S$. Daraus folgt die Konvergenz der Reihe und $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n = S$ (Übung). Für $n \geq 1$ gilt

$$\begin{aligned} S_{2n+2} - S_{2n} &= -a_{2n+2} + a_{2n+1} \geq 0 \\ S_{2n+2} - S_{2n+1} &= -a_{2n+2} \leq 0 \\ S_{2n+1} - S_{2n-1} &= a_{2n+1} - a_{2n} \leq 0, \end{aligned}$$

somit folgt

$$(*) \qquad S_2 \leq \cdots \leq S_{2n} \leq S_{2n+2} \leq S_{2n+1} \leq S_{2n-1} \leq \cdots \leq S_1.$$

Die Folge $(S_{2n})_{n\geq 1}$ ist daher monoton wachsend und nach oben beschränkt (durch S_1), $(S_{2n+1})_{n\geq 0}$ ist monoton fallend und nach unten beschränkt (durch S_2). Nach dem Monotoniekriterium Satz 3.2 existieren die Grenzwerte $\lim_{n\to\infty} S_{2n}$ und $\lim_{n\to\infty} S_{2n-1}$. Aus $S_{2n} = S_{2n-1} - a_{2n}$ folgt die Gleichheit der Grenzwerte. □

Aus den Ungleichungen $(*)$ lassen sich auch Schranken für den Fehler ableiten, der sich ergibt, wenn man eine alternierende Reihe durch die n-te Partialsumme approximiert: Es stellt sich heraus, daß der Betrag des Fehlers nicht größer sein kann, als der Betrag des ersten vernachlässigten Gliedes der Reihe.

KOROLLAR 9.2. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$ erfülle die Voraussetzungen des Leibniz Kriteriums und es sei $S_n = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}a_k$, $S = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}a_k$. Es gilt dann für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$0 \leq S - S_{2n} \leq a_{2n+1} \text{ und } 0 \leq S_{2n+1} - S \leq a_{2n+2}.$$

BEWEIS. Aus $(*)$ folgt für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$S_{2n} \leq S \leq S_{2n+1}.$$

Subtrahiert man in dieser Ungleichungn S_{2n}, erhält man

$$0 \leq S - S_{2n} \leq S_{2n+1} - S_{2n} = a_{2n+1}.$$

Die zweite Fehlerabschätzung folgt durch Subtraktion von S_{2n+1} von $S_{2n+2} \leq S \leq S_{2n+1}$. □

Beispiel 9.3. (Alternierende harmonische Reihe, Leibniz Reihe) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$ ist konvergent. Der Nachweis der Konvergenz der alternierenden harmonischen Reihe ist eine einfache Anwendung des Leibniz Kriteriums. Wir können allerdings noch nicht ihre Summe bestimmen. Wir werden später sehen, daß $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n} = \ln 2 = 0.693147\ldots$. Diese Reihe konvergiert sehr langsam gegen ihre Summe. Korollar 9.2 zeigt, daß wir bei Vernachlässigung von Rundungsfehlern 10^6 Glieder der Reihe berücksichtigen müßten, um ihre Summe bis auf einen Fehler von 10^{-6} berechnen zu können. Dieses Beispiel zeigt auch, daß die Umkehrung von Satz 8.1 nicht gilt.

10. Absolute und bedingte Konvergenz von Reihen

Definition 10.1. *Es sei* $(a_n)_{n\geq 1} \subset \mathbb{C}$.

i) *Die Reihe* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *heißt* ***absolut konvergent*** $\underset{Def}{\Leftrightarrow}$ $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ *ist konvergent.*
ii) *Die Reihe* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *heißt* ***bedingt konvergent*** $\underset{Def}{\Leftrightarrow}$ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *ist konvergent aber nicht absolut konvergent.*

Nach Satz Satz 8.1 ist jede absolut konvergente Reihe auch konvergent. Bei reellen Reihen mit nicht negativen Gliedern sind die beiden Begriffe absolute Konvergenz und Konvergenz natürlich identisch. Die alternierende harmonische Reihe ist ein Beispiel einer bedingt konvergenten Reihe. Jeder Test aus Abschnitt 8 kann zur Untersuchung der absoluten Konvergenz herangezogen werden. Wir ergänzen nun diese Liste mit zwei weiteren Konvergenzkriterien. Allerdings ist man mit beiden Tests nur dann in der Lage, die absolute Konvergenz einer Reihe festzustellen, wenn sich diese asymptotisch wie die geometrische Reihe verhält. Auf Divergenz kann man mit diesen Tests nur bei Reihen schließen, die ohnehin die notwendige Konvergenzbedingung Korollar 7.4 verletzen.

Satz 10.2 (Wurzelkriterium). *Es sei* $(a_n)_{n\geq 1} \subset \mathbb{C}$ *und*

$$\rho = \overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}.$$

Dann gilt

i) *Die Reihe* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *ist absolut konvergent, falls* $\rho < 1$.
ii) *Die Reihe* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *divergiert, falls* $\rho > 1$.

Für $\rho = 1$ *ist keine Aussage möglich.*

Beweis. i) Es sei $\rho < 1$ und $\beta \in (\rho, 1)$. Nach Satz 4.5 gibt es einen Index $N(\beta) \in \mathbb{N}$, sodaß $\sqrt[n]{|a_n|} < \beta$, d.h. $|a_n| < \beta^n$ für alle $n \geq N(\beta)$ zutrifft. Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergiert daher nach Satz 7.6 und dem Vergleichskriterium.
ii) Es sei nun $\rho > 1$. Wegen Satz 4.5 gilt dann $\sqrt[n]{|a_n|} > 1$ und somit $|a_n| > 1$ für unendlich viele $n \in \mathbb{N}$. Die Folge (a_n) kann daher nicht nach 0 konvergieren. Somit ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nach Korollar 7.4 divergent. □

Das Wurzelkriterium ermöglicht es aber, nicht nur die Konvergenz, sondern auch die Konvergenzgeschwindigkeit festzustellen:

KOROLLAR 10.3. Für die Folge $(a_n)_{n\geq 1} \subset \mathbb{C}$ seien $\beta \in (0,1)$ und $N(\beta) \in \mathbb{N}$ so gewählt, daß $\sqrt[n]{|a_n|} < \beta$ für alle $n \geq N(\beta)$ gilt. Dann läßt sich der Fehler zwischen der n-ten Partialsumme $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ und der Summe $S = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ abschätzen durch

$$|S - S_n| \leq \frac{\beta^{n+1}}{1-\beta}, \quad n \geq N(\beta),$$

BEWEIS. Für $m \geq n \geq N(\beta)$ findet man

$$\begin{aligned} |S_n - S_m| = |a_{n+1} + \cdots + a_m| &\leq \sum_{k=n+1}^{m} |a_k| \\ &\leq \sum_{k=n+1}^{m} \beta^k < \beta^{n+1} \sum_{k=0}^{\infty} \beta^k = \frac{\beta^{n+1}}{1-\beta}. \end{aligned}$$

Die behauptete Abschätzung folgt nun aus $\lim_{m\to\infty} S_m = S$. □

SATZ 10.4 (Quotientenkriterium). *Es sei $(a_n)_{n\geq 1} \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Dann gilt*

i) *Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ist absolut konvergent, falls $\overline{\lim}_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < 1$.*
ii) *Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergiert für $\underline{\lim}_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} > 1$.*

In den Fällen $\overline{\lim}_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \geq 1$ oder $\underline{\lim}_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \leq 1$ ist keine Aussage möglich.

BEWEIS. Satz 4.11 und Wurzelkriterium. □

KOROLLAR 10.5. Es sei $(a_n)_{n\geq 1} \subset \mathbb{C}$, $\beta \in (0,1)$ und $N(\beta) \in \mathbb{N}$ so, daß $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \leq \beta < 1$ für alle $n \geq N(\beta)$ gilt. Dann läßt sich der Fehler zwischen der n-ten Partialsumme $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_n$ und der Summe $S = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ abschätzen durch

$$|S - S_n| \leq \frac{\beta}{1-\beta}|a_n|, \quad n \geq N(\beta).$$

BEWEIS. Für alle $k \in \mathbb{N}$ und $n \geq N(\beta)$ gilt $|a_{n+k}| \leq \beta^k |a_n|$. Somit erhält man für alle $m \geq n \geq N(\beta)$

$$|S_m - S_n| \leq \sum_{k=1}^{m-n} |a_{n+k}| \leq \sum_{k=1}^{m-n} \beta^k |a_n| \leq \frac{\beta}{1-\beta}|a_n|.$$

Die Behauptung folgt nun wie im Beweis von Korollar 10.3. □

BEMERKUNG 10.6. (1) Die strikten Ungleichungen im Wurzel- und Quotientenkriterium können nicht zu $\leq$ abgeschwächt werden. Als Beispiel betrachten wir die divergente harmonische Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ und die konvergente Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, für welche jeweils $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$ gilt.

(2) Der Beweis des Quotientenkriteriums zeigt, daß jede Reihe, auf die das Quotientenkriterium anwendbar ist, auch mit dem Wurzelkriterium untersucht werden kann, obgleich die Rechnung dann erheblich komplizierter sein kann. Das Wurzelkriterium ist tatsächlich umfassender als das Quotientenkriterium, wie die folgenden beiden Beispiele zeigen:

(3) Es sei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ mit $a_n = 2^{-n}$, falls n gerade ist, und $a_n = 3^{-n}$, falls n ungerade ist. Aus $\sum a_n < \sum 2^{-n}$ folgt die Konvergenz der Reihe. Es gilt $\overline{\lim} \sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{2} < 1$ und $\overline{\lim} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{2n}}{a_{2n-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{3^{2n-1}}{2^{2n}} = \infty$. Das Wurzelkriterium deckt also im Gegensatz zum Quotientenkriterium die Konvergenz der Reihe auf. Dies zeigt auch, daß $\underline{\lim}$ in 10.4-ii) nicht durch $\overline{\lim}$ ersetzt werden kann. Man beachte ferner

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{2n+1}}{a_{2n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{2n}}{3^{2n+1}} = \frac{1}{3} \lim_{n\to\infty} (\frac{2}{3})^{2n} = 0.$$

(4) Es sei nun $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ mit $a_n = 2^n$ falls n gerade ist, und $a_n = 2^{-n}$, falls n ungerade ist. Die Reihe ist natürlich divergent. Ferner gilt $\overline{\lim} \sqrt[n]{a_n} = 2$ und $\underline{\lim} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{2n+1}}{a_{2n}} = 0$. Wiederum ist das Wurzelkriterium erfolgreicher als das Quotientenkriterium. Ferner gilt $\underline{\lim} \sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{2} < 1$. Gemeinsam mit der letzten Beobachtung in 3) belegt dies, daß $\overline{\lim}$ in 10.2-i und 10.4-i nicht durch $\underline{\lim}$ ersetzt werden kann.

Ehe wir den Unterschied zwischen absolut konvergenten Reihen und bedingt konvergenten Reihen darlegen, bemerken wir, daß bei *konvergenten* Reihen die Glieder beliebig durch Klammern zusammengefaßt werden können. Schon vorhandene Klammerungen in einer konvergenten Reihe dürfen jedoch nur dann weggelassen werden, wenn die entstehende Reihe wieder konvergiert. Das Weglassen der Klammern in der konvergenten Reihe $(1-1)+(1-1)+(1-1)+\dots$ führt zum Beispiel auf die divergente Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}$. Durch das Setzen von Klammern wird die Reihenfolge der Glieder der Reihe nicht verändert. Wir untersuchen nun den Einfluß des Vertauschens von unendlich vielen Gliedern auf die Summe der Reihe.

Definition 10.7. *Es sei* $(a_n)_{n\geq 1} \subset \mathbb{C}$ *und* $\sigma \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *eine Bijektion. Die Reihe* $\sum_{k=1}^{\infty} a_{\sigma(k)}$ *heißt* ***Umordnung*** *der Reihe* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

Beispiel 10.8. Wir betrachten folgende Umordnung der bedingt konvergenten alternierenden harmonischen Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n} = \alpha$.

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \frac{1}{7} - \dots.$$

Das allgemeine Glied der Reihe ist gegeben durch

$$\begin{aligned} a_{3k} &= \frac{1}{2k+1}, \\ a_{3k+1} &= -\frac{1}{4k+2}, \qquad k = 0, 1, 2, \dots \\ a_{3k+2} &= -\frac{1}{4(k+1)}. \end{aligned}$$

(Der Einfachheit halber wurde mit der Indizierung der Reihe bei 0 begonnen.) Wir betrachten die Partialsummen ($k \geq 1$)

$$\begin{aligned} S_{3k-1} &= \sum_{j=0}^{k-1} (a_{3j} + a_{3j+1} + a_{3j+2}) \\ &= \sum_{j=0}^{k-1} \Big(\frac{1}{2j+1} - \frac{1}{4j+2} - \frac{1}{4(j+1)}\Big) = \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{k-1} \Big(\frac{1}{2j+1} - \frac{1}{2(j+1)}\Big) \\ &= \frac{1}{2}\Big(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots - \frac{1}{2k}\Big). \end{aligned}$$

Daraus folgt $\lim_{k\to\infty} S_{3k-1} = \frac{1}{2}\alpha$. Ferner gilt für alle $k \geq 1$

$$\begin{aligned} S_{3k} &= S_{3k-1} + a_{3k} = S_{3k-1} + \frac{1}{2k+1}, \\ S_{3k+1} &= S_{3k-1} + a_{3k} + a_{3k+1} = S_{3k-1} + \frac{1}{2k+1} - \frac{1}{4k+2}, \end{aligned}$$

und somit auch $\lim_{k\to\infty} S_{3k} = \lim_{k\to\infty} S_{3k+1} = \lim_{k\to\infty} S_{3k-1} = \frac{1}{2}\alpha$. Wir erhalten also, daß die umgeordnete Reihe nicht gegen α sondern gegen $\frac{1}{2}\alpha$ konvergiert.

Wir zeigen nun, daß die Summe einer absolut konvergenten Reihe unabhängig ist von der Reihenfolge ihrer Glieder. Absolut konvergente Reihen verhalten sich also sehr ähnlich den endlichen Summen.

Satz 10.9. *Es sei $(a_k)_{k\geq 1} \subset \mathbb{C}$ und die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ absolut konvergent. Dann ist auch jede Umordnung $\sum_{k=1}^{\infty} a_{\sigma(k)}$ absolut konvergent und es gilt*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{\sigma(k)} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k.$$

Beweis. Wir verwenden folgende Bezeichnungen: $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$, $U_n = \sum_{k=1}^{n} a_{\sigma(k)}$. Wegen der absoluten Konvergenz von $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ existiert nach Satz 7.2 zu jedem $\varepsilon > 0$ ein Index N_0, sodaß

$$\sum_{k=N_0+1}^{\infty} |a_k| < \varepsilon$$

zutrifft. Zu N_0 bestimmen wir einen weiteren Index $K > N_0$ so, daß

$$(*) \qquad \{1, \dots, N_0\} \subset \{\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(K)\}.$$

Wegen $(*)$ treten für alle $n \geq K$ die Zahlen $a_1, \dots, a_{N_0}$ sowohl in den Partialsummen S_n als auch in U_n auf und fallen aus der Differenz $S_n - U_n$ heraus. Somit hat $S_n - U_n$ die Form

$$S_n - U_n = \delta_{N_0+1} a_{N_0+1} + \dots + \delta_{N_0+p} a_{N_0+p}, \quad \delta_j \in \{-1, 0, 1\}$$

für ein geeignet gewähltes $p \in \mathbb{N}$. Dies hat für alle $n \in \mathbb{N}$, $n \geq K$,

$$|S_n - U_n| \leq \sum_{k=N_0+1}^{\infty} |a_k| < \varepsilon$$

zur Folge. Somit gilt $\lim(S_n - U_n) = 0$ und die Folge (U_n) ist wegen $U_n = U_n - S_n + S_n$ konvergent mit

$$\lim U_n = \lim(S_n - U_n) + \lim S_n = \lim S_n.$$

$\square$

Wir haben in Beispiel 10.8 bereits demonstriert, daß bedingt konvergente Reihen sehr sensibel sein können in Bezug auf die Anordnung ihrer Glieder. Wir werden zeigen, daß durch Umordnung die Konvergenz sogar zerstört werden kann:

Satz 10.10 (Umordnungssatz von Riemann). *Es sei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ eine bedingt konvergente Reihe reeller Zahlen und $\alpha, \beta \in \bar{\mathbb{R}}$: $-\infty \leq \alpha \leq \beta \leq \infty$. Dann gibt es eine Umordnung $\sum a_{\sigma(k)}$ derart, daß deren Partialsummen $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_{\sigma(k)}$*

$$\varliminf_{n\to\infty} S_n = \alpha \quad \text{und} \quad \varlimsup_{n\to\infty} S_n = \beta$$

erfüllen.

Bemerkung 10.11. Insbesondere folgt, daß durch Umordnen einer bedingt konvergenten Reihe deren Summe beliebig verändert werden kann. Wählt man $\alpha = \beta = \infty$, gibt es sogar eine Umordnung der Reihe, welche nach ∞ divergiert.

Beweis des Umordnungssatzes. Wir demonstrieren die Beweisidee an einer etwas einfacheren Situation und zeigen: Für jedes ξ in $\mathbb{R}$ existiert eine Umordnung der Reihe, welche gegen ξ konvergiert. Zunächst überlegen wir, daß beide Teilreihen, die entstehen, wenn man nur die positiven oder nur die negativen Glieder berücksichtigt, divergieren. Für $n \in \mathbb{N}$ setzen wir

$$a_n^+ = \frac{1}{2}(|a_n| + a_n) = \begin{cases} a_n & \text{falls } a_n > 0 \\ 0 & \text{falls } a_n \leq 0 \end{cases}$$

$$a_n^- = \frac{1}{2}(|a_n| - a_n) = \begin{cases} 0 & \text{falls } a_n > 0 \\ -a_n & \text{falls } a_n \leq 0. \end{cases}$$

Es gilt dann $a_n = a_n^+ - a_n^-$ und $|a_n| = a_n^+ + a_n^-$, $a_n^+ \geq 0$, $a_n^- \geq 0$. Wegen der Konvergenz von $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ und $a_n = a_n^+ - a_n^-$ können die beiden Reihen $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$

und $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$ nur beide konvergieren oder beide divergieren. Wären beide Reihen konvergent, dann müßte wegen $|a_n| = a_n^+ + a_n^-$ die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergieren. Es sei $(p_n) \subset (a_n)$ die Teilfolge der nichtnegativen Reihenglieder und $(q_n) \subset (a_n)$ die Teilfolge der Absolutbeträge der negativen Reihenglieder, genommen jeweils in der Reihenfolge, in der sie in (a_n) auftreten. Beide Reihen $\sum_{n=1}^{\infty} p_n$ und $\sum_{n=1}^{\infty} q_n$ divergieren ebenfalls nach ∞ und es gilt $\lim_{n\to\infty} p_n = \lim_{n\to\infty} q_n = 0$. Wir setzen $k_0 = m_0 = 0$ und bestimmen im ersten Schritt die kleinsten natürlichen Zahlen m_1, k_1 mit der Eigenschaft

$$S_{m_1} = \sum_{j=1}^{m_1} p_j > \xi \quad \text{ und } S_{m_1+k_1} = \sum_{j=1}^{m_1} p_j - \sum_{j=1}^{k_1} q_j < \xi.$$

Wegen der Divergenz von $\sum p_n$ und $\sum q_n$ gibt es im zweiten Schritt kleinste Indizes $m_2 > m_1$, $k_2 > k_1$ mit

$$S_{m_2+k_1} = S_{m_1+k_1} + \sum_{j=m_1+1}^{m_2} p_j = \sum_{j=1}^{m_1} p_j - \sum_{j=1}^{k_1} q_j + \sum_{j=m_1+1}^{m_2} p_j > \xi,$$

$$S_{m_2+k_2} = S_{m_2+k_1} - \sum_{j=k_1+1}^{k_2} q_j = \sum_{j=1}^{m_1} p_j - \sum_{j=1}^{k_1} q_j + \sum_{j=m_1+1}^{m_2} p_j - \sum_{j=k_1+1}^{k_2} q_j < \xi.$$

Es ist klar, daß durch dieses Verfahren eine Umordnung $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$ von $\sum a_n$ bestimmt wird. Induktiv erhält man nämlich auf diese Weise strikt monoton wachsende Folgen minimaler Indizes $(m_n)_{n\geq 1}, (k_n)_{n\geq 1}$ sodaß im n-ten Schritt gilt:

$$S_{m_n+k_{n-1}} = S_{m_{n-1}+k_{n-1}} + \sum_{j=m_{n-1}+1}^{m_n} p_j > \xi, \tag{1}$$

$$S_{m_n+k_n} = S_{m_n+k_{n-1}} - \sum_{j=k_{n-1}+1}^{k_n} q_j < \xi \tag{2}$$

$$S_{m_n-1+k_{n-1}} < \xi, \qquad S_{m_n+k_n-1} > \xi.$$

Somit folgt für alle $n \in \mathbb{N}$:

$$|S_{m_n+k_{n-1}} - \xi| = S_{m_n+k_{n-1}} - \xi < S_{m_n+k_{n-1}} - S_{m_n-1+k_{n-1}} = p_{m_n}, \tag{3}$$

$$|S_{m_n+k_n} - \xi| = \xi - S_{m_n+k_n} < S_{m_n+k_n-1} - S_{m_n+k_n} = q_{k_n}. \tag{4}$$

Aus den Abschätzungen

$$|S_{m_n+k_{n-1}} - \xi| \leq p_{m_n}$$
$$|S_{m_n+k_n} - \xi| \leq q_{k_n}$$

folgt unmittelbar $\lim_{n\to\infty} S_{m_n+k_{n-1}} = \xi$ und $\lim_{n\to\infty} S_{m_n+k_n} = \xi$. Wir betrachten nun Partialsummen S_ℓ mit einem beliebigen Index $\ell \in \mathbb{N}$. Es gibt eindeutig bestimmte Indizes m_n, k_n mit $n \in \mathbb{N}_0$, sodaß eine der beiden folgen Ungleichungen zutrifft:

$$m_{n-1} + k_{n-1} \leq \ell < m_n + k_{n-1}$$

oder

$$m_n + k_{n-1} \leq \ell < m_n + k_n.$$

Für $m_{n-1} + k_{n-1} \leq \ell < m_n + k_{n-1}$ folgt wegen (1) $S_{m_{n-1}+k_{n-1}} \leq S_\ell < \xi$ und aus (4)

$$-q_{k_{n-1}} < S_{m_{n-1}+k_{n-1}} - \xi \leq S_\ell - \xi < 0.$$

Ein analoges Argument ergibt für $m_n + k_{n-1} \leq \ell < m_n + k_n$

$$0 < S_\ell - \xi \leq S_{m_n+k_{n-1}} - \xi \leq p_{m_n},$$

also insgesamt

$$|S_\ell - \xi| \leq \max\{p_{m_n}, q_{k_{n-1}}\}.$$

Da (p_n), (q_n) Nullfolgen sind, folgt die Behauptung. □

Korollar 10.12. Eine komplexe Reihe $\sum a_n$ ist genau dann absolut konvergent, wenn jede ihrer Umordnungen gegen denselben Grenzwert konvergiert.

Beweis. „$\Rightarrow$" Satz 10.9.
„$\Leftarrow$" Wir zeigen: Ist die Reihe $\sum a_n$ nicht absolut konvergent, dann gibt es eine divergente Umordnung. Es sei also $\sum |a_n| = \infty$. Falls $\sum_{n=1}^\infty a_n$ divergiert, ist nichts zu beweisen. Wir nehmen also an, $\sum_{n=1}^\infty a_n$ sei (bedingt) konvergent. Wir setzen $a_n = \alpha_n + i\beta_n$, $\alpha_n, \beta_n \in \mathbb{R}$. Wegen $|a_n| \leq |\alpha_n| + |\beta_n|$ muß mindestens eine der beiden Reihen $\sum_{n=1}^\infty |\alpha_n|$ oder $\sum_{n=1}^\infty |\beta_n|$ divergieren. Es gelte etwa $\sum_{n=1}^\infty |\beta_n| = \infty$, dann ist $\sum_{n=1}^\infty \beta_n$ bedingt konvergent. Nach Bemerkung 10.11 gibt es eine divergente Umordnung $\sum_{n=1}^\infty \beta_{\sigma(n)}$. Dann kann aber auch die Reihe $\sum_{n=1}^\infty a_{\sigma(n)} = \sum_{n=1}^\infty \alpha_{\sigma(n)} + i\sum_{n=1}^\infty \beta_{\sigma(n)}$ nicht konvergent sein. □

Wir beenden diesen Abschnitt mit zwei weiteren Konvergenzkriterien. Dazu benötigen wir folgendes Hilfsmittel:

Lemma 10.13 (Abelsche partielle Summation). *Es seien $(a_n)_{n\geq 1}$, $(b_n)_{n\geq 1}$ komplexe Folgen und $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$, $n \in \mathbb{N}$. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt dann*

$$\sum_{k=1}^n a_k b_k = \sum_{k=1}^n S_k(b_k - b_{k+1}) + S_n b_{n+1}.$$

Beweis. Setzen wir $S_0 = 0$, so gilt $a_k = S_k - S_{k-1}$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und somit

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n a_k b_k &= \sum_{k=1}^n (S_k - S_{k-1}) b_k = \sum_{k=1}^n S_k b_k - \sum_{k=1}^n S_{k-1} b_k \\ &= \sum_{k=1}^n S_k b_k - \sum_{k=0}^{n-1} S_k b_{k+1} = \sum_{k=1}^{n-1} S_k(b_k - b_{k+1}) + S_n b_n\end{aligned}$$

□

Eine unmittelbare Folgerung ist

Lemma 10.14. *Es seien $(a_n)_{n\geq 1}$, $(b_n)_{n\geq 1}$ komplexe Folgen und $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$ für $n \in \mathbb{N}$. Konvergieren die Folge $(S_n b_{n+1})_{n\geq 1}$ und die Reihe $\sum_{n=1}^\infty S_n(b_n - b_{n+1})$, so ist auch die Reihe $\sum_{n=1}^\infty a_n b_n$ konvergent.*

Satz 10.15 (Abelsches Kriterium). *Ist die komplexe Reihe $\sum_{n=1}^\infty a_n$ konvergent und die reelle Folge $(b_n)_{n\geq 1}$ monoton und beschränkt, so konvergiert $\sum_{k=1}^\infty a_k b_k$.*

Beweis. Es gilt $\sum_{k=1}^n (b_k - b_{k+1}) = b_1 - b_{n+1}$. Somit ist die Reihe $\sum_{k=1}^\infty (b_k - b_{k+1})$ konvergent und zwar sogar absolut konvergent, da für alle $k \in \mathbb{N}$ wegen der Monotonie von (b_n) stets $b_k - b_{k+1} \geq 0$ oder stets $b_k - b_{k+1} \leq 0$ gilt. Wegen der Konvergenz von $\sum_{n=1}^\infty a_n$ ist die Folge $(S_n)_{n\geq 1}$, $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$ beschränkt, d.h. es gibt $M > 0$ sodaß $|S_n| \leq M$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Daraus folgt mit

$$|\sum_{k=1}^\infty S_k(b_k - b_{k+1})| \leq \sum_{k=1}^\infty |S_k||b_k - b_{k+1}| \leq M \sum_{k=1}^\infty |b_k - b_{k+1}|$$

die absolute Konvergenz von $\sum_{k=1}^\infty S_k(b_k - b_{k+1})$. Da auch $(S_n b_{n+1})_{n\geq 1}$ konvergiert, folgt die Konvergenz mit Lemma 10.14. □

Satz 10.16 (Dirichlet Kriterium). *Sind die Partialsummen der komplexen Reihe $\sum_{n=1}^\infty a_n$ beschränkt und strebt die reelle Folge $(b_n)_{n\geq 1}$ monoton nach Null, so konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^\infty a_n b_n$.*

Beweis. Analog zu Beweis von Satz 10.15. □

11. b-adische Entwicklung reeller Zahlen

In diesem Abschnitt soll die geläufige Darstellung reeller Zahlen begründet werden. Beispielsweise bedeutet

$$123.456 = 1 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^0 + 4 \cdot 10^{-1} + 5 \cdot 10^{-2} + 6 \cdot 10^{-3}.$$

Im alltäglichen Gebrauch wird als Basis der Zahlen 10 genommen, in der Informatik sind die Basen 2, 8, 16 nützlich. Allgemeiner betrachten wir daher **b-adische Entwicklungen** der Form

$$x = \pm r_n r_{n-1} \dots r_0 \cdot_b r_{-1} r_{-2} r_{-3} \dots$$

mit einer Basis $b \in \mathbb{N}$, $b \geq 2$ und Ziffern r_i, $0 \leq r_i \leq b-1$. Im Fall $b = 10$ spricht man von einer Dezimalentwicklung, $b = 2$ ergibt eine dyadische Entwicklung. Es genügt, positive reelle Zahlen zu betrachten.

Satz 11.1 (Divisionssatz). *Für alle n, $b \in \mathbb{N}$ gibt es eindeutig bestimmte Zahlen q, $r \in \mathbb{N}_0$ mit*

(1) $n = qb + r$,
(2) $0 \leq r < b$.

Beweis. Wähle $n,\ b \in \mathbb{N}$ beliebig und setze $q = [\frac{n}{b}]$, $\hat{r} = \frac{n}{b} - [\frac{n}{b}]$. Es folgt $n = bq + b\hat{r}$, weiters aus Satz II-6.10 $q \in \mathbb{N}_0$ und $q \leq \frac{n}{b} < q + 1$. Daraus folgt $0 \leq n - qb < b$. Somit haben q und $r = b\hat{r}$ die geforderten Eigenschaften. Wir zeigen nun die Eindeutigkeit von q und r. Angenommen es wäre auch $n = \tilde{q}b + \tilde{r}$, $0 \leq \tilde{r} < b$ und $\tilde{r} \neq r$. O.B.d.A. sei $\tilde{r} > r$. Es folgt $b(q - \tilde{q}) = \tilde{r} - r > 0$, somit muß $q > \tilde{q}$, also $q - \tilde{q} \in \mathbb{N}$ gelten. Wegen

$$\tilde{r} = n - b\tilde{q} = b(q - \tilde{q}) + r \geq b(q - \tilde{q}) \geq b$$

ergibt sich ein Widerspruch zu $\tilde{r} < b$. Somit gilt $\tilde{r} = r$ und folglich auch $\tilde{q} = q$. □

Satz 11.2. *Es sei $b \in \mathbb{N}$ und $b \geq 2$. Zu jeder natürlichen Zahl n gibt es genau ein $p \in \mathbb{N}_0$ und eindeutig bestimmte Zahlen r_i, $0 \leq i \leq p$, mit*

$$\begin{aligned} &0 \leq r_i < b, \quad r_i \in \mathbb{N}_0, \quad 0 \leq i \leq p, \\ &r_p \geq 1, \\ &n = \sum_{j=0}^{p} r_j b^j. \end{aligned}$$

Beweis. Wir zeigen zuerst die Eindeutigkeit der Entwicklung von n. Es sei also

$$n = \sum_{j=0}^{p} r_j b^j = \sum_{j=0}^{q} s_j b^j$$

und $p \neq q$, etwa $p < q$. Berücksichtigt man Lemma II-4.23 und die Eigenschaften von r_j, s_j erhält man

$$n = \sum_{j=0}^{p} r_j b^j \leq (b-1) \sum_{j=0}^{p} b^j = b^{p+1} - 1 < b^q \leq s_q b^q \leq \sum_{j=0}^{q} s_j b^j = n,$$

also $n < n$. Somit gilt $p = q$. Angenommen, es gäbe Indizes j mit $s_j \neq r_j$. Es sei j^* der größte dieser Indizes und es gelte o.B.d.A. $r_{j^*} < s_{j^*}$. Subtrahiert man die beiden Darstellungen für n, ergibt sich der Widerspruch

$$0 = \sum_{j=0}^{j^*} (r_j - s_j) b^j \leq (b-1) \sum_{j=0}^{j^*-1} b^j + (r_{j^*} - s_{j^*}) b^{j^*} \leq (b^{j^*} - 1) - b^{j^*} = -1.$$

Also gilt $r_j = s_j$, $j = 0, \ldots, p$.
Wir wenden uns nun der Existenz von p und r_i zu. Dazu setzen wir $q_{-1} = n$ und bestimmen rekursiv zwei Folgen $(q_j)_{j=1}^{\infty}$, $(r_j)_{j=1}^{\infty}$, indem wir auf q_{j-1} den Divisionssatz anwenden:

$$\begin{aligned} q_{j-1} &= r_j + bq_j, \quad j \in \mathbb{N}_0, \\ 0 &\leq r_j < b. \end{aligned} \tag{1}$$

Wegen $q_j \geq 0$, $j \in \mathbb{N}_0$, und $b > 1$ ergibt sich

$$q_{j-1} \geq bq_j > q_j,$$

falls $q_j > 0$. Die Folge (q_j) ist demnach streng monoton fallend, solange $q_j > 0$ zutrifft. Gibt es einen Index j^* mit $q_{j^*} = 0$, folgt $q_j = r_j = 0$ für $j > j^*$. Die Menge $\{q_j : j \in \mathbb{N}_0\} \subset \mathbb{N}_0$ ist nicht leer und besitzt daher ein minimales Element, welches nach der vorausgehenden Überlegung notwendigerweise gleich Null ist. Es sei $p \in \mathbb{N}_0$ der kleinste Index mit $q_p = 0$. Im Fall $p = 0$ folgt aus (1) die gewünschte Darstellung $n = q_{-1} = r_0$. Es sei nun $p > 0$. Setzt man $j = p$ in (1), erhält man $q_{p-1} = r_p$. Wegen der Minimalität von p ist somit $r_p \neq 0$. Induktiv ergibt sich weiters aus (1)

$$\begin{aligned} n &= r_0 + bq_0 = r_0 + b(r_1 + bq_1) = r_0 + br_1 + b^2 q_1 \\ &= \cdots = \sum_{i=0}^{j} r_i b^i + q_j b^{j+1}. \end{aligned}$$

Wegen $r_i = q_i = 0$ für $i \geq p$ folgt die Behauptung mit $j = p$. □

Wir wenden uns nun der b-adischen Entwicklung von $x \in [0, 1]$ zu.

Lemma 11.3. *Es sei $b \in \mathbb{N}$ und $b \geq 2$. Ferner sei $(x_j)_{j=1}^\infty \subset \mathbb{N}_0$, $0 \leq x_j < b$, $j \in \mathbb{N}$. Dann konvergiert die Reihe $\sum_{j=1}^\infty x_j b^{-j}$ gegen eine reelle Zahl $x \in [0, 1]$.*

Beweis. Die Behauptung folgt aus dem Vergleichskriterium Satz IV-8.3 und Satz IV-7.6

$$0 \leq \sum_{j=1}^\infty x_j b^{-j} \leq (b-1) \sum_{j=1}^\infty b^{-j} = (b-1)(\frac{b}{b-1} - 1) = 1.$$

□

Dieses Resultat zeigt, daß für $x \in [0, 1]$ eine b-adische Entwicklung nicht notwendigerweise nach endlich vielen Schritten abbrechen muß. Eine b-adische Entwicklung von $x \in [0, 1]$ ist auch nicht immer eindeutig. Man betrachte beispielsweise für $b = 10$ und $x = \frac{1}{2}$ die Entwicklung

$$\frac{1}{2} = \begin{cases} 0.5, \\ 0.49999\cdots = 4 \cdot 10^{-1} + 9 \sum_{j=2}^\infty 10^{-j}. \end{cases}$$

Wir klären diesen Sachverhalt im folgenden Satz.

Satz 11.4. *Es sei $b \in \mathbb{N}$, $b \geq 2$ und $x \in \mathbb{R}$ mit $0 < x \leq 1$.*

(1) *Dann gibt es eine Folge $(x_j)_{j=1}^\infty \subset \mathbb{N}_0$, $0 \leq x_j < b$, $j \in \mathbb{N}$, $x_j \neq 0$ für unendlich viele j, mit*
$$x = \sum_{j=1}^\infty x_j b^{-j}.$$
(2) *Besitzt x eine weitere b-adische Entwicklung $x = \sum_{j=1}^\infty y_j b^{-j}$, $x_j \neq y_j$ für mindestens einen Index j, dann gibt es einen Index j^* derart, daß*
   (a) *$y_j = x_j$ für $1 \leq j < j^*$ (entfällt für $j^* = 1$)*
   (b) *$y_{j^*} = x_{j^*} + 1$,*

(c) $x_j = b-1$, $y_j = 0$ *für* $j > j^*$.

(3) *Es existieren genau dann zwei b-adischen Entwicklungen, wenn es natürliche Zahlen a, j^* gibt mit $a < b^{j^*}$ und $x = ab^{-j^*}$.*

Beweis. (1) Wir legen $x_1 \in \mathbb{N}_0$ durch die Bedingung

$$x_1 < bx \leq x_1 + 1 \tag{1}$$

fest. Sind $x_1, \ldots, x_j$ bereits festgelegt, bestimmt man $x_{j+1} \in \mathbb{N}_0$ durch

$$x_{j+1} < b^{j+1}(x - \sum_{k=1}^{j} x_k b^{-k}) \leq x_{j+1} + 1. \tag{2}$$

Es folgt

$$0 < x - \sum_{k=1}^{j} x_k b^{-k} \leq b^{-j-1}(x_{j+1}+1) \leq b^{-j}, \tag{3}$$

somit existiert der Grenzwert für $j \to \infty$ und es gilt $x = \sum_{j=1}^{\infty} x_j b^{-j}$. Wegen $x \in (0,1]$ folgt aus (1) $x_1 < b$. Kombiniert man (2) und (3) erhält man $x_j < b$ für $j \geq 2$. Wegen der strikten Ungleichung in (3) kann es keinen Index J geben mit $x_j = 0$ für $j > J$, also gilt $x_j \neq 0$ für unendlich viele j.

(2) Es sei nun $x = \sum_{j=1}^{\infty} y_j b^{-j}$ eine weitere b-adische Entwicklung von x und es sei $x_j \neq y_j$ für mindestens einen Index j. Es sei j^* der kleinste Index mit $x_{j^*} \neq y_{j^*}$, also gilt (2a) und

$$\sum_{j=j^*}^{\infty} x_j b^{-j} = \sum_{j=j^*}^{\infty} y_j b^{-j}. \tag{4}$$

Nach (1) gibt es einen Index $j > j^*$ mit $x_j \neq 0$, somit folgt

$$x_{j^*} b^{-j^*} < \sum_{j=j^*}^{\infty} x_j b^{-j}. \tag{5}$$

Kombiniert man die Abschätzung

$$\sum_{j=j^*}^{\infty} y_j b^{-j} \leq y_{j^*} b^{-j^*} + (b-1) \sum_{j=j^*+1}^{\infty} b^{-j} = y_{j^*} b^{-j^*} + b^{-j^*}$$

mit (4) und (5), ergibt sich

$$x_{j^*} b^{-j^*} < \sum_{j=j^*}^{\infty} x_j b^{-j} = \sum_{j=j^*}^{\infty} y_j b^{-j} \leq (y_{j^*}+1) b^{-j^*},$$

also $x_{j^*} < y_{j^*} + 1$ und wegen $x_{j^*} \neq y_{j^*}$ weiter

$$x_{j^*} < y_{j^*}.$$

Mit Hilfe dieser Ungleichung erhält man

$$\begin{aligned} y_{j^*}b^{-j^*} &\leq \sum_{j=j^*}^{\infty} y_j b^{-j} = \sum_{j=j^*}^{\infty} x_j b^{-j} \\ &\leq x_{j^*}b^{-j^*} + (b-1)\sum_{j=j^*+1}^{\infty} b^{-j} = (x_{j^*}+1)b^{-j^*} \leq y_{j^*}b^{-j^*}. \end{aligned}$$

In dieser Abschätzung muß also an jeder Stelle Gleichheit herrschen. Somit folgt

$$\begin{aligned} & y_{j^*} = x_{j^*} + 1, \\ & y^{j^*}b^{-j^*} = \sum_{j=j^*}^{\infty} y_j b^{-j}, && \text{somit } y_j = 0 \text{ für } j > j^*, \\ & \sum_{j=j^*}^{\infty} x_j b^{-j} = x_{j^*}b^{-j^*} + (b-1)\sum_{j=j^*+1}^{\infty} b^{-j}, && \text{somit } x_j = b-1 \text{ für } j > j^*. \end{aligned}$$

(3) Wenn x eine weitere b-adische Entwicklung hat, wurde soeben gezeigt, daß

$$x = \sum_{j=1}^{j^*} y_j b^{-j}, \quad \text{also} \quad b^{j^*}x = \sum_{j=1}^{j^*} y_j b^{j^*-j} = a \in \mathbb{N}$$

gilt (man verifiziere $a < b^{j^*}$). Es sei nun umgekehrt $x = ab^{-j^*}$, $a < b^{j^*}$, a, $j^* \in \mathbb{N}$. Es sei $a = \sum_{k=0}^{j^*-1} r_k b^k$ die b-adische Entwicklung von a nach Satz 11.2. Dann hat x die endliche Entwicklung $\sum_{k=0}^{j^*-1} r_k b^{k-j^*}$, aber auch die unendliche Entwicklung

$$\sum_{k=1}^{j^*-1} r_k b^{k-j^*} + (r_0+1)b^{-j^*} - (b-1)\sum_{k=0}^{\infty} b^{-k-j^*}.$$

$\square$

Bemerkung 11.5.

1) Die b-adische Entwicklung von $x \in (0,1]$ mit unendlich vielen von Null verschiedenen Ziffern ist eindeutig. Es gibt höchstens eine weitere b-adische Entwicklung.
2)Die b-adische Entwicklung einer irrationalen Zahl hat stets unendlich viele von Null verschiedene Ziffern.

12. Potenzreihen

Definition 12.1. *Es sei $(a_n)_{n\geq 0} \subset \mathbb{C}$ und $z_0 \in \mathbb{C}$. Die komplexe Reihe*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n, \qquad z \in \mathbb{C},$$

heißt ***Potenzreihe*** *mit Entwicklungszentrum z_0. Man nennt a_n, $n \in \mathbb{N}_0$, den n-ten* ***Koeffizienten*** *der Reihe.*

Je nach Wahl von $z \in \mathbb{C}$ kann eine Potenzreihe entweder konvergieren oder divergieren. Trivialerweise konvergiert sie immer für $z = z_0$. Allerdings sind die Punkte, für welche eine Potenzreihe konvergiert, nicht regellos in der Gaußschen Zahlenebene verteilt. Der folgende Satz zeigt nämlich, daß es zu jeder Potenzreihe einen Kreis mit Mittelpunkt z_0 gibt, sodaß im Inneren dieses Kreises die Potenzreihe konvergiert und im Äußeren divergiert:

Satz 12.2. *Es sei* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ *eine Potenzreihe und* $\rho = \overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$. *Wir definieren* $R \in \bar{\mathbb{R}}^+$ *durch*

$$R = \begin{cases} \frac{1}{\rho} & \text{für } 0 < \rho < \infty, \\ \infty & \text{für } \rho = 0, \\ 0 & \text{für } \rho = \infty. \end{cases}$$

Die Potenzreihe konvergiert absolut für alle $z \in \mathbb{C}$ *mit* $|z - z_0| < R$ *und divergiert für alle* $z \in \mathbb{C}$ *mit* $|z - z_0| > R$.

Beweis. Nach dem Wurzelkriterium 10.2 konvergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ absolut, falls (vgl. Satz 4.10–(iv))

$$\overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n(z-z_0)^n|} = \overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \cdot |z - z_0| = \rho \cdot |z - z_0| < 1$$

und divergiert, falls $\rho|z - z_0| > 1$. Ist die Folge $(\sqrt[n]{|a_n|})$ unbeschränkt, d.h. $\rho = \infty$, kann somit die Potenzreihe für $z \in \mathbb{C}$ mit $|z - z_0| > 0$ nicht konvergieren, ist andererseits $\rho = 0$, so ist die Bedingung $\rho|z - z_0| < 1$ für alle $z \in \mathbb{C}$ erfüllt. Gilt $\rho \in (0, \infty)$, dann konvergiert die Reihe absolut für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z - z_0| < \frac{1}{\rho}$. □

Definition 12.3. *Es gelten die Bezeichnungen von Satz 12.2. Für* $R \in (0, \infty)$ *nennt man* $K(z_0, R) = \{z \in \mathbb{C} \colon |z - z_0| < R\}$ ***Konvergenzkreis*** *der Potenzreihe und* R *ihren* ***Konvergenzradius****. Sind sämtliche Koeffizienten der Potenzreihe reell und ist* $z_0 \in \mathbb{R}$, *so heißt* $K(z_0, R) \cap \mathbb{R} = (z_0 - R, z_0 + R)$ ***Konvergenzintervall*** *der (reellen) Potenzreihe.*

Jede Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ mit Konvergenzkreis $K(z_0, R)$ definiert durch $z \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ eine Abbildung $f : K(z_0, R) \to \mathbb{C}$, die eine Reihe außergewöhnlicher Eigenschaften aufweist. Wir werden diesen Aspekt von Potenzreihen später ausführlich untersuchen. Hier beschränken wir uns auf den Hinweis, daß die Potenzreihendarstellung einer Funktion f, falls sie existiert, eine Möglichkeit bietet, Funktionswerte von f innerhalb des Konvergenzkreises mit beliebiger Genauigkeit zu berechnen.

Es ist nicht immer notwendig, auf Satz 12.2 zur Berechnung des Konvergenzradius zurückzugreifen. Oft ist es einfacher, das Quotientenkriterium unmittelbar auf die Potenzreihe anzuwenden (man vergleiche in diesem Zusammenhang auch Satz 4.11).

Beispiel 12.4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n z^n}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} c_n$. Die Anwendung des Quotientenkriteriums ergibt

$$\frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{(n+1)^{n+1} z^{n+1} n!}{n^n z^n (n+1)!} = (1 + \frac{1}{n})^n z,$$

und mit Hilfe von Beispiel 3.4 folgt

$$\lim_{n\to\infty} |\frac{c_{n+1}}{c_n}| = e|z|.$$

Die Reihe konvergiert somit absolut für $e|z| < 1$, d.h. für $|z| < \frac{1}{e}$, und divergiert für $|z| > \frac{1}{e}$. Der Konvergenzradius ist also $R = \frac{1}{e}$.

Die folgenden Beispiele zeigen, daß das Konvergenzverhalten von Potenzreihen auf dem Rand des Konvergenzkreises sehr unterschiedlich sein kann.

Beispiel 12.5. 1) $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$, $R = 1$. Die Reihe divergiert in jedem Punkt mit $|z| = 1$, da die notwendige Konvergenzbedingung in Korollar 7.4 verletzt ist.
2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n(n+1)}$, $R = 1$. Die Reihe konvergiert (sogar absolut) in jedem Randpunkt von $K(0, 1)$, denn für $|z| = 1$ ist $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ eine konvergente Majorante.
3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$, $R = 1$. Von dieser Reihe kann man zeigen, daß sie in jedem Punkt mit $|z| = 1$ und $z \neq 1$ bedingt konvergiert. Für $z = -1$ erhält man die Leibniz Reihe.
4) $\sum_{n=1}^{\infty} n^n z^n$, $R = 0$.
5) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n$, $R = \infty$.

Satz 12.6 (Eulersche Zahl e und Exponentialreihe). i) $e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$
ii) *e ist irrational.*
iii) *Der Fehler der rationalen Approximation $S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$, $n \in \mathbb{N}$, ist beschränkt durch*

$$0 < e - S_n < \frac{1}{n!n}.$$

Beweis. i) Wir erinnern daran, daß e in Beispiel 3.4 durch

$$e = \lim_{n\to\infty} (1 + \frac{1}{n})^n = \lim_{n\to\infty} a_n$$

definiert wurde. Nach Beispiel 12.5-5 existiert $S = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$. Mit Hilfe des binomischen Lehrsatzes folgt für alle $n \geq 1$

$$\begin{aligned} a_n &= 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \Big(\prod_{i=0}^{k-1} (n-i) \Big) \frac{1}{n^k} = 1 + \sum_{k=1}^{n} \Big(\prod_{i=0}^{k-1} (1 - \frac{i}{n}) \Big) \frac{1}{k!} \\ &< 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} < S \end{aligned}$$

und daher auch

$$e = \lim_{n\to\infty} a_n \leq S. \tag{1}$$

Zu beliebigem $\varepsilon > 0$ wählt man $p \in \mathbb{N}$ so, daß

$$S - \varepsilon < S_p. \tag{2}$$

Für jedes $n > p$ folgt aus der Monotonie der Folge (a_n)

$$e > a_n = 1 + \sum_{k=1}^{n} \Big(\prod_{i=0}^{k-1}(1 - \frac{i}{n})\Big)\frac{1}{k!} > 1 + \sum_{k=1}^{p} \Big(\prod_{i=0}^{k-1}(1 - \frac{i}{n})\Big)\frac{1}{k!}.$$

Man beachte, daß auf der rechten Seite dieser Abschätzung eine feste Anzahl von Summanden steht. Man kann daher den Grenzübergang $n \to \infty$ durchführen und erhält

$$e \geq 1 + \sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k!} = S_p.$$

Zusammen mit (1) und (2) ergibt sich daher für jedes $\varepsilon > 0$

$$S - \varepsilon < S_p \leq e \leq S,$$

d.h. $S = e$.

iii) Der Approximationsfehler $\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k!}$ kann abgeschätzt werden durch

$$\begin{aligned}\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k!} &= \frac{1}{n!}\Big(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)} + \dots\Big)\\ &< \frac{1}{n!}\Big(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+1)^3} + \dots\Big) = \frac{1}{n!}\Big(\frac{1}{1 - \frac{1}{n+1}} - 1\Big) = \frac{1}{n!}\frac{1}{n}.\end{aligned}$$

Dies zeigt

$$0 < e - S_n < \frac{1}{n!n}$$

ii) Wäre e rational, d.h. $e = \frac{p}{q}$, mit $p, q \in \mathbb{N}$, dann müßte auch

$$0 < \frac{p}{q} - S_q < \frac{1}{q!q}$$

bzw.

$$0 < p(q-1)! - S_q q! < \frac{1}{q} \leq 1$$

gelten. Dann wäre $p(q-1)! - S_q q! = p(q-1)! - \sum_{k=0}^{q} \frac{q!}{k!}$ eine natürliche Zahl, welche in $(0, 1)$ liegen müßte. Dies ist ein Widerspruch zu Satz II-4.6. $\square$

Approximation der Eulerschen Zahl $e = 2,718281828459...$

n	$e_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$	$e - e_n$
2	2.50000000	0.21828182
4	2.70833333	0.00994849
6	2.71805555	0.00022627
8	2.71827876	0.00000305
10	2.71828180	0.00000002

n	$e_n = (1 + \frac{1}{n})^n$	$e - e_n$
20	2.653	0.064
40	2.685	0.033
60	2.695	0.022
80	2.701	0.016
100	2.704	0.013

Diese Ergebnisse veranschaulichen die rasche Konvergenz der Potenzreihe und die außerordentlich langsame Konvergenz der Folgenglieder $a_n = (1 + \frac{1}{n})^n$.

13. Multiplikation von Reihen

Ausgehend von zwei konvergenten Reihen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \alpha$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n = \beta$ kann man versuchen, in Analogie zum Produkt von zwei endlichen Summen eine Reihe bestehend aus allen möglichen Produkten $a_i b_k$ zu bilden, deren Summe gerade $\alpha\beta$ ist. Im Hinblick auf den Riemannschen Umordnungssatz 10.10 ist nicht von vorneherein klar, in welcher Weise die Produkte angeordnet werden sollen. Wir betrachten eine spezielle Reihenfolge, welche durch die Multiplikation von Potenzreihen motiviert ist:

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n &= (a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots)(b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \dots) \\ &= a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) z + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0) z^2 + \dots\end{aligned}$$

Definition 13.1. *Es seien $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ komplexe Reihen. Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ setzen wir $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$. Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ heißt* ***Cauchy-Produkt*** *von $\sum a_n$ und $\sum b_n$.*

Wir zeigen zuerst, daß das Cauchy-Produkt konvergenter Reihen nicht immer konvergiert.

Beispiel 13.2. Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n+1}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \dots$ ist konvergent nach Satz 9.1. Das Cauchyprodukt von $(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n+1}})^2$ hat die Glieder

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = (-1)^n \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{k+1}} \frac{1}{\sqrt{n-k+1}}, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Die Abschätzung

$$\begin{aligned}(n-k+1)(k+1) &= nk + n - k^2 + 1 \\ &= (\frac{n}{2} + 1)^2 - (\frac{n}{2} - k)^2 \le (\frac{n}{2} + 1)^2\end{aligned}$$

zusammen mit

$$|c_n| \ge \sum_{k=0}^{n} \frac{2}{n+2} = 2\frac{n+1}{n+2}$$

zeigt, daß die notwendige Konvergenzbedingung Korollar 7.4 verletzt ist. Wir bemerken, daß die Ausgangsreihe nicht absolut konvergiert.

Satz 13.3. *Es seien* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *und* $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ *komplexe konvergente Reihen mit den Grenzwerten* α *und* β *und* $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ *ihr Cauchy Produkt. Ist die Konvergenz etwa von* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *absolut, dann konvergiert auch* $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ *und zwar gegen* $\alpha\beta$.

Beweis. Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ sei

$$A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k, \quad B_n = \sum_{k=0}^{n} b_k, \quad C_n = \sum_{k=0}^{n} c_k, \quad \delta_n = B_n - \beta.$$

Wir formen C_n mittels $B_n = \delta_n + \beta$ folgendermaßen um

$$\begin{aligned} C_n &= \sum_{k=0}^{n} c_k = \sum_{k=0}^{n} \sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i} \\ &= \sum_{i=0}^{n} \sum_{k=i}^{n} a_i b_{k-i} = \sum_{i=0}^{n} a_i \sum_{j=0}^{n-i} b_j = \sum_{i=0}^{n} a_i B_{n-i} \\ &= \sum_{i=0}^{n} a_i \delta_{n-i} + \beta A_n. \end{aligned}$$

Wegen $\lim_{n\to\infty} \beta A_n = \alpha\beta$ genügt es, $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} a_i \delta_{n-i} = 0$ nachzuweisen. Da (δ_n) eine Nullfolge ist, kann man für jedes $\varepsilon > 0$ einen Index $N \in \mathbb{N}$ angeben, sodaß $|\delta_n| < \varepsilon$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq N$ gilt. Es folgt für $n \geq N$

$$\begin{aligned} |\sum_{i=0}^{n} a_i \delta_{n-i}| = |\sum_{j=0}^{n} a_{n-j} \delta_j| &\leq |\sum_{j=0}^{N} a_{n-j} \delta_j| + |\sum_{j=N+1}^{n} a_{n-j} \delta_j| \\ &\leq \sum_{j=0}^{N} |a_{n-j}||\delta_j| + \varepsilon \sum_{j=0}^{\infty} |a_j|. \end{aligned}$$

Da N ein fester Index ist, kann man den Grenzübergang $n \to \infty$ durchführen und erhält mit Satz 4.9

$$\begin{aligned} \overline{\lim_{n\to\infty}} |\sum_{i=0}^{n} a_i \delta_{n-i}| &\leq \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{N} |a_{n-i}||\delta_i| + \varepsilon \sum_{j=0}^{\infty} |a_j| \\ &= \varepsilon \sum_{j=0}^{\infty} |a_j|, \end{aligned}$$

d.h. $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} a_i \delta_{n-i} = 0$. □

Ohne Beweis teilen wir noch folgenden Satz von H. Abel mit.

Satz 13.4. *$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ seien komplexe konvergente Reihen, ferner sei ihr Cauchyprodukt $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ konvergent. Dann gilt $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$.*

14. Doppelreihen

Definition 14.1. *$(x_{nm})_{n,m\geq 1} \subset \mathbb{C}$ sei eine Doppelfolge.*

i) *$S_{nm} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} x_{ij}$, $n, m \in \mathbb{N}$ heißt **(n,m)-te Partialsumme**.*
   *Die Doppelfolge $(S_{nm})_{n,m\geq 1} \subset \mathbb{C}$ heißt **Doppelreihe**, $\sum_{n,m=1}^{\infty} x_{nm}$.*
ii) *Die Doppelreihe $\sum_{n,m=1}^{\infty} x_{nm}$ ist* **konvergent** *gegen $s \underset{Def}{\Leftrightarrow} s = \lim_{n,m\to\infty} S_{nm}$.*
   Man schreibt auch $s = \sum_{n,m=1}^{\infty} x_{nm}$.
iii) *Die Doppelreihe $\sum_{n,m=1}^{\infty} x_{nm}$ ist* **absolut konvergent** *$\underset{Def}{\Leftrightarrow} \sum_{n,m=1}^{\infty} |x_{nm}|$ ist konvergent.*

Die Doppelreihe $\sum_{n,m=1}^{\infty} x_{nm}$ konvergiert somit nach s genau dann, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ ein Index $N(\varepsilon)$ gefunden werden kann, daß $|S_{nm} - s| < \varepsilon$ für alle $n, m \geq N(\varepsilon)$ gilt. Die Resultate über Doppelfolgen übertragen sich somit sinngemäß auf Doppelreihen. In diesem Abschnitt wollen wir uns allerdings auf absolut konvergente Doppelreihen beschränken.

Lemma 14.2. *Eine Doppelreihe $\sum_{i,j=1}^{\infty} z_{ij}$ ist absolut konvergent genau dann, wenn $\{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} |z_{ij}| \colon n, m \in \mathbb{N}\}$ beschränkt ist.*

Beweis. „$\Leftarrow$“ Es sei $x = \sup\{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} |z_{ij}| \colon n, m \in \mathbb{N}\} < \infty$. Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es $(n_\varepsilon, m_\varepsilon) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ mit

$$x - \varepsilon < \sum_{i=1}^{n_\varepsilon} \sum_{j=1}^{m_\varepsilon} |z_{ij}|.$$

Setzt man $N(\varepsilon) = \max\{n_\varepsilon, m_\varepsilon\}$ folgt für alle $n, m \geq N(\varepsilon)$

$$|x - \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} |z_{ij}|| = x - \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} |z_{ij}| \leq x - \sum_{i=1}^{n_\varepsilon} \sum_{j=1}^{m_\varepsilon} |z_{ij}| < \varepsilon,$$

d.h. $\sum_{i,j=1}^{\infty} z_{ij}$ ist absolut konvergent. Die Umkehrung ist offensichtlich.

□

Ähnlich wie bei Doppelfolgen, kann man zu einer Doppelreihe $\sum_{n,m=1}^{\infty} z_{nm}$ auch die iterierten Reihen $\sum_{n=1}^{\infty}(\sum_{m=1}^{\infty} z_{nm}) = \lim_{n\to\infty}(\lim_{m\to\infty} S_{nm})$ (Reihe der Zeilensummen) bzw. $\sum_{m=1}^{\infty}(\sum_{n=1}^{\infty} z_{nm})$ (Reihe der Spaltensummen) bilden. Da letztere oft wesentlich einfacher zu berechnen sind, ergibt sich die Frage nach ihrer Beziehung zur Doppelreihe.

Satz 14.3. *Es sei* $(a_{nm})_{n,m\geq 1} \subset \mathbb{R}^+$. *Konvergiert eine der beiden iterierten Reihen* $\sum_{i=1}^{\infty}(\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij})$ *bzw.* $\sum_{j=1}^{\infty}(\sum_{i=1}^{\infty} a_{ij})$, *dann sind sowohl die andere iterierte Reihe, als auch die Doppelreihe* $\sum_{i,j=1}^{\infty} a_{ij}$ *konvergent und es gilt*

$$\sum_{i=1}^{\infty}(\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}) = \sum_{j=1}^{\infty}(\sum_{i=1}^{\infty} a_{ij}) = \sum_{i,j=1}^{\infty} a_{ij}.$$

Beweis. Es sei etwa die iterierte Reihe $\sum_{i=1}^{\infty}(\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij})$ konvergent, d.h. es existiert $S = \lim_{n\to\infty}(\lim_{m\to\infty} S_{nm})$ mit $S_{nm} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{ij}$. Für alle $n, m \in \mathbb{N}$ gilt $S_{nm} \leq \lim_{k\to\infty} S_{nk} \leq S$. S ist daher eine obere Schranke für $A = \{S_{nm} \colon n, m \in \mathbb{N}\}$. Nach Lemma 14.2 konvergiert daher die Doppelreihe $\sum_{i,j=1}^{\infty} a_{ij}$ gegen $\sup A$. Aus der Ungleichung $S_{nm} \leq \sup A$ folgt aber auch die Existenz von $\lim_{n\to\infty} S_{nm}$ (Monotoniekriterium) für alle $m \in \mathbb{N}$. Die Behauptung folgt nun aus Korollar 6.6 □

Satz 14.4 (Doppelreihensatz). *Es sei* $(a_{nm})_{n,m\geq 1} \subset \mathbb{C}$. *Konvergiert eine der beiden iterierten Reihen* $\sum_{i=1}^{\infty}(\sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}|)$ *bzw.* $\sum_{j=1}^{\infty}(\sum_{i=1}^{\infty} |a_{ij}|)$, *dann sind sowohl die andere iterierte Reihe, als auch die Doppelreihe* $\sum_{i,j=1}^{\infty} a_{ij}$ *absolut konvergent und es gilt*

$$\sum_{i=1}^{\infty}(\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}) = \sum_{j=1}^{\infty}(\sum_{i=1}^{\infty} a_{ij}) = \sum_{i,j=1}^{\infty} a_{ij}$$

Beweis. Es sei z.B. die Reihe der Zeilensummen $\sum_{i=1}^{\infty}(\sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}|)$ konvergent. Nach Satz 14.3 ist die Doppelreihe $\sum_{i,j=1}^{\infty} a_{ij}$ absolut konvergent und es existiert auch $\sum_{j=1}^{\infty}(\sum_{i=1}^{\infty} |a_{ij}|)$. Somit sind auch für alle $j \in \mathbb{N}$ die Reihen $\sum_{i=1}^{\infty} a_{ij}$ absolut konvergent. Bezeichnet man mit S_{nm} die (n, m)-te Partialsumme der Doppelreihe, $S_{nm} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{ij}$, $n, m \in \mathbb{N}$, existieren der Doppellimes $\lim_{n,m\to\infty} S_{nm}$ und für alle $n, m \in \mathbb{N}$ auch die einfachen Limiten $\lim_{j\to\infty} S_{nj}$ und $\lim_{i\to\infty} S_{im}$. Die Behauptung folgt nun aus Korollar 6.6. □

Satz 14.5. *Es sei* $(a_{nm})_{n,m\geq 1} \subset \mathbb{C}$ *und die Doppelreihe* $\sum_{n,m=1}^{\infty} a_{nm}$ *sei absolut konvergent. Dann konvergieren auch die beiden iterierten Reihen absolut und es gilt*

$$\sum_{n,m=1}^{\infty} a_{nm} = \sum_{n=1}^{\infty}(\sum_{m=1}^{\infty} a_{nm}) = \sum_{m=1}^{\infty}(\sum_{n=1}^{\infty} a_{nm}).$$

Beweis. Nach Lemma 14.2 gibt es $k > 0$, sodaß

$$\forall n, m \in \mathbb{N} \colon \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} |a_{ij}| \leq k$$

gilt. Daraus folgt für jedes $n \in \mathbb{N}$ auch $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}| \leq k$ und schließlich $\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}| \leq k$. Die Behauptung ergibt sich nun aus Satz 14.4. □

Abschließend zeigen wir, daß die Summe einer absolut konvergenten Doppelreihe unabhängig ist von der Reihenfolge ihrer Glieder.

Definition 14.6. *Es sei* $\sum_{n,m=1}^{\infty} a_{nm}$ *eine komplexe Doppelreihe und* $\varphi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ *eine Bijektion. Dann heißt die Reihe* $\sum_{k=1}^{\infty} a_{\varphi(k)}$ ***Anordnung*** *der Doppelreihe (in eine einfache Reihe).*

Lemma 14.7. *Es sei* $\sum_{n,m=1}^{\infty} a_{nm}$ *eine konvergente reelle Doppelreihe mit nichtnegativen Gliedern und* $\varphi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ *eine Bijektion. Dann gilt*

$$\sum_{n,m=1}^{\infty} a_{nm} = \sum_{k=1}^{\infty} a_{\varphi(k)}.$$

Beweis. Es sei $\alpha = \sum_{n,m=1}^{\infty} a_{nm} = \sup\{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{ij}\colon n,m \in \mathbb{N}\}$ (vgl. Lemma 14.2). Zu $\varepsilon > 0$ gibt es somit $N_1(\varepsilon), N_2(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ mit

$$\alpha - \varepsilon < \sum_{i=1}^{N_1(\varepsilon)} \sum_{j=1}^{N_2(\varepsilon)} a_{ij} \leq \alpha.$$

Da φ surjektiv ist, existiert $K(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ mit

$$\mathcal{I}(N_1(\varepsilon)) \times \mathcal{I}(N_2(\varepsilon)) \subset \varphi\big(\mathcal{I}(K(\varepsilon))\big).$$

(Zur Erinnerung: $\mathcal{I}(n) = \{K \in \mathbb{N}\colon 1 \leq K \leq n\}$). Wegen $a_{nm} \geq 0$, $n,m \in \mathbb{N}$, ergibt sich

$$\sum_{k=1}^{K(\varepsilon)} a_{\varphi(k)} \geq \sum_{i=1}^{N_1(\varepsilon)} \sum_{j=1}^{N_2(\varepsilon)} a_{ij}.$$

Für alle $k \geq K(\varepsilon)$ gilt daher auch

$$\alpha - \varepsilon < \sum_{i=1}^{N_1(\varepsilon)} \sum_{j=1}^{N_2(\varepsilon)} a_{ij} \leq \sum_{\ell=1}^{K(\varepsilon)} a_{\varphi(\ell)} \leq \sum_{\ell=1}^{k} a_{\varphi(\ell)} \leq \alpha.$$

□

Satz 14.8. *Es sei* $\sum_{n,m=1}^{\infty} a_{nm}$ *eine komplexe, absolut konvergente Doppelreihe und* $\varphi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ *eine Bijektion. Dann gilt*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{\varphi(k)} = \sum_{n,m=1}^{\infty} a_{nm}.$$

Beweis. Nach 14.7 ist die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_{\varphi(k)}$ absolut konvergent. Es ist somit nur die Gleichheit der Limiten zu zeigen. Es sei $\alpha = \sum_{n,m=1}^{\infty} a_{nm}$ und $s = \sum_{k=1}^{\infty} a_{\varphi(k)}$. Zu $\varepsilon > 0$ existieren somit Indizes $N(\varepsilon)$ und $K(\varepsilon)$ mit

$$\forall n,m \in \mathbb{N}\colon n \geq N(\varepsilon) \wedge m \geq N(\varepsilon) \Rightarrow \Big|\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{ij} - \alpha\Big| < \frac{\varepsilon}{3}$$

und

$$\Big|\sum_{\ell=1}^{K(\varepsilon)} a_{\varphi(\ell)} - s\Big| < \frac{\varepsilon}{3}, \qquad \sum_{\ell=K(\varepsilon)+1}^{\infty} |a_{\varphi(\ell)}| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Wir wählen nun $N_1(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ so, daß $N_1(\varepsilon) \geq N(\varepsilon)$ und

$$\varphi(\mathfrak{I}(K(\varepsilon)) \subset \mathfrak{I}(N_1(\varepsilon)) \times \mathfrak{I}(N_1(\varepsilon)).$$

Jeder Term der Summe $\sum_{\ell=1}^{K(\varepsilon)} a_{\varphi(\ell)}$ kommt dann auch als Summand in $\sum_{i=1}^{N_1(\varepsilon)} \sum_{j=1}^{N_1(\varepsilon)} a_{ij}$ vor. Somit gilt

$$\Big|\sum_{i=1}^{N_1(\varepsilon)} \sum_{j=1}^{N_1(\varepsilon)} a_{ij} - \sum_{\ell=1}^{K(\varepsilon)} a_{\varphi(\ell)}\Big| \leq \sum_{\ell=K(\varepsilon)+1}^{\infty} |a_{\varphi(\ell)}| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Daraus folgt schließlich

$$\begin{aligned} |s-\alpha| \leq & \Big|s - \sum_{\ell=1}^{K(\varepsilon)} a_{\varphi(\ell)}\Big| + \Big|\sum_{\ell=1}^{K(\varepsilon)} a_{\varphi(\ell)} - \sum_{i=1}^{N_1(\varepsilon)} \sum_{j=1}^{N_1(\varepsilon)} a_{ij}\Big| \\ & + \Big|\sum_{i=1}^{N_1(\varepsilon)} \sum_{j=1}^{N_1(\varepsilon)} a_{ij} - \alpha\Big| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon, \end{aligned}$$

d.h. $s = \alpha$. □

In der Sprechweise der Definition 14.6 bedeutet der vorige Satz, daß man eine absolut konvergente Doppelreihe auf beliebige Weise in eine einfache Reihe anordnen kann und daß diese Reihe gegen die Summe der Doppelreihe konvergiert. Ohne Beweis teilen wir noch folgenden Satz mit:

Satz 14.9. *Es sei $\sum_{k=1}^{\infty} a_{\varphi(k)}$ eine beliebige Anordnung (in eine einfache Reihe) einer Doppelreihe $\sum_{i,j=1}^{\infty} a_{ij}$. Ist die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_{\varphi(k)}$ absolut konvergent, dann ist auch die Doppelreihe $\sum_{i,j=1}^{\infty} a_{ij}$ absolut konvergent und es gilt*

$$\sum_{i,j=1}^{\infty} a_{ij} = \sum_{k=1}^{\infty} a_{\varphi(k)}.$$

KAPITEL v

Reelle Funktionen

1. Funktionenräume

Wir zeigen in diesem einleitenden Abschnitt, daß man auf der Menge aller Funktionen mit einem *gemeinsamen* Definitionsbereich D natürliche algebraische Verknüpfungen definieren kann, sodaß ein Vektorraum von Funktionen entsteht. Wir erinnern vorerst an die relevanten Begriffe aus der Linearen Algebra:

Definition 1.1. *Es sei $\mathbb{K}(+,\cdot)$ ein Körper, $(V,\oplus)$ eine (additive) Abelsche Gruppe und $\odot\colon \mathbb{K}\times V \to V$ eine Abbildung, welche Körper- und Gruppenelemente verknüpft. $(V,\mathbb{K}(+,\cdot),\oplus,\odot)$ (oft auch kurz $(V,\mathbb{K})$ oder V) heißt* ***Vektorraum*** *über $\mathbb{K}$ (linearer Raum über $\mathbb{K}$), wenn die algebraischen Operationen $+,\cdot,\oplus,\odot$ folgenden Axiomen genügen:*

$$\left.\begin{array}{lll}(\mathcal{V}1) & \forall\alpha\in\mathbb{K}\,\forall x,y\in V\colon & \alpha\odot(x\oplus y)=\alpha\odot x\oplus\alpha\odot y\\ (\mathcal{V}2) & \forall\alpha,\beta\in\mathbb{K}\,\forall x\in V\colon & (\alpha+\beta)\odot x=\alpha\odot x\oplus\beta\odot x\end{array}\right\}\textit{Distributivgesetze}$$

$$\begin{array}{lll}(\mathcal{V}3) & \forall\alpha,\beta\in\mathbb{K}\,\forall x\in V\colon & \alpha\odot(\beta\odot x)=(\alpha\cdot\beta)\odot x\\ (\mathcal{V}4) & \forall x\in V\colon & 1\odot x=x\end{array}$$

(Das Symbol 1 bezeichnet das multiplikative Neutralelement in $\mathbb{K}$). Die Elemente in V heißen ***Vektoren****, die Körperelemente nennt man* ***Skalare****.*

Es ist wichtig, die unterschiedliche Bedeutung der verschiedenen Verknüpfungen zu verstehen. Im folgenden werden wir jedoch auf die symbolische Unterscheidung von $+$ und $\oplus$ bzw. $\cdot$ und $\odot$ verzichten.
Beispiele für Vektorräume sind $(\mathbb{R},\mathbb{R})$, d.h. $V=\mathbb{K}=\mathbb{R}$, $(\mathbb{C},\mathbb{C})$, $(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$, $(\mathbb{C}^n,\mathbb{C})$. Der Einfachheit halber werden wir diese Vektorräume mit $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{C}^n$ bezeichnen.
Will man nachweisen, daß eine Teilmenge U eines Vektorraumes $(V,\mathbb{K})$ selbst einen Vektorraum bildet, ist es nicht nötig, die Axiome $(\mathcal{V}1)$ - $(\mathcal{V}4)$ für $(U,\mathbb{K})$ nachzurechnen. Einfacher ist es, sich auf folgenden Satz aus der Linearen Algebra zu berufen:

Satz 1.2. *Es sei $(V,\mathbb{K})$ ein Vektorraum und $U\subset V$. U ist ein Vektorraum über $\mathbb{K}$ genau dann, wenn*

i) $\forall v,w\in U\colon v+w\in U$
ii) $\forall\lambda\in\mathbb{K}\,\forall v\in U\colon \lambda v\in U$.

Man nennt $(U,\mathbb{K})$ einen ***Unterraum*** *(Teilraum) von $(V,\mathbb{K})$.*

Die Bedingung i) verlangt, daß U *abgeschlossen* ist gegenüber der Addition von Vektoren aus U und ii) bedeutet die Abgeschlossenheit von U bezüglich der Multiplikation mit Skalaren aus $\mathbb{K}$.

DEFINITION 1.3. *i) Es sei $D \neq \emptyset$ eine beliebige Menge und $(V, \mathbb{K})$ ein Vektorraum über dem Körper $\mathbb{K}$.*

$$\mathcal{F}(D, V) := \{f \colon f \text{ ist eine Abbildung von } D \text{ nach } V\}.$$

Für $D \subset \mathbb{R}$ und $V = \mathbb{R}$ nennt man die Elemente von $\mathcal{F}(D, \mathbb{R})$ ***reelle Funktionen****.*
ii) Für $f, g \in \mathcal{F}(D, V)$, $\lambda \in \mathbb{K}$, definiert man die Abbildungen $f + g$ und λf durch

$$\begin{aligned}&\forall x \in D \colon (f+g)(x) = f(x) + g(x),\\ &\forall x \in D \colon (\lambda f)(x) = \lambda f(x).\end{aligned}$$

Man achte auf die unterschiedliche Bedeutung von $+$: Auf der linken Seite steht es für die Addition in $\mathcal{F}(D, V)$, auf der rechten bezeichnet es die Addition in V. Eine ähnliche Bemerkung gilt für die Multiplikation.
Wegen der punktweisen Definition der Addition von Funktionen gelten in $(\mathcal{F}(D, V), +)$ die Gruppenaxiome, da sie in $(V, +)$ erfüllt werden. Das Neutralelement ist die **Nullfunktion**

$$0 : \begin{cases} D \to V, \\ x \mapsto 0, \end{cases}$$

(man beachte die unterschiedliche Bedeutung des Zeichens 0!), das zu f additive inverse Element ist die Abbildung

$$-f : \begin{cases} D \to V, \\ x \mapsto -f(x). \end{cases}$$

Aus dem gleichen Grund gelten in $(\mathcal{F}(D, V), \mathbb{K}, +, \cdot)$ die Axiome des Vektorraumes: als Beispiel verifizieren wir $(\mathcal{V}1)$, d.h. $\alpha(f+g) = \alpha f + \alpha g$ für $\alpha \in \mathbb{K}$ und $f, g \in \mathcal{F}(D, V)$. Dazu betrachten wir für $x \in D$

$$\begin{aligned}(\alpha(f+g))(x) &= \alpha((f+g)(x)) = \alpha(f(x) + g(x))\\ &= \alpha f(x) + \alpha g(x) = (\alpha f)(x) + (\alpha g)(x)\\ &= (\alpha f + \alpha g)(x),\end{aligned}$$

Die dritte Gleichheit ergibt sich aus dem entsprechenden Distributivgesetz $(\mathcal{V}1)$ in $(V, \mathbb{K})$, die übrigen Gleichheiten basieren auf der Definition 1.3-ii). Somit ist $(\mathcal{V}1)$ auch in $\mathcal{F}(D, V)$ erfüllt. Auf ähnliche Weise verifiziert man die restlichen Axiome des Vektorraumes. Dies zeigt

SATZ 1.4. *Es sei $D \neq \emptyset$ eine Menge und $(V, \mathbb{K})$ ein Vektorraum über dem Körper $\mathbb{K}$. Dann ist auch $\mathcal{F}(D, V)$ ein Vektorraum über $\mathbb{K}$.*

Im folgenden wird die Voraussetzung $D \neq \emptyset$ nicht mehr explizit angeführt.
Meist interessiert nicht der gesamte Raum $\mathcal{F}(D,V)$, sondern es werden Funktionen mit einer bestimmten, interessierenden Eigenschaft zusammengefaßt. Wendet man Definition II-6.1 auf bild f an, ergeben sich folgende Begriffe:

Definition 1.5. i) *$f \in \mathcal{F}(D,\mathbb{R})$ heißt nach **oben (unten) beschränkt*** $\underset{Def}{\Leftrightarrow}$ $\exists M \in \mathbb{R}\, \forall x \in D\colon f(x) \leq M($ *bzw.* $f(x) \geq M)$

ii) $f \in \mathcal{F}(D,\mathbb{R})$ *heißt* **beschränkt** $\underset{Def}{\Leftrightarrow} \exists M > 0\, \forall x \in D\colon |f(x)| \leq M$

$\mathcal{B}(D,\mathbb{R}) := \{f \in \mathcal{F}(D,\mathbb{R})\colon f$ *ist beschränkt*$\}$.

iii) *Es sei* $f \in \mathcal{B}(D,\mathbb{R})$,

$$\sup f := \sup\{f(x)\colon x \in D\},$$
$$\inf f := \inf\{f(x)\colon x \in D\}$$

Zur Illustration von Satz 1.2 zeigen wir, daß $\mathcal{B}(D,\mathbb{R})$ ein Vektorraum ist, indem wir nachweisen, daß $\mathcal{B}(D,\mathbb{R})$ ein Unterraum von $\mathcal{F}(D,\mathbb{R})$ ist: Zu $f,g \in \mathcal{B}(D,\mathbb{R})$ gibt es Konstante $M_f > 0$, $M_g > 0$, sodaß für alle $x \in D$ sowohl $|f(x)| \leq M_f$ als auch $|g(x)| \leq M_g$ gilt. Setzt man $M = \max\{M_f, M_g\}$, erhält man für $x \in D$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ die Abschätzungen $|(f+g)(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq M_f + M_g \leq 2M$ und $|(\lambda f)(x)| = |\lambda||f(x)| \leq |\lambda| M_f$, d.h. $f+g \in \mathcal{B}(D,\mathbb{R})$ und $\lambda f \in \mathcal{B}(D,\mathbb{R})$. Da $\mathcal{B}(D,\mathbb{R})$ eine Teilmenge des Vektorraumes $\mathcal{F}(D,\mathbb{R})$ ist, folgt mit Satz 1.2, daß auch $\mathcal{B}(D,\mathbb{R})$ ein Vektorraum ist.

Lemma 1.6. *Es seien $f,g \in \mathcal{F}(D,\mathbb{R})$ nach oben (unten) beschränkt. Dann ist auch $f+g$ nach oben (unten) beschränkt und es gilt*

$$\sup(f+g) \leq \sup f + \sup g,$$
$$(\inf f + \inf g \leq \inf(f+g)).$$

Beweis. Da f und g nach oben beschränkt sind, existieren nach Satz II-6.5 $\sup f$ und $\sup g$ (beachte: bild $f \neq \emptyset$, bild $g \neq \emptyset$) und es gilt für alle $x \in D\colon f(x) \leq \sup f$ bzw. $g(x) \leq \sup g$. Somit folgt für $x \in D$ auch $(f+g)(x) = f(x)+g(x) \leq \sup f + \sup g$, d.h. $\sup f + \sup g$ ist eine obere Schranke für bild$(f+g)$, also erst recht $\sup(f+g) \leq \sup f + \sup g$. □

Das Beispiel $f(x) = x$, $g(x) = -x$, $x \in [0,1]$, zeigt, daß in Lemma 1.6 auch die strikte Ungleichung auftreten kann – im Gegensatz zum Supremum gewöhnlicher Zahlenmengen (vgl. Satz II-6.13). Dies liegt daran, daß auf der linken Seite der Ungleichung die Funktionen f und g notwendigerweise an derselben Stelle x ausgewertet werden, während auf der rechten Seite die Argumente von f und g unabhängig voneinander gewählt werden können.
Die mit der Beschränktheit zusammenhängenden Begriffe sind sinnvoll für beliebige Definitionsbereiche. Ist auch der Definitionsbereich der Funktionen geordnet, kann man Wachstumseigenschaften reeller Funktionen betrachten, die wir bei der Diskussion von Teilfolgen bereits kurz erwähnten:

DEFINITION 1.7. *Es sei $D \subset \mathbb{R}$ und $f \in \mathcal{F}(D, \mathbb{R})$.*

i) *f heißt* ***monoton wachsend (fallend)*** $\underset{Def}{\Leftrightarrow}$

$$\forall x, y \in D\colon x < y \Rightarrow f(x) \leq f(y) \quad (f(x) \geq f(y)).$$

ii) *f heißt* ***streng (strikt) monoton wachsend (fallend)*** $\underset{Def}{\Leftrightarrow}$

$$\forall x, y \in D\colon x < y \Rightarrow f(x) < f(y) \quad (f(x) > f(y)).$$

iii) *f heißt* ***(streng) monoton*** $\underset{Def}{\Leftrightarrow}$ *f ist (streng) monoton wachsend oder fallend.*

Strenge Monotonie einer Funktion ist deswegen von Bedeutung, da sie die Existenz der Umkehrfunktion sicherstellt.

SATZ 1.8. *Es sei $f \in \mathcal{F}(D, \mathbb{R})$, $D \subset \mathbb{R}$, streng monoton. Dann ist f injektiv, die Umkehrfunktion existiert und ist ebenfalls streng monoton im selben Sinn wie f.*

BEWEIS. O.B.d.A. sei f streng monoton wachsend (gegebenenfalls ersetze man f durch $-f$). Wegen der in $\mathbb{R}$ geltenden Trichotomie muß für $x, y \in D$, $x \neq y$, entweder $x < y$ oder $y < x$ gelten. Dies hat $f(x) < f(y)$ oder $f(y) < f(x)$, bzw. $f(x) \neq f(y)$ zur Folge. Somit ist f injektiv und es existiert $f^{-1}\colon \operatorname{bild} f \to D$.
Angenommen f^{-1} wäre nicht streng monoton wachsend, d.h.

$$\exists y_1, y_2 \in \operatorname{bild} f\colon y_1 < y_2 \wedge f^{-1}(y_1) \geq f^{-1}(y_2).$$

Da $f^{-1}(y_i) \in D$, $i = 1, 2$, folgt aus der strengen Monotonie von f die Beziehung $y_2 = f(f^{-1}(y_2)) \leq f(f^{-1}(y_1)) = y_1$ im Widerspruch zu $y_1 < y_2$. □

Allerdings ist die strenge Monotonie nur eine hinreichende Bedingung für Injektivität:

BEISPIEL 1.9. Wir definieren $f\colon [0, 1] \to [0, 1]$ durch

$$f(x) = \begin{cases} x & x \in \mathbb{Q} \cap [0, 1] \\ 1 - x & x \in [0, 1] \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Diese Funktion ist sogar bijektiv (zum Beweis betrachte man die Restriktionen $f|_{\mathbb{Q} \cap [0,1]}$ und $f|_{[0,1] \setminus \mathbb{Q}}$), aber nicht monoton: Für $\frac{1}{2} < \frac{\sqrt{2}}{2} < \frac{3}{4}$ folgt $f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2} > f(\frac{\sqrt{2}}{2})$, $\frac{3}{4} = f(\frac{3}{4}) > f(\frac{\sqrt{2}}{2})$.

Wir merken an, daß die Teilmenge der monotonen Funktionen in $\mathcal{F}(D, \mathbb{R})$, $D \subset \mathbb{R}$, keinen Teilraum von $\mathcal{F}(D, \mathbb{R})$ bilden. Ein wichtiges Beispiel monotoner Funktionen sind **affine Funktionen** $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$

$$x \mapsto f(x) = \alpha + \beta x, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Die Untersuchung der Eigenschaften von Funktionen kann oft erheblich vereinfacht werden, wenn die Funktionen gewisse Symmetrien aufweisen.

Definition 1.10. *D sei eine* **symmetrische** *Teilmenge von $\mathbb{K}$, d.h.*

$$\forall x \in \mathbb{K}\colon x \in D \Leftrightarrow -x \in D,$$

und $f \in \mathcal{F}(D, \mathbb{K})$.

i) *f heißt* ***gerade*** $\underset{Def}{\Leftrightarrow} \forall x \in D\colon f(-x) = f(x)$,

ii) *f heißt* ***ungerade*** $\underset{Def}{\Leftrightarrow} \forall x \in D\colon f(-x) = -f(x)$.

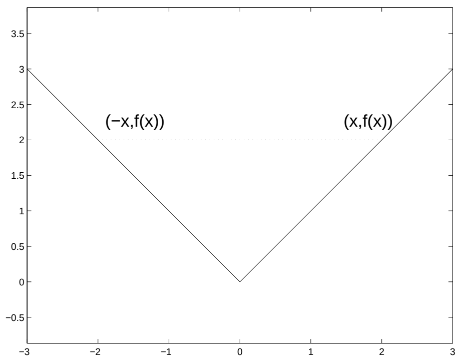
Eine ungerade Funktion nimmt an der Stelle $x = 0$ den Wert 0 an. Die Umkehrfunktion einer ungeraden Funktion (falls sie existiert) ist ebenfalls ungerade.

Definition 1.11. *Es sei $f \in \mathcal{F}(D, \mathbb{K})$. Die Teilmenge $G(f) = \{(x, f(x))\colon x \in D\})$ von $D \times \mathbb{R}$ heißt* ***Graph*** *von f.*

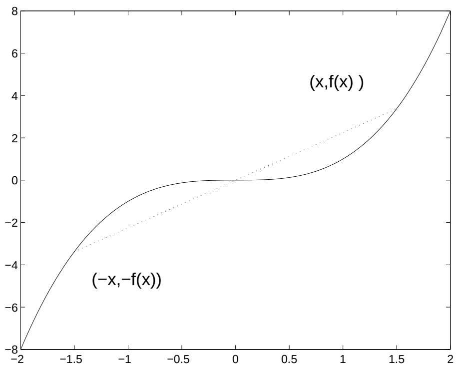
Reelle Funktionen kann man veranschaulichen, indem man ihren Graph $G(f)$ als Punktmenge in $\mathbb{R}^2$ skizziert. Der Graph einer geraden Funktion ist symmetrisch zur y–Achse, der Graph einer ungeraden Funktion ist symmetrisch zum Koordinatenursprung. Als Beispiel für eine gerade Funktion skizzieren wir den Graph der **Betragsfunktion**

$$|\cdot|\colon \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto |x|, \end{cases}$$

als Beispiel einer ungeraden Funktion skizzieren wir den Graph der Abbildung $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^3$.



f ist gerade

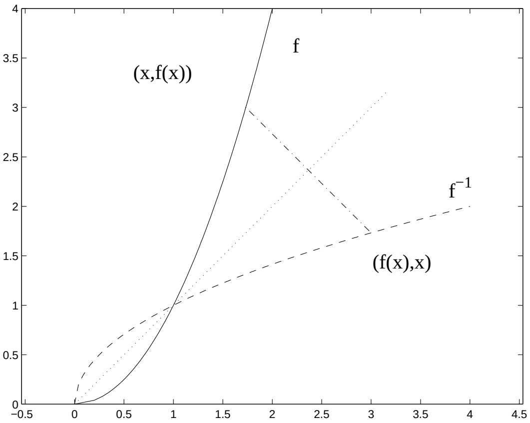


f ist ungerade

Besitzt f eine Umkehrfunktion, sind der Graph von f und der Graph von f^{-1} verknüpft durch

$$\begin{aligned} G(f^{-1}) &= \{(y, f^{-1}(y))\colon y \in \operatorname{bild} f\} = \{(f(x), x)\colon x \in \operatorname{def} f\} \\ &= \{(y, x)\colon (x, y) \in G(f)\}. \end{aligned}$$

Man erhält also den Graph von f^{-1} aus dem Graph von f durch Spiegelung an der ersten Mediane in $\mathbb{R}^2$.



Graph von f und f^{-1}

Eine weitere wichtige Funktionenklasse bilden die linearen Funktionen. Das Studium ihrer Eigenschaften bildet den Schwerpunkt der Linearen Algebra.

Definition 1.12. *Es seien X und Y Vektorräume über demselben Körper $\mathbb{K}$.*

$$f \in \mathcal{F}(X,Y) \text{ heißt } \textbf{linear} \underset{Def}{\Leftrightarrow} \begin{array}{l} i)\quad \forall x,y \in X\colon f(x+y) = f(x)+f(y), \\ ii)\quad \forall x \in X\, \forall \lambda \in \mathbb{K}\colon f(\lambda x) = \lambda f(x). \end{array}$$

Mit $\mathcal{L}(X,Y)$ bezeichnen wir die Menge der linearen Abbildungen von X nach Y.

In der linearen Algebra wird gezeigt, daß den linearen Abbildungen $f \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m)$ genau die Matrizen $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ entsprechen.

2. Elementare Funktionen I

2.1. Potenzfunktion, Wurzelfunktion.

Wir haben bereits im zweiten Kapitel Potenzen mit rationalem Exponenten erklärt. Wir betrachten nun diese Operation unter einem abbildungstheoretischen Blickwinkel und beschränken uns vorerst auf Exponenten aus $\mathbb{N}$.

Satz 2.1 (Potenzfunktion). *Für $n \in \mathbb{N}$ hat die **Potenzfunktion** p_n, erklärt durch*

$$p_n : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^n \end{cases}$$

folgende Eigenschaften.

Fall 1. *n ist gerade:*

i) *p_n ist eine gerade Funktion,*
ii) *$p_n|_{\mathbb{R}^+}$ ist streng monoton wachsend, $p_n|_{\mathbb{R}^-}$ ist streng monoton fallend,*
iii) $\operatorname{bild} p_n = \mathbb{R}^+$.

Fall 2. *n ist ungerade:*

i) *p_n ist eine ungerade Funktion,*
ii) *p_n ist streng monoton wachsend,*
iii) $\operatorname{bild} p_n = \mathbb{R}$.

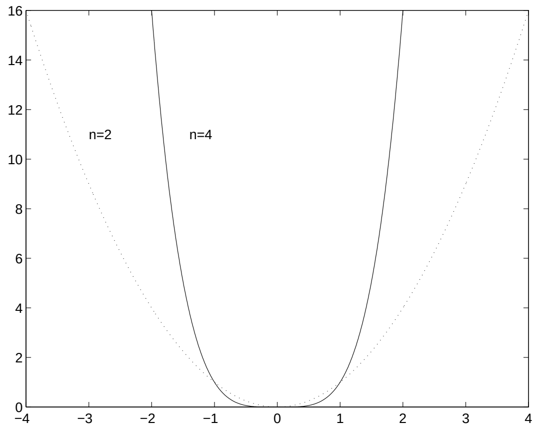
Weiters gilt: Für alle $n \in \mathbb{N}$ und für alle $x \in \mathbb{R}$ ist $\lim_{k\to\infty} p_n(x_k) = p_n(x)$ für alle Folgen (x_k), welche nach x konvergieren.

Beweis. Die Beziehung $p_n(-x) = (-1)^n x^n = (-1)^n p_n(x)$ (vgl. Satz II-4.17) zeigt, daß p_n eine gerade Funktion ist für n gerade und eine ungerade Funktion für n ungerade. Wegen Satz II-4.17-d ist $p_n|_{\mathbb{R}^+}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ streng monton wachsend. Es sei nun $x < y < 0$, d.h. $0 < -y < -x$. Somit folgt $p_n(-y) < p_n(-x)$, also gilt

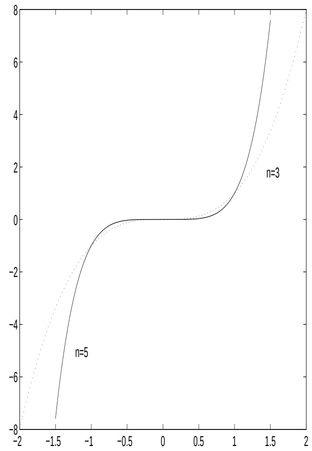
$$(6) \qquad \begin{aligned} &p_n(y) < p_n(x) && \text{falls } n \text{ gerade ist und} \\ -&p_n(y) < -p_n(x), && \text{d.h. } p_n(x) < p_n(y), \text{ falls } n \text{ ungerade ist.} \end{aligned}$$

Nach Satz II-7.1 besitzt die Gleichung $y = x^n$ für jedes $y \in \mathbb{R}^+$ eine eindeutige Lösung in $\mathbb{R}^+$, nämlich $x = \sqrt[n]{y}$. Dies ist gleichwertig mit $\operatorname{bild} p_n|_{\mathbb{R}^+} = \mathbb{R}^+$, $n \in \mathbb{N}$. Die Behauptung über $\operatorname{bild} p_n$ folgt aus der Betrachtung $\operatorname{bild} p_n|_{\mathbb{R}^-} = \operatorname{bild} p_n|_{\mathbb{R}^+} = \mathbb{R}^+$ für n gerade bzw. $\operatorname{bild} p_n|_{\mathbb{R}^-} = -\operatorname{bild} p_n|_{\mathbb{R}^+} = \mathbb{R}^-$ für n ungerade. Die letzte Behauptung folgt unmittelbar aus Satz IV-2.1. □

Wir veranschaulichen die Potenzfunktion, indem wir die Graphen von p_n, $n = 2, 3, 4, 5$ skizzieren.



gerade Potenzen



ungerade Potenzen

Es sei n gerade und $g_n \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$ bezeichne die Abbildung $p_n|_{\mathbb{R}^+}$. Das eben Bewiesene und Satz 1.8 zeigen, daß g_n eine Bijektion ist. Somit existiert die Umkehrfunktion $g_n^{-1} \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$. Für alle $y \in \mathbb{R}^+ = \operatorname{bild} g_n$ ist die Beziehung $x = g_n^{-1}(y)$ gleichwertig mit $y = g_n(x) = x^n$, mit Satz II-7.1 folgt also $g_n^{-1}(y) = \sqrt[n]{y}$. Es gilt $\operatorname{bild} g_n^{-1} = \operatorname{def} g_n = \mathbb{R}^+$ und da g_n streng monoton wächst, ist auch g_n^{-1} streng monoton wachsend (Satz 1.8). Eine analoge Betrachtung gilt für n ungerade und $\mathbb{R}$ anstelle von $\mathbb{R}^+$. Wir fassen diese Diskussion zusammen in

Satz 2.2 (Wurzelfunktion). *Für $n \in \mathbb{N}$ wird die **Wurzelfunktion** w_n, erklärt durch*

$$w_n : \begin{cases} \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+, & n \text{ gerade,} \\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}, & n \text{ ungerade,} \\ x \mapsto \sqrt[n]{x}. \end{cases}$$

Sie hat folgende Eigenschaften:

i) *w_n ist streng monoton wachsend,*
ii) $\operatorname{bild} w_n = \mathbb{R}^+$ *für n gerade und* $\operatorname{bild} w_n = \mathbb{R}$ *für n ungerade.*
iii) *Für alle $x \in \operatorname{def} w_n$ und alle Folgen $(x_k) \subset \operatorname{def} w_n$, welche nach x konvergieren, gilt* $\lim_{k\to\infty} \sqrt[n]{x_k} = \sqrt[n]{x}$.

Beweis. i) Satz 1.8
iii) Fall 1: $x = 0$. Es sei $(x_k) \subset \operatorname{def} w_n$ eine Nullfolge. Zu $\varepsilon > 0$ bestimmen wir $N(\varepsilon)$ so, daß $0 \le |x_k| < \varepsilon^n$ für alle $k \ge N(\varepsilon)$ zutrifft. Wegen i) gilt dann $0 \le \sqrt[n]{|x_k|} < \varepsilon$, $k \ge N(\varepsilon)$, d.h. $\lim_{k\to\infty} \sqrt[n]{|x_k|} = 0$. Für n gerade ist die Behauptung klar, da notwendigerweise $x_k \ge 0$ für $k \in \mathbb{N}$ gilt. Ist n ungerade, zerlegen wir wie im Beweis zu Satz 10.10 die Folge (x_k) in ihren positiven und negativen Anteil $x_k = x_k^+ - x_k^-$, $x_k^\pm \ge 0$, für $k \in \mathbb{N}$. Wegen der speziellen Struktur von $x_k^\pm$ folgt $\sqrt[n]{x_k} = \sqrt[n]{x_k^+} - \sqrt[n]{x_k^-}$. Die Behauptung ergibt sich nun aus $\lim_{k\to\infty} \sqrt[n]{x_k^+} = 0 = \lim_{k\to\infty} \sqrt[n]{x_k^-}$.
Fall 2: $x > 0$. Bezeichnen wir $\xi_k = \sqrt[n]{x_k}$, $\xi = \sqrt[n]{x}$, folgt mit Hilfe von Lemma II-4.23

$$(*) \qquad x_k - x = \xi_k^n - \xi^n = (\xi_k - \xi)\sum_{i=0}^{n-1} \xi_k^i \xi^{n-1-i}.$$

Die Abschätzung

$$\sum_{i=0}^{n-1} \xi_k^i \xi^{n-1-i} \ge \xi^{n-1} = x^{\frac{n-1}{n}}$$

ergibt zusammen mit $(*)$

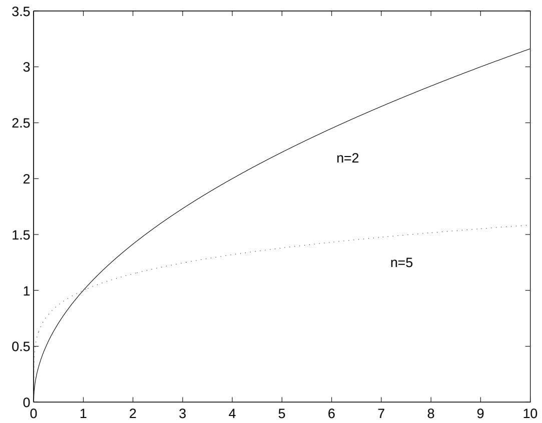
$$|\sqrt[n]{x_k} - \sqrt[n]{x}| = |\xi_k - \xi| \le x^{-\frac{n-1}{n}} |x_k - x|.$$

Wählen wir $N(\varepsilon)$ zu $\varepsilon > 0$ so, daß $|x_k - x| < x^{\frac{n-1}{n}}\varepsilon$ für alle $k \ge N(\varepsilon)$, dann gilt

$$|\sqrt[n]{x_k} - \sqrt[n]{x}| < \varepsilon, \quad k \ge N(\varepsilon),$$

d.h. $\lim_{k\to\infty} \sqrt[n]{x_k} = \sqrt[n]{x}$.
Fall 3: $x < 0$ und n ungerade. O.B.d.A. können wir von $\lim_{k\to\infty} x_k = x$ und $x_k \le 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$ ausgehen. Aus dem eben Bewiesenen folgt $\lim_{k\to\infty} \sqrt[n]{-x_k} = \sqrt[n]{-x}$, also $-\lim_{k\to\infty} \sqrt[n]{x_k} = -\sqrt[n]{x}$. □

Wir skizzieren den Graph der Wurzelfunktionen w_2, w_5 auf $\mathbb{R}^+$.



Wurzelfunktion

Wir erweitern nun die Definition der Potenzfunktion auf beliebige reelle Exponenten: Es liegt nahe, z.B. dem Symbol $3^{\sqrt{2}}$ den Grenzwert der Folge 3^1, $3^{1.4}$ $(=\sqrt[5]{3^7})$, $3^{1.41}$ $(=\sqrt[100]{3^{141}})$, $3^{1.414}, \dots$, als Wert zuzuweisen. Wir zeigen vorerst, daß diese Vorgangsweise zumindest für rationale Exponenten gerechtfertigt ist:

Lemma 2.3. *Es sei $(r_n)_{n\geq 1} \subset \mathbb{Q}$, $r \in \mathbb{Q}$ und $a > 0$. Dann gilt*

$$\lim_{n\to\infty} r_n = r \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a^{r_n} = a^r.$$

Beweis. Die Behauptung ist trivial für $a = 1$. Wir untersuchen zuerst den Fall $a > 1$. Wegen $a^{r_n} = a^{r_n - r} \cdot a^r$ genügt es

$$\lim_{n\to\infty} r_n = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a^{r_n} = a^0 = 1$$

zu beweisen. Es sei r_n eine beliebige Nullfolge rationaler Zahlen. Nach Beispiel IV-1.8-iii) gilt $\lim_{n\to\infty} a^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} a^{-\frac{1}{n}} = 1$. Für beliebiges $\varepsilon > 0$ gibt es somit $m \in \mathbb{N}$ mit $|a^{\frac{1}{m}} - 1| < \varepsilon$ und $|a^{-\frac{1}{m}} - 1| < \varepsilon$. Ferner gibt es einen Index N_m, sodaß $|r_n| < \frac{1}{m}$ für alle $n \geq N_m$ zutrifft. Für $n \geq N_m$ folgt aus $-\frac{1}{m} < r_n < \frac{1}{m}$ mit Satz II-7.9 wegen $a > 1$ die Abschätzungen $a^{-\frac{1}{m}} < a^{r_n} < a^{\frac{1}{m}}$. Wegen der Wahl von m gilt $1 - \varepsilon < a^{-\frac{1}{m}} < a^{r_n} < a^{\frac{1}{m}} < 1 + \varepsilon$ für $n \geq N_m$, dh. $\lim_{n\to\infty} a^{r_n} = 1$. Für $a < 1$ ergibt sich die Behauptung aus $\frac{1}{a} > 1$ und

$$\lim_{n\to\infty} a^{r_n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{\frac{1}{a}}\right)^{r_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(\frac{1}{a})^{r_n}} = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} (\frac{1}{a})^{r_n}} = \frac{1}{(\frac{1}{a})^r} = a^r.$$

$\square$

Lemma 2.4. *$\mathbb{Q}$ ist* ***dicht*** *in $\mathbb{R}$, dh. für jedes $\xi \in \mathbb{R}$ gibt es eine Folge $(r_n)_{n\geq 1} \subset \mathbb{Q}$ mit $\lim_{n\to\infty} r_n = \xi$. Die approximierende Folge (r_n) kann monoton gewählt werden.*

Beweis. Die erste Behauptung folgt aus Satz II-6.11, indem man im dortigen Beweis x durch $\xi - \frac{1}{n}$ und y durch $\xi + \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$, ersetzt. Für den zweiten Teil der Behauptung bestimmen wir r_1, indem wir in Satz II-6.11 $x = \xi - 1$ und $y = \xi$ setzen und r_n rekursiv, indem wir diesen Satz für $n \geq 2$ mit $x = \max\{r_{n-1}, \xi - \frac{1}{n}\}$, $y = \xi$

anwenden. Auf diese Weise wird eine monoton wachsende Folgen rationaler Zahlen r_n mit $\lim_{n\to\infty} r_n = \xi$ erzeugt. Auf ähnliche Weise läßt sich eine entsprechende monoton fallende Folge konstruieren. □

Es sei $a > 0, \xi \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ und (r_n) eine monoton wachsende Folge mit $\lim_{n\to\infty} r_n = \xi$. Nach Satz II-7.9 ist die Folge (a^{r_n}) monoton wachsend für $a > 1$, monoton fallend für $a < 1$. Eine obere (untere) Schranke für die Folge (a^{r_n}) ist a^r falls $a > 1$ $(a < 1)$, wobei r eine rationale Zahl ist mit $r_n \leq r$, $n \in \mathbb{N}$. Auf Grund des Monotonieprinzips IV-Satz 3.2 ist die Folge (a^{r_n}) konvergent. Wir zeigen nun, daß $\lim_{n\to\infty} a^{r_n}$ unabhängig ist von der speziellen Wahl der approximierenden Folge (r_n): Für eine beliebige Folge $(s_n)_{n\geq 1}$ rationaler Zahlen mit $\lim_{n\to\infty} s_n = \xi$ ist $(s_n - r_n)$ eine rationale Nullfolge und aus $a^{s_n} = a^{s_n - r_n} a^{r_n}$ folgt mit Lemma 2.3 die Konvergenz von (a^{s_n}) und $\lim_{n\to\infty} a^{s_n} = \lim_{n\to\infty} a^{r_n}$. Folgende Definition ist daher sinnvoll:

Definition 2.5. *Es sei $\xi \in \mathbb{R}$, $a > 0$ und $(r_n)_{n\geq 1} \subset \mathbb{Q}$ und $\lim_{n\to\infty} r_n = \xi$. Wir definieren*

$$a^\xi := \lim_{n\to\infty} a^{r_n}.$$

Für $\xi > 0$ setzen wir $0^\xi := 0$.

Wir bemerken, daß für $\xi \in \mathbb{Q}$ wegen Lemma 2.3 die neue Definition von a^ξ mit der in Definition II-7.6 getroffenen Vereinbarung übereinstimmt.
Wir zeigen nun, daß sich die Eigenschaften von Potenzen mit rationalen Exponenten auf Potenzen mit reellen Exponenten übertragen.

Satz 2.6 (Reelle Potenzen). *Es seien $a, b > 0$ und $\xi, \eta \in \mathbb{R}$. Dann gilt:*

(1) $a^{\xi+\eta} = a^\xi a^\eta$,
(2) $(ab)^\xi = a^\xi b^\xi$,
(3) $(a^\xi)^\eta = a^{\xi\eta}$,
(4) $a^\xi \neq 0$ *und* $a^{-\xi} = \frac{1}{a^\xi} = (\frac{1}{a})^\xi$,
(5) $0 < a^\xi < b^\xi$ *für* $0 < a < b$ *und* $\xi > 0$,
$0 < b^\xi < a^\xi$ *für* $0 < a < b$ *und* $\xi < 0$,
(6) $a^\xi < a^\eta$ *für* $\xi < \eta$ *und* $a > 1$,
(7) $a^\eta < a^\xi$ *für* $\xi < \eta$ *und* $0 < a < 1$.

Beweis. Es seien $(r_n)_{n\geq 1}$, $(s_n)_{n\geq 1} \subset \mathbb{Q}$ mit $\lim_{n\to\infty} r_n = \xi$, $\lim_{n\to\infty} s_n = \eta$.
(1),(2) Aus $\lim_{n\to\infty}(r_n + s_n) = \xi + \eta$ folgt mit Hilfe von Satz II-7.7

$$a^{\xi+\eta} = \lim_{n\to\infty} a^{r_n+s_n} = \lim_{n\to\infty} a^{r_n} a^{s_n} = \lim_{n\to\infty} a^{r_n} \lim_{n\to\infty} a^{s_n} = a^\xi a^\eta$$

$$(ab)^\xi = \lim_{n\to\infty} (ab)^{r_n} = \lim_{n\to\infty} a^{r_n} b^{r_n} = \lim_{n\to\infty} a^{r_n} \lim_{n\to\infty} b^{r_n} = a^\xi b^\xi$$

(3) Der Beweis dieser Rechenregel wird nach Satz 2.7 nachgetragen.
(4) Dies ist eine Folge von (2): $a^\xi a^{-\xi} = a^{\xi-\xi} = a^0 = 1$. Insbesondere ist $a^\xi \neq 0$ für alle $\xi \in \mathbb{R}$. Aus $(\frac{1}{a})^{r_n} = \frac{1}{a^{r_n}}$ folgt durch Grenzübergang $\frac{1}{a^\xi} = (\frac{1}{a})^\xi$.
(5) Wegen Satz II-7.8 ist $a^{r_n} > 0$ und daher $a^\xi = \lim_{n\to\infty} a^{r_n} \geq 0$. Wegen der vorausgehenden Bemerkung gilt sogar $a^\xi > 0$, $\xi \in \mathbb{R}$. Die Ungleichung in (5) ist

daher gleichwertig mit $(\frac{b}{a})^\xi > 1$. Wegen $\alpha = \frac{b}{a} > 1$ genügt es, $\alpha^\xi > 1$ für $\alpha > 1$ zu nachzuweisen. Wir wählen $r \in \mathbb{Q}$ so, daß $0 < r < r_n$, $n \in \mathbb{N}$. Aus Satz II-7.9 und Satz IV-2.7 folgern wir $1 < \alpha^r < \alpha^{r_n}$ und daher auch $1 < \alpha^r \leq \alpha^\xi$.
(6) Es sei $\eta - \xi > 0$ und $a > 1$. Nach dem oben Gezeigten gilt daher $a^{\eta-\xi} > 1$, d.h. $a^\eta > a^\xi$.
(7) Folgt aus $\frac{1}{a} > 1$ und $(\frac{1}{a})^\xi < (\frac{1}{a})^\eta$. □

Satz 2.7. *i) Es sei $r \in \mathbb{Q}$, die Folge $(x_n)_{n\geq 1} \subset \mathbb{R}^+$ konvergiere nach $x \in \mathbb{R}^+$. Dann gilt:* $\lim_{n\to\infty} x_n^r = x^r$ *(für $x = 0$ ist nur $r > 0$ zulässig).*
ii) Es sei $a > 0$, die Folge $(x_n)_{n\geq 1} \subset \mathbb{R}$ konvergiere gegen $x \in \mathbb{R}$. Dann gilt: $\lim_{n\to\infty} a^{x_n} = a^x$.

Beweis. i) Es sei $r = \frac{p}{q}$, $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$. Es folgt

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[q]{x_n} = \sqrt[q]{x} \quad \text{(Satz 2.2) und}$$
$$\lim_{n\to\infty} x_n^r = \lim_{n\to\infty} (\sqrt[q]{x_n})^p = (\lim_{n\to\infty} \sqrt[q]{x_n})^p = x^r.$$

ii) Es genügt, die Behauptung für $x = 0$ zu zeigen. Es sei $a > 1$. Wie im Beweis von Lemma 2.3 bestimmen wir zuerst $m \in \mathbb{N}$ zu $\varepsilon > 0$ so, daß $1 - \varepsilon < a^{-\frac{1}{m}}$, $a^{\frac{1}{m}} < 1 + \varepsilon$, dann einen Index N_m derart, daß $-\frac{1}{m} < x_n < \frac{1}{m}$ für alle $n \geq N_m$. Satz 2.6-(6) führt auf $1 - \varepsilon < a^{-\frac{1}{m}} < a^{x_n} < a^{\frac{1}{m}} < 1 + \varepsilon$, d.h. $|a^{x_n} - 1| < \varepsilon$ für alle $n \geq N_m$ und somit $\lim_{n\to\infty} a^{x_n} = 1$ falls $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$. Für $a < 1$ folgt die Behauptung aus $a^{x_n} = (\frac{1}{a})^{-x_n}$ und $\frac{1}{a} > 1$. Im Fall $a = 1$ ist nichts zu beweisen. □

Wir sind nun in der Lage, den Beweis der Regel für das Potenzieren von Potenzen zu führen:

Beweis von Satz 2.6-(3). Aus Satz II-7.7 schließen wir $(a^{r_n})^{s_k} = a^{r_n s_k}$. Wegen $\lim_{n\to\infty} a^{r_n} = a^\xi$ folgt aus Satz 2.7-i) $\lim_{n\to\infty} (a^{r_n})^{s_k} = (a^\xi)^{s_k}$, aus $\lim_{n\to\infty} r_n s_k = \xi s_k$ ergibt sich andererseits $\lim_{n\to\infty} a^{r_n s_k} = a^{\xi s_k}$, was $(a^\xi)^{s_k} = a^{\xi s_k}$ zur Folge hat. Wendet man jetzt Satz 2.7-ii) an, ergibt sich

$$(a^\xi)^\eta = \lim_{k\to\infty} (a^\xi)^{s_k} = \lim_{k\to\infty} a^{\xi s_k} = a^{\xi\eta}.$$

□

Satz 2.8 (Potenzfunktion). *Für $\rho \in \mathbb{R}$ hat die Potenzfunktion p_ρ, definiert durch*

$$p_\rho \colon \begin{cases} (0,\infty) \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^\rho \end{cases}$$

folgende Eigenschaften:
i) $\operatorname{bild} p_\rho = (0,\infty)$ *für $\rho \neq 0$.*
ii) *p_ρ ist streng monoton wachsend für $\rho > 0$ und streng monoton fallend für $\rho < 0$.*
iii) *Für $\rho = 0$ ist $p_\rho \equiv 1$.*

Beweis. Die Gleichung $x^\rho = y$ besitzt für jedes y die eindeutige Lösung $x = y^{\frac{1}{\rho}}$. Somit ist $\operatorname{bild} p_\rho = (0, \infty)$. Die Monotonieeigenschaft für $\rho > 0$ wurde bereits in Satz 2.6-(5) festgestellt. Für den Fall $\rho < 0$ beachte man $x^\rho = (\frac{1}{x})^{|\rho|}$. □

2.2. Exponentialfunktion, Logarithmusfunktion.

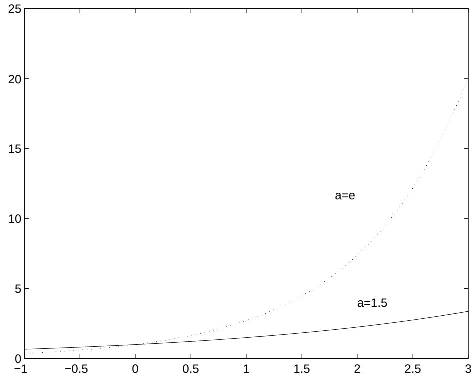
Satz 2.9 (Exponentialfunktion). *Für $a > 0$ hat die **Exponentialfunktion**, definiert durch*

$$\begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto a^x \end{cases}$$

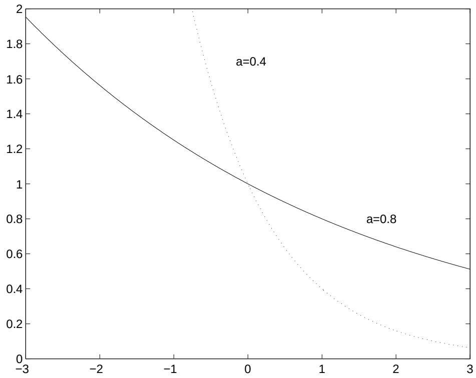
folgende Eigenschaften:

i) $\forall x, y \in \mathbb{R}$: $a^{x+y} = a^x a^y$,
ii) $a^0 = 1$, $a^1 = a$,
iii) $\forall x \in \mathbb{R}$: $a^x > 0$ *und* $a^x = \frac{1}{a^{-x}}$,
iv) $x \to a^x$ *ist streng monoton wachsend für* $a > 1$ *und streng monoton fallend für* $a < 1$,
v) *der Wertebereich der Exponentialfunktion ist* $(0, \infty)$ *für* $a \neq 1$.

Beweis. Die Aussagen i) – iv) folgen aus Satz 2.6. Wir beweisen v) für $a > 1$: Es sei $y > 0$. Wegen $\lim_{n\to\infty} a^{-n} = 0$ gibt es $m \in \mathbb{N}$ so, daß $a^{-m} \leq \min\{y, y^{-1}\}$. Somit gilt $a^{-m} \leq y \leq a^m$. Wir setzen nun $x_1 = -m$, $y_1 = m$ und führen folgendes iterative Verfahren durch: am Ende des n–ten Schrittes sei ein Intervall $[x_n, y_n]$ erzeugt worden mit $y \in [a^{x_n}, a^{y_n}]$. Im nächsten Schritt halbieren wir dieses Intervall und setzen $\xi_n = \frac{x_n + y_n}{2}$. Wegen der Monotonie der Exponentialfunktion gilt $a^{x_n} \leq a^{\xi_n} \leq a^{y_n}$. Es sei nun $[x_{n+1}, y_{n+1}]$ das Teilintervall $[x_n, \xi_n]$ falls $y \in [a^{x_n}, a^{\xi_n})$, und $[\xi_n, y_n]$ falls $y_n \in [a^{\xi_n}, a^{y_n}]$. Auf diese Weise erhält man eine Folge abgeschlossener Intervalle $[x_n, y_n] \supset [x_{n+1}, y_{n+1}]$ und nach Satz II-6.14 genau eine reelle Zahl x mit $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = x$ und $a^{x_n} \leq y \leq a^{y_n}$. Aus Satz 2.7 folgt durch Grenzübergang $a^x = y$. Für $0 < a < 1$ existiert nach dem eben Bewiesenen genau ein $x \in \mathbb{R}$ mit $(\frac{1}{a})^x = a^{-x} = y$. □



$x \mapsto a^x$, $a > 1$



$x \mapsto a^x$, $a < 1$

Jede Exponentialfunktion mit $a \neq 1$ ist also injektiv und besitzt daher eine Umkehrfunktion.

Satz 2.10 (Logarithmusfunktion). *Die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion* $x \to a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$, *heißt* ***Logarithmusfunktion*** *zur Basis* a, $\log_a$*:*

$$\log_a\colon \begin{cases} (0,\infty) \to \mathbb{R} \\ y \mapsto \log_a(y). \end{cases}$$

Den Wert der Logarithmusfunktion an der Stelle y, $\log_a(y)$, *nennt man* ***Logarithmus*** **von** y **zur Basis** a. *Er ist bestimmt durch die Beziehung*

$$x = \log_a y \Leftrightarrow y = a^x.$$

Die Logarithmusfunktion hat folgende Eigenschaften:

i) $\forall x, y \in (0,\infty)\colon\ \log_a(xy) = \log_a x + \log_a y,$
ii) $\forall x \in (0,\infty)\, \forall \rho \in \mathbb{R}\colon\ \log_a x^\rho = \rho \log_a x,$
iii) $\forall a \in (0,\infty) \setminus \{1\}\colon\ \log_a 1 = 0,\ \log_a a = 1,$
iv) $\operatorname{bild}({}^a\log) = \mathbb{R},$
v) $\log_a$ *ist streng monoton steigend für* $a > 1$ *und streng monoton fallend für* $0 < a < 1$.

Beweis. Ausgehend von der Identität $\forall x \in (0,\infty)\colon x = a^{\log_a x}$ schließt man

$$a^{\log_a xy} = xy = a^{\log_a x} a^{\log_a y} = a^{\log_a x + {}^a\log y},$$
$$a^{\log_a x^\rho} = x^\rho = (a^{\log_a x})^\rho = a^{\rho\, {}^a\log x}.$$

Wegen der Injektivität der Exponentialfunktion folgen die Behauptungen i) und ii), iii) ergibt sich aus Satz 2.9-ii), iv) gilt, weil jede Exponentialfunktion auf $\mathbb{R}$ definiert ist und v) ist eine Konsequenz aus Satz 1.8. □

Bemerkung 2.11. Von besonderer Bedeutung ist die Logarithmusfunktion, deren Basis die Eulersche Zahl e ist. Man nennt sie den **natürlichen Logarithmus** und bezeichnet sie meistens mit ln.

2.3. Polynome, rationale Funktionen.

Polynome stellen wichtige Funktionen in der Analysis dar. Sie werden z.B. zur Approximation und Interpolation verwendet und stehen auch am Ausgangspunkt zur Theorie der Potenzreihen.

Definition 2.12. i) *Eine Funktion* $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *heißt* ***Polynom*** $\underset{Def}{\Leftrightarrow}$ *es gibt komplexe Zahlen* a_i, $i = 0, \dots, n$, *man nennt sie* **Koeffizienten**, *sodaß* f *folgende Darstellung besitzt:*

$$\forall x \in \mathbb{C}\colon\ f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

ii) $\operatorname{grad} f = \max\{i\colon a_i \neq 0\}$ *heißt* ***Grad*** *des Polynoms.*
iii) *Sind alle Koeffizienten Null, so heißt* f *das* ***Nullpolynom***. *Der Grad des Nullpolynoms ist* $-\infty$.
iv) $x_0 \in \mathbb{C}$ *heißt* ***Nullstelle*** *von* f, *wenn* $f(x_0) = 0$.

Ein Polynom läßt sich häufig in sehr unterschiedlicher Weise darstellen, z.B. ist $f(x) = 1-2x^2+x^4 = (x^2-1)^2 = (x-1)^2(x+1)^2 = (x^2-2x+1)(x^2+2x+1)$. Wir werden jedoch zeigen, daß die in der obigen Definition angegebene spezielle Darstellung eines Polynoms und damit auch sein Grad eindeutig bestimmt sind. Dem Nullpolynom wird häufig kein Grad, oder auch der Grad -1 zugewiesen.

Definition 2.13. *Für $f, g \in \mathcal{F}(D, \mathbb{K})$ sind das Produkt $fg \in \mathcal{F}(D, \mathbb{K})$ und der Quotient $\frac{f}{g} \in \mathcal{F}(D \setminus \mathcal{N}_g, \mathbb{K})$, $\mathcal{N}_g := \{x \in D \colon g(x) = 0\}$ erklärt durch*

$$\forall x \in D \colon (fg)(x) := f(x)g(x)$$
$$\forall x \in D \setminus \mathcal{N}_g \colon (\frac{f}{g})(x) := \frac{f(x)}{g(x)}$$

Summen und Produkte von Polynomen sind wieder Polynome. Das Produkt der beiden Polynome $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k$ und $g(x) = \sum\limits_{k=0}^{m} b_k x^k$ (der Einfachheit halber bezeichnen wir gelegentlich eine Funktion $x \mapsto f(x)$ mit $f(x)$, d.h. es wird in der Notation nicht zwischen Funktion und Wert der Funktion an einer Stelle x unterschieden) ist das Polynom

$$(fg)(x) = \sum_{k=0}^{m+n} c_k x^k$$
$$c_k = \sum_{r=0}^{k} a_{k-r} b_r, \quad k = 0, \dots, n+m,$$

wobei wir

$$a_i = 0 \text{ für } n+1 \le i \le n+m \qquad \text{und } b_j = 0 \text{ für } m+1 \le j \le n+m$$

gesetzt haben. Es gilt

$$\operatorname{grad}(fg) = \operatorname{grad} f + \operatorname{grad} g,$$
$$\operatorname{grad}(f+g) \le \max\{\operatorname{grad} f, \operatorname{grad} g\}.$$

Satz 2.14 (Divisionssatz). *Es sei $g \neq 0$ ein Polynom. Jedes Polynom f läßt sich in der Form*

$$f = qg + r, \quad \operatorname{grad} r < \operatorname{grad} g,$$

mit eindeutig bestimmten Polynomen q und r darstellen.

Beweis. Wir zeigen zuerst die Existenz einer derartigen Darstellung. Ist $\operatorname{grad} f < \operatorname{grad} g$, schreiben wir $f = 0 \cdot g + f$. Es sei nun $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k$, $g(x) = \sum\limits_{k=0}^{m} b_k x^k$, $n = \operatorname{grad} f \ge \operatorname{grad} g = m$. Subtrahiert man von f das Polynom $q_0 g = \frac{a_n}{b_m} x^{n-m} g$, erhält man ein Polynom r_1 mit $\operatorname{grad} r_1 < n$. Ist $\operatorname{grad} r_1 < m$, ist die gesuchte Zerlegung bereits gefunden: $f = q_0 g + r_1$. Ist $\operatorname{grad} r_1 \ge m$, subtrahiert man von r_1 ein entsprechendes Polynom $q_1 g$, sodaß für die Differenz $r_2 = r_1 - q_1 g$ die Bedingung $\operatorname{grad} r_2 < \operatorname{grad} r_1$

zutrifft. Nach endlich vielen, etwa k Schritten, gilt für das Differenzpolynom $r_k = r_{k-1} - q_{k-1}g$ schließlich $\operatorname{grad} r_k < m$. Die gewünschte Darstellung ergibt sich aus

$$f = q_0 g + q_1 g + \dots q_{k-1} g + r_k = g \sum_{i=0}^{k-1} q_i + r_k.$$

Angenommen, es gäbe eine weitere Zerlegung $f = \tilde{q}g + \tilde{r}$ mit $\tilde{q} \neq q$, $\operatorname{grad} \tilde{r} < \operatorname{grad} g$. Durch Subtraktion ergibt sich $(\tilde{q} - q)g = r - \tilde{r}$. Wegen $\operatorname{grad}(\tilde{q} - q) \geq 0$ und $\operatorname{grad}(r - \tilde{r}) < m$ führt dies auf den Widerspruch

$$\operatorname{grad}(r - \tilde{r}) = \operatorname{grad}\big((\tilde{q} - q)g\big) \geq m.$$

□

Man sagt, g teilt f oder auch, g ist ein **Teiler** von f, wenn sich die Division durch g „ausgeht", dh. das Restpolynom r das Nullpolynom ist. Die Polynome f und g heißen **teilerfremd**, wenn es kein Polynom h mit $\operatorname{grad} h \geq 1$ gibt, das f und g teilt.

Dividiert man durch ein **lineares Polynom** $(x - \alpha)$, erhält man $f = (x - \alpha)q + r_1$ mit $\operatorname{grad} r_1 \leq 0$, dh. $r_1 \in \mathbb{C}$. Ist α eine Nullstelle von f, muß $r_1 = 0$ gelten. Diese Überlegung beweist

Lemma 2.15. *Ist $\alpha \in \mathbb{C}$ eine Nullstelle eines Polynoms f, so ist f durch $x - \alpha$ teilbar:*

$$f = (x - \alpha)q, \quad \operatorname{grad} q = \operatorname{grad} f - 1.$$

Hat q ebenfalls eine Nullstelle, läßt sich ein weiterer, nicht notwendigerweise von $x - \alpha$ verschiedener, Linearfaktor abspalten. Wegen $\operatorname{grad} f = n$ kann man höchstens n Linearfaktoren abtrennen. Somit gilt:

Korollar 2.16. Ein Polynom $f \neq 0$ vom Grade n hat höchstens n Nullstellen.

Der Fundamentalsatz der Algebra, den wir erst später beweisen werden, sagt aus, daß ein Polynom vom Grade $n \geq 0$ mit Koeffizienten in $\mathbb{C}$ *genau* n nicht notwendigerweise verschiedene Nullstellen in $\mathbb{C}$ besitzt.
Der folgende Identitätssatz ist die theoretische Grundlage für die häufig verwendete Methode des Koeffizientenvergleichs.

Satz 2.17 (Identitätssatz). *Stimmen die Werte zweier Polynome $f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$, $g(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k x^k$, an $n + 1$ verschiedenen Stellen überein, dann gilt $a_k = b_k$, $k = 0, \dots, n$, dh. $f = g$.*

Beweis. Der Grad des Differenzpolynoms $f - g$ ist höchstens n, da es nach Voraussetzung mindestens $n + 1$ Nullstellen hat, muß es nach Korollar 2.16 das Nullpolynom sein. □

Wir haben den Identitätssatz formuliert für Polynome f, g mit gleicher Endpotenz x^n. Diese Form kann immer erreicht werden, indem man gegebenenfalls fehlende Potenzen mit Koeffizienten $a_k = 0$ oder $b_k = 0$ ergänzt ($\operatorname{grad} f = \operatorname{grad} g$ wird ja nicht vorausgesetzt).

Definition 2.18. *Es sei $D \subset \mathbb{K}$ und $r \in \mathcal{F}(D, \mathbb{K})$. r heißt **rationale** Funktion $\underset{Def}{\Leftrightarrow}$ es gibt Polynome p, q: $r = \frac{p}{q}$, $D = \mathbb{K} \setminus \{x \in \mathbb{K} \colon q(x) = 0\}$.*

Wenn q Teiler von p ist, stimmt nach Satz 2.14 die rationale Funktion $r = \frac{p}{q}$ auf D mit einem Polynom überein. Beispielsweise gilt für $x \in D = \mathbb{R} \setminus \{1, -1\}$

$$r(x) = \frac{1 - x^4}{1 - x^2} = 1 + x^2.$$

Die *Funktionen* $x \mapsto 1 + x^2$ und r sind aber wegen des verschiedenen Definitionsbereiches zu unterscheiden. Dagegen sind $x \mapsto 1 - x^2$ und die rationale Funktion $r(x) = \frac{1-x^4}{1+x^2}$ identische Funktionen falls $D = \mathbb{R}$, jedoch verschieden auf $D = \mathbb{C}$.

3. Stetigkeit

Definition 3.1. *Es sei $D \subset \mathbb{K}$, $x_0 \in D$*

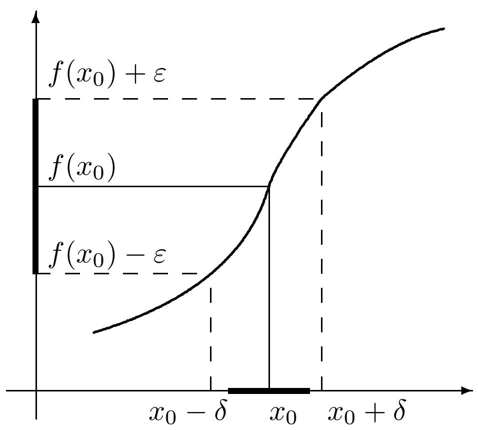
(1) *$f \in \mathcal{F}(D, \mathbb{K})$ heißt **stetig** in $x_0 \in D$ $\underset{Def}{\Leftrightarrow}$*

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta(\varepsilon, x_0) \; \forall x \in D \colon |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

(2) *$f \in \mathcal{F}(D, \mathbb{K})$ heißt stetig (auf D) $\underset{Def}{\Leftrightarrow}$*

f ist stetig in jedem Punkt $x \in D$

(3) *$C(D, \mathbb{K}) := \{f \in \mathcal{F}(D, \mathbb{K}) \colon f$ ist stetig $\}$.*



Wir demonstrieren die Argumentation beim Nachweis der Stetigkeit an einem einfachen Beispiel.

Beispiel 3.2. $f \colon x \mapsto x^2$, $x \in \mathbb{K}$, ist stetig auf $\mathbb{K}$.

Beweis. Ausgangspunkt ist meist der Ausdruck $|f(x) - f(x_0)|$, den wir solange umformen, bis sich eine Bedingung an $|x - x_0|$ ablesen läßt:

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &= |x^2 - x_0^2| = |(x - x_0 + x_0)^2 - x_0^2| \\ &= |x - x_0|^2 + 2|x_0||x - x_0|. \end{aligned}$$

Da nur Argumente x von f mit $|x - x_0| < \delta$ von Interesse sind, ergibt sich die Abschätzung

$$|f(x) - f(x_0)| < \delta^2 + 2\delta|x_0|.$$

Beschränkt man sich von vorneherein auf $\delta < 1$ (genügt nämlich irgend ein δ_0 den Bedingungen in Definition 3.1, dann ist erst recht jedes $\delta < \delta_0$ zulässig), erhält man endlich

$$|f(x) - f(x_0)| < \delta(1 + 2|x_0|) \leq \varepsilon,$$

wobei die letzte Ungleichung für

$$\delta \leq \frac{\varepsilon}{1 + 2|x_0|}$$

gilt. Insgesamt ist somit in Definition Definition 3.1 jedes δ zulässig, welches der Bedingung

$$\delta \leq \min\{1, \frac{\varepsilon}{1 + 2|x_0|}\}$$

genügt. □

Anstatt die a priori Schranke $\delta < 1$ einzuführen, wäre es auch möglich gewesen, für δ die positive Lösung der Gleichung $\delta^2 + 2\delta|x_0| = \varepsilon$, dh. $\delta = -|x_0| + \sqrt{x_0^2 + \varepsilon}$, zu wählen (man beachte, $\delta \mapsto \delta^2 + 2\delta|x_0|$ ist streng monoton wachsend für $\delta > 0$). Diese Wahl von δ führt auf die größte δ-Umgebung von x_0, die mit Definition 3.1 verträglich ist.

Es ist klar, daß die Stetigkeit von $f \in \mathcal{F}(D, \mathbb{R})$ in $x_0 \in D$ die Stetigkeit in x_0 jeder Einschränkung $f|_{\tilde{D}}$, $\tilde{D} \subset D$, $x_0 \in \tilde{D}$ nach sich zieht.

Definition 3.3. $f \in \mathcal{F}(D, \mathbb{K})$ *heißt* ***Lipschitz stetig***

$$\underset{Def}{\Leftrightarrow} \exists L > 0 \; \forall x, y \in D \colon |f(x) - f(y)| \leq L|x - y|.$$

Lemma 3.4. *Lipschitz stetige Funktionen sind stetig.*

Beweis. Für alle $x_0 \in D$ kann man zu $\varepsilon > 0$, $\delta = \frac{\varepsilon}{L}$ in Definition 3.1 wählen. □

Etwas salopp kann man die $\varepsilon\delta$–Definition der Stetigkeit auch folgendermaßen formulieren: Zu jeder ε-Umgebung U_ε von $f(x_0)$ kann man eine δ-Umgebung V_δ von x_0 angeben mit $f(V_\delta) \subset U_\varepsilon$. Wir zeigen nun, daß die Stetigkeit auch mittels Folgen charakterisiert werden kann:

Satz 3.5 (Folgenkriterium für Stetigkeit). *Folgende Aussagen sind äquivalent:*
1) $f \in \mathcal{F}(D, \mathbb{K})$ *ist stetig in* $x_0 \in D$.
2) Es gilt $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$ *für jede Folge* $(x_n) \subset D$, *welche nach* x_0 *konvergiert.*

Beweis. „1) $\Rightarrow$ 2)" Zu $\varepsilon > 0$ sei $\delta = \delta(\varepsilon, x_0)$ so gewählt, daß aus $|x - x_0| < \delta$ die Abschätzung $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ folgt. Wegen $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ gibt es einen Index $N(\delta)$, sodaß $|x_n - x_0| < \delta$ und somit auch $|f(x_n) - f(x_0)| < \varepsilon$ für alle $n \geq N(\varepsilon)$ zutrifft.
„2) $\Rightarrow$ 1)" Wir führen den Beweis indirekt und nehmen an, f sei in $x_0 \in D$ nicht stetig, dh.

$$\exists \varepsilon_0 > 0\ \forall \delta\ \exists x_\delta \in D\colon |x_\delta - x_0| < \delta \wedge |f(x_\delta) - f(x_0)| \geq \varepsilon_0.$$

Lassen wir δ ein Nullfolge durchlaufen, etwa $(\frac{1}{n})_{n\geq 1}$, erhält man eine Folge (x_n) mit $|x_n - x_0| < \frac{1}{n}$ und $|f(x_n) - f(x_0)| \geq \varepsilon_0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, dh. es gilt

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0, \text{ aber } f(x_n) \not\to f(x_0).$$

□

Insbesondere ist also die Stetigkeit einer Abbildung f eine hinreichende Bedingung für die Vertauschbarkeit von Grenzübergang und Abbildung: Falls f stetig ist und (x_n) konvergent ist, dann gilt

$$\lim f(x_n) = f(\lim x_n).$$

Korollar 3.6 (Unstetigkeitskriterium). $f \in \mathcal{F}(D, \mathbb{K})$ ist nicht stetig in $x_0 \in D$ genau dann, wenn es (mindestens) eine Folge $(x_n) \subset D$ gibt mit $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ und $f(x_n) \not\to f(x_0)$.

Häufig treten zwei Situationen auf, welche die Unstetigkeit einer Funktion an einer Stelle $x_0 \in D$ implizieren:

- Es existiert eine gegen x_0 konvergierende Folge $(x_n) \subset D$ mit $\lim_{n\to\infty} f(x_n) \neq f(x_0)$.
- Es gibt zumindest zwei Folgen $(x_n), (y_n) \subset D$ mit $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = x_0$ und $\lim_{n\to\infty} f(x_n) \neq \lim_{n\to\infty} f(y_n)$.

Satz 3.7. *Folgende Funktionen in $\mathcal{F}(D, \mathbb{R})$ sind stetig:*

(1)	*konstante Funktion*	$x \mapsto a$	
(2)	*Potenzfunktion*	$x \mapsto x^n$, $n \in \mathbb{N}$	*(Satz 2.1)*
(3)	*Wurzelfunktion*	$x \mapsto \sqrt[n]{x}$, $n \in \mathbb{N}$	*(Satz 2.2)*
(4)	*Exponentialfunktion*	$x \mapsto a^x$,	*(Satz 2.7)*
(5)	*Betragsfunktion*	$x \mapsto |x|$,	*(Satz II-3.11-d)*

Beispiel 3.8. (Dirichlet Funktion)

$$d\colon \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{Q} \\ 1 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases} \end{cases}$$

d ist für alle $x \in \mathbb{R}$ unstetig, denn jede δ-Umgebung von x enthält sowohl rationale als auch irrationale Zahlen.

Im folgenden Beispiel ist die Anschauung wenig hilfreich bei der Diskussion der Stetigkeit und analytische Methoden sind unumgänglich:

Beispiel 3.9. Wir betrachten die Abbildung

$$f\colon \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ \ x \mapsto 0 & x \notin \mathbb{Q} \\ \ x \mapsto \frac{1}{q} & x = \frac{p}{q}, \quad p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N} \text{ teilerfremd} \end{cases}$$

Wir betrachten zuerst eine rationale Stelle $x_0 = \frac{p_0}{q_0}$ (p_0, q_0 teilerfremd) und die Folge $(x_n) \subset \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, $x_n = x_0 + \frac{1}{n}\sqrt{2}$, $n \in \mathbb{N}$. Es ist $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$, aber $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = 0 \neq \frac{1}{q_0} = f(x_0)$, d.h. f ist an jeder rationalen Stelle unstetig.
Es sei nun x_0 irrational, also $f(x_0) = 0$. Zu $\varepsilon > 0$ wählen wir N so, daß $\frac{1}{N} < \varepsilon$. Im Intervall $(-\frac{1}{N} + x_0, \frac{1}{N} + x_0)$ gibt es nur endlich viele rationale Zahlen $\frac{p}{q}$, deren Nenner q kleiner ist als N. Wir wählen nun

$$\delta = \min\{|x_0 - \frac{p}{q}| \colon p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}, q < N, |x_0 - \frac{p}{q}| < \frac{1}{N}\}.$$

Der Nenner q jeder rationalen Zahl $\frac{p}{q}$ mit $|x_0 - \frac{p}{q}| < \delta$ muß also zwangsläufig größer (mindestens gleich) N sein. Somit gilt auch

$$|f(x) - f(x_0)| = |f(x)| = \begin{cases} \frac{1}{q} < \frac{1}{N} < \varepsilon & \text{für } x = \frac{p}{q}, \\ 0 < \varepsilon & \text{für } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Diese Funktion ist also an jeder irrationalen Stelle stetig. Die Abbildung dieses Beispiels weist somit ein sehr komplexes Verhalten auf: sowohl die Menge der Stetigkeitsstellen, als auch die Menge der Unstetigkeitsstellen liegen dicht in $\mathbb{R}$! Ein anderer Beweis der Stetigkeitseigenschaften dieses Beispiels kann auch auf folgender Beobachtung aufgebaut werden:

Lemma 3.10. *Es sei $\xi \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ und $(r_n) \subset \mathbb{Q}$ mit $\frac{p_n}{q_n}$, $p_n \in \mathbb{Z}$, $q_n \in \mathbb{N}$ teilerfremd. Dann gilt:*

$$\lim_{n\to\infty} r_n = \xi \Rightarrow \lim_{n\to\infty} q_n = \infty$$

Satz 3.11. *Es seien $f, g \in \mathcal{F}(D, \mathbb{K})$ stetig in $x_0 \in D$ und $\lambda \in \mathbb{K}$. Dann sind auch die Funktionen $f + g$, λf, fg und, falls $g(x_0) \neq 0$, auch $\frac{f}{g}$ stetig in x_0.*

Beweis. Dies ergibt sich unmittelbar aus dem Folgenkriterium 3.5 und den Rechenregeln für Grenzwerte Satz IV-2.1. Bei der Diskussion von $\frac{f}{g}$ beachte man, daß aus $g(x_0) \neq 0$ und der Stetigkeit von g an der Stelle x_0 folgt, daß g sogar in einer ganzen δ-Umgebung von x_0 ungleich Null ist. □

Korollar 3.12. Polynome und rationale Funktionen sind stetig.

Satz 3.13. *Es seien $f \in \mathcal{F}(D, \mathbb{K})$, $g \in \mathcal{F}(E, \mathbb{K})$, $\operatorname{bild} f \subset E$ und $x_0 \in D$. Ist f stetig in x_0, g stetig in $f(x_0)$, dann ist $g \circ f$ stetig in x_0. Insbesondere ist somit die Verknüpfung stetiger Funktionen stetig.*

Beweis. Es sei $(x_n) \subset D$ konvergent nach x_0. Es folgt $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$ und daher auch $\lim_{n\to\infty}(g \circ f)(x_n) = \lim_{n\to\infty} g(f(x_n)) = g(f(x_0)) = (g \circ f)(x_0)$. $\square$

Dieser Satz ermöglicht es, aus der bereits bewiesenen Stetigkeit elementarer Funktionen auf die Stetigkeit auch komplizierter, zusammengesetzter Funktionen zu schließen:

Beispiel 3.14. Wir betrachten die Abbildung $f\colon x \to \sqrt[n]{1-2x-3x^2}$, n gerade. f läßt sich auffassen als Komposition von $g\colon x \mapsto 1-2x-3x^2$ und $h\colon x \mapsto \sqrt[n]{x}$. Es ist $\operatorname{def} g = \mathbb{R}$, $\operatorname{bild} g = (-\infty, \frac{4}{3}]$ und $\operatorname{def} h = \mathbb{R}^+$. Der Definitionsbereich von $f = h \circ g$ ist nach Definition I-6.8 charakterisiert durch die Bedingungen $x \in \operatorname{def} g$ und $g(x) \in \operatorname{def} h$, dh. $x \in \operatorname{def} f$ genau dann, wenn $1-2x-3x^2 = (1+x)(1-3x) \geq 0$. Somit folgt $\operatorname{def} f = [-1, \frac{1}{3}]$. Aus der Stetigkeit von h und g, genauer der Einschränkung $\tilde{g} = g|_{\operatorname{def} f}$, folgert man mit Satz 3.13 die Stetigkeit von f.

Der Satz von der Stetigkeit der Verknüpfung stetiger Funktionen ist nicht umkehrbar: Aus der Stetigkeit der Verknüpfung kann nicht auf die Stetigkeit der Teilfunktionen geschlossen werden. Als Beispiel betrachtet man die zusammengesetzte Funktion $d \circ d$, wobei d die Dirichletfunktion aus Beispiel 3.8 bezeichnet.

4. Zwischenwertsatz

Im folgenden untersuchen wir reelle Funktionen, deren Definitionsbereich ein Intervall ist. Wir beginnen mit einer Charakterisierung von Intervallen.

Satz 4.1. *Es sei $A \subset \mathbb{R}$ und $A \neq \emptyset$. Äquivalent sind folgende Aussagen:*

a) *A ist ein Intervall.*
b) *Mit je zwei Punkten von A liegt auch deren Verbindungsstrecke in A, d.h. $\forall x, y \in A\colon x \leq y \Rightarrow [x, y] \subset A$.*

Beweis. $a \Rightarrow b$ trivial
$b \Rightarrow a$: Wir unterscheiden vier Fälle, je nachdem ob A nach unten oder nach oben beschränkt ist oder ob dies nicht der Fall ist.
Fall 1: A ist beschränkt nach unten, unbeschränkt nach oben. Wir zeigen, daß in diesem Falle A ein Intervall des Typs (α, ∞) oder $[\alpha, \infty)$ ist, $\alpha = \inf A$. Da α eine untere Schranke von A ist, folgt $A \subset [\alpha, \infty)$. Die Behauptung folgt dann aus der Inklusion $(\alpha, \infty) \subset A$. Es sei also $r \in (\alpha, \infty)$ beliebig gewählt. Nach Satz II-6.4 (modifiziert für inf) gibt es ein $a \in A$ mit $\alpha \leq a < r$. Andererseits ist A nach oben unbeschränkt, somit gibt es $b \in A$ mit $r < b$, also $a < r < b$. Aus der Bedingung b) folgt $[a, b] \subset A$ und somit a fortiori auch $r \in A$.
Fall 2: A ist beschränkt nach oben, unbeschränkt nach unten. Dies läßt sich durch Übergang auf die Menge -A auf Fall 1 zurückführen.
Fall 3: A ist beschränkt. Analog zum Fall 1 zeigt man, daß mit $\alpha := \inf A$ und $\beta := \sup A$ die Inklusionen

$$(\alpha, \beta) \subset A \subset [\alpha, \beta]$$

gelten. Somit ist A eines der Intervalle $(\alpha, \beta), (\alpha, \beta], [\alpha, \beta)$ oder $[\alpha, \beta]$.
Fall 4: A ist nach oben und unten unbeschränkt. Für alle $r \in \mathbb{R}$ gibt es dann $a, b \in A$, $a \le b$, mit $r \in [a, b] \subset A$. Somit ist $A = \mathbb{R}$. □

Wir zeigen nun, daß eine stetige, reelle Funktion, die in den Endpunkten eines *abgeschlossenen* Intervalles Werte verschiedenen Vorzeichens annimmt, in diesem Intervall mindestens eine Nullstelle besitzt.

SATZ 4.2. *Es sei $I = [a, b]$, $-\infty < a < b < \infty$, $f \in C(I, \mathbb{R})$ und $f(a)f(b) < 0$. Dann gibt es ein $\alpha \in (a, b)$ mit $f(\alpha) = 0$.*

BEWEIS. Wir nehmen an, es sei $f(a) > 0$ und $f(b) < 0$ (anderenfalls geht man von f auf $-f$ über). Die Menge $A = \{x \in [a, b] : f(x) \ge 0\}$ ist nicht leer ($a \in A$) und beschränkt, somit existiert $\alpha = \sup A$. Es sei $(x_n)_{n \ge 1} \subset A$ eine Folge mit $\lim_{n\to\infty} x_n = \alpha$, dann gilt $\alpha \in I$. Das Supremum α liegt aber sogar in A. Aus $f(x_n) \ge 0$, $n \in \mathbb{N}$, folgt nämlich mit Satz IV-2.5 und 3.5

$$f(\alpha) = f(\lim_{n\to\infty} x_n) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) \ge 0.$$

Wegen $f(b) < 0$ ist insbesondere $\alpha < b$ und $f(y) < 0$ für alle $y \in (\alpha, b]$. Ist daher $(y_n)_{n \ge 1} \subset (\alpha, b]$ eine Folge mit $\lim_{n\to\infty} y_n = \alpha$, muß notwendigerweise auch $f(\alpha) = \lim f(y_n) \le 0$, insgesamt also $f(\alpha) = 0$ gelten. □

Wir erweitern nun die Anwendbarkeit dieses Satzes auf beliebige Intervalle.

SATZ 4.3 (Zwischenwertsatz). *Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f \in C(I, \mathbb{R})$. Dann ist $f(I)$ ein Intervall.*

BEWEIS. Es sei $x, y \in \operatorname{bild} f$, $x < y$. Nach Satz 4.1 genügt es, $[x, y] \subset \operatorname{bild} f$ nachzuweisen. Zu diesem Zweck wählen wir $k \in \mathbb{R}$ mit $x < k < y$. Wegen $x, y \in \operatorname{bild} f$ gibt es $a, b \in I$ mit $x = f(a)$ und $y = f(b)$. Da $x \ne y$ und f eine Funktion ist, gilt $a \ne b$. Wir bezeichnen nun mit J das abgeschlossene Intervall mit den Endpunkten a und b. Da I ein Intervall ist, folgt $J \subset I$. Wir definieren nun $g \in \mathcal{F}(J, \mathbb{R})$ durch

$$g : \begin{cases} J \to \mathbb{R} \\ x \mapsto f(x) - k. \end{cases}$$

Da $f|_J$ stetig ist, ist auch g stetig. Darüberhinaus erfüllt g die Bedingungen

$$\begin{aligned} g(a) &= f(a) - k = x - k < 0, \\ g(b) &= f(b) - k = y - k > 0. \end{aligned}$$

Satz 4.2 sichert die Existenz von $c \in J$ mit $g(c) = 0$. Das bedeutet aber $f(c) = k$, dh. $k \in \operatorname{bild} f$. □

Es ist leicht, Beispiele zu finden, die belegen, daß man beim Zwischenwertsatz weder auf die Stetigkeit von f, noch auf die Voraussetzung, daß I ein Intervall ist, verzichten kann.

Korollar 4.4. Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f \in C(I, \mathbb{R})$. Für alle $x \in I$ sei $f(x) \neq 0$. Dann ist entweder $\operatorname{bild} f \subset \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$ oder $\operatorname{bild} f \subset \mathbb{R}^- \setminus \{0\}$.

Beweis. Wir führen einen Widerspruchsbeweis: Es gelte also

$$\operatorname{bild} f \subset \mathbb{R} \setminus \{0\} \wedge \operatorname{bild} f \not\subset \mathbb{R}^+ \setminus \{0\} \wedge \operatorname{bild} f \not\subset \mathbb{R}^- \setminus \{0\},$$

dh. es gibt $a, b \in I$ mit $f(a) < 0$ und $f(b) > 0$. Nach dem Zwischenwertsatz wäre $0 \in \operatorname{bild} f$ im Widerspruch zu $\operatorname{bild} f \subset \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Dies zeigt $\operatorname{bild} f \subset \mathbb{R}^+ \setminus \{0\} \cup \mathbb{R}^- \setminus \{0\}$. Da diese beiden Mengen disjunkt sind, folgt die Behauptung. □

5. Stetige Funktionen auf einem abgeschlossenen, beschränkten Intervall

Satz 5.1. *Es sei $I = [a, b]$, $-\infty < a < b < \infty$, und $f \in C(I, \mathbb{R})$. Dann ist* $\operatorname{bild} f$ *ein abgeschlossenes, beschränktes Intervall.*

Beweis. Wegen des Zwischenwertsatzes wissen wir bereits, daß $\operatorname{bild} f$ ein Intervall ist. Wir zeigen zuerst die Beschränktheit von $A := \{|f(x)| \colon x \in I\}$. Dies hat die Beschränktheit von $\operatorname{bild} f$ zur Folge. Angenommen, A wäre unbeschränkt, dh. es existiert eine Folge $(x_n) \subset I$ mit $|f(x_n)| > n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Die Folge (x_n) ist beschränkt und besitzt daher nach dem Satz von Bolzano Weierstrass IV-3.5 eine konvergente Teilfolge $(x_{\varphi(n)})_{n \geq 1}$. Es sei $x = \lim_{n\to\infty} x_{\varphi(n)}$. Wegen $a \leq x_{\varphi(n)} \leq b$, $n \in \mathbb{N}$, folgt $a \leq x \leq b$, dh. $x \in I$. Aus der Stetigkeit von f ergibt sich dann $f(x) = \lim_{n\to\infty} f(x_{\varphi(n)})$, dh. die Folge $(f(x_{\varphi(n)}))$ ist konvergent, also notwendigerweise beschränkt. Das ist aber ein Widerspruch zu $|f(x_{\varphi(n)})| > \varphi(n)$, $n \in \mathbb{N}$, und $\lim_{n\to\infty} \varphi(n) = \infty$. Es sei $\alpha \in \mathbb{R}$ etwa der linke Randpunkt des Intervalls $\operatorname{bild} f$, dh. $\alpha = \inf f$. Wir zeigen $\alpha \in \operatorname{bild} f$. Dazu wählen wir eine Folge $(y_n)_{n\geq 1} \subset \operatorname{bild} f$ mit $\lim_{n\to\infty} y_n = \alpha$. Dadurch wird eine weitere Folge $(x_n)_{n \geq 1} \subset I$ mit $f(x_n) = y_n$ bestimmt. Wie im Nachweis der Beschränktheit von $\operatorname{bild} f$ schließen wir auf die Existenz einer Teilfolge $(x_{\varphi(n)})$ mit $x := \lim_{n\to\infty} x_{\varphi(n)} \in I$. Aus $f \in C(I, \mathbb{R})$ folgt dann wieder $\alpha = \lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} y_{\varphi(n)} = \lim_{n\to\infty} f(x_{\varphi(n)}) = f(x)$, dh. $\alpha \in \operatorname{bild} f$. □

Definition 5.2. *Es sei $f \in \mathcal{F}(D, \mathbb{R})$.*

i) *$\alpha \in \mathbb{R}$ heißt **Maximum** von f auf D,* $\max f$, $\underset{Def}{\Leftrightarrow} \alpha = \max\{\operatorname{bild} f\}$,
f nimmt in x_0 das Maximum an, wenn $f(x_0) = \max f$.

ii) *$\beta \in \mathbb{R}$ heißt **Minimum** von f auf D,* $\min f$, $\underset{Def}{\Leftrightarrow} \beta = \min\{\operatorname{bild} f\}$,
f nimmt in y_0 das Minimum an, wenn $f(y_0) = \min f$.

Man nennt x_0 bzw. y_0 Maximal- bzw. Minimalstelle von f.

Korollar 5.3 (Weierstraß). Eine stetige Funktion nimmt auf einem abgeschlossenen, beschränkten Intervall Maximum und Minimum an.

Beweis. Es sei $f \in C(D, \mathbb{R})$ und $[a, b] \subset D$. Dann ist auch $f|_{[a,b]}$ stetig. Nach Satz 5.1 ist $\operatorname{bild} f|_{[a,b]} = [m, M]$ für passende $m, M \in \mathbb{R}$, $m \leq M$. Ist also $m = f(x_0)$, $M = f(x_1)$, $x_0, x_1 \in [a, b]$, dann gilt für alle $\xi \in [a, b]$: $f(x_0) \leq f(\xi) \leq f(x_1)$. □

Korollar 5.4. Es sei $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ und $f \in C([a,b],\mathbb{R})$. Gilt $f(x) > 0$ für alle $x \in [a,b]$, dann gibt es eine Konstante $m > 0$, sodaß $f(x) \geq m$ ist für alle $x \in [a,b]$ (man sagt „f ist von Null weg beschränkt “).

Beweis. Es ist $\operatorname{bild} f = [m, M] = [f(x_1), f(x_2)]$ für geeignete x_1, $x_2 \in [a,b]$. Nach Voraussetzung ist $f(x_1) = m > 0$. □

6. Monotonie und Stetigkeit

Die Charakterisierung des Bildbereiches einer stetigen monotonen Funktion auf einem Intervall ist besonders einfach.

Satz 6.1. *Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall mit den Randpunkten $a = \inf I$ und $b = \sup I$ und $f \in C(I,\mathbb{R})$ monoton. Dann ist* $\operatorname{bild} f$ *ein Intervall mit den Randpunkten $\alpha = \inf f$ und $\beta = \sup f$. Ist f sogar streng monoton wachsend, dann sind I und $f(I)$ Intervalle vom selben Typ, also*

$$\alpha \in \operatorname{bild} f \Leftrightarrow a \in I \quad \textit{und} \quad \beta \in \operatorname{bild} f \Leftrightarrow b \in I.$$

Eine analoge Aussage gilt für streng monoton fallende Funktionen.

Beweis. Da f stetig ist, ist $\operatorname{bild} f$ ein Intervall (Zwischenwertsatz). Der weitere Beweis verläuft vollkommen analog zum Beweis von Satz 4.1: Man weist die Inklusion $(\alpha, \beta) \subset \operatorname{bild} f \subset [\alpha, \beta]$ nach (mit geeigneten Modifikationen falls $\alpha, \beta \in \bar{\mathbb{R}}$). Es sei nun f streng monoton wachsend und $\operatorname{bild} f$ links abgeschlossen, dh. $\alpha = \inf f \in \operatorname{bild} f$. Somit gibt es ein $a \in I$ mit $f(a) = \alpha$. Wegen der Injektivität von f folgt

$$\forall y \in I \colon y \neq a \Rightarrow f(y) > f(a),$$

und da f^{-1} ebenfalls streng monoton wächst ergibt sich

$$\forall y \in I \colon y \neq a \Rightarrow y > a, \text{ dh. } a = \min I.$$

I ist somit links abgeschlossen. Umgekehrt setzen wir nun diese Eigenschaft für I voraus, dh. $a = \min I$. Somit gilt $f(x) \geq f(a)$ für alle $x \in I$, dh. $\operatorname{bild} f$ ist links abgeschlossen. Die Behauptung, daß die rechten Randpunkte von $\operatorname{bild} f$ und I beide entweder zu $\operatorname{bild} f$ bzw. I gehören oder nicht, kann analog bewiesen werden. □

Satz 6.2. *Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f \in \mathcal{F}(I,\mathbb{R})$ monoton. Ist* $\operatorname{bild} f$ *ein Intervall, dann ist f stetig.*

Beweis. O.B.d.A sei f monoton wachsend. Wir führen einen Widerspruchsbeweis und nehmen daher an, daß zwar $\operatorname{bild} f$ ein Intervall ist, es aber eine Stelle $x_0 \in I$ gibt, an der f nicht stetig ist, dh. es gibt eine Folge $(x_n) \subset I$ mit

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \text{ und } f(x_n) \not\to f(x_0).$$

Es existiert daher $\varepsilon_0 > 0$, sodaß $|f(x_n) - f(x_0)| > \varepsilon_0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt (warum darf man „>“ behaupten?). Es gibt also eine Teilfolge $(x_{\varphi(n)}) \subset (x_n)$, die einer der beiden Bedingungen

$$f(x_{\varphi(n)}) < f(x_0) - \varepsilon_0 < f(x_0) \text{ oder } f(x_0) < f(x_0) + \varepsilon_0 < f(x_{\varphi(n)}), n \in \mathbb{N},$$

genügt. Es sei z.B. die zweite erfüllt. Da $\operatorname{bild} f$ ein Intervall ist, muß $[f(x_0), f(x_{\varphi(1)})] \subset \operatorname{bild} f$ und daher erst recht $f(x_0)+\varepsilon_0 \in \operatorname{bild} f$ gelten. Es gibt also $\xi \in I$ mit $f(x_0)+\varepsilon_0 = f(\xi)$. Aus $f(x_0) < f(\xi) < f(x_{\varphi(n)})$, $n \in \mathbb{N}$, folgert man wegen der Monotonie von f, daß $x_0 < \xi < x_{\varphi(n)}$, $n \in \mathbb{N}$, zutreffen muß, also gilt auch $x_0 < \xi \leq \lim x_{\varphi(n)} = x_0$, ein Widerspruch. □

Dieses Resultat trifft auch für Funktionen zu, die nicht auf einem Intervall definiert sind.
Satz 1.8 zeigt, daß die strenge Monotonie einer Funktion hinreichend (wegen Beispiel 1.9 aber nicht notwendig) ist für deren Injektivität. Im Raum der stetigen Funktionen allerdings ist diese Bedingung sogar notwendig.

Lemma 6.3. *Es sei $I = [a, b]$, $-\infty < a < b < \infty$. Jede stetige, injektive Abbildung $f \colon I \to \mathbb{R}$ ist streng monoton.*

Beweis. Wegen der Injektivität von f ist $f(a) \neq f(b)$. Wir nehmen an, es sei $f(a) < f(b)$ (anderenfalls ersetzt man f durch $-f$).
1. Schritt: $f(a) < f(x) < f(b)$ für alle $x \in (a, b)$. Angenommen, es gäbe ein $\xi \in (a, b)$ mit $f(\xi) \leq f(a)$ oder $f(\xi) \geq f(b)$. Wir betrachten zuerst den Fall $f(\xi) \leq f(a)$. Da f injektiv ist und $\xi > a$, muß $f(\xi) < f(a)$ gelten. Somit ist $f(a)$ ein Zwischenwert der stetigen Funktion $f|_{[\xi,b]}$. Der Zwischenwertsatz für $f|_{[\xi,b]}$ sichert die Existenz von $\eta \in (\xi, b)$ mit $f(\eta) = f(a)$. Wegen $a < \xi < \eta$ ergibt sich ein Widerspruch zur Injektivität von f, es muß also $f(a) < f(x)$ für alle $x \in (a, b)$ gelten. Analog schließt man die Möglichkeit $f(\xi) \geq f(b)$ aus.
2. Schritt: $x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$ für alle $x, y \in [a, b]$. Die Behauptung ist wahr für $x = a$, $y = b$. Sie ergibt sich in den Fällen $x = a < y < b$, $a < x < y = b$ aus Schritt 1. Schließlich sei $a < x < y < b$. Für das Tripel $a < y < b$ folgt mit Schritt 1: $f(a) < f(y) < f(b)$. Ersetzt man somit in Schritt 1 f durch die stetige Funktion $\tilde{f} := f|_{[a,y]}$ folgt aus $a < x < y$ die Ungleichung $\tilde{f}(a) < \tilde{f}(x) < \tilde{f}(y)$, dh. $f(a) < f(x) < f(y)$. □

Wir erweitern nun den Gültigkeitsbereich dieses Ergebnisses auf beliebige Intervalle:

Satz 6.4. *Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall. Jede stetige, injektive Abbildung $f \colon I \to \mathbb{R}$ ist streng monoton.*

Beweis. Es sei $r, s \in I \colon r < s$ und o.B.d.A $f(r) < f(s)$ und somit f nach Lemma 6.3) streng monoton steigend auf $[r, s]$. Es sei nun $x, y \in I$ und $x < y$ Dann ist f auf $[\min\{r, x\}, \max\{s, y\}]$ streng monoton steigend und somit $f(x) < f(y)$. □

Im Raum der stetigen Funktionen, deren Definitionsbereich ein Intervall ist, sind die injektiven Funktionen also genau die streng monotonen. Es ist naheliegend, die Stetigkeit der Umkehrfunktion zu untersuchen. Es ist ein überraschendes Resultat, daß in diesem Falle die Stetigkeit von f^{-1} automatisch gesichert ist (unabhängig von der Stetigkeit von f).

Satz 6.5 (Satz von der Umkehrfunktion). *Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ streng monoton. Dann existiert die Umkehrfunktion $f^{-1}\colon \operatorname{bild} f \to I$, f^{-1} ist streng monoton (im selben Sinne wie f) und stetig.*

Beweis. Satz 1.8, 6.2. □

Korollar 6.6. Die Logarithmusfunktionen und somit auch die allgemeinen Potenzfunktionen sind stetig.

Oft findet man eine schwächere Formulierung des Umkehrsatzes.

Satz 6.7. *Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f \in C(I, \mathbb{R})$ injektiv. Dann ist $f^{-1}\colon \operatorname{bild} f \to I$ stetig.*

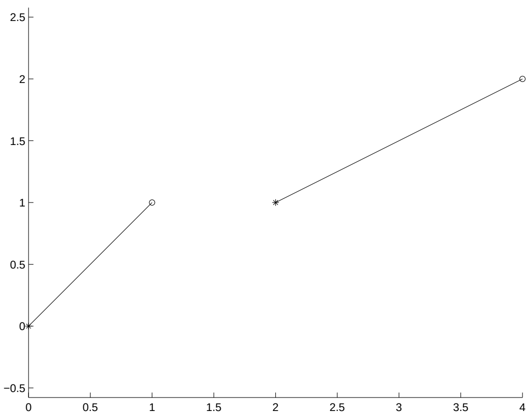
Beweis. Satz 6.4, 6.5. □

Der Satz von der Umkehrfunktion zeigt, daß einzig der Umstand, daß $\operatorname{def} f$ kein Intervall ist, verhindern kann, daß die Umkehrfunktion einer streng monotonen Funktion stetig ist.

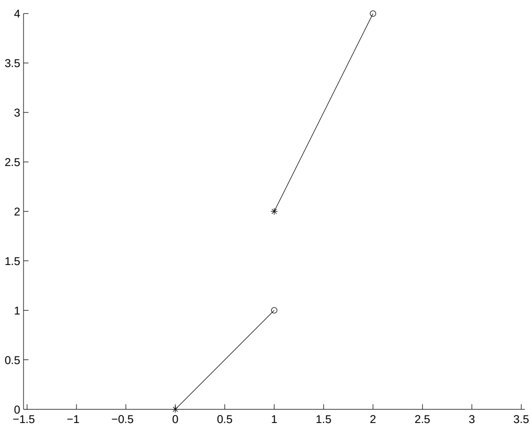
Beispiel 6.8.

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in [0,1), \\ \frac{1}{2}x, & x \in [2,4], \end{cases} \qquad \operatorname{bild} f = [0,1) \cup [1,2]$$

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} x, & x \in [0,1), \\ 2x, & x \in [1,2]. \end{cases}$$



Graph von $f(x)$

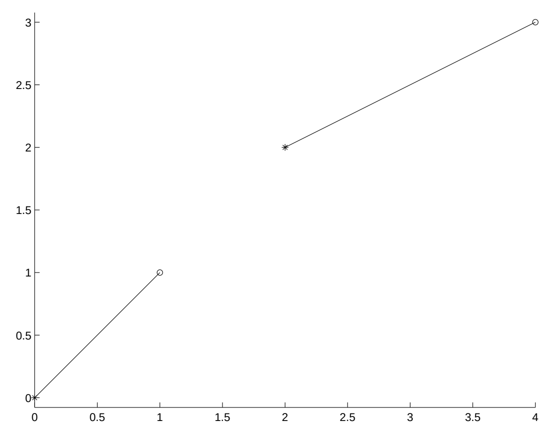


Graph von $f^{-1}(x)$

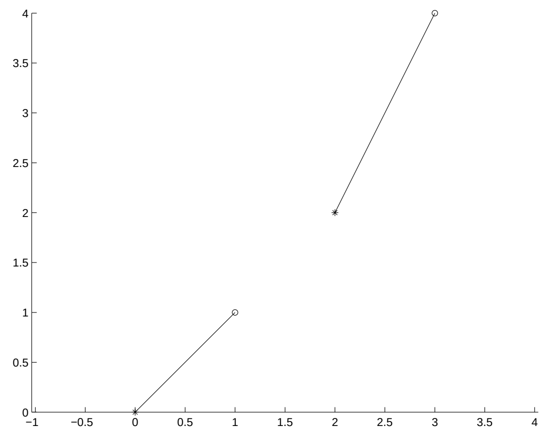
Die Bedingung „$\operatorname{def} f$ ist ein Intervall“ ist jedoch keineswegs notwendig für die Stetigkeit von f^{-1}: Wir ändern Beispiel 6.8 geringfügig ab:

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in [0,1), \\ 1 + \frac{1}{2}x, & x \in [2,4], \end{cases} \qquad f^{-1}(x) = \begin{cases} x, & x \in [0,1), \\ 2x - 2, & x \in [2,3]. \end{cases}$$

Man beachte, daß $f^{-1}(x)$ stetig ist und streng monoton wächst.



Graph von $f(x)$



Graph von $f^{-1}(x)$

7. Grenzwerte reeller Funktionen

In diesem Abschnitt präzisieren wir die Vorstellung, daß die Funktionswerte einer Abbildung f einem Wert F „beliebig" nahekommen, wenn das Argument x gegen eine feste Stelle x_0 rückt. Dazu benötigen wir den Begriff des Häufungspunktes einer Menge.

Definition 7.1. *$D \subset \mathbb{K}$, $D \neq \emptyset$.*

$x_0 \in \mathbb{K}$ heißt ***Häufungspunkt*** *von $D \underset{Def}{\Leftrightarrow} \forall \varepsilon > 0\ \exists x \in D\colon 0 < |x - x_0| < \varepsilon$.*

Ein Häufungspunkt x_0 von D ist also dadurch charakterisiert, daß in *jeder* ε-Umgebung von x_0 ein von x_0 verschiedenes Element von D liegt. Läßt man ε eine Nullfolge durchlaufen, ergibt sich eine weitere Charakterisierung.

Lemma 7.2. *$D \subset \mathbb{K}$, $D \neq \emptyset$. $x_0 \in K$ ist ein Häufungspunkt von D genau dann, wenn es eine Folge $(x_n) \subset D \setminus \{x_0\}$ gibt, die gegen x_0 konvergiert.*

Ein Häufungspunkt einer Menge muß selbst nicht in dieser Menge liegen: z.B. ist $x = 0$ Häufungspunkt von $(0, 1]$. Jeder Punkt eines Intervalles I, das zumindest zwei verschiedene Elemente enthält, ist ein Häufungspunkt von I. Eine endliche Menge besitzt keine Häufungspunkte. Der Grenzwert einer konvergenten Folge (x_n) ist nicht automatisch zugleich ein Häufungspunkt der Folge. Man betrachte etwa eine Folge (x_n) mit $x_n = a$, $n \in \mathbb{N}$, und beachte $\{x_n\colon n \in \mathbb{N}\} = \{a\}$. Zur Unterscheidung bezeichnet man in der Literatur oft Elemente $\xi \in \mathbb{K}$, welche als Grenzwert einer konvergenten Teilfolge einer Folge (x_n) möglich sind, als **Häufungswerte** der Folge (x_n). Sind unendlich viele Glieder einer derartigen Teilfolge von ξ verschieden, dann ist ξ natürlich auch ein Häufungspunkt von (x_n) (genauer: von $\{x_n\colon n \in \mathbb{N}\}$).

Wir betrachten nun die beiden Abbildungen $f, g \in \mathcal{F}(\mathbb{R}\backslash\{0\}, \mathbb{R})$, $f(x) = \frac{x}{|x|}$, $g(x) = \frac{x^3}{|x|}$ und versuchen das qualitativ verschiedene Verhalten von f und g an der Ausnahmestelle $x_0 = 0$ zu beschreiben. Man beachte, daß die Ausnahmestelle ein Häufungspunkt des Definitionsbereiches von f bzw. g ist.

DEFINITION 7.3. *Es sei $D \subset \mathbb{K}$, ferner sei $x_0 \in K$ ein Häufungspunkt von D und $f \in \mathcal{F}(D, K)$.*

i) *$F \in \mathbb{K}$ heißt **Grenzwert** von f an der Stelle $x_0 \in \mathbb{K}$ ($f(x)$ konvergiert nach F für x gegen x_0), $F = \lim_{x\to x_0} f(x) \underset{Def}{\Leftrightarrow}$*
$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in D\colon 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - F| < \varepsilon.$

Für reelle Funktionen, $K = \mathbb{R}$, definieren wir auch einseitige Grenzwerte:

ii) *$L \in \mathbb{R}$ heißt **linksseitiger Grenzwert** von f an der Stelle $x_0 \in \mathbb{R}$, $L = \lim_{x\to x_0^-} f(x) \underset{Def}{\Leftrightarrow} \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in D\colon 0 < x_0 - x < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$,*

iii) *$R \in \mathbb{R}$ heißt **rechtsseitiger Grenzwert** von f an der Stelle $x_0 \in \mathbb{R}$, $R = \lim_{x\to x_0^+} f(x) \underset{Def}{\Leftrightarrow} \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in D\colon 0 < x - x_0 < \delta \Rightarrow |f(x) - R| < \varepsilon$,*

iv) *Schreibweise: $f(x_0^-) := \lim_{x\to x_0^-} f(x)$, $f(x_0^+) := \lim_{x\to x_0^+} f(x)$ oder auch $f(x_0^-) := \lim_{x\uparrow x_0} f(x)$, $f(x_0^+) := \lim_{x\downarrow x_0} f(x)$*

Wie in Satz IV-1.5 weist man die Eindeutigkeit dieser Grenzwerte nach. Man beachte, daß es in dieser Definition vollkommen bedeutungslos ist, ob f an der Stelle x_0 definiert ist. Wenn x_0 in D liegt, dann spielt der Funktionswert $f(x_0)$ keine Rolle bei der Berechnung des (einseitigen) Grenzwertes. Leicht rechnet man nach, daß im vorigen Beispiel $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 1$, $\lim_{x\to 0^-} f(x) = -1$ und $\lim_{x\to 0^+} g(x) = \lim_{x\to 0^-} g(x) = 0$ ist. Wir wären zu demselben Ergebnis gelangt, hätte man z.B. $f(0) = 0$ und $g(0) = 1$ vereinbart.

Man kann die eben eingeführten Grenzwerte einer Funktion auch durch Folgen charakterisieren (wir beschränken uns auf $K = \mathbb{R}$).

SATZ 7.4. *Es sei $D \subset \mathbb{K}$, $f \in \mathcal{F}(D, \mathbb{K})$ und $x_0 \in \mathbb{K}$ ein Häufungspunkt von D.*

i) *$F = \lim_{x\to x_0} f(x) \Leftrightarrow \forall (x_n) \subset D \setminus \{x_0\}\colon \lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n) = F$.*
Für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ gilt ferner

ii) *$L = \lim_{x\to x_0^-} f(x) \Leftrightarrow \forall (x_n) \subset D \cap (-\infty, x_0)\colon \lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n) = L$.*
$R = \lim_{x\to x_0^+} f(x) \Leftrightarrow \forall (x_n) \subset D \cap (x_0, \infty)\colon \lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n) = R$.

BEWEIS. Man vergleiche den Beweis zu Satz 3.5 $\square$

LEMMA 7.5. *Es sei $D \subset \mathbb{R}$, $f \in \mathcal{F}(D, \mathbb{R})$ und $x_0 \in \mathbb{R}$ ein Häufungspunkt von D. Äquivalent sind:*
1) Es existiert $\lim_{x\to x_0} f(x)$.

2) Es existieren der rechts– und linksseitige Grenzwert und sie sind gleich, d.h. $f(x_0^+) = f(x_0^-)$.

Beweis. „$\Rightarrow$“ Es seien $(x_n) \subset D \cap (-\infty, x_0)$ und $(y_n) \subset D \cap (x_0, \infty)$ konvergente Folgen mit $x_n \to x_0$ und $y_n \to x_0$. Nach Voraussetzung gibt es ein $F \in \mathbb{R}$ mit $F = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} f(y_n)$ (Satz 7.4).
„$\Leftarrow$“ Es bezeichne F den gemeinsamen Wert des links- und rechtsseitigen Grenzwertes von f und $(x_n) \subset D \setminus \{x_0\}$ eine beliebige nach x_0 konvergierenden Folge. Sind nur endlich viele Glieder dieser Folge kleiner bzw. größer als x_0, folgt unmittelbar $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = F$. Sind unendlich viele Glieder der Folge (x_n) kleiner und unendlich viele größer als x_0 bildet man die beiden Teilfolgen $(x_{\varphi(n)}) \subset (x_n), (x_{\psi(n)}) \subset (x_n)$, in welche genau die Folgenglieder mit $x_{\varphi(n)} < x_0$ bzw. $x_{\psi(n)} > x_0$ aufgenommen werden. Wegen $\lim_{n\to\infty} x_{\varphi(n)} = \lim_{n\to\infty} x_{\psi(n)} = x_0$ folgt aus der Voraussetzung somit $\lim_{n\to\infty} f(x_{\varphi(n)}) = \lim_{n\to\infty} f(x_{\psi(n)}) = F$ und daraus auch die Konvergenz von $(f(x_n))$. □

Wie bei Folgen kann man die bloße Existenz eines (einseitigen) Grenzwertes einer Funktion feststellen, ohne bereits seinen Wert vermuten zu müssen. Wir beschränken uns auf den Grenzwert und überlassen die notwendigen Modifikationen für einseitige Grenzwerte dem Leser. Wir erinnern an die Schreibweise $U_\delta(x_0) = \{x \in \mathbb{R} : |x - x_0| < \delta\}$.

Satz 7.6 (Cauchykriterium). *Es sei $D \subset \mathbb{K}$, $f \in \mathcal{F}(D, \mathbb{K})$ und $x_0 \in \mathbb{K}$ ein Häufungspunkt von D. Die Funktion $f \in \mathcal{F}(D, \mathbb{R})$ hat in x_0 genau dann einen Grenzwert, wenn folgendes gilt:*

$$(*) \qquad \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x, \tilde{x} \in D : x, \tilde{x} \in U_\delta(x_0) \setminus \{x_0\} \Rightarrow |f(x) - f(\tilde{x})| < \varepsilon.$$

Beweis. „$\Rightarrow$“ Man kopiere den Beweis von Satz IV-3.7.
„$\Leftarrow$“ Es sei $(x_n) \subset D$ konvergent gegen x_0. Zu $\varepsilon > 0$ sei $\delta = \delta(\varepsilon)$ durch die Cauchy Bedingung $(*)$ festgelegt. Wegen $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ gibt es einen Index N_δ, sodaß $x_n \in U_\delta(x_0)$ für alle $n \geq N_\delta$ zutrifft. Somit gilt nach $(*)$ auch $|f(x_n) - f(x_m)| < \varepsilon$ für alle $n, m \geq N_\delta$, dh. $(f(x_n))$ ist eine Cauchy Folge und besitzt daher einen Grenzwert F, der allerdings noch von der Wahl der Folge (x_n) abhängen könnte. Wir zeigen jedoch: F ist der Grenzwert von f an der Stelle x_0. Für $x \in U_\delta(x_0) \setminus \{x_0\}$ ergibt sich nämlich wieder mit $(*)$

$$|f(x) - F| \leq |f(x) - f(x_{N_\delta})| + |f(x_{N_\delta}) - F| \leq \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon.$$

□

Ohne Beweis teilen wir mit, daß für das Rechnen mit Grenzwerten bzw. einseitigen Grenzwerten von Funktionen Rechenregeln gelten, die analog sind den Regeln für stetige Funktionen:

Regel I: Gilt $\lim_{x\to x_0} f(x) = \alpha$, $\lim_{x\to x_0} g(x) = \beta$, so gilt auch

$$\lim_{x\to x_0} (f(x) + g(x)) = \alpha + \beta,$$

$$\lim_{x\to x_0} f(x)g(x) = \alpha\beta,$$

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\alpha}{\beta} \quad (\beta \neq 0).$$

Regel II: Es seien $f \in \mathcal{F}(D, E)$, $g \in \mathcal{F}(E, \mathbb{K})$, $\operatorname{bild} f \subset E \subset \mathbb{K}$ und $x_0 \in \mathbb{K}$. Weiters gelte $\lim_{x\to x_0} f(x) = \alpha$ und g sei stetig in α. Dann gilt

$$\lim_{x\to x_0} (g \circ f)(x) = g(\alpha).$$

Regel III: Die Abbildungen f, $g \in \mathcal{F}(D, \mathbb{K})$ mögen Grenzwerte in $x_0 \in D$ besitzen. Gilt $f(x) \leq g(x)$ für alle $x \neq x_0$ aus einer Umgebung von x_0, dann folgt

$$\lim_{x\to x_0} f(x) \leq \lim_{x\to x_0} g(x).$$

Satz 7.7. *Eine beschränkte monotone Funktion $f\colon (a, b) \to \mathbb{R}$ besitzt an jeder Stelle $x_0 \in [a, b]$ alle einseitigen Grenzwerte, welche sinnvoll sind.*

Beweis. Wir betrachten eine monoton wachsende Funktion f und $x_0 \in [a, b)$. Wegen der Beschränktheit von f existiert $\alpha = \inf\{f(x) \colon x > x_0\}$. Wir zeigen $f(x_0^+) = \alpha$. Zu $\varepsilon > 0$ gibt es $\xi \in (x_0, b]$ mit $\alpha \leq f(\xi) < \alpha + \varepsilon$. Aus der Monotonie von f folgt für alle $x \in (x_0, \xi)$:

$$\alpha \leq f(x) \leq f(\xi) < \alpha + \varepsilon, \text{ dh. } |f(x) - \alpha| < \varepsilon.$$

Analog zeigt man die Existenz des linksseitigen Grenzwertes in $x_0 \in (a, b]$. □

Wegen der Analogie der Definition des Grenzwertes von f an einer Stelle x_0 und der Definition der Stetigkeit ist es weiter nicht überraschend, daß zwischen diesen beiden Konzepten ein enger Zusammenhang besteht:

Satz 7.8. *Eine Abbildung $f\colon [a, b] \to \mathbb{K}$ ist an der Stelle $x_0 \in [a, b]$ genau dann stetig, wenn $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$, dh. $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lim_{x\to x_0^+} f(x) = f(x_0)$ gilt.*

In den Randpunkten des Intervalles ist natürlich nur einer der beiden einseitigen Grenzwerte sinnvoll.
Eine Abbildung $f\colon [a, b] \to \mathbb{K}$ ist an einer Stelle $x_0 \in [a, b]$ daher genau dann unstetig, wenn einer der folgenden Fälle vorliegt:

- x_0 ist eine **hebbare Unstetigkeit**: $f(x_0^+) = f(x_0^-) \neq f(x_0)$.
- x_0 ist eine **Sprungstelle**: $f(x_0^+) \neq f(x_0^-)$.
- x_0 ist eine **Unstetigkeit 2. Art**: mindestens einer der beiden einseitigen Grenzwerte existiert nicht.

Manchmal ist es sinnvoll, nur einseitige Annäherungen an x_0 zuzulassen, z.B. wenn x_0 ein Randpunkt von D ist. Dies motiviert folgende Modifikation des Stetigkeitsbegriffes:

Definition 7.9. *Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{K})$.*
f heißt ***linksseitig (rechtsseitig) stetig*** *in $x_0 \in I \underset{Def}{\Leftrightarrow} f|_{(-\infty,x_0]\cap I}$ $(f|_{[x_0,\infty)\cap I})$ ist stetig in x_0.*

Wir erhalten aus Satz 7.8:

Korollar 7.10. Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{K})$.
i) f ist linksseitig (rechtsseitig) stetig in $x_0 \in I$ genau dann, wenn $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = f(x_0)$ $(\lim_{x\to x_0^+} f(x) = f(x_0))$.
ii) f ist stetig in x_0 genau dann, wenn f linksseitig und rechtsseitig stetig in x_0 ist.

Betrachten wir die Abbildungen

$$f\colon \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} & \\ \frac{x}{|x|}, & x \neq 0\,, \\ 0, & x = 0 \end{cases} \qquad g\colon \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} & \\ \frac{x^3}{|x|}, & x \neq 0\,, \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

so hat f in $x = 0$ eine Sprungstelle und g eine hebbare Unstetigkeit. Diese Bezeichnung rührt daher, daß man durch geeignete Abänderung des Wertes von g in $x0$ die Unstetigkeit in 0 beheben kann (im Beispiel: $g(0) := 0$).

Wir sind nun auch in der Lage folgendes Problem zu lösen: Es sei $f \in C(D, \mathbb{K})$ und x_0 ein Häufungspunkt von D, $x_0 \notin D$. Gibt es eine stetige Fortsetzung F von f auf $D \cup \{x_0\}$, dh. $F \in C(D \cup \{x_0\}, \mathbb{K})$ und $F|_D = f$?

Satz 7.11. *Es sei $f \in C(D, \mathbb{K})$ und x_0 ein Häufungspunkt von D, $x_0 \notin D$. f besitzt genau dann eine stetige Fortsetzung F auf $D \cup \{x_0\}$, wenn der Grenzwert von f an der Stelle x_0 existiert. Die stetige Fortsetzung ist eindeutig bestimmt:*

$$F\colon \begin{cases} D \cup \{x_0\} \to \mathbb{R} & \\ x \mapsto f(x), & x \in D, \\ x \mapsto \lim\limits_{x\to x_0} f(x), & x = x_0. \end{cases}$$

Beweis. „$\Rightarrow$" Aus dem Folgenkriterium für die Stetigkeit von F an x_0 ergibt sich die Existenz des Grenzwertes von f in x_0: $(x_n) \subset D$, und $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} F(x_n) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = F(x_0)$. Da der Grenzwert von f in x_0 eindeutig bestimmt ist, folgt damit auch die Eindeutigkeit der Fortsetzung.
„$\Leftarrow$" Es existiere nun umgekehrt der Grenzwert von f an der Stelle x_0 und $(x_n) \subset D \cup \{x_0\}$ konvergiere gegen x_0. Es genügt, die Stetigkeit von F in x_0 nachzuweisen. Dies gelingt, indem man die Folge (x_n) in zwei Teilfolgen $(x_{\varphi(n)})$ und $(x_{\psi(n)})$ zerlegt mit $x_{\varphi(n)} \neq x_0$ und $x_{\psi(n)} = x_0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Die Folge $(f(x_{\varphi(n)}))$ konvergiert gegen $\lim_{x\to x_0} f(x)$ nach Voraussetzung, $(F(x_{\psi(n)}))$ ist eine konstante Folge. □

Nach Lemma 2.4 ist jede reelle Zahl ein Häufungspunkt von $\mathbb{Q}$. Eine unmittelbare Konsequenz des vorigen Satzes ist also, daß eine auf $D \subset \mathbb{R}$ stetige Funktion durch ihre Werte auf $\mathbb{Q} \cap D$ bereits eindeutig festgelegt wird:

Korollar 7.12. Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f, g \in C(I, \mathbb{R})$. Stimmen f und g auf $I \cap \mathbb{Q}$ überein, dann gilt bereits $f = g$.

Läßt im vorigen Satz x_0 nur eine *einseitige* Approximation durch Werte in D zu (z.B. wenn x_0 ein Randpunkt des Definitionsbereiches ist), kommt als Funktionswert von F in x_0 natürlich nur der entsprechende *einseitige* Grenzwert von f in Frage.

Beispiel 7.13. Wir betrachten die Funktion

$$f\colon \begin{cases} \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{x^2-1}{x-1} \end{cases}$$

Auf $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ ist $f(x) = x + 1$ und somit $\lim_{x\to 1} f(x) = 2$. f läßt sich also stetig auf $\mathbb{R}$ fortsetzen, wenn wir $f(1) = 2$ vorschreiben. Die Fortsetzung F ist die Abbildung $x \mapsto x + 1$.

Wir beenden diesen Abschnitt mit zwei Erweiterungen des Grenzwertbegriffes:

Definition 7.14. *Es sei $f \in \mathcal{F}(D, \mathbb{R})$, $D \subset \mathbb{R}$, nach oben unbeschränkt.*

*$L \in \mathbb{R}$ heißt **Grenzwert** von f bei ∞, $\lim_{x\to\infty} f(x) \underset{Def}{\Leftrightarrow}$*

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \xi \in \mathbb{R} \; \forall x \in D\colon x > \xi \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$.

Entsprechend definiert man den Grenzwert bei $-\infty$.

Beispiel 7.15. $\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x+1} - \sqrt{x}) = 0$. Zum Beweis benützen wir die für $x > 0$ gültige Abschätzung

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{x} = \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} < \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Für $x > \xi = \frac{1}{4\varepsilon^2}$ folgt damit $|\sqrt{x+1} - \sqrt{x}| < \varepsilon$.

Die Untersuchung der Grenzwerte von f bei Unendlich kann durch die Substitution $x \mapsto \xi = \frac{1}{x}$ auf die Untersuchung einseitiger Grenzwerte bei 0 zurückgeführt werden: Setzt man $\varphi(x) = f(\frac{1}{x})$, falls $\frac{1}{x} \in \operatorname{def} f$, dann gilt $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{\xi\to 0^+} \varphi(\xi)$.

Definition 7.16. *Es sei $f \in \mathcal{F}(D, \mathbb{R})$ und $x_0 \in \mathbb{R}$ ein Häufungspunkt von D. f hat an der Stelle x_0 den uneigentlichen Grenzwert ∞,*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty \Leftrightarrow \forall \xi > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in D\colon 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) > \xi.$$

8. Funktionenfolgen und Funktionenreihen

Wir wenden uns nun einer weiteren, überaus flexiblen Methode zu, aus bekannten Funktionen neue Funktionen aufzubauen. Es sei (f_n) eine Folge von *Funktionen* auf D. Existiert für alle $x \in D$ der Grenzwert $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$, wird durch $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$, $x \in D$, eine Abbildung auf D erklärt. Von Interesse sind die Eigenschaften der Grenzfunktion, insbesondere wollen wir Bedingungen finden, die gewährleisten, daß sich die Stetigkeit von f_n auf die Grenzfunktion überträgt. Zuerst untersuchen wir den angedeuteten Grenzprozeß:

Definition 8.1. *Es sei* $(f_n)_{n\geq 1} \subset \mathcal{F}(D,\mathbb{R})$ *eine Folge von Funktionen.*

(f_n) *heißt* ***punktweise konvergent*** *gegen die Grenzfunktion* $f \in \mathcal{F}(D,\mathbb{R})$, $\lim_{n\to\infty} f_n = f$, *pw.* $\underset{Def}{\Leftrightarrow}$

i) $\forall x \in D\colon \exists \lim_{n\to\infty} f_n(x)$

ii) $\forall x \in D\colon f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$

Wegen der Eindeutigkeit des Grenzwertes der Zahlenfolgen $(f_n(x))$ ist auch die Grenzfunktion eindeutig bestimmt. Aus der Definition folgt auch, daß die Funktionenfolge (f_n) genau dann punktweise konvergiert, wenn für alle $x \in D$ die Folge der Bilder $(f_n(x))$ eine Cauchy-Folge ist. Die Rechenregeln für Grenzwerte in $\mathbb{R}$ übertragen sich auf punktweise konvergente Funktionenfolgen.

Beispiel 8.2. (1) $D = [0,1]$, $f_n(x) = x^n$. Die Grenzfunktion ist

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0,1), \\ 1, & x = 1. \end{cases}$$

Zum Beweis greift man auf Satz IV-1.10 zurück. Man beachte, daß f unstetig, jedes f_n aber stetig ist. Wir merken an, daß $0 \leq x^n < \varepsilon < 1$ für alle $x \in [0,1)$, und für alle $n > \left[\frac{\log\varepsilon}{\log x}\right] + 1 =: N(\varepsilon,x)$ gilt. $N(\varepsilon,x)$ ist optimal.

(2) $D = [0,2]$.

$$f_n(x) = \begin{cases} nx, & x \in [0,\frac{1}{n}], \\ 2-nx, & x \in (\frac{1}{n},\frac{2}{n}], \\ 0, & x \in (\frac{2}{n},2]. \end{cases}$$

Es gilt: $\lim_{n\to\infty} f_n = 0$. Zum Beweis fixieren wir ein beliebiges $x \in (0,2]$ und bestimmen $N_x \geq \frac{2}{x}$. Für alle $n \geq N_x$ ist dann $f_n(x) = 0$. Je kleiner x gewählt wurde, desto größer ist also N_x. Man beachte, daß in diesem Beispiel sowohl f, als auch jede approximierende Funktion f_n stetig ist.

(3) $D = \mathbb{R}$, $f_n(x) = \frac{1}{n}[nx]$, $n \in \mathbb{N}$ (vgl. Satz II-6.10). Wir behaupten: $\lim_{n\to\infty} f_n = id$. Für jedes $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}$ gibt es $k \in \mathbb{N}$ mit

$$[nx] = k \Leftrightarrow k \leq nx < k+1 \Leftrightarrow \frac{k}{n} \leq x < \frac{k+1}{n}.$$

Somit folgt für $x \in [\frac{k}{n},\frac{k+1}{n})$, $\varepsilon > 0$,

$$|x - f_n(x)| = |x - \frac{1}{n}[nx]| = |x - \frac{k}{n}| < \frac{1}{n} < \varepsilon.$$

Die letzte Ungleichung gilt für alle $n \geq N(\varepsilon) > \frac{1}{\varepsilon}$. In diesem Beispiel sind die approximierenden Funktionen f_n unstetig, trotzdem ist die Grenzfunktion stetig.

(4) $D = \mathbb{R}^+$, $f_n(x) = \frac{x}{1+nx}$. Die Abschätzung für alle $x \in \mathbb{R}^+$, $\varepsilon > 0$

$$0 \leq f_n(x) \leq \frac{1}{n}\frac{nx}{1+nx} \leq \frac{1}{n} < \varepsilon,$$

gültig für $n \geq N(\varepsilon) > \frac{1}{\varepsilon}$, zeigt $\lim_{n\to\infty} f_n = 0$. In diesem Beispiel sind alle f_n und die Grenzfunktion f stetig.

Diese Beispiele illustrieren, daß der punktweise Grenzwert stetiger Funktionen nicht notwendig stetig sein muß. Umgekehrt kann eine Folge unstetiger Funktionen einen stetigen Grenzwert besitzen. Worauf läuft die Stetigkeit der Grenzfunktion an einer Stelle $x_0 \in D$ eigentlich hinaus? Es sei $(f_n) \subset C(D, \mathbb{R})$, $f = \lim f_n$, $(x_n) \subset D$: $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$. Nach Satz 3.5 impliziert die Stetigkeit von f in x_0: $f(x_0) = \lim_{k\to\infty} f(x_k)$, dh.

$$f(x_0) = \lim_{k\to\infty} \left[\lim_{n\to\infty} f_n(x_k)\right] = \lim_{n\to\infty} \left[\lim_{k\to\infty} f_n(x_k)\right] = \lim_{n\to\infty} f_n(x_0).$$

Die Stetigkeit der Grenzfunktion wäre also gewährleistet, wenn die Vertauschung der beiden Grenzwerte gerechtfertigt wäre. Eine hinreichende Bedingung dafür ist nach Satz IV-6.9 z.B. die gleichmäßige Konvergenz der Folge $(f_n(x_k))_{n\geq 1}$ bezüglich k. Dies führt zu folgendem, stärkeren Konvergenzbegriff (vgl. Definition IV-6.7):

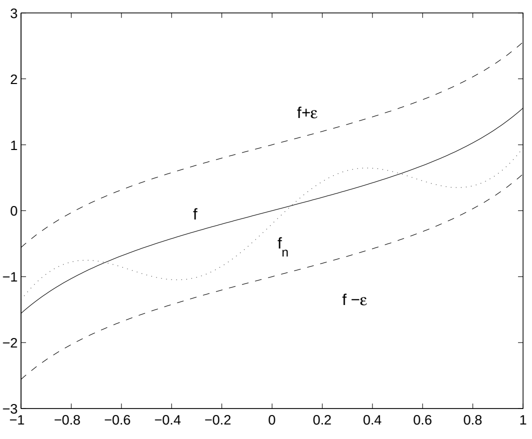
Definition 8.3. *$(f_n)_{n\geq 1} \subset \mathcal{F}(D, \mathbb{R})$ sei eine Funktionenfolge und $f \in \mathcal{F}(D, \mathbb{R})$. (f_n) heißt* ***gleichmäßig konvergent*** *gegen die Grenzfunktion f, $\lim_{n\to\infty} f_n = f$, glm., $\underset{Def}{\Leftrightarrow}$*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}\ \forall x \in D\ \forall n \geq N(\varepsilon) \colon |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

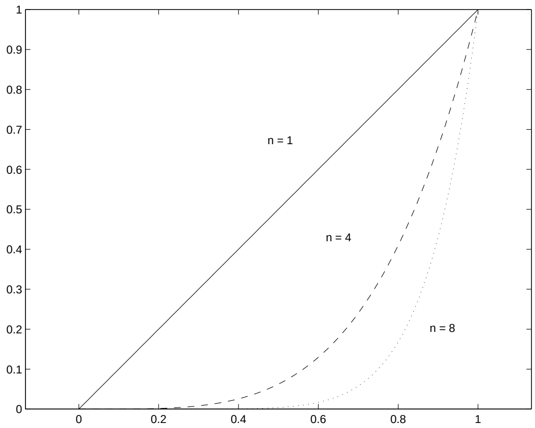
Wir erinnern: Punktweise Konvergenz von (f_n) gegen f bedeutet

$$\forall \varepsilon > 0\ \forall x \in D\ \exists N(\varepsilon, \boldsymbol{x})\ \forall n \geq N(\varepsilon, x) \colon |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

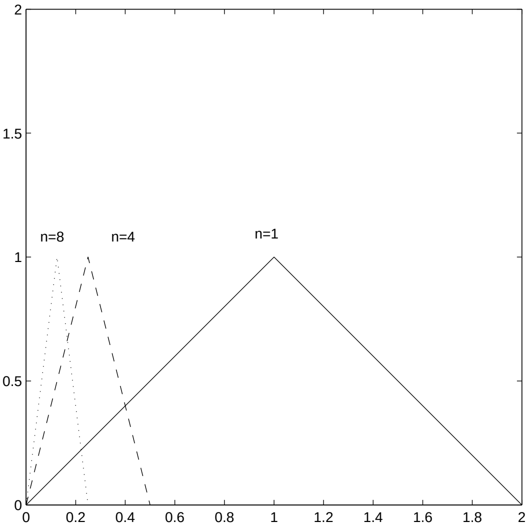
Man beachte die Reihenfolge der Quantoren! Die Folge (f_n) konvergiert also gleichmäßig genau dann, wenn ein Index $N(\varepsilon)$ **unabhängig** von $x \in D$ gefunden werden kann, sodaß sämtliche Funktionswerte von f_n, $n \geq N(\varepsilon)$, in einem „ε-Schlauch" um f liegen.



Die Folge (f_n) konvergiert demnach *nicht* gleichmäßig gegen f genau dann, wenn



Beispiel 1



Beispiel 2

$$\exists \varepsilon_0 > 0\ \forall n \in \mathbb{N}\ \exists x_n \in D\ \exists k \geq n\colon |f_k(x_n) - f(x_n)| \geq \varepsilon_0$$

$$\Leftrightarrow$$

$$(*) \qquad \exists \varepsilon_0 > 0 \exists (f_{\varphi(n)}) \subset (f_n) \exists (x_n)\colon |f_{\varphi(n)}(x_n) - f(x_n)| \geq \varepsilon_0.$$

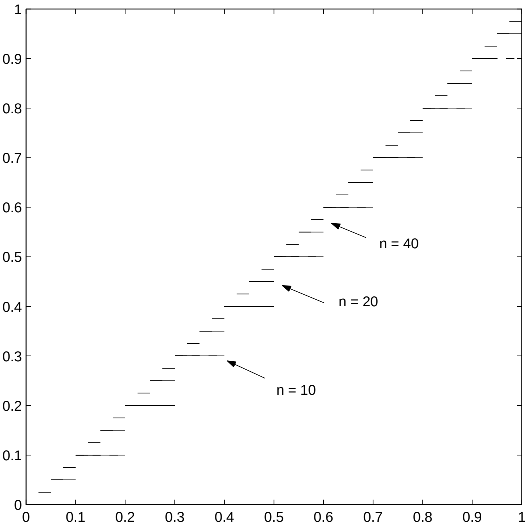
Betrachten wir die Funktionenfolgen in Beispiel 8.2: Die Folgen in (3) und (4) sind gleichmäßig konvergent, jene in (1) und (2) konvergieren nicht gleichmäßig: Man verifiziere die Bedingung $(*)$ mit folgender Wahl:
8.2-(1): $\varepsilon_0 = \frac{1}{4}$, $\varphi(n) = n$, $x_n = 1 - \frac{1}{n}$, $n \geq 2$:

$$f_n(x_n) = (1 - \frac{1}{n})^n = \frac{1}{(1 + \frac{1}{n-1})^n} \overset{\text{IV-Beispiel 3.4}}{\geq} \frac{1}{4}$$

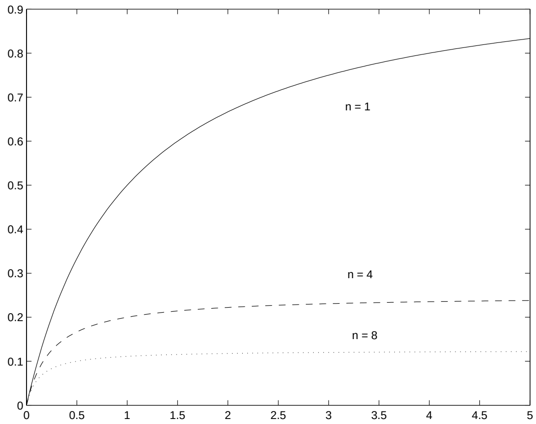
8.2-(2): $\varepsilon_0 = \frac{1}{2}$, $\varphi(n) = n$, $x_n = \frac{1}{n}$, $n \geq 1$: $f_n(x_n) = 1$.
In den folgenden Plots ist die nicht gleichmäßige Konvergenz in den Beispielen (1) und (2), bzw. die gleichmäßige Konvergenz in den Beispielen (3) und (4) deutlich erkennbar:
Es ist klar, daß als Grenzfunktion bei gleichmäßiger Konvergenz nur jene Funktion in Frage kommt, die durch die punktweise Konvergenz bestimmt wird. Wie bei gewöhnlichen Zahlenfolgen kann auch die gleichmäßige Konvergenz einer Funktionenfolge durch eine Cauchy Bedingung charakterisiert werden. Diese hat wieder den Vorteil, daß ihr Nachweis nicht die Kenntnis der Grenzfunktion bereits voraussetzt.

Satz 8.4. *Es sei $(f_n)_{n\geq 1} \subset \mathcal{F}(D, \mathbb{R})$. Die Folge (f_n) ist genau dann gleichmäßig konvergent, wenn (f_n) eine* **gleichmäßige Cauchy Folge** *in $\mathcal{F}(D, \mathbb{R})$ bildet, dh.*

$$(*) \qquad \forall \varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon)\ \forall x \in D\ \forall n, m \geq N(\varepsilon)\colon |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon.$$



Beispiel 3



Beispiel 4

Beweis. „$\Rightarrow$" Man imitiere den Beweis zu Satz IV-3.7.
„$\Leftarrow$" Es sei (f_n) eine gleichmäßige Cauchy Folge, insbesondere ist dann $(f_n(x))$ für jedes $x \in D$ eine Cauchy Folge in $\mathbb{R}$, also konvergent. Wir bezeichnen den Grenzwert mit $f(x)$. Die Folge (f_n) konvergiert also bereits punktweise gegen f. Wir weisen nun die Gleichmäßigkeit der Konvergenz von f_n gegen f nach: Hält man n und x in der Cauchy Bedingung $(*)$ fest, ergibt sich mit Hilfe von Korollar IV-2.6 (oder auch Beispiel 3.7-5)

$$\lim_{m\to\infty} |f_n(x) - f_m(x)| = |f_n(x) - f(x)| \le \varepsilon.$$

Diese Abschätzung gilt für alle $x \in D$ und $n \ge N(\varepsilon)$. $\square$

Satz 8.5. *Die Folge $(f_n) \subset \mathcal{F}(D, \mathbb{R})$ konvergiere gleichmäßig gegen $f \in \mathcal{F}(D, \mathbb{R})$. Ist jede Abbildung f_n in $x_0 \in D$ stetig, dann ist auch f in x_0 stetig. Gilt insbesondere $(f_n) \subset C(D, \mathbb{R})$, dann ist f stetig.*

Beweis. Dies folgt zwar aus Satz IV-6.9, es ist jedoch lehrreich, die Behauptung direkt zu beweisen: Wir schreiben $f(x) - f(x_0)$ in der Form

$$f(x) - f(x_0) = (f(x) - f_n(x)) + (f_n(x) - f_n(x_0)) + (f_n(x_0) - f(x_0)).$$

Da (f_n) gleichmäßig gegen f konvergiert, gibt es zu $\varepsilon > 0$ einen Index $N(\varepsilon)$, sodaß $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ für alle $x \in D$ und für alle $n \ge N(\varepsilon)$ gilt. Wir betrachten nun eine feste Funktion f_n mit $n \ge N(\varepsilon)$. Wegen der Stetigkeit von f_n in x_0 kann man zu $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ bestimmen, sodaß $|f_n(x) - f_n(x_0)| < \varepsilon$ falls $x \in U_\delta(x_0)$. Für alle $x \in U_\delta(x_0)$ gilt daher

$$|f(x) - f(x_0)| \le |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)| < 3\varepsilon.$$

$\square$

Dieser Satz ist auch von Nutzen beim Nachweis, daß bestimmte Grenzwerte nicht gleichmäßig sind. Z.B. kann die Konvergenz in Beispiel 8.2-(1) nicht gleichmäßig sein, da die Grenzfunktion f unstetig, die approximierenden Funktionen f_n jedoch stetig sind.
Eine teilweise Umkehrung dieses Satzes bringt folgendes Resultat, welches auf U. Dini zurückgeht. Der Beweis erfordert allerdings Hilfsmittel, die uns derzeit noch nicht zur Verfügung stehen.

Satz 8.6 (Dini). *Es sei $I = [a, b]$ und $(f_n) \subset C(I, \mathbb{R})$ und (f_n)* ***konvergiere monoton*** *gegen f, dh. $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$, und $f_n(x) \le f_{n+1}(x)$ (bzw. $f_n(x) \ge f_{n+1}(x)$) für alle $x \in I$ und $n \in \mathbb{N}$. Ist die Grenzfunktion stetig, dann ist die Konvergenz gleichmäßig.*

Der Satz von Dini ist falsch, wenn man auch nur auf eine der Voraussetzungen verzichtet. In den folgenden Beispielen sind jeweils alle Voraussetzungen bis auf eine einzige Ausnahme erfüllt, die Konvergenz gegen die Grenzfunktion ist jeweils *nicht* gleichmäßig. Wir überlassen diesen Nachweis dem Leser und notieren nur die Voraussetzung, die verletzt wird:

Beispiel 8.7.
(1) $I = [0, 1]$, $f_n(x) = 1 - x^n$. Die Grenzfunktion $f(x) = 1$ für $x \in [0, 1)$, $f(1) = 0$, ist unstetig.
(2) $I = \mathbb{R}$, $f_n(x) = -\frac{x^2}{n}$. Der Definitionsbereich ist kein abgeschlossenes und **beschränktes** Intervall.
(3) $I = [0, 1]$, $f_n(x) = 0$, $0 < x < \frac{1}{n}$, $f_n(x) = 1$, $x \in \{0\} \cup [\frac{1}{n}, 1]$. Die Funktionen f_n sind unstetig.
(4) $I = [0, 2]$, $f_n(x) = 0$, $x \in (\frac{2}{n}, 2]$, $f_n(x) = n^2x^2 - 2nx$, $x \in [0, \frac{2}{n}]$. Die Konvergenz von (f_n) gegen 0 ist nicht monoton.

Wir betrachten nun Funktionenreihen $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$, die natürlich aufzufassen sind als Folgen von Partialsummen $(s_n)_{n\ge1}$, $s_n = \sum_{i=1}^{n} f_i$. Somit gibt es auch für Funktionenreihen zwei natürliche Konvergenzbegriffe:

Definition 8.8. *Es sei $(f_n)_{n\ge1} \subset \mathcal{F}(D, \mathbb{R})$ und $(s_n)_{n\ge1} \subset \mathcal{F}(D, \mathbb{R})$ die Folge der n-ten Partialsummen $s_n = \sum_{i=1}^{n} f_i$.*

i) *Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ konvergiert* ***punktweise*** *gegen $f \in \mathcal{F}(D, \mathbb{R})$, $\sum_{n=1}^{\infty} f_n = f$, pw. $\underset{Def}{\Leftrightarrow} \lim_{n\to\infty} s_n = f$ punktweise.*
ii) *Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ konvergiert* ***gleichmäßig*** *gegen $f \in \mathcal{F}(D, \mathbb{R})$, $\sum_{n=1}^{\infty} f_n = f$ glm. $\underset{Def}{\Leftrightarrow} \lim_{n\to\infty} s_n = f$ gleichmäßig.*
iii) *Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ konvergiert punktweise (gleichmäßig) $\underset{Def}{\Leftrightarrow} \exists f \in \mathcal{F}(D, \mathbb{R}) : \sum_{n=1}^{\infty} f_n = f$ punktweise (gleichmäßig).*

Satz 8.5 läßt sich auch für Funktionenreihen formulieren:

Satz 8.9. *Es sei $(f_n) \subset \mathcal{F}(D, \mathbb{R})$. Die Folge der Partialsummen (s_n), $s_n = \sum_{i=1}^{n} f_i$, konvergiere* gleichmäßig *gegen f. Sind alle Abbildungen f_n in $x_0 \in D$ stetig, dann ist* *auch* $f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$ *in* x_0 *stetig. Gilt insbesondere* $(f_n) \subset C(D, \mathbb{R})$*, dann ist auch* f *stetig.*

Wir überlassen es dem Leser, das Cauchy Kriterium 8.4 für Funktionenreihen anzugeben. Eine überaus nützliche *hinreichende* Bedingung für (absolute) gleichmäßige Konvergenz ist folgende Adaptation des Vergleichskriteriums:

Satz 8.10 (Weierstrass m-Test). *Es sei* $(f_n) \subset \mathcal{F}(D, \mathbb{R})$*. Gibt es eine Folge* $(M_n) \subset \mathbb{R}^+$*, sodaß*

i) $\sum_{n=1}^{\infty} M_n < \infty$,
ii) $|f_n(x)| \leq M_n$ *für alle* $x \in D$ *und* $n \in \mathbb{N}$,

dann ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ *(absolut) gleichmäßig konvergent.*

Beweis. Die Bedingungen des Satzes implizieren, daß die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ für alle $x \in D$ eine konvergente Majorante für $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$ darstellt. Die Behauptung folgt nun aus Satz IV-8.3. □

Beispiel 8.11 (Dirichlet Reihe). $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$ konvergiert gleichmäßig auf jeder Menge $D_c := \{x \in \mathbb{R} \colon x \geq c > 1\}$.
O.B.d.A kann $c \in \mathbb{Q}$ angenommen werden. Aus Satz 2.7-(7) folgt

$$\frac{1}{n^x} < \frac{1}{n^c}, \quad n \geq 2.$$

Wegen $c > 1$ folgt nun die Behauptung aus $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^c} < \infty$ (vgl. Satz IV-8.6). Die Abbildung $x \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$, $x > 1$, heißt Riemannsche Zetafunktion.

Insbesondere folgt aus diesem Beispiel, daß Satz IV-8.6 für *alle* $s \in \mathbb{R}$ gültig ist.

Der Weierstraß m-Test führt notwendig auf *absolute* gleichmäßige Konvergenz. Wir weisen jedoch darauf hin, daß die beiden Begriffe gleichmäßige Konvergenz und absolute gleichmäßige Konvergenz voneinander unabhängig sind. Die hinreichenden Bedingungen für bedingte Konvergenz aus Kapitel IV lassen sich jedoch leicht auf Funktionenreihen übertragen:

Satz 8.12 (Leibniz). *Die Funktionenfolge* $(f_n) \subset \mathcal{F}(D, \mathbb{R}^+)$ *erfülle die Bedingungen*

(1) *Die Folge* $(f_n(x))$ *ist monoton fallend für alle* $x \in D$.
(2) *Die Funktionenfolge* (f_n) *konvergiere gleichmäßig gegen* 0.

Dann ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n f_n$ *gleichmäßig konvergent.*

Beweis. Die Folge $(f_n(x))$ ist für alle $x \in D$ konvergent. Wir bezeichnen den punktweisen Grenzwert der Reihe mit $f(x)$ (Leibniz-Kriterium IV-9.1). Nach Korollar IV-9.2 gilt die Abschätzung

$$|f(x) - \sum_{k=1}^{n} f_k(x)| \leq |f_{n+1}(x)|.$$

Die Behauptung ergibt sich nun aus Bedingung (2). □

Satz 8.13 (Abel). *Es seien $(u_n), (v_n) \subset \mathcal{F}(D, \mathbb{R})$ Funktionenfolgen. Es gelte:*

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *ist gleichmäßig konvergent,*
(2) (v_n) *ist* **gleichmäßig beschränkt**, *dh.,*

$$\exists M > 0\ \forall x \in D\ \forall n \in \mathbb{N}\colon |v_n(x)| \leq M$$

(3) *Die Folge $(v_n(x))_{n \geq 1}$ ist monoton für alle $\forall x \in D$.*

Dann ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} u_n v_n$ gleichmäßig konvergent.

Satz 8.14 (Dirichlet). *Es seien $(u_n), (v_n) \subset \mathcal{F}(D, \mathbb{R})$ Funktionenfolgen. Es gelte:*

(1) *Die Folge der Partialsummen $(s_n)_{n \geq 1}$, $s_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$, ist gleichmäßig beschränkt.*
(2) *Die Funktionenfolge (v_n) konvergiert gleichmäßig und monoton nach 0.*

Dann ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} u_n v_n$ gleichmäßig konvergent.

Beispiel 8.15. Wir untersuchen die Konvergenz der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} f_n(x)$ mit $D = \mathbb{R}$, $f_n(x) = \frac{x^2}{(1+x^2)^n}$.
i) $|\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}| = \frac{1}{1+x^2} < 1$, $x \neq 0$, $f_n(0) = 0$, $n \in \mathbb{N}$. Das Quotientenkriterium garantiert somit die absolute, punktweise Konvergenz der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} f_n(x)$. Für festes $x \in \mathbb{R}$ liegt eine geometrische Reihe vor. Eine leichte Rechnung liefert nun die Grenzfunktion

$$f(x) = -x^2 \Big[\frac{1}{1 + \frac{1}{1+x^2}} - 1 \Big] = \frac{x^2}{2 + x^2}.$$

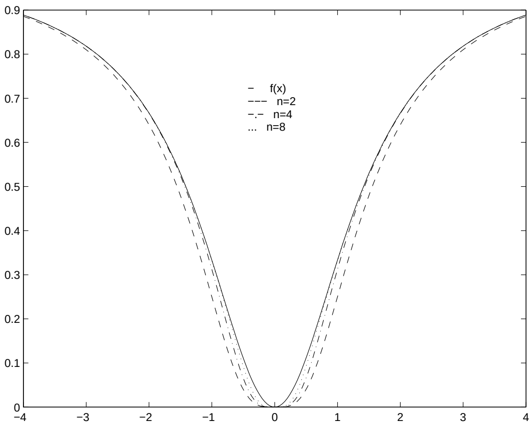
ii) Setzen wir $u_n(x) = (-1)^{n+1}$, $v_n(x) = f_n(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Die Folge der Partialsummen $(s_n) = (1, 0, 1, 0, \dots)$ ist beschränkt, es gilt $f_{n+1}(x) \leq f_n(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Wir zeigen, daß (f_n) gleichmäßig gegen die Nullfunktion konvergiert:

$$f_n(x) \overset{\text{II-4.21}}{\leq} \frac{x^2}{1 + nx^2} \leq \frac{1}{n} \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R},$$

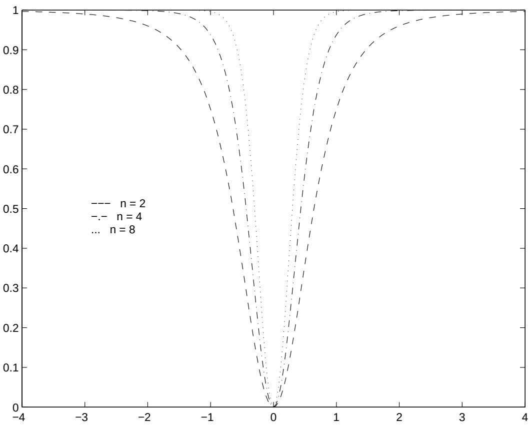
somit konvergiert die Reihe gleichmäßig (vgl. die Sätze 8.14 bzw. 8.12).
iii) Die Reihe ist jedoch nicht absolut gleichmäßig konvergent, dh. die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n}$ konvergiert nicht gleichmäßig auf $\mathbb{R}$. Wegen i) konvergiert diese Reihe absolut und punktweise, und zwar gegen

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x = 0 \\ 1 & \text{für } x \neq 0 \end{cases}$$

Da die Grenzfunktion in $x = 0$ unstetig ist, alle Funktionen f_n jedoch stetig sind, kann nach Satz 8.9 die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n}$ nicht gleichmäßig auf $\mathbb{R}$ konvergieren.



gleichmäßige Konvergenz



absolute, nicht gleichmäßige Konvergenz

Bemerkung 8.16. Abschließend bemerken wir, daß die Kriterien von Abel und Dirichlet auch dann gelten, wenn die Funktionen u_n Werte in $\mathbb{C}$ annehmen (wegen der Monotonievoraussetzung für (v_n) müssen die Funktionen v_n natürlich nach wie vor reelle Funktionen sein).

9. Potenzreihen II

In diesem Abschnitt entwickeln wir die Theorie der Funktionen, die durch Potenzreihen darstellbar sind, weiter. Um unnötige Wiederholungen zu vermeiden, lassen wir im folgenden auch komplexe Funktionen zu. Es wurde bereits in Abschnitt IV-11 gezeigt, daß Potenzreihen im Inneren des Konvergenzkreises konvergieren, im Äußeren divergieren.

Wir betrachten die Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z - z_0)^k$ mit Konvergenzradius R und bezeichnen die Summenfunktion mit f. Es ist also $f \in \mathcal{F}(K(z_0, R), \mathbb{C})$. Man sagt auch, f wird durch die Potenzreihe dargestellt, bzw. f besitzt die Reihenentwicklung $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z - z_0)^k$ um z_0. Im folgenden wollen wir stets $R > 0$ voraussetzen.

Es sei $g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k(z - z_0)^k$ eine weitere Potenzreihe mit Konvergenzradius $\tilde{R}$ und $r = \min\{R, \tilde{R}\}$. Wegen der absoluten Konvergenz der Reihen f und g konvergieren auch die Reihen $f \pm g$ und $f \cdot g$. Insbesondere ist die Summe der Produktreihe unabhängig von der speziellen Reihenfolge in der die Produkte $a_k b_j (z - z_0)^{k+j}$ aufsummiert werden. Berechnen wir fg über das Cauchy Produkt (Definition 13.1), dann ist auch die Produktreihe eine Potenzreihe. Zusammenfassend gilt also für

$|z - z_0| < r = \min\{R, \tilde{R}\}$:

$$f(z) \pm g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (a_k \pm b_k)(z - z_0)^k,$$

$$f(z)g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k, \quad c_k = \sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i}, \; k \in \mathbb{N}_0.$$

Der Einfachheit halber wollen wir in diesem Abschnitt o.B.d.A $z_0 = 0$ voraussetzen.

Satz 9.1. *Wir betrachten die durch die Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ auf dem Konvergenzkreis $K(0, R)$ dargestellte Funktion f. Es bezeichne $\bar{K}(0, \delta)$, $0 < \delta < R$, die* **abgeschlossene Kreisscheibe** *$\{z \in \mathbb{C}\colon |z| \leq \delta\}$ und $R_n(z)$ den Reihenrest $\sum_{k=n}^{\infty} a_k z^k$. Dann gilt*

i) *f ist stetig auf $K(0, R)$,*
ii) *f ist beschränkt auf $\bar{K}(0, \delta)$,*
iii) $\forall n \in \mathbb{N}\; \exists M_n > 0\; \forall z \in \bar{K}(0, \delta)\colon |R_n(z)| \leq M_n |z|^n$

Beweis. Für alle z aus der abgeschlossenen Kreisscheibe $\bar{K}(0, \delta)$, $\delta < R$, gilt die Abschätzung:

$$|f(z)| = |\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |a_n||z|^k \leq \sum_{k=0}^{\infty} |a_k|\delta^k := M_\delta < \infty$$

(wegen $\delta < R$ konvergiert die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|\delta^k$). Dies zeigt ii), aber auch i). Nach dem m-Test von Weierstraß ist die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ auf $\bar{K}(0, \delta)$ nämlich gleichmäßig konvergent und die Grenzfunktion $f|_{\bar{K}(0,\delta)}$ somit nach Satz 8.9 stetig. Also ist f auch in jedem $z \in K(0, R)$ stetig (man beachte $z \in \bar{K}(0, \delta_0)$, etwa für $\delta_0 = \frac{1}{2}(R + |z|)$). Die Abschätzung des Reihenrestes folgt aus

$$|R_n(z)| \leq \sum_{k=n}^{\infty} |a_k||z|^k \leq |z|^n \sum_{k=0}^{\infty} |a_{k+n}| \cdot \delta^k$$

und der Beobachtung, daß die Potenzreihen $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ und $\sum_{k=0}^{\infty} a_{n+k} z^k$, $n \in \mathbb{N}$, denselben Konvergenzradius besitzen. □

Dieser Satz garantiert zwar die Stetigkeit einer durch eine Potenzreihe dargestellten Funktion auf $K(0, R)$, es wird aber nichts ausgesagt über das Verhalten dieser Funktion in den Randpunkten von $K(0, R)$. Eine teilweise Lösung dieses Problems bringt der folgende Satz:

Satz 9.2 (Grenzwertsatz von Abel). *Es sei $(a_n)_{n \geq 0} \subset \mathbb{C}$ und es konvergiere die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$. Dann konvergiert die Potenzreihe*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad x \in \mathbb{R},$$

gleichmäßig auf $[0,1]$ *und stellt auf* $[0,1]$ *eine stetige Funktion* f *dar, dh. es gilt*

$$\lim_{x\to 1^-}\sum_{n=0}^\infty a_n x^n = \lim_{x\to 1^-} f(x) = f(1) = \sum_{n=0}^\infty a_n.$$

Beweis. Wir verwenden das Kriterium von Abel mit $u_n = a_n$, $v_n(x) = x^n$, $x \in D = [0,1]$ und zeigen damit die gleichmäßige Konvergenz von $\sum_{n=0}^\infty a_n x^n$ auf $[0,1]$. Nach Satz 8.9 ist somit die Summenfunktion f stetig auf $[0,1]$. □

Die Stetigkeit von f in $x = 1$ ist natürlich als linksseitige Stetigkeit aufzufassen. Konvergiert die Reihe $\sum_{n=0}^\infty (-1)^n a_n$, folgt die gleichmäßige Konvergenz der Potenzreihe auf $[-1,0]$ und insbesondere die Stetigkeit von f auf $[-1,0]$.

Korollar 9.3. Die Potenzreihe $\sum_{n=0}^\infty a_n z^n$ habe den Konvergenzradius $0 < R < \infty$. Konvergiert die Potenzreihe auch in $x = R$, dann konvergiert die Potenzreihe

$$f(x) = \sum_{n=0}^\infty a_n x^n, \quad x \in \mathbb{R},$$

für alle $0 \le \delta < R$ gleichmäßig auf $[-\delta, R]$ und f ist stetig auf $(-R, R]$. Ein analoges Resultat gilt auch wenn die Potenzreihe in $x = -R$ konvergiert.

Beweis. Wir bezeichnen mit $\xi = \frac{x}{R}$ und betrachten die Potenzreihe $\tilde f(\xi) = f(R\xi) = \sum_{n=0}^\infty a_n R^n \xi^n$. Aus

$$\overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n|R^n} = R\,\overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n|} = 1$$

folgt, daß die Potenzreihe $\tilde f$ den Konvergenzradius $\tilde R = 1$ besitzt. Die Voraussetzung des Satzes bedeutet demnach, daß $\sum_{k=0}^\infty a_n R^n$ gegen $\tilde f(1)$ konvergiert. Die Behauptung folgt nun aus Satz 9.2. □

Beispiel 9.4. Vorerst ohne Beweis erwähnen wir die Entwicklung

$$\ln(1+x) = \sum_{i=1}^\infty (-1)^{i-1}\frac{x^i}{i}, \quad |x| < 1.$$

Die Potenzreihe konvergiert auch in $x = 1$ (vgl.Korollar IV-9.3). Aus dem Abel'schen Grenzwertsatz folgt daher

$$\sum_{i=1}^\infty (-1)^{i-1}\frac{1}{i} = \ln 2.$$

Wir kennen somit die Summe der alternierenden harmonischen Reihe.

Bemerkung 9.5. Die Grenzwerte $\lim_{x\to 1^-}\sum_{n=0}^\infty a_n x^n = \lim_{x\to 1^-} f(x)$ können auch existieren, ohne daß die Reihe $\sum_{n=0}^\infty a_n$ konvergent ist. Es sei zum Beispiel $a_n = (-1)^n$ und

$$f(x) = \sum_{n=0}^\infty (-1)^n x^n = \frac{1}{1+x}, \quad |x| < 1.$$

Es existiert zwar

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n = \lim_{x\to 1^-} \frac{1}{1+x} = \frac{1}{2},$$

aber die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$ ist divergent.

Das nächste Resultat deckt eine sehr starke Bindung zwischen den Funktionswerten einer durch eine Potenzreihe dargestellten Funktion auf:

Satz 9.6 (Identitätssatz). *Die Potenzreihen $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ und $g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k$ mögen zumindest auf $K(0,R)$ konvergieren. Gibt es auch nur eine einzige Folge $(z_n)_{n\ge 1} \subset K(0,R) \setminus \{0\}$, sodaß*

i) $\lim_{n\to\infty} z_n = 0$,

ii) $f(z_n) = g(z_n)$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$

gilt, dann ist $a_n = b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$, dh. die Potenzreihen sind identisch.

Beweis. Angenommen die Behauptung wäre falsch, dh. es gibt ein $k_0 \in \mathbb{N}$ mit $a_{k_0} \neq b_{k_0}$. Wir nehmen an, k_0 ist der kleinste derartige Index, dh. $a_k = b_k$, $k = 0, \dots, k_0 - 1$ falls $k_0 \ge 1$, bzw. $a_0 \neq b_0$ falls $k_0 = 0$. Somit gilt

$$(f-g)(z) = \sum_{i=k_0}^{\infty} (a_i - b_i) z^i \text{ und } (f-g)(z_n) = 0,\ n \in \mathbb{N},$$

(auch diese Reihe konvergiert auf $K(0,R)$). Wir wenden nun die Abschätzung in Satz 9.1-iii) folgendermaßen an: Zu $0 < \delta < R$ gibt es $M_{k_0+1} > 0$, sodaß für alle $z \in \bar{K}(0,\delta)$

$$|(f-g)(z) - (a_{k_0} - b_{k_0}) z^{k_0}| = |R_{k_0+1}(z)| \le M_{k_0+1} |z|^{k_0+1}$$

zutrifft. Für $z = z_n$ (n so groß, daß $|z_n| < \delta$) folgt also

$$|a_{k_0} - b_{k_0}| \cdot |z_n|^{k_0} \le M_{k_0+1} |z_n|^{k_0+1}$$

und daraus

$$|a_{k_0} - b_{k_0}| \le M_{k_0+1} |z_n|.$$

$\lim_{n\to\infty} z_n = 0$ führt auf $a_{k_0} = b_{k_0}$ im Widerspruch zur Wahl von k_0. □

Eine überraschende Konsequenz des Identitätssatzes ist, daß eine durch eine Potenzreihe darstellbare Funktion durch die Werte auf einer gegen das Entwicklungszentrum konvergenten Folge (z_n) bereits im gesamten Inneren des Konvergenzkreises eindeutig bestimmt ist. Weiters sind die Koeffizienten der Entwicklung einer Funktion in eine Potenzreihe um z_0 eindeutig bestimmt. Als Übung beweise man weiters, daß in der Potenzreihe einer geraden (ungeraden) Funktion nur gerade (ungerade) Potenzen auftreten.

Der Gültigkeitsbereich der Reihenentwicklung $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$ einer *gegebenen* Funktion f ist auf den Konvergenzkreis $K(z_0,R)$ der Reihe beschränkt. Die Funktion f selbst kann ohne weiteres außerhalb von $K(z_0,R)$ definiert sein. Natürlich kann sie dort nicht durch die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^k$ dargestellt werden. Oft kann man durch eine geeignete Wahl des Entwicklungszentrums eine Reihenentwicklung $\sum_{k=0}^{\infty} b_k(z-z_1)^k$ mit Konvergenzkreis $K(z_1, R_1)$ finden, sodaß $K(z_1, R_1) \cap \complement K(z_0, R) \neq \emptyset$. Die Grundlage hiefür ist der folgende Satz:

Satz 9.7 (Transformationssatz). *Die Potenzreihe $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^k$ konvergiere in $K(z_0, R)$. Es sei $z_1 \in K(z_0, R)$ und $\rho := R - |z_1 - z_0| > 0$. Für alle $z \in K(z_1, \rho)$ gilt dann die Identität*

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(z - z_0)^k = \sum_{k=0}^{\infty} b_k(z - z_1)^k$$

mit

$$b_k = \sum_{n=k}^{\infty} \binom{n}{k} a_n(z_1 - z_0)^{n-k}, \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

Beweis. Setzt man die Identität

$$(z - z_0)^n = [(z - z_1) + (z_1 - z_0)]^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (z - z_1)^k (z_1 - z_0)^{n-k}$$

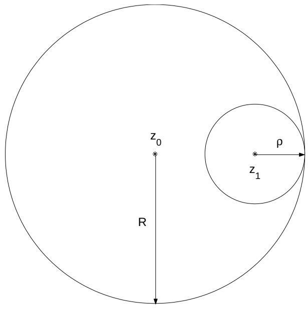
in die Potenzreihe um z_0 ein, ergibt eine formale Rechnung (wir setzen dabei $\binom{n}{k} = 0$ für $k > n$)

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left[\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (z - z_1)^k (z_1 - z_0)^{n-k}\right] \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left[\sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} a_n (z_1 - z_0)^{n-k} (z - z_1)^k\right] \\
&=^{*)} \sum_{k=0}^{\infty} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n}{k} a_n (z_1 - z_0)^{n-k}\right] (z - z_1)^k \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \left[\sum_{n=k}^{\infty} \binom{n}{k} a_n (z_1 - z_0)^{n-k}\right] (z - z_1)^k = \sum_{k=0}^{\infty} b_k (z - z_1)^k
\end{aligned}$$

Einzig der mit *) markierte Schritt, in dem die Summationsreihenfolge vertauscht wird, ist noch zu rechtfertigen. Die Vertauschung ist nach dem Doppelreihensatz IV-14.4 zulässig, falls die absolute Konvergenz einer der iterierten Reihen nachgewiesen werden kann:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} |a_n| \cdot |z_1 - z_0|^{n-k} |z - z_1|^k =$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} |z_1 - z_0|^{n-k} |z - z_1|^k \overset{\text{II-4.22}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \cdot [|z_1 - z_0| + |z - z_1|]^n < \infty.$$



zum Transformationssatz

Die Konvergenz der letzten Reihe ergibt sich aus der Wahl von ρ ($z \in K(z_1, \rho) \Rightarrow |z - z_1| + |z_1 - z_0| < R$), und der absoluten Konvergenz der Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$ auf $K(z_0, R)$. $\square$

Hat man also eine *gegebene* Funktion in eine Potenzreihe um z_0 mit Konvergenzradius R entwickelt, dann kann man jeden Punkt z_1 von $K(z_0, R)$ als neues Entwicklungszentrum wählen, und der Transformationssatz garantiert die Konvergenz der neuen Entwicklung um z_1 zumindest auf dem größten Kreis mit Mittelpunkt z_1, der noch vollständig in $K(z_0, R)$ enthalten ist. Oft ist der Konvergenzradius der neuen Reihe jedoch bedeutend größer.

Beispiel 9.8. Wir betrachten die Entwicklung

$$f(z) = \frac{1}{1-z} = \sum_{i=0}^{\infty} z^i, \qquad |z| < 1.$$

Nach dem Transformationssatz läßt sich f auch um $z_1 = -\frac{1}{2}$ in eine Potenzreihe entwickeln, die zumindest für $|z + \frac{1}{2}| < \frac{1}{2}$ konvergiert. Wir erhalten die Entwicklung

$$(*) \qquad \frac{1}{1-z} = \sum_{k=0}^{\infty} b_k (z + \frac{1}{2})^k, \quad b_k = \sum_{i=k}^{\infty} \binom{i}{k} (-\frac{1}{2})^{i-k}, \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

Die Schwierigkeit bei der Anwendung des Transformationssatzes ist die Berechnung der neuen Koeffizienten b_k. Oft ist es zielführender, auf bereits bekannte Entwicklungen zurückzugreifen: Da wir f um $z_1 = -\frac{1}{2}$ entwickeln wollen, liegt folgende Vorgangsweise nahe:

$$f(z) = \frac{1}{1-z} = \frac{1}{1 - (z + \frac{1}{2}) + \frac{1}{2}} = \frac{2}{3} \frac{1}{1 - \frac{2}{3}(z + \frac{1}{2})} = \frac{2}{3} \sum_{i=0}^{\infty} (\frac{2}{3})^i (z + \frac{1}{2})^i.$$

Diese Reihe konvergiert für $|z + \frac{1}{2}| < \frac{3}{2}$ und stimmt auf $|z + \frac{1}{2}| < \frac{1}{2}$ mit (*) überein. Nach dem Identitätssatz muß also $b_k = \sum\limits_{i=k}^{\infty} \binom{i}{k} (-\frac{1}{2})^{i-k} = (\frac{2}{3})^{k+1}$, $k \in \mathbb{N}_0$, gelten. Die Koeffizienten b_k können übrigens auch unabhängig von dieser Überlegung über die

Entwicklung

$$\frac{1}{(1-z)^{k+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k}{k} z^n, \quad |z| < 1,$$

berechnet werden (Übung).

SATZ 9.9 (Divisionssatz). *Die Potenzreihe $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ konvergiere für $|z| < R$ und es sei $f(0) \neq 0$. Dann läßt sich $\frac{1}{f}$ in einer hinreichend kleinen ρ–Umgebung von 0 ebenfalls in eine Potenzreihe entwickeln:*

$$\frac{1}{f(z)} = \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k, \quad |z| < \rho.$$

BEWEIS. O.B.d.A. können wir $a_0 = f(0) = 1$ annehmen. Wegen der Stetigkeit von $\tilde{f}(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k z^k$ und $\tilde{f}(0) = 0$ gibt es ein $\delta \in (0, R)$, sodaß für $|z| < \delta$ stets $|\tilde{f}(z)| < 1$ bleibt. Für $|z| < \delta$ gilt also

$$\frac{1}{f(z)} = \frac{1}{1-(-\tilde{f}(z))} = \sum_{j=0}^{\infty} (-\tilde{f}(z))^j = \sum_{j=0}^{\infty} \left[-\sum_{i=1}^{\infty} a_i z^i \right]^j.$$

Wegen der absoluten Konvergenz von $\tilde{f}$ kann man $\tilde{f}^j$ z.B. mit der Methode von Cauchy berechnen und erhält mit geeigneten Koeffizienten a_{jk}, $j, k \in \mathbb{N}_0$,

$$(-\tilde{f}(z))^j = \sum_{k=0}^{\infty} a_{jk} z^k, \quad j \in \mathbb{N}_0.$$

Dies ergibt

$$\frac{1}{f(z)} = \sum_{j=0}^{\infty} \left[\sum_{k=0}^{\infty} a_{jk} z^k \right] =^{*)} \sum_{k=0}^{\infty} \left[\sum_{j=0}^{\infty} a_{jk} \right] z^k = \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k.$$

Der Beweis ist vollständig, wenn die in *) durchgeführte Vertauschung der Summationsreihenfolge gerechtfertigt werden kann. Nach dem Doppelreihensatz genügt es, die Konvergenz von $\sum_{j=0}^{\infty} \left[\sum_{k=0}^{\infty} |a_{jk}||z|^k \right]$ nachzuweisen: Es ist

$$|\tilde{f}(z)| \leq \sum_{i=1}^{\infty} |a_i||z|^i \equiv g(z).$$

Wie für $\tilde{f}$ gibt es $0 < \rho < \delta$, sodaß $g(z) < 1$ für alle $z \in K(0, \rho)$ gilt. Auch g^j läßt sich mit geeigneten Koeffizienten d_{jk}, $j, k \in \mathbb{N}_0$, als Potenzreihe darstellen,

$$g(z)^j = \sum_{k=0}^{\infty} d_{jk} |z|^k, \quad j \in \mathbb{N}_0.$$

Es konvergiert also für $|z| < \rho$ auch die Reihe

$$\sum_{j=0}^{\infty} g(z)^j = \sum_{j=0}^{\infty} \left[\sum_{k=0}^{\infty} d_{jk} |z|^k \right].$$

Aus der Definition von g ergibt sich

$$|a_{jk}| \le d_{jk}, \quad j,k \in \mathbb{N}_0, \tag{1}$$

und daraus mit dem Majorantenkriterium die Konvergenz von $\sum_{j=0}^{\infty} \left[\sum_{k=0}^{\infty} |a_{jk}||z|^k \right]$. Die Gültigkeit von (1) für $j = 2$ ergibt sich aus der Definition des Cauchy-Produktes: demnach ist $a_{2k} = \sum_{l=0}^{k} a_{k-l} a_l$ und $d_{2k} = \sum_{l=0}^{k} |a_{k-l}||a_l|$ und somit folgt $|a_{2k}| \le \sum_{l=0}^{k} |a_{k-l}||a_l| = d_{2k}$. Mit vollständiger Induktion kann man nun die Gültigkeit von (1) für $j > 2$ nachweisen. $\square$

Die praktische Berechnung der (oder einiger) Koeffizienten von $\frac{1}{f}$ beruht meist auf der Methode des Koeffizientenvergleichs, die wir an einem einfachen Beispiel demonstrieren.

Beispiel 9.10. Es sei $f(z) = 1 - z$. Wegen $f(0) = 1$ läßt sich nach Satz 9.9 $\frac{1}{f}$ in eine Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k$ entwickeln, welche auf $K(0, \rho)$, $\rho > 0$ hinreichend klein, konvergiert. Für $|z| < \rho$ ergibt sich die Identität

$$\begin{aligned} 1 &= \left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k \right) (1 - z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k - \sum_{k=1}^{\infty} b_{k-1} z^k \\ &= b_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (b_k - b_{k-1}) z^k. \end{aligned}$$

Wegen des Identitätssatzes 9.6 muß demnach

$$b_0 = 1 \qquad \text{und} \qquad b_k - b_{k-1} = 0, \quad k \in \mathbb{N},$$

gelten. Daraus folgt $b_k = 1$, $k \in \mathbb{N}_0$.

Der Divisionssatz ist ein Spezialfall eines weitaus allgemeineren Resultates, das analog bewiesen werden kann.

Satz 9.11 (Einsetzungssatz). *Die Konvergenzradien der Potenzreihen $f(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} f_k z^k$ und $g(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} g_k z^k$ seien R_f bzw. R_g, ferner gelte $|f_0| < R_g$. Es gibt dann ein $\delta < R_f$, sodaß $g \circ f$ auf $K(0, \delta)$ definiert und in eine Potenzreihe entwickelbar ist:*

$$(g \circ f)(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k, \quad |z| < \delta.$$

10. Elementare Funktionen II

Mit den Potenzreihen verfügen wir über ein Werkzeug, eine unübersehbare Fülle von (stetigen) Funktionen zu erzeugen:

10.1. Die Exponentialfunktion exp. Von fundamentaler Bedeutung ist die Potenzreihe der Exponentialfunktion. Wir erinnern daran, daß die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$ für alle $z \in \mathbb{C}$ konvergiert (Beispiel IV-12.5-5)). Dies rechtfertigt folgende Definition.

Definition 10.1. *Die **Exponentialfunktion** exp ist definiert durch*

$$\exp\colon \begin{cases} \mathbb{C} \to \mathbb{C} \\ z \mapsto \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \end{cases}$$

(Wir vereinbaren für diese Definition $0^0 = 1$.)

Satz 10.2. *Eigenschaften der Exponentialfunktion in $\mathbb{C}$.*

i) $\forall z, w \in \mathbb{C}\colon \exp(z)\exp(w) = \exp(z+w)$,
ii) $\exp(0) = 1, \exp(1) = e$,
iii) $\forall z \in \mathbb{C}\colon \exp(z) \neq 0$, $\exp(-z) = \frac{1}{\exp(z)}$,
iv) $\exp \in C(\mathbb{C}, \mathbb{C})$.

Beweis. ii) Satz IV-12.6.
iii) folgt aus i) und ii): $\exp(0) = 1 = \exp(z)\exp(-z)$.
iv) Satz Satz 9.1.
i) Die Koeffizienten c_k des Cauchy Produktes der beiden Reihen $\exp(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$ und $\exp(w) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{w^k}{k!}$ sind

$$c_k = \sum_{i=0}^{k} \frac{z^i}{i!} \frac{w^{k-i}}{(k-i)!} = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} z^i w^{k-i} \frac{1}{k!} = \frac{1}{k!}(z+w)^k.$$

Daraus folgt die Behauptung. □

Wir werden die Exponentialfunktion auf $\mathbb{C}$ hier nicht weiter untersuchen und beschränken uns im folgenden auf reelle Argumente. Wir bezeichnen auch die Einschränkung der Exponentialfunktion auf $\mathbb{R}$ mit exp.

Satz 10.3. *Weitere Eigenschaften der Exponentialfunktion in $\mathbb{R}$:*

i) $\forall x \in \mathbb{R}\colon \exp(x) > 0$,
ii) exp *ist streng monoton wachsend auf* $\mathbb{R}$,
iii) $\lim_{x\to\infty} \exp(x) = \infty$, $\lim_{x\to-\infty} \exp(x) = 0$,
iv) $\exp(\mathbb{R}) = (0, \infty)$,
v) *Es gilt* $\lim_{x\to\infty} x^{-n} \exp x = \infty$ *und* $\lim_{x\to\infty} x^n \exp(-x) = 0$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$.

Beweis. i) Aus der Reihendarstellung folgt $\exp(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$ und

$$(*) \qquad \forall x > 0\colon\ \exp(x) > 1 + x > 1.$$

Somit gilt für alle $x \in \mathbb{R}^+\colon\ \exp(x) \geq 1 > 0$. i) folgt nun aus

$$\exp(-x) = (\exp(x))^{-1} > 0.$$

ii) Es sei $x < y$, also $y - x > 0$. Aus (*) folgt $1 < \exp(y-x) = \exp(y)\exp(-x) = \exp(y)(\exp(x))^{-1}$.
iii) $\lim_{x\to\infty}\exp(x) = \infty$ folgt aus (*), dies zusammen mit Satz 10.2-iii) impliziert $\lim_{x\to-\infty}\exp(x) = 0$.
iv) Ergibt sich aus ii), iii) und Satz 6.1.
v) Für festes $n \in \mathbb{N}$ und $x > 0$ erhält man aus der Reihendarstellung die Abschätzung

$$\frac{\exp(x)}{x^n} > \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\frac{1}{x^n} = \frac{x}{(n+1)!}$$

und somit $\lim_{x\to\infty}\frac{\exp(x)}{x^n} \geq \lim_{x\to\infty}\frac{x}{(n+1)!} = \infty$. $\square$

Der letzte Punkt des Satzes zeigt, daß die Exponentialfunktion stärker wächst als jede noch so hohe Potenz von x. Wir klären nun den Zusammenhang der Funktion exp mit den bereits in Abschnitt V.2.2 eingeführten Exponentialfunktionen $x \mapsto e^x$. Wegen Satz 10.2-ii) gilt $\exp(1) = e$, also auch $\exp(n) = e^n$, $n \in \mathbb{N}$ (Satz 10.2-i). Auf analoge Weise findet man $e = \exp(\frac{1}{n}\cdot n) = (\exp(\frac{1}{n}))^n$, dh. $\exp(\frac{1}{n}) = e^{\frac{1}{n}}$. Somit ergibt sich für $r = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}^+$

$$\exp(r) = \exp(\frac{p}{q}) = (\exp(\frac{1}{q}))^p = (e^{\frac{1}{q}})^p = e^r,$$

d.h. exp und $r \mapsto e^r$ stimmen auf $\mathbb{Q}^+$ überein. Wegen der Stetigkeit von exp und $x \mapsto e^x$ auf $\mathbb{R}^+$ sind die beiden Abbildungen daher auf $\mathbb{R}^+$ identisch (Korollar 7.12). Für $x \leq 0$ verwenden wir die Identität

$$\exp(x) = \frac{1}{\exp(-x)} = \frac{1}{e^{-x}} = e^x.$$

Die Bezeichnung Exponentialfunktion für exp ist daher gerechtfertigt.

Satz 10.4. *Für alle* $x \in \mathbb{R}$ *gilt* $\exp(x) = e^x$.

Die Umkehrfunktion von exp ist also der natürliche Logarithmus. Aus Satz Satz 10.3 ergeben sich weitere Eigenschaften des natürlichen Logarithmus:

Satz 10.5. *Weitere Eigenschaften von* ln*:*

i) $\lim_{x\to\infty} \ln x = \infty$,
ii) $\lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$,
iii) $\forall n \in \mathbb{N}\colon \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{x}} \ln x = 0$.

Beweis. Wir zeigen nur iii). Zu jedem $\varepsilon > 0$ und $n \in \mathbb{N}$ gibt es wegen Satz 10.3-v) ein $\xi > 0$ mit

$$(*) \qquad y > \xi \Rightarrow y^{-n} \exp y > \varepsilon^{-n}.$$

Wegen i) gibt es $\beta > 1$, sodaß $\ln x > \xi$ für alle $x > \beta$ gilt. Für $x > \beta$ folgt daher aus (*)

$$(\ln x)^{-n} x > \varepsilon^{-n} \quad \text{bzw.} \quad \frac{1}{x}(\ln x)^n < \varepsilon^n.$$

Dies ist gleichwertig mit

$$\frac{1}{\sqrt[n]{x}} \ln x < \varepsilon,$$

dh. $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{x}} \ln x = 0$. □

Die letzte Beziehung zeigt, daß der (natürliche) Logarithmus schwächer anwächst, als jede noch so kleine Potenz von x. Satz 10.5 läßt sich leicht auf Logarithmen mit beliebiger Basis $a > 1$ übertragen.

10.2. Trigonometrische Funktionen. Wir definieren die trigonometrischen Funktionen durch Potenzreihen in $\mathbb{C}$ und zeigen, daß diese Funktionen eingeschränkt auf $\mathbb{R}$ tatsächlich die bekannten Eigenschaften besitzen. Wir schreiben e^z anstelle von $\exp(z)$.

Definition 10.6. *Die* ***Sinus****-Funktion* sin *und die* ***Cosinus****-Funktion* cos *sind definiert durch* $(0^0 := 1)$

$$\sin z\colon \begin{cases} \mathbb{C} \to \mathbb{C} \\ z \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \end{cases}, \quad \cos z\colon \begin{cases} \mathbb{C} \to \mathbb{C} \\ z \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} \end{cases}.$$

Man kann leicht verifizieren, daß die Potenzreihen für $\sin z$ und $\cos z$ für alle $z \in \mathbb{C}$ konvergieren.

Satz 10.7.

(1) sin *und* cos *sind stetig auf* $\mathbb{C}$.
(2) Euler*sche Formeln. Für alle* $z \in \mathbb{C}$ *gilt:*

i) $e^{iz} = \cos z + i \sin z$, *iii)* $\sin z = \frac{1}{2i}[e^{iz} - e^{-iz}]$,

ii) $e^{-iz} = \cos z - i \sin z$, *iv)* $\cos z = \frac{1}{2}[e^{iz} + e^{-iz}]$.

Beweis. Es genügt, i) und ii) von (2) zu beweisen. Wegen $(-1)^n z^{2n} = (iz)^{2n}$ und $i(-1)^n z^{2n+1} = (iz)^{2n+1}$, $n \in \mathbb{N}_0$, folgt i) aus

$$\begin{aligned}\cos z + i \sin z &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} + i \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iz)^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iz)^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iz)^n}{n!} = e^{iz}.\end{aligned}$$

ii) folgt aus i) indem man z durch $-z$ ersetzt. □

Satz 10.8 (Trigonometrische Identitäten). *Für alle $z, w \in \mathbb{C}$ gilt*
i) $\sin(-z) = -\sin z$, *dh.* $\sin$ *ist ungerade,*
ii) $\cos(-z) = \cos z$, *dh.* $\cos$ *ist gerade,*
iii) $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$,
iv) $\sin(z + w) = \sin z \cos w + \cos z \sin w$,
v) $\cos(z + w) = \cos z \cos w - \sin z \sin w$,
vi) $\sin z - \sin w = 2 \cos \frac{z+w}{2} \sin \frac{z-w}{2}$,
vii) $\cos z - \cos w = -2 \sin \frac{z+w}{2} \sin \frac{z-w}{2}$.

Beweis. i), ii) sind klar.
iii) folgt aus $1 = e^{iz} e^{-iz} = (\cos z + i \sin z)(\cos z - i \sin z)$ (vgl.Satz 10.7-i,ii)).
iv) Aus Satz 10.7-iii) ergibt sich

$$\begin{aligned}4i \sin(z + w) &= 2(e^{i(z+w)} - e^{-i(z+w)}) \\ &= e^{i(z+w)} + e^{i(z-w)} - e^{-i(z-w)} - e^{-i(z+w)} \\ &\quad + e^{i(z+w)} - e^{i(z-w)} + e^{-i(z-w)} - e^{-i(z+w)} \\ &= (e^{iz} - e^{-iz})(e^{iw} + e^{-iw}) + (e^{iz} + e^{-iz})(e^{iw} - e^{-iw}) \\ &= 4i(\sin z \cos w + \cos z \sin w).\end{aligned}$$

v) analog.
vi) und vii) folgen aus iv) und v). □

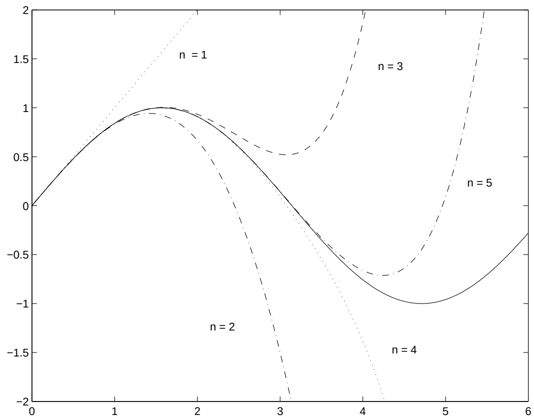
Korollar 10.9. Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $|e^{ix}| = 1$.

Beweis. Die Behauptung folgt aus Satz Satz 10.8-iii) und der Identität

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x.$$

□

Wir wenden uns nun den Eigenschaften von $\sin|_{\mathbb{R}}$ und $\cos|_{\mathbb{R}}$ zu: Zuerst demonstrieren wir die Approximation des Sinus auf $[0, 6]$ durch die ersten 5 Partialsummen seiner Potenzreihendarstellung:



Satz 10.10 (Die Zahl π). *Es gibt eine eindeutig bestimmte Zahl π mit folgenden Eigenschaften*

i) $0 < \pi < 4$,
ii) $\cos\frac{\pi}{2} = 0$,
iii) *es ist* $\cos x > 0$ *für alle* $x \in [0, \frac{\pi}{2})$.

Die Zahl $\frac{\pi}{2}$ ist also die kleinste positive Nullstelle des Cosinus.

Beweis. Angenommen es gäbe zwei Zahlen π und π', etwa $\pi < \pi'$, mit den Eigenschaften i) – iii). Wegen i) folgt $0 < \frac{\pi}{2} < \frac{\pi'}{2}$ und aus iii) $\cos x > 0$ für $x \in [0, \frac{\pi'}{2})$, dh. $\cos\frac{\pi}{2} > 0$. Es kann somit höchstens eine derartige Zahl existieren.
Aus Korollar IV-9.2 folgt

$$\cos 2 \le 1 - \frac{2^2}{2!} + \frac{2^4}{4!} = -\frac{1}{3} < 0.$$

Da $\cos 0 = 1 > 0$ und cos stetig ist, muß nach dem Zwischenwertsatz 4.1 in $(0,2)$ mindestens eine Nullstelle des Cosinus liegen, dh.

$$\mathcal{N} = \{x \in [0,2]\colon\ \cos x = 0\} \ne \emptyset.$$

Wir setzen $\frac{\pi}{2} := \inf \mathcal{N}$. Wegen der Stetigkeit von cos gilt $\frac{\pi}{2} \in \mathcal{N}$. Aus $\cos 0 = 1$ folgt dann $\frac{\pi}{2} > 0$, dh. π erfüllt i) und ii). Wegen der Minimaleigenschaft von $\frac{\pi}{2}$ und $\cos 0 = 1$ muß dann aber auch iii) erfüllt sein: Wäre $\cos\xi < 0$ für ein $\xi \in (0, \frac{\pi}{2})$, müßte es in $(0, \xi)$ nach dem Zwischenwertsatz eine weitere Nullstelle $\eta < \frac{\pi}{2}$ geben. □

Es ist derzeit natürlich nicht einsichtig, daß die eben definierte Zahl π in irgendeinem Zusammenhang mit dem Umfang oder Flächeninhalt eines Kreises steht. Wir können diese Frage erst dann befriedigend klären, wenn wir uns mit dem Problem der Längen– und Flächenmessung auseinandergesetzt haben.

Lemma 10.11.

$$\forall x \in [0,2]\colon\ \sin x \ge \frac{x}{3}.$$

Insbesondere ist $\sin x > 0$ *für* $x \in (0,2]$.

Beweis. Aus der Reihe für sin und Korollar IV-9.2 folgt

$$\sin x \geq x - \frac{x^3}{3!} = x(1 - \frac{x^2}{6}) \geq \frac{x}{3}, \quad x \in [0, 2].$$

□

Satz 10.12. sin *ist streng monoton wachsend und* cos *streng monoton fallend auf* $[0, \frac{\pi}{2}]$.

Beweis. Es sei $0 \leq x < y \leq \frac{\pi}{2}$, also $0 < \frac{x+y}{2} < \frac{\pi}{2}$ und $0 < \frac{y-x}{2} \leq \frac{\pi}{2}$. Aus Satz 10.8-vi,vii, i, ii, Lemma 10.11, Satz 10.10, folgt nun

$$\begin{aligned}
\sin x - \sin y &= 2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2} = -2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{y-x}{2} < 0\\
\cos x - \cos y &= -2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2} = 2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{y-x}{2} > 0.
\end{aligned}$$

□

Wir komplettieren nun das Bild der Graphen von Sinus und Cosinus:

Satz 10.13. i) sin *ist streng monoton wachsend auf* $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ *und streng monoton fallend auf* $[-\pi, -\frac{\pi}{2}]$ *und auf* $[\frac{\pi}{2}, \pi]$.

ii) cos *ist streng monoton fallend auf* $[0, \pi]$ *und streng monoton wachsend auf* $[-\pi, 0]$.

iii) $\sin(-\pi) = \sin 0 = \sin \pi = 0$, $\sin(-\frac{\pi}{2}) = -1$, $\sin \frac{\pi}{2} = 1$.

iv) $\cos(-\frac{\pi}{2}) = \cos \frac{\pi}{2} = 0$, $\cos(-\pi) = \cos \pi = -1$, $\cos 0 = 1$.

v) $\forall x \in \mathbb{R}\colon \sin(x + \frac{\pi}{2}) = \cos x$, $\cos(x + \frac{\pi}{2}) = -\sin x$.

vi) $\forall x \in \mathbb{R}\colon \sin(x + 2\pi) = \sin x$, $\cos(x + 2\pi) = \cos x$.

vii) $\forall x \in \mathbb{R}\colon |\sin x| \leq 1$, $|\cos x| \leq 1$.

Beweis. Wegen $\cos\frac{\pi}{2} = 0$ muß nach Satz 10.8-iii) $\sin\frac{\pi}{2} = \pm 1$ sein, wegen Lemma 10.11 folgt $\sin\frac{\pi}{2} = 1$ und da sin ungerade ist, auch $\sin(-\frac{\pi}{2}) = -1$. Für $-\frac{\pi}{2} \leq x < y \leq 0$, also $0 \leq -y < -x \leq \frac{\pi}{2}$, finden wir

$$-\sin y = \sin(-y) < \sin(-x) = -\sin x \quad \text{d.h.} \quad \sin x < \sin y.$$

Also ist sin streng monoton wachsend auf $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Aus dem Additionstheorem Satz 10.8-iv) folgt nun $\sin(x + \frac{\pi}{2}) = \cos x$ und $\cos(x + \frac{\pi}{2}) = -\sin x$, $x \in \mathbb{R}$. Nach Satz 10.12 ist also sin streng monoton fallend auf $[\frac{\pi}{2}, \pi]$ und damit aus Symmetriegründen auch auf $[-\pi, -\frac{\pi}{2}]$. Darüber hinaus gilt $\sin \pi = \cos\frac{\pi}{2} = 0 = \sin(-\pi)$. Somit sind i), iii) und v) bewiesen. Aus v) folgt für $x \in \mathbb{R}$

$$\sin(x + 2\pi) = \cos(x + \frac{3\pi}{2}) = -\sin(x + \pi) = -\cos(x + \frac{\pi}{2}) = \sin x$$

und analog für cos. Dies zeigt vi). Die Eigenschaften des Cosinus können nun aus denen des Sinus abgelesen werden: $\cos(-\pi) = \sin(-\pi + \frac{\pi}{2}) = \sin(-\frac{\pi}{2}) = -1$. Für $x \in [-\pi, 0]$ ist $x + \frac{\pi}{2} \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ und daher $\cos x = \sin(x + \frac{\pi}{2})$ streng monoton wachsend auf $[-\pi, 0]$ und aus Symmetriegründen streng monoton fallend auf $[0, \pi]$. vii) ist nun eine einfache Konsequenz aus den Monotonieeigenschaften von sin und cos. □

BEMERKUNG 10.14. 1) Zusammen mit den Eulerschen Formeln erhalten wir nun die überraschende Beziehung $e^{i\pi} = -1$.
2) Die Eigenschaft vi) bedeutet, daß sin und cos **periodische Funktionen** mit **Periode** 2π sind. Man nennt eine Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ periodisch mit Periode p, wenn $f(x+p) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt.

LEMMA 10.15.
i) $\forall x \in \mathbb{R}\colon \cos x = 0 \Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{Z}\colon x = (k+\frac{1}{2})\pi)$,
ii) $\forall x \in \mathbb{R}\colon \sin x = 0 \Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{Z}\colon x = k\pi)$.

BEWEIS. Die einzige Nullstelle des Cosinus in $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ ist $\frac{\pi}{2}$. Wegen $\cos(x+\pi) = -\cos x$ sind also $\frac{\pi}{2}$ und $\frac{3\pi}{2}$ die einzigen Nullstellen in $(-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$. Dieses Intervall hat die Länge 2π. Wegen der Periodizität des Cosinus ergeben sich alle anderen Nullstellen durch Addition von $2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. Die Nullstellen des Sinus erhält man wegen $\cos(x+\frac{\pi}{2}) = -\sin x$ aus den Nullstellen des Cosinus durch eine Verschiebung um $\frac{\pi}{2}$. □

KOROLLAR 10.16. 2π ist die kleinste positive Periode von Cosinus und Sinus.

BEWEIS. Angenommen p mit $0 < p < 2\pi$ wäre eine weitere Periode des Sinus. Mit Lemma 10.15 folgt aus $\sin 0 = \sin(0+kp) = 0$, $k \in \mathbb{Z}$, notwendigerweise $p = \pi$. Wegen $\sin(-\frac{\pi}{2}) = -1$ und $\sin(-\frac{\pi}{2}+\pi) = 1$ kann p keine Periode sein. □

SATZ 10.17. *1) Die Gleichung $e^z = 1$ hat in $\mathbb{C}$ nur die Lösungen $z = 2k\pi i$, $k \in \mathbb{Z}$.*
2) Die Gleichung $e^z = -1$ hat in $\mathbb{C}$ nur die Lösungen $z = (2k+1)\pi i$, $k \in \mathbb{Z}$.

BEWEIS. 1) Wegen $e^{2k\pi i} = \cos 2k\pi + i \sin 2k\pi = 1$ sind die Zahlen $z = 2k\pi i$ Lösungen. Wir zeigen daß es keine weiteren Lösungen geben kann. Es sei $z = x+iy$. Aus Korollar 10.9 ergibt sich

$$|e^z| = e^x|e^{iy}| = e^x = 1.$$

Daraus folgt $x = 0$. Es ist also $e^{iy} = \cos y + i \sin y = 1$, dh. $\cos y = 1$ und $\sin y = 0$. Dies hat $y = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ zur Folge, ungerade $k = 2\ell+1$, $\ell \in \mathbb{Z}$, sind wegen $\cos(2\ell+1)\pi = -1$ jedoch nicht zulässig. Der Beweis von 2) wird analog geführt. □

KOROLLAR 10.18. Cosinus und Sinus haben auch in $\mathbb{C}$ nur die Nullstellen $(k+\frac{1}{2})\pi$ bzw. $k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Wir können nun die Tangens- bzw. Cotangens-Funktion dort definieren, wo Cosinus bzw. Sinus keine Nullstellen haben.

DEFINITION 10.19. *Der **Tangens** bzw. **Cotangens** sind folgendermaßen definiert:*

$$\tan\colon \begin{cases} \mathbb{R} \setminus \{(k+\frac{1}{2})\pi\colon k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{\sin x}{\cos x} \end{cases}, \quad \cot\colon \begin{cases} \mathbb{R} \setminus \{(k\pi\colon k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{\cos x}{\sin x} \end{cases}.$$

Wir führen einige Eigenschaften dieser beiden Funktionen an:

SATZ 10.20. i) tan *und* cot *sind π-periodisch.*

ii) tan *ist streng monoton wachsend auf* $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$,
iii) cot *ist streng monoton fallend auf* $(0, \pi)$.
iv) $\tan(x + \frac{\pi}{2}) = -\cot x$ *für alle* $x \in \mathbb{R} \setminus \{(k\pi \colon k \in \mathbb{Z}\}$,
v) *es gilt* $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \tan(x) = \infty$ *und* $\lim_{x \to -\frac{\pi}{2}^+} \tan(x) = -\infty$.

Beweis. Wir zeigen nur ii). Es sei $-\frac{\pi}{2} < x < y < \frac{\pi}{2}$, also $0 < y - x < \pi$. Die Behauptung folgt aus

$$0 < \sin(y - x) = \sin y \cos x - \cos y \sin x \Leftrightarrow \tan x < \tan y$$

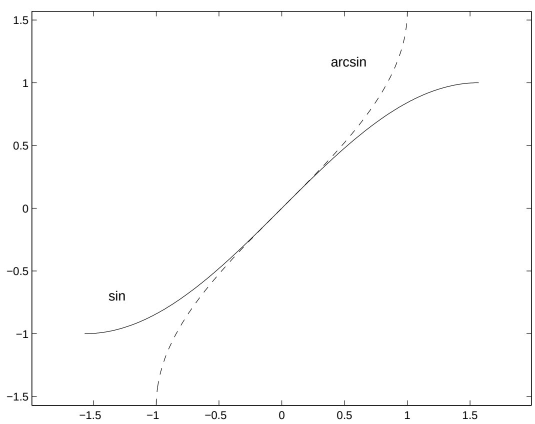
(man beachte: $\cos x > 0$, $\cos y > 0$). $\square$

Die Einschränkungen von sin auf $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, cos auf $[0, \pi]$, tan auf $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ und cot auf $(0, \pi)$ sind streng monoton. Somit besitzen sie Umkehrfunktionen, die sogenannten **Arcus-Funktionen**:

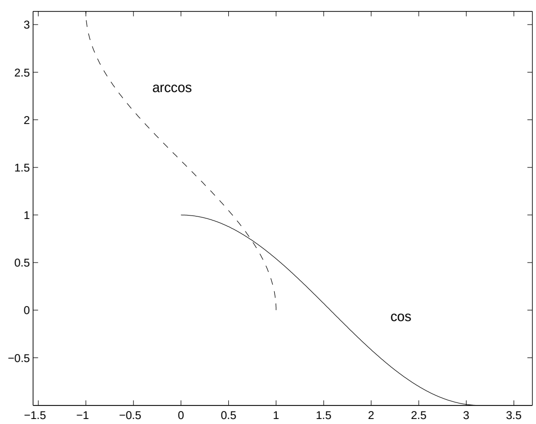
Definition 10.21 (Arcusfunktionen).

Funktion	*Umkehrfunktion*
$\cos\colon [0, \pi] \to [-1, 1]$	$\arccos\colon [-1, 1] \to [0, \pi]$
$\sin\colon [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1, 1]$	$\arcsin\colon [-1, 1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$
$\tan\colon (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$	$\arctan\colon \mathbb{R} \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$
$\cot\colon (0, \pi) \to \mathbb{R}$	$\mathrm{arccot}\ \colon \mathbb{R} \to (0, \pi)$

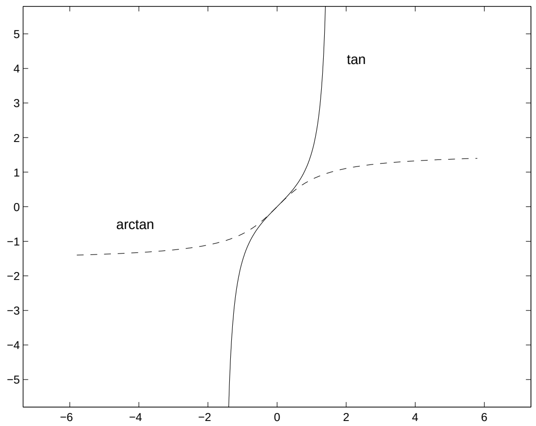
(für arccos *lies „arcus-cosinus", etc.)*



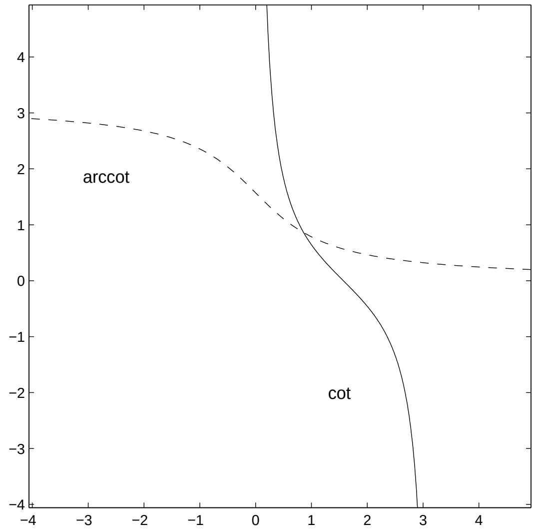
Sinus und Arcussinus



Cosinus und Arcuscosinus



Tangens und Arcustangens



Cotangens und Arcuscotangens

10.3. Hyperbelfunktionen. Bestimmte Linearkombinationen von Exponentialfunktionen treten in Anwendungen so häufig auf, daß man ihnen eigene Namen gegeben hat.

Definition 10.22. *Die **Hyperbelfunktionen** sind folgendermaßen definiert:*

i) ***sinus hyperbolicus***, sinh

$$\sinh\colon \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) \end{cases}$$

ii) ***cosinus hyperbolicus***, cosh

$$\cosh\colon \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) \end{cases}$$

iii) ***tangens (cotangens) hyperbolicus***

$$\tanh\colon \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{\sinh x}{\cosh x} \end{cases} \qquad \coth\colon \begin{cases} \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{\cosh x}{\sinh x} \end{cases}$$

Der hyperbolische Cosinus beschreibt die Form eines Seiles, welches zwischen zwei Befestigungspunkten frei durchhängt. Zeichnet man die Punktmenge $\{(\cosh t, \sinh t)\colon t \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2$, erhält man den rechten Zweig der Hyperbel $x^2 - y^2 = 1$. Dies erklärt den Zusatz „hyperbolicus“ in der Namensgebung. Es besteht aber auch ein enger Zusammenhang mit den trigonometrischen Funktionen:

$$\forall x \in \mathbb{R}\colon\ \sinh x = -i \sin ix, \quad \cosh x = \cos ix.$$

Damit lassen sich nun leicht trigonometrische Identitäten auf Hyperbelfunktionen übertragen:

Satz 10.23. *Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt*

i) $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$,
ii) $\sinh(x+y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y$,
iii) $\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y$,
iv) $\sinh x - \sinh y = 2 \cosh \frac{x+y}{2} \sinh \frac{x-y}{2}$,
v) $\cosh x - \cosh y = 2 \sinh \frac{x+y}{2} \sinh \frac{x-y}{2}$.

Beweis. Übung. □

Satz 10.24. (1) *Eigenschaften des* $\sinh$*:*
i) $\sinh$ *ist ungerade,*
ii) $\sinh$ *ist streng monoton wachsend,*
iii) $\sinh 0 = 0$, $\lim_{x\to\infty} \sinh x = \infty$,
iv) $\operatorname{bild} \sinh = \mathbb{R}$.

(2) *Eigenschaften des* $\cosh$*:*
i) $\cosh$ *ist gerade,*
ii) $\cosh|_{\mathbb{R}^+}$ *ist streng monoton wachsend,*
iii) $\cosh 0 = 1$, $\lim_{x\to\infty} \cosh x = \infty$,
iv) $\operatorname{bild} \cosh = [1, \infty)$.

(3) *Eigenschaften des* $\tanh$*:*
i) $\tanh$ *ist ungerade,*
ii) $\tanh$ *ist streng monoton wachsend,*
iii) $\tanh 0 = 0$, $\lim_{x\to\infty} \tanh x = 1$, $\lim_{x\to-\infty} \tanh = -1$,
iv) $\operatorname{bild} \tanh = (-1, 1)$.

(4) *Eigenschaften des* $\coth$*:*
i) $\coth$ *ist ungerade,*
ii) $\coth|_{(-\infty,0)}$ *und* $\coth|_{(0,\infty)}$ *sind streng monoton fallend,*
iii) $\lim_{x\to\infty} \coth x = 1$, $\lim_{x\to-\infty} \coth x = -1$, $\lim_{x\to 0^+} \coth x = \infty$, $\lim_{x\to 0^-} \coth x = -\infty$,
iv) $\operatorname{bild} \coth = \mathbb{R} \setminus [-1, 1]$.

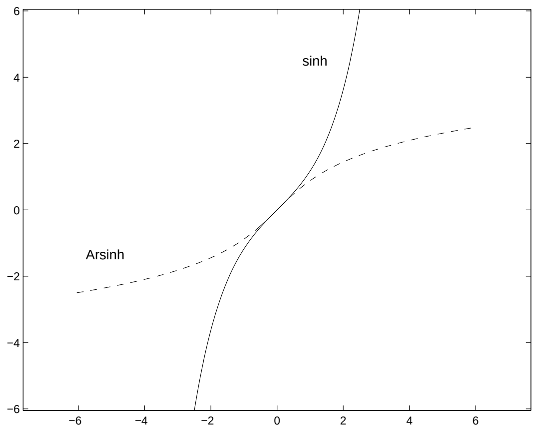
Beweis. Übung. □

Der hyperbolische Sinus, Tangens und Cotangens und die Restriktion von cosh auf $\mathbb{R}^+$ sind injektiv. Ihre Umkehrfunktionen sind die **Areafunktionen**, die wir im folgenden tabellarisch zusammenfassen. Wegen des engen Zusammenhanges der Hyperbelfunktionen mit der Exponentialfunktion, ist es nicht überraschend, daß die Areafunktionen sich durch den natürlichen Logarithmus darstellen lassen.

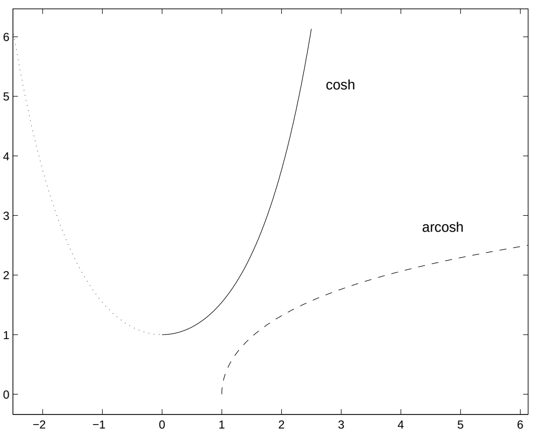
Definition 10.25.

Funktion	*Umkehrfunktion*
$\cosh\colon [0,\infty) \to [1,\infty)$	$\operatorname{Arcosh}\colon \begin{cases} [1,\infty) \to [0,\infty) \\ y \mapsto \ln(y+\sqrt{y^2-1}) \end{cases}$
$\sinh\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$	$\operatorname{Arsinh}\colon \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ y \mapsto \ln(y+\sqrt{y^2+1}) \end{cases}$
$\tanh\colon \mathbb{R} \to (-1,1)$	$\operatorname{Artanh}\colon \begin{cases} (-1,1) \to \mathbb{R} \\ y \mapsto \frac{1}{2}\ln\frac{1+y}{1-y} \end{cases}$
$\coth\colon \mathbb{R}\setminus\{0\} \Rightarrow \mathbb{R}\setminus[-1,1]$	$\operatorname{Arcoth}\colon \begin{cases} \mathbb{R}\setminus[-1,1] \to \mathbb{R}\setminus\{0\} \\ y \mapsto \frac{1}{2}\ln\frac{1+y}{y-1} \end{cases}$

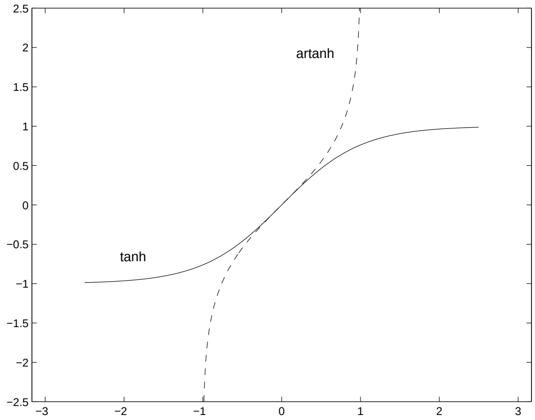
In den folgenden Plots stellen die durchgezogenen Kurven den invertierbaren Zweig der hyperbolischen Funktionen dar. Die Areafunktionen werden strichliert dargestellt:



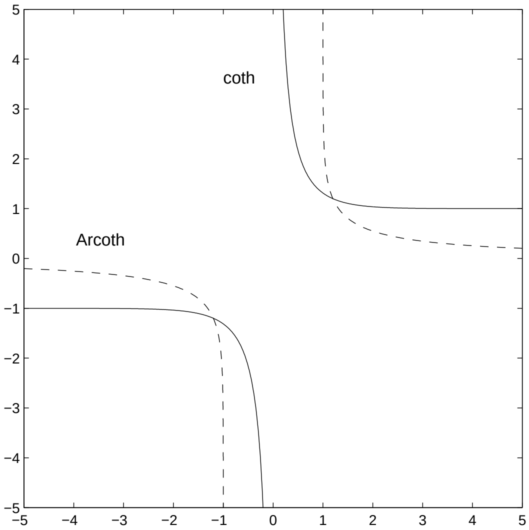
sinh und Arsinh



cosh und Arcosh



tanh und Artanh



coth und Arcoth

KAPITEL vi

Normierte Räume

Wir haben uns bisher intensiv mit Funktionen in *einer* reellen (komplexen) Variablen mit Werten in $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ beschäftigt. In diesem Abschnitt wollen wir uns von diesen allzu engen Fesseln befreien. Sieht man sich die Beweise der wesentlichsten Sätze genauer an, erkennt man, daß oft nur mit den Eigenschaften der Betragsfunktion in $\mathbb{R}$ (oder $\mathbb{C}$) argumentiert wurde. Dabei wurde der Betrag einer reellen Zahl x interpretiert als Abstand von x auf der reellen Zahlengeraden (in der Gaußschen Zahlenebene) von der Zahl Null. Dies legt nahe, daß sich jene Resultate, deren Beweis keine weiteren Eigenschaften erfordern, welche für $\mathbb{R}$ charakteristisch sind, insbesondere die Ordnung, ohne Mühe auf allgemeinere Situationen übertragen lassen, soferne man den Begriff des Abstandes zwischen zwei Objekten geeignet verallgemeinert. Dies führt auf die Struktur des metrischen bzw. normierten Raumes. Wir beschränken uns in dieser Vorlesung auf normierte Räume.

Ausgehend von der Konvergenz von Zahlenfolgen sind wir bei unseren Untersuchungen auf weitere Konvergenzbegriffe gestoßen: z.B. die punktweise und gleichmäßige Konvergenz von Funktionenfolgen, oder die eigentümliche Konvergenz von Potenzreihen: Es wurde gezeigt, daß Potenzreihen gleichmäßig auf abgeschlossenen und beschränkten Teilintervallen $[a,b]$ des Konvergenzintervalles $(x_0 - R, x_0 + R)$ konvergieren. Den Mathematiker interessiert dann die Frage, was diesen so unterschiedlichen Konvergenzbegriffen gemeinsam ist, um so zu einem besseren Verständnis von Konvergenz an sich zu kommen. Der dafür notwendige Schritt zu den topologischen Räumen geht über den Rahmen dieser Vorlesung hinaus.

1. Normierte Räume und Innere Produkträume

In vielen Anwendungen ist die zugrunde liegende Menge X nicht völlig unstrukturiert, sie weist eine algebraische Struktur auf: X ist ein Vektorraum (oder zumindest Teilmenge eines Vektorraumes).

Definition 1.1. *Es sei X ein Vektorraum über $\mathbb{K}$ und $\|\cdot\|\colon X \to \mathbb{R}^+$. Das Paar $(X, \|\cdot\|)$ heißt* ***normierter Raum*** *und $\|\cdot\|$* ***Norm****, wenn die Abbildung $\|\cdot\|$ folgende Eigenschaften besitzt:*

($\mathcal{N}$1) $\forall x \in X\colon \|x\| \ge 0$
$\forall x \in X\colon \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ — Definitheit
($\mathcal{N}$2) $\forall x \in X\, \forall \lambda \in \mathbb{K}\colon \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ — Homogenität
($\mathcal{N}$3) $\forall x, y \in X\colon \|x + y\| \le \|x\| + \|y\|$ — Dreiecksungleichung

Als Übung überzeuge man sich von der Gültigkeit der Ungleichung

$$\big|||x|| - ||y||\big| \leq ||x - y||, \tag{7}$$

für $x{,}y \in X$.

Beispiel 1.2. 1) Es sei $X = \mathbb{K}^n$. Für $x \in \mathbb{K}^n$, $x = (\xi_1, \dots, \xi_n)$, definieren wir

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |\xi_i|$$
$$\|x\|_\infty = \max\{|\xi_i| \colon i = 1, \dots, n\}.$$

Die Räume $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_1)$ und $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$ sind normierte Räume.
2) Es sei $D \subset \mathbb{C}$ und $X = \mathcal{B}(D, \mathbb{C})$. Setzt man für $f \in \mathcal{B}(D, \mathbb{C})$

$$\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)| \colon x \in D\}$$

erhält man den normierten Raum $(\mathcal{B}(D, \mathbb{C}), \|\cdot\|_\infty)$.
3) Es sei $I = [a, b]$, $-\infty < a < b < \infty$, und $X = C(I, \mathbb{R})$. Wir definieren auf $C(I, \mathbb{R})$ eine Norm durch

$$\|f\|_\infty = \max\{|f(x)| \colon x \in I\}.$$

Definition 1.3. *i) Es sei V ein Vektorraum über $\mathbb{C}$. Eine Abbildung $\langle\cdot,\cdot\rangle \colon V \times V \to \mathbb{C}$ heißt* ***inneres Produkt (skalares Produkt)****, wenn sie folgende Eigenschaften besitzt:*

- (J1) $\forall v \in V \colon \langle v, v\rangle \geq 0$,
- (J2) $\forall v \in V \colon \langle v, v\rangle = 0 \Leftrightarrow v = 0$,
- (J3) $\forall v, w \in V \colon \langle v, w\rangle = \overline{\langle w, v\rangle}$,
- (J4) $\forall u, v, w \in V\ \forall \lambda, \mu \in \mathbb{C} \colon \langle u, \lambda v + \mu w\rangle = \lambda\langle u, v\rangle + \mu\langle u, w\rangle$

ii) Ein Vektorraum, auf dem ein inneres Produkt erklärt ist, heißt ***innerer Produktraum*** *und wird mit $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ bezeichnet.*

Bemerkung 1.4. 1.) Setzt man $\lambda = \mu = 0$ in (J4), ergibt sich

$$\forall u \in V \colon \langle u, 0\rangle = 0.$$

2.) Für alle u, $v{,}w \in V$ und $\lambda \in \mathbb{C}$ folgt

$$\begin{aligned}
&\langle u + v, u + v\rangle = \langle u, u\rangle + 2\operatorname{Re}\langle u, v\rangle + \langle v, v\rangle,\\
&\langle \lambda u, v\rangle = \overline{\langle v, \lambda u\rangle} = \bar\lambda\overline{\langle v, u\rangle} = \bar\lambda\langle u, v\rangle\\
&\langle u + v, w\rangle = \overline{\langle w, u + v\rangle} = \overline{\langle w, u\rangle} + \overline{\langle w, v\rangle} = \langle u, w\rangle + \langle v, w\rangle.
\end{aligned}$$

Ein inneres Produkt ist somit linear im zweiten Argument und konjugiert linear im ersten Argument.
3.) Ist V ein Vektorraum über $\mathbb{R}$ entfällt die Konjugation in (J3). Ein inneres Produkt definiert eine bilineare Abbildung $\langle\cdot,\cdot\rangle \colon V \times V \to \mathbb{R}$.

Beispiel 1.5. Es sei $V = \mathbb{C}^n$ und $x = (\xi_1, \dots, \xi_n)$, $y = (\eta_1, \dots, \eta_n)$, , dann ist

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} \bar{\xi}_i \eta_i$$

ein inneres Produkt, das **Standardskalarprodukt**, in $\mathbb{C}^n$.

Satz 1.6 (Ungleichung von Cauchy-Schwarz). *In einem inneren Produktraum* $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ *gilt*

$$|\langle u, v \rangle|^2 \leq \langle u, u \rangle \langle v, v \rangle, \quad u, v \in V.$$

Gleichheit tritt genau dann ein, wenn u und v linear abhängig sind.

Beweis. Die Behauptung ist klar für $v = 0$, vgl. Bemerkung 1.4. Es sei also $v \neq 0$. Für $\lambda \in \mathbb{K}$ betrachten wir

$$(*) \qquad \begin{aligned} 0 \leq \langle u - \lambda v, u - \lambda v \rangle &= \langle u, u \rangle - 2\,\mathrm{Re}\langle u, \lambda v \rangle + \langle \lambda v, \lambda v \rangle \\ &= \langle u, u \rangle - 2\,\mathrm{Re}(\lambda \langle u, v \rangle) + |\lambda|^2 \langle v, v \rangle. \end{aligned}$$

Wir wählen nun

$$\lambda = \frac{\overline{\langle u, v \rangle}}{\langle v, v \rangle},$$

und erhalten

$$0 \leq \langle u, u \rangle - 2\frac{\overline{\langle u, v \rangle}\langle u, v \rangle}{\langle v, v \rangle} + \frac{\overline{\langle u, v \rangle}\langle u, v \rangle}{\langle v, v \rangle^2}\langle v, v \rangle = \langle u, u \rangle - \frac{|\langle u, v \rangle|^2}{\langle v, v \rangle},$$

also

$$|\langle u, v \rangle|^2 \leq \langle u, u \rangle \langle v, v \rangle.$$

Aus der Ungleichung $(*)$ geht auch hervor, daß Gleichheit genau dann auftritt, wenn $\langle u - \lambda v, u - \lambda v \rangle = 0$, also $u = \lambda v$ gilt. □

Wir zeigen nun, daß die Abbildung $v \mapsto ||v|| = \sqrt{\langle v, v, \rangle}$ eine Norm auf V definiert. Es ist leicht nachzuweisen, daß $|| \cdot ||$ die Eigenschaften $\mathcal{N}_1$ und $\mathcal{N}_2$ einer Norm hat. Es ist aber auch die Dreiecksungleichung erfüllt. Dies sieht man folgendermaßen ein. Für u und $v \in V$ ergibt sich mit Hilfe der Ungleichung von Cauchy-Schwarz

$$\begin{aligned} ||u + v||^2 = \langle u + v, u + v \rangle &= ||u||^2 + 2\,\mathrm{Re}\langle u, v \rangle + ||v||^2 \\ &\leq ||u||^2 + 2||u||\,||v|| + ||v||^2 = (||u|| + ||v||)^2, \end{aligned}$$

also $||u + v|| \leq ||u|| + ||v||$.

Satz 1.7. *Es sei* $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ *ein innerer Produktraum und*

$$||u|| = \sqrt{\langle u, u \rangle}, \quad u \in V.$$

Dann ist $|| \cdot ||$ eine Norm auf V, die vom inneren Produkt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ***induzierte Norm****.*

Wir treffen die Vereinbarung, einen inneren Produktraum stets mit der induzierten Norm zu versehen.

Beispiel 1.8. Das Standardskalarprodukt induziert in $\mathbb{R}^n$ bzw. $\mathbb{C}^n$ die Norm

$$||x||_2 = (\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Dies ist die **euklidische Norm** in $\mathbb{R}^n$, bzw. die **unitäre Norm** in $\mathbb{C}^n$. Die Ungleichung von Cauchy-Schwarz bzw. die Dreiecksungleichung bedeuten nun

$$|\sum_{i=1}^{n} x_i\bar{y}_i| \leq (\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2)^{\frac{1}{2}} (\sum_{i=1}^{n} |y_i|^2)^{\frac{1}{2}},$$
$$(\sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^2)^{\frac{1}{2}} \leq (\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2)^{\frac{1}{2}} + (\sum_{i=1}^{n} |y_i|^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Für $n = 3$ kann man $||x - y||_2$ als euklidischen Abstand der beiden Punkte mit den Koordinaten (x_1, x_2, x_3) und (y_1, y_2, y_3) interpretieren. Es ist nützlich, diese anschauliche Bedeutung der Norm in allgemeineren Situationen beizubehalten. Für $n = 1$ stimmen das Standardskalarprodukt mit dem Produkt in $\mathbb{R}$ und die induzierte Norm mit dem Betrag überein.

2. Topologische Grundbegriffe

Der Begriff des Kreises in $\mathbb{R}^2$ bzw. der Kugel in $\mathbb{R}^3$ läßt sich in naheliegender Weise verallgemeinern:

Definition 2.1. *Es sei $(X, ||\cdot||)$ ein normierter Raum, $x_0 \in X$ und $r > 0$.*

i) $K(x_0, r) := \{x \in X\colon ||x - x_0|| < r\}$,
heißt ***offene Kugel*** *mit Radius r und Mittelpunkt x_0.*

ii) *$O \subset X$ heißt* ***offen*** *in $(X, ||\cdot||)$ $\underset{Def}{\Leftrightarrow}$ $\forall x \in O \exists r > 0\colon K(x, r) \subset O$.*

iii) *$A \subset X$ heißt* ***abgeschlossen*** *in $(X, ||\cdot||)$ $\underset{Def}{\Leftrightarrow}$ $\complement A$ ist offen.*

iv) *$U \subset X$ heißt* ***Umgebung*** *von x_0 $\underset{Def}{\Leftrightarrow}$ $\exists r > 0\colon K(x_0, r) \subset U$.*
$\mathcal{U}(x) = \{U \subset X\colon U$ ist eine Umgebung von $x\}$.

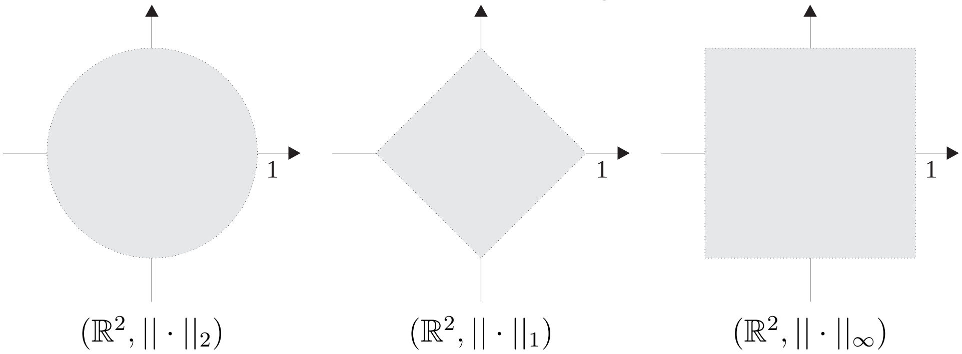
Eine Teilmenge $O \subset X$ ist demnach offen, wenn es zu jedem Punkt von O eine Umgebung gibt, die in O enthalten ist. Der Begriff offen hängt von dem X zugrunde gelegten Abstandsbegriff (Norm) ab.

Beispiel 2.2. (1) In $\mathbb{R}$ versehen mit dem üblichen, euklidischen Abstand sind die offenen Kugeln gerade die offenen Intervalle $(x_0 - r, x_0 + r)$.

(2) $(\mathbb{R}^2, ||\cdot||_2)\colon K(0,1) = \{(\xi,\eta) \in \mathbb{R}^2\colon \sqrt{|\xi|^2 + |\eta|^2} < 1\}$
$(\mathbb{R}^2, ||\cdot||_1)\colon K(0,1) = \{(\xi,\eta) \in \mathbb{R}^2\colon |\xi| + |\eta| < 1\}$
$(\mathbb{R}^2, ||\cdot||_\infty)\colon K(0,1) = \{(\xi,\eta) \in \mathbb{R}^2\colon \max\{|\xi|, |\eta|\} < 1\}$.

(3) $(C(I,\mathbb{R}), ||\cdot||_\infty)\colon K(f,\varepsilon) = \{g \in C(I,\mathbb{R})\colon \sup_{x\in I} |f(x) - g(x)| < \varepsilon\}$
$K(f,\varepsilon)$ beschreibt einen "ε-Schlauch" von stetigen Funktionen um f mit Radius ε.

Abbildung 1. Einheitskugeln in $\mathbb{R}^2$



Wir zeigen nun, daß die Bezeichnung offene Kugel für die Menge $K(x, r)$ konsistent ist mit der Definition einer offenen Menge:

Satz 2.3. *Jede offene Kugel eines normierten Raumes ist offen.*

Beweis. Es sei $(X, ||\cdot||)$ ein normierter Raum, $x_0 \in X$ und $K(x_0, r) \subset X$. Für jedes beliebige $\xi \in K(x_0, r)$ setzen wir $s = r - ||x_0 - \xi|| > 0$ und betrachten die Kugel $K(\xi, s)$. Für $\eta \in K(\xi, s)$ folgt mit Hilfe der Dreiecksungleichung

$$||\eta - x_0|| \leq ||\xi - x_0|| + ||\xi - \eta|| < ||\xi - x_0|| + s = r,$$

also

$$K(\xi, s) \subset K(x_0, r),$$

d.h. $K(x_0, r)$ ist offen. □

Satz 2.4 (Hausdorffsches Trennungsaxiom). *Zu je zwei Punkten x und y, $x \neq y$, eines normierten Raumes X gibt es eine Umgebung U von x und eine Umgebung V von y mit $U \cap V = \emptyset$.*

Beweis. Wegen $x \neq y$ gilt $\varepsilon = \frac{1}{2}||x-y|| > 0$. Setze $U = K(x, \varepsilon)$ und $V = K(y, \varepsilon)$. Diese Umgebungen sind offenbar disjunkt. □

Anschaulich bedeutet das Trennungsaxiom von Hausdorff, daß je zwei verschiedene Punkte eines normierten Raumes X durch disjunkte Umgebungen getrennt werden können.

Offene Mengen in einem normierten Raum besitzen folgende Eigenschaften.

Satz 2.5. *Es sei $(X, ||\cdot||)$ ein normierter Raum und $\mathcal{T}$ die Menge aller offenen Teilmengen von X. Dann gilt*

(𝒯1) $\emptyset \in \mathcal{T}$, $X \in \mathcal{T}$.

(𝒯2) *Es sei I eine beliebige endliche Indexmenge:*

$$(\forall i \in I\colon O_i \in \mathcal{T}) \Rightarrow \bigcap_{i \in I} O_i \in \mathcal{T}.$$

($\mathcal{T}3$) *Es sei I eine beliebige Indexmenge:*

$$(\forall i \in I\colon O_i \in \mathcal{T}) \Rightarrow \bigcup_{i \in I} O_i \in \mathcal{T}.$$

Beweis. 1) Die Bedingung aus Definition 2.1-ii) kann für $O = \emptyset$ nie verletzt werden, für $O = X$ ist sie trivialerweise erfüllt.
2) Es sei $\{O_1, \ldots, O_n\} \subset \mathcal{T}$. Im Falle $\bigcap_{i=1}^n O_i = \emptyset$ ist nichts zu beweisen. Sei $x_0 \in \bigcap_{i=1}^n O_i$. Da jede Menge O_i, $i = 1, \ldots, n$, offen ist, gibt es Kugeln $K(x_0, r_i) \subset O_i$, $r_i > 0$, $i = 1, \ldots, n$. Setzt man $r = \min\{r_1, \ldots, r_n\}$, ergibt sich

$$K(x_0, r) \subset K(x_0, r_i) \subset O_i, \quad i = 1, \ldots, n,$$

also

$$K(x_0, r) \subset \bigcap_{i=1}^n O_i,$$

d.h. $\bigcap_{i=1}^n O_i$ ist offen.
3) Es sei I eine beliebige nichtleere Indexmenge, $O_i \in \mathcal{T}$ für alle $i \in I$ und $x_0 \in \bigcup_{i \in I} O_i$ ($\neq \emptyset$). Es gibt also einen Index $i_0 \in I$ mit $x_0 \in O_{i_0}$. Folglich existiert eine Kugel $K(x_0, r_0)$ mit

$$K(x_0, r_0) \subset O_{i_0} \subset \bigcup_{i \in I} O_i.$$

□

Satz 2.6 (Eigenschaften der abgeschlossenen Mengen). *Es sei $(X, ||\cdot||)$ ein normierter Raum. Dann gilt*

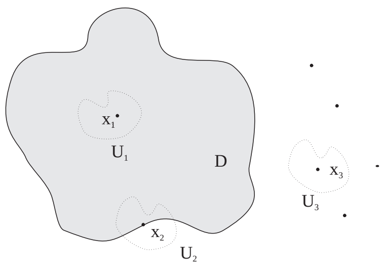
i) *$\emptyset$, X sind abgeschlossen.*
ii) *Für jede endliche Indexmenge I:*
($\forall i \in I\colon A_i$ ist abgeschlossen) $\Rightarrow \bigcup_{i \in I} A_i$ ist abgeschlossen.
iii) *Für jede beliebige Indexmenge I:*
($\forall i \in I\colon A_i$ ist abgeschlossen) $\Rightarrow \bigcap_{i \in I} A_i$ ist abgeschlossen.

Beweis. Satz 2.5 und de Morgansche Regeln. □

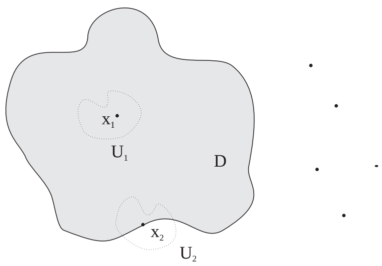
Man nennt jede Familie $\mathcal{T}$ von Teilmengen einer nichtleeren Grundmenge X, welche die Eigenschaften ($\mathcal{T}1$)-($\mathcal{T}3$) erfüllt, eine **Topologie**, auf X. Die Elemente von $\mathcal{T}$ heißen **offene Mengen**, das Paar $(X, \mathcal{T})$ bildet einen **topologischen Raum**. Satz 2.5 zeigt, daß das System der offenen Mengen eines normierten Raumes $(X, ||\cdot||)$ eine Topologie $\mathcal{T}_{||\cdot||}$ auf X, die metrische Topologie auf X, bildet. Die Definition 2.1 der offenen Menge in einem normierten Raum ist somit konsistent mit der topologischen Definition. Sinngemäß läßt sich der Umgebungsbegriff in einem topologischen Raum einführen. Topologische Räume stellen das theoretische Werkzeug dar, um die unterschiedlichen Konvergenz- und Stetigkeitsbegriffe der Analysis unter einem einheitlichen Gesichtspunkt zu betrachten. In dieser Einführung beschränken wir uns auf die Darstellung der topologischen Grundlagen im Rahmen der normierten Räume.

Definition 2.7. *Es sei $(X, ||\cdot||)$ ein normierter Raum und $D \subset X$, $x \in X$.*

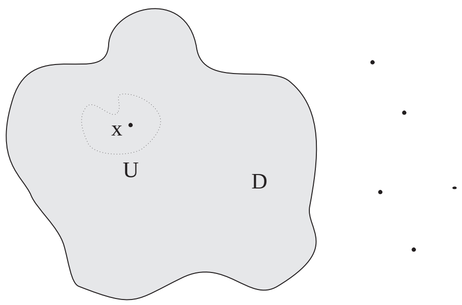
(1) $x \in X$ *heißt* ***Berührungspunkt*** *von* $D \underset{Def}{\Leftrightarrow} \forall U \in \mathcal{U}(x)\colon U \cap D \neq \emptyset$.
(2) $x \in X$ *heißt* ***Häufungspunkt*** *von* $D \underset{Def}{\Leftrightarrow} \forall U \in \mathcal{U}(x)\colon (U \setminus \{x\}) \cap D \neq \emptyset$.
(3) $x \in D$ *heißt* ***isolierter Punkt*** *von* $D \underset{Def}{\Leftrightarrow} \exists U \in \mathcal{U}(x)\colon U \cap D = \{x\}$.
(4) $x \in D$ *heißt* ***innerer Punkt*** *von* $D \underset{Def}{\Leftrightarrow} \exists U \in \mathcal{U}(x)\colon U \subset D$.
(5) $D^\circ = \{x \in D\colon x$ *ist innerer Punkt von* $D\}$ *heißt das* ***Innere*** *(offener Kern) von* D.
(6) $\bar{D} = \{x \in X\colon x$ *ist Berührungspunkt von* $D\}$ *heißt* ***abgeschlossene Hülle*** *von* D.
(7) $D \subset X$ *heißt* ***dicht*** *in* $X \underset{Def}{\Leftrightarrow} \bar{D} = X$.
(8) $\partial D = \bar{D} \cap \overline{\complement D}$ *heißt* ***Rand*** *von* D.



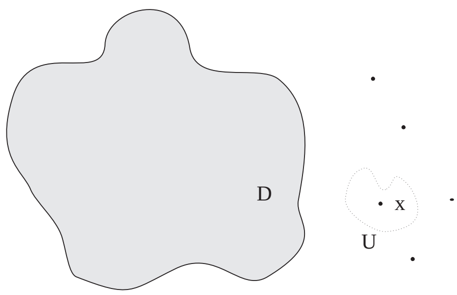
Berührungspunkt



Häufungspunkt



Innerer Punkt



Isolierter Punkt

Die Punkte x_i, $i = 1, 2, 3$, sind Berührungspunkte von D, x_1 ist ein innerer Punkt, x_2 ein Randpunkt von D.

Bemerkung 2.8. 1) Manche Autoren verstehen unter einer Umgebung von $x \in X$ jede offene Menge O mit $x \in O$.
2) Ein Häufungspunkt von D muß nicht notwendig selbst Element von D sein. Ein Berührungspunkt von D ist entweder ein isolierter Punkt oder ein Häufungspunkt von D. Die abgeschlossene Hülle von D läßt sich also schreiben als

$$\bar{D} = D \cup \{x \in X\colon x \text{ ist Häufungspunkt von } D\}.$$

3) Man überzeuge sich davon, daß man in der Definition 2.7 das volle Umgebungssystem $\mathcal{U}(x)$ durch die Familie der offenen Kugeln mit Mittelpunkt x ersetzen kann. Ein

Berührungspunkt von D kann also auch charakterisiert werden durch die Bedingung

$$\forall \varepsilon > 0\colon K(x,\varepsilon) \cap D \neq \emptyset.$$

Die Formulierung in Definition 2.7 entspricht der allgemeineren topologischen Beschreibung dieser Begriffe.

Satz 2.9. *In einem normierten Raum $(X, ||\cdot||)$ gilt für jede Teilmenge $D \subset X$:*

i) *D° ist offen.*
ii) *$\bar{D}$ ist abgeschlossen.*
iii) *D ist offen $\Leftrightarrow D = D^\circ$.*
iv) *D ist abgeschlossen $\Leftrightarrow D = \bar{D}$.*
v) *$D^\circ = \complement(\overline{\complement D})$.*

Beweis. i) Ist $D^\circ = \emptyset$, gibt es nichts zu beweisen. Für jeden inneren Punkt $x \in D$ gibt es eine Kugel $K(x,\varepsilon) \subset D$, $\varepsilon > 0$. Die Kugel $K(x,\varepsilon)$ ist aber auch Umgebung jedes ihrer Punkte, $\forall y \in K(x,\varepsilon)\colon K(x,\varepsilon) \in \mathfrak{U}(y)$. Jeder Punkt von $K(x,\varepsilon)$ ist somit innerer Punkt von D, d.h.

$$\forall x \in D^\circ \exists \varepsilon > 0\colon K(x,\varepsilon) \subset D^\circ,$$

d.h. D° ist offen.
ad iii) „$\Leftarrow$“ klar, wegen i).
„$\Rightarrow$“ Wenn D offen ist, dann ist jeder Punkt von D innerer Punkt von D, d.h. $D \subset D^\circ$. Trivialerweise gilt aber stets $D^\circ \subset D$. Insgesamt erhält man $D^\circ = D$.
ii). Wir zeigen $\complement\bar{D}$ ist offen. Es sei $x \in \complement\bar{D}$, also ist x kein Berührungspunkt von D. Dies bedeutet

$$\exists U \in \mathfrak{U}(x)\colon U \cap D = \emptyset.$$

O.B.d.A. können wir U offen annehmen. Dann kann auch kein anderer Punkt von U Berührungspunkt von D sein (dies hätte ja $U \cap D \neq \emptyset$ zur Folge). Somit gilt schärfer $U \cap \bar{D} = \emptyset$ bzw. $U \subset \complement\bar{D}$. Dies bedeutet aber, daß jeder Punkt von $\complement\bar{D}$ innerer Punkt von $\complement\bar{D}$ ist, d.h. $\complement\bar{D} = (\complement\bar{D})^\circ$, also ist $\complement\bar{D}$ offen.
iv) „$\Leftarrow$“ klar, wegen ii).
„$\Rightarrow$“ Es sei D abgeschlossen, also $\complement D$ offen. Wegen $D \cap \complement D = \emptyset$ kann kein Punkt von $\complement D$ Berührungspunkt von D sein. Also folgt $\bar{D} \subset D$. Da stets $D \subset \bar{D}$ zutrifft, folgt $D = \bar{D}$.
v) Aus $\complement D \subset \overline{\complement D}$ folgt $D = \complement\complement D \supset \complement(\overline{\complement D})$. $\complement(\overline{\complement D})$ ist offen, für jedes $x \in \complement(\overline{\complement D})$ gibt es eine Umgebung $U_x \in \mathfrak{U}(x)$ mit $x \in U_x \subset \complement(\overline{\complement D}) \subset D$. Somit folgt $\complement(\overline{\complement D}) \subset D^\circ$. Für die umgekehrte Inklusion gehen wir von $x \notin \complement(\overline{\complement D})$, d.h. $x \in \overline{\complement D}$ aus. Dies bedeutet jedoch

$$\forall U \in \mathfrak{U}(x)\colon U \cap \complement D \neq \emptyset,$$

d.h. $x \notin D^\circ$. $\square$

Korollar 2.10. Es sei $(X, ||\cdot||)$ ein normierter Raum und $D \subset X$. Der Rand von D ist abgeschlossen und es gilt $\partial D = \bar{D} \setminus D^\circ$.

Beweis. Wegen $\partial D = \bar{D} \cap \overline{\complement D}$ ist der Rand von D abgeschlossen nach 2.9-ii). Die Darstellung von ∂D folgt mit 2.9-v) aus

$$\bar{D} \setminus D^\circ = \bar{D} \setminus \complement(\overline{\complement D}) = \bar{D} \cap \overline{\complement D} = \partial D.$$

□

Korollar 2.11. Es sei $(X, ||\cdot||)$ ein normierter Raum und $D \subset X$.

i) D° ist die größte offene Teilmenge von D, d.h. $\forall O \subset D, O$ offen: $O \subset D^\circ$.

ii) $\bar{D}$ ist die kleinste abgeschlossene Obermenge von D, d.h. $\forall A \supset D, A$ abgeschlossen: $A \supset \bar{D}$.

Beweis. i) Es sei $O \subset D$ offen und $x \in O$. Jeder Punkt einer offenen Menge ist nach 2.9-iii) ein innerer Punkt. Somit existiert eine Umgebung $U \in \mathcal{U}(x)$ mit $x \in U \subset O \subset D$, d.h. x ist auch innerer Punkt von D, also $x \in D^\circ$ und somit $O \subset D^\circ$.
ii) Es sei $A \supset D$ abgeschlossen und $x \in \bar{D}$. Für jede Umgebung $U \in \mathcal{U}(x)$ gilt also $U \cap D \neq \emptyset$ und damit erst recht $U \cap A \neq \emptyset$. Daher ist x auch ein Berührungspunkt von A. Da A abgeschlossen ist, liegt x in A und somit $A \supset \bar{D}$. □

Die Charakterisierung abgeschlossener Mengen durch die Bedingung $A = \bar{A}$ bedeutet, daß eine Menge $A \subset X$ genau dann abgeschlossen ist, wenn man zeigen kann, daß sämtliche Häufungspunkte von A der Menge A angehören, vgl. Bemerkung 2.8.

Beispiel 2.12. In den folgenden Beispielen betrachten wir Teilmengen der normierten Räume $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ (versehen mit der euklidischen Norm).
1) $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ ist weder offen (für jedes offene Intervall (a,b), $-\infty < a < b < \infty$, gilt $(a,b) \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \neq \emptyset$, Korollar III-2.16), noch abgeschlossen (vgl. Satz II-6.11). Es ist

$$\mathbb{Q}^\circ = \emptyset, \quad \mathbb{Q} \underset{\neq}{\subset} \bar{\mathbb{Q}} = \mathbb{R},$$

d.h. $\mathbb{Q}$ ist dicht in $\mathbb{R}$. Aus $\mathbb{Q}^\circ = \emptyset$ folgt mit 2.9-v)

$$\complement\mathbb{Q}^\circ = \mathbb{R} = \overline{\complement\mathbb{Q}},$$

es liegt also auch $\complement\mathbb{Q}$ dicht in $\mathbb{R}$. Dies zeigt auch

$$\partial\mathbb{Q} = \bar{\mathbb{Q}} \cap \overline{\complement\mathbb{Q}} = \mathbb{R}.$$

2) $D = \{\frac{1}{n} \colon n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}$. D hat nur einen einzigen Häufungspunkt $x_0 = 0$, $x_0 \notin D$, also ist D nicht abgeschlossen. D ist nicht offen: Für alle $n \in \mathbb{N}$ und $r > 0$ gilt nämlich $K(\frac{1}{n}, r) \cap \complement D \neq \emptyset$. Insbesondere findet man

$$\forall n \in \mathbb{N} \colon K(\frac{1}{n}, \frac{1}{2n(n+1)}) \cap D = \emptyset,$$

D besteht also nur aus isolierten Punkten. Der Rand von D ist gegeben durch $\partial D = \bar{D} = D \cup \{0\}$.
3) $D = (0,1] \cup \{2\} \subset \mathbb{R}$. Es gilt $\bar{D} = [0,1] \cup \{2\}$, $x = 2$ ist ein isolierter Punkt von D, $D^\circ = (0,1)$, $\partial D = \{0,1,2\}$. D ist also weder offen noch abgeschlossen. Betrachtet man

allerdings D als Teilmenge von $\mathbb{C}$, ergibt sich – man beachte, daß in $\mathbb{C}$ Umgebungen eines Punktes x (offene Obermengen) offene(r) Kreisscheiben mit Mittelpunkt x sind – $\bar{D} = [0,1] \cup \{2\}$, $D^\circ = \emptyset$, $\partial D = \bar{D}$.
4) $D = \{z \in \mathbb{C} \colon |z| < 1,\, z \notin [0,1)\}$ ist offen, $\bar{D} = \{z \in \mathbb{C} \colon |z| \leq 1\}$.

Offene Teilmengen von $\mathbb{R}$ (bzgl. der euklidischen Topologie) besitzen eine besonders einfache Struktur. Ohne Beweis zitieren wir folgendes Resultat.

Satz 2.13. *Jede offene Teilmenge von $\mathbb{R}$ ist eine abzählbare Vereinigung offener, paarweise disjunkter Intervalle.*

Es ist aber nicht möglich, offene Mengen in $\mathbb{C}$ oder $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, auf eine ähnlich einfache Art zu charakterisieren.

3. Konvergenz und Stetigkeit in normierten Räumen

Wir erinnern nun an die Definition der Konvergenz einer Folge (x_n) reeller oder komplexer Zahlen: Es gilt $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ genau dann, wenn es zu jeder ε-Umgebung von x einen Index $N(\varepsilon)$ gibt mit $x_n \in K(x,\varepsilon)$ für alle $n \geq N(\varepsilon)$. Die ε-Umgebungen waren die symnormierten Intervalle $(x-\varepsilon, x+\varepsilon)$, bzw. Kreise mit Mittelpunkt x und Radius ε. Ändert man die Interpretation der ε-Umgebung in dieser Definition, ergibt sich eine natürliche Erweiterung des Konvergenzbegriffes auf normierte Räume. Dieses Übertragungsprinzip kann auch auf andere Begriffe angewendet werden, welche auf ε-Umgebungen aufbauen, z.B. Grenzwert und Stetigkeit einer Funktion an einer Stelle $x_0 \in X$.

Definition 3.1. *Es sei $(X, ||\cdot||)$ ein normierter Raum.*

(1) *Eine Folge $(x_n) \subset X$ **konvergiert** gegen $x \in X$, $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, genau dann, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ einen Index $N(\varepsilon)$ gibt, sodaß $||x_n - x|| < \varepsilon$ für alle $n \geq N(\varepsilon)$ gilt.*

(2) *Eine Folge $(x_n) \subset X$ heißt **Cauchy Folge** $\underset{Def}{\Leftrightarrow}$*

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}\, \forall n, m \geq N(\varepsilon) \colon ||x_n - x_m|| < \varepsilon.$$

(3) *Ein normierter Raum X heißt **vollständig** oder **Banachraum**, wenn jede Cauchyfolge einen Grenzwert (in X) besitzt.*

Beispiel 3.2. Betrachten wir die Konvergenz einer Folge stetiger Funktionen in $C(I, ||\cdot||_\infty)$: (φ_n) konvergiert gegen φ genau dann, wenn für beliebiges $\varepsilon > 0$

$$||\varphi_n - \varphi|| = \sup\{|\varphi_n(x) - \varphi(x)| \colon x \in I\} < \varepsilon$$

für $n \geq N(\varepsilon)$ gilt. Dies entspricht der gleichmäßigen Konvergenz der Funktionenfolge.

Satz 3.3. *Es sei A Teilmenge eines normierten Raumes $(X, ||\cdot||)$. Die Grenzwerte konvergenter Folgen in A sind Berührungspunkte von A und umgekehrt.*

Beweis. i) Es sei $(x_n) \subset A$, $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ und $U \in \mathcal{U}(x)$. Es gibt einen Index $N \in \mathbb{N}$, sodaß $x_n \in U$ für alle $n \geq N$. Somit gilt auch $U \cap A \neq \emptyset$. Da $U \in \mathcal{U}(x)$ beliebig gewählt war, bedeutet dies $x \in \bar{A}$.
ii) Es sei x ein Berührungspunkt von A. Es folgt also $A \cap K(x, \frac{1}{n}) \neq \emptyset$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Wählen wir nun für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein Element $x_n \in A \cap K(x, \frac{1}{n})$ (diese müssen nicht notwendig verschieden sein) erhalten wir eine Folge $(x_n) \subset A$ mit $||x_n, x) < \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$, also $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. □

Die Eindeutigkeit des Grenzwertes ergibt sich aus der Hausdorffschen Trennungseigenschaft in Satz 2.4. Gleich wie in Satz 2.1 zeigt man folgende Rechenregel:

Satz 3.4. *Es seien $(V, ||\cdot||)$ ein normierter Raum über $\mathbb{K}$, (x_n) und (y_n) konvergente Folgen in V und $\lambda \in \mathbb{K}$. Dann sind die Folgen $(x_n + y_n)$ und (λx_n) konvergent und es gilt*

$$\lim_{n\to\infty}(\lambda x_n) = \lambda \lim_{n\to\infty} x_n,$$
$$\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n + \lim_{n\to\infty} y_n.$$

Der Satz 3.8 zeigt, daß der Raum $(\mathbb{K}, |\cdot|)$ vollständig ist. Ein weiteres nichttriviales Beispiel wird im folgenden vorgestellt.

Satz 3.5. *Es seien $(X, \|\cdot\|_X)$, $(Y, \|\cdot\|_Y)$ normierte Räume, $D \subset X$, $(Y, \|\cdot\|_Y)$ vollständig. Für $f \in \mathcal{F}(D, Y)$ setzen wir*

$$\|f\|_\infty := \sup\{\|f(x)\|_Y : x \in D\} \in \bar{\mathbb{R}}$$
$$\mathcal{B}(D, Y) := \{f \in \mathcal{F}(D, Y) : \|f\|_\infty < \infty\}.$$

$\mathcal{B}(D, Y)$ ist ein Banach Raum.

Man überzeuge sich davon, daß die Konvergenz einer Folge (f_n) in $\mathcal{B}(D, Y)$ bzgl. $\|\cdot\|_\infty$ wieder die gleichmäßige Konvergenz von (f_n) bedeutet.

Beweis. Wir überlassen es dem Leser, nachzuweisen, daß $\mathcal{B}(D, Y)$ ein Vektorraum und $\|\cdot\|_\infty$ eine Norm auf $\mathcal{B}(D, Y)$ ist.
Wir finden vorerst eine Grenzfunktion: Es sei also $(f_n)_{n\geq 1} \subset \mathcal{B}(D, Y)$ eine Cauchy Folge. Zu $\varepsilon > 0$ gibt es daher ein $N(\varepsilon)$, sodaß $\|f_n - f_m\|_\infty < \frac{\varepsilon}{3}$ für alle $n, m \geq N(\varepsilon)$ zutrifft. A fortiori gilt daher

$$(*) \qquad \forall x \in D\, \forall n, m \geq N(\varepsilon) : \|f_n(x) - f_m(x)\|_Y < \frac{\varepsilon}{3},$$

d.h. $(f_n(x))_{n\geq 1} \subset Y$ ist für jedes $x \in D$ eine Cauchy Folge. Wegen der Vollständigkeit von Y gibt es ein Element $f(x) \in Y$ mit $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$, $x \in D$. Dies definiert die Grenzfunktion $f : D \to Y$ als punktweisen Grenzwert. Wir zeigen nun, daß die Funktionenfolge (f_n) sogar gleichmäßig gegen f konvergiert. Wegen der punktweisen Konvergenz gibt es für alle $x \in D$ einen Index $K(\varepsilon, x)$, sodaß

$$\|f_n(x) - f(x)\|_Y < \frac{\varepsilon}{2}$$

für alle $n \geq K(\varepsilon, x)$ zutrifft. O.B.d. A. können wir $K(\varepsilon, x) \geq N(\varepsilon)$ annehmen. Somit folgt für $n \geq N(\varepsilon)$ und $x \in D$

$$||f_n(x) - f(x)||_Y \leq ||f_n(x) - f_{K(\varepsilon,x)}(x)||_Y + ||f_{K(\varepsilon,x)}(x) - f(x)||_Y < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Bildet man in dieser Abschätzung das Supremum über alle $x \in D$, ergibt sich

$$||f_n - f||_\infty \leq \varepsilon, \qquad \text{für alle } n \geq N(\varepsilon),$$

das ist die gleichmäßige Konvergenz der Folge (f_n). Es fehlt noch der Nachweis der Beschränktheit von f. Dies ist eine Konsequenz aus

$$\|f\|_\infty \leq ||f - f_{N(\varepsilon)}||_\infty + ||f_{N(\varepsilon)}||_\infty \leq \varepsilon + ||f_{N(\varepsilon)}||_\infty < \infty$$

d.h. f ist ein Element von $\in \mathcal{B}(D, Y)$. □

Korollar 3.6. Es sei $I = [a, b]$. Der Raum $(C(I, \mathbb{K}), || \cdot ||)$ ist vollständig

Beweis. Nach dem Satz von Weierstraß sind stetige Funktionen auf I beschränkt. Somit ist $C(I, \mathbb{K})$ ein Unterraum von $\mathcal{B}(I, \mathbb{K})$. Da $\mathbb{K}$ vollständig ist, hat jede Cauchy Folge in $C(I, \mathbb{K})$ einen Grenzwert in $\mathcal{B}(I, \mathbb{K})$. Da die Folge gleichmäßig gegen die Grenzfunktion konvergiert, ist die Grenzfunktion stetig (vgl. Satz 8.5). □

Wir haben bereits gesehen, daß es viele Möglichkeiten gibt, einen Vektorraum mit einer Norm zu versehen. Die Konvergenz einer Folge hängt natürlich von der Wahl der Norm ab. In diesem Zusammenhang ist folgender Begriff nützlich:

Definition 3.7. *Zwei Normen $|| \cdot ||$ und $| \cdot |$ auf einem Vektorraum X heißen* ***äquivalent****, wenn es Konstante $m > 0$ und $M > 0$ gibt, sodaß für alle $x \in X$ die Abschätzungen*

$$m|x| \leq ||x|| \leq M|x|$$

gelten.

Beispiel 3.8. Die Ungleichungen

$$||x||_\infty \leq ||x||_2 \leq \sqrt{n}||x||_\infty, \qquad x \in \mathbb{C}^n$$

zeigen, daß die Normen $|| \cdot ||_2$ und $|| \cdot ||_\infty$ in $\mathbb{C}^n$ äquivalent sind.

Es seien $||\cdot||$ und $|\cdot|$ äquivalente Normen auf einem Vektorraum X und $(x_n) \subset X$ eine Folge, welche in $(X, |\cdot|)$ gegen x konvergiert. Aus $||x_n - x|| \leq M|x_n - x|$ schließt man auf die Konvergenz der Folge (x_n) auch in $(X, || \cdot ||)$. Umgekehrt folgt aus der $|| \cdot ||$-Konvergenz einer Folge auch deren Konvergenz bezüglich der Norm $| \cdot |$. Äquivalente Normen führen somit auf dasselbe System konvergenter Folgen.
Besonders übersichtlich sind in dieser Hinsicht endlich dimensionale Vektorräume. Sind X ein Vektorraum über $\mathbb{K}$, $(Y, ||\cdot||_Y)$ ein normierter Raum über $\mathbb{K}$ und $\varphi\colon X \to Y$ ein Isomorphismus (also eine lineare Bijektion), dann wird durch

$$||x||_\varphi = ||\varphi(x)||_Y, \quad x \in X$$

eine Norm in X erklärt. Eine Folge $(x_n) \subset X$ konvergiert in $(X, ||\cdot||_\varphi)$ gegen $x \in X$ genau dann, wenn die Folge der Bilder $(\varphi(x_n))$ in $(Y, ||\cdot||_Y)$ gegen $\varphi(x) \in Y$ konvergiert.
Es sei $(X, \mathbb{K})$ ein endlichdimensionaler Vektorraum, $\dim X = n$, und $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ eine geordnete Basis von X. Bezeichnet man mit $[x]_\mathcal{B} = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{K}^n$ den Koordinatenvektor von $x \in X$ bezüglich der Basis $\mathcal{B}$, wird durch $\varphi(x) = [x]_\mathcal{B}$ ein Isomorphismus $\varphi\colon X \to \mathbb{K}^n$ festgelegt. Versehen wir $\mathbb{K}^n$ mit der Norm $||\cdot||_\infty$, dann zeigt die vorausgehende Überlegung

$$||x||_\varphi = ||[x]_\mathcal{B}||_\infty = \max_{1\le i\le n} |\xi_i|,$$

mit $x = \sum_{i=1}^n \xi_i e_i$. Nach diesen Vorbereitungen können wir folgenden fundamentalen Satz zeigen.

Satz 3.9. *In einem endlich dimensionalen Vektorraum sind alle Normen äquivalent.*

Beweis. Es sei X ein Vektorraum über $\mathbb{K}$ mit $\dim X = n$.
1. Schritt: Wir zeigen zuerst, daß für eine beliebige Norm $||\cdot||$ in X gilt

$$\exists m, M > 0 \forall x \in X\colon m\,||x|| \le ||x||_\varphi \le M\,||x||.$$

Für $x \in X$ folgt aus der Darstellung $x = \sum_{i=1}^n \xi_i e_i$

$$||x|| \le \sum_{i=1}^n |\xi_i|\,||e_i|| \le \max_{1\le i\le n} |\xi_i| \sum_{i=1}^n ||e_i|| \le \sum_{i=1}^n ||e_i||\,||x||_\varphi.$$

Somit gilt

$$m||x|| \le ||x||_\varphi, \quad x \in X$$

mit $m = (\sum_{i=1}^n ||e_i||)^{-1} > 0$.
Um die Ungleichung $||x||_\varphi \le M||x||$ zu zeigen, nehmen wir an, für jedes $M > 0$, beispielsweise $M = k$, $k \in \mathbb{N}$, gäbe es ein Element $x_k \in X$ mit

$$||x_k||_\varphi > k\,||x_k||.$$

Setzt man $z_k = \frac{x_k}{||x_k||_\varphi}$, dann gilt einerseits

$$||z_k|| < \frac{1}{k}, \qquad k \in \mathbb{N},$$

also $\lim_{k\to\infty} z_k = 0$ in $(X, ||\cdot||)$, andererseits folgt

$$||z_k||_\varphi = ||[z_k]_\mathcal{B}||_\infty = 1, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Es sei nun $[z_k] = (\xi_1^k, \dots, \xi_n^k) \in \mathbb{K}^n$. Dann sind die Koordinatenfolgen $(\xi_i^k)_{k\ge1}$, $1 \le i \le n$, beschränkt. Nach dem Satz von Bolzano-Weierstrass kann man aus der Folge $(\xi_1^k)_{k\ge1}$ eine konvergente Teilfolge $(\xi_1^{\phi_1(k)})_{k\ge1}$ auswählen. Ihr Grenzwert sei ξ_1. Aus der Folge $(\xi_2^{\phi_1(k)})_{k\ge1}$ kann man wiederum eine konvergente Teilfolge $(\xi_2^{(\phi_2\circ\phi_1)(k)})_{k\ge1}$ auswählen. Dann konvergiert $(\xi_1^{(\phi_2\circ\phi_1)(k)})_{k\ge1}$ nach wie vor gegen ξ_1. Induktiv fortfahrend erhalten wir schließlich eine Teilfolge $([z_{\phi(k)}])_{k\ge1} = \big((\xi_1^{\phi(k)})_{k\ge1}, \dots, (\xi_n^{\phi(k)})_{k\ge1}\big)$,

deren Koordinatenfolgen $(\xi_i^{\phi(k)})_{k\geq 1}$, $1 \leq i \leq n$, konvergieren. Mit ξ_i bezeichnen wir deren Grenzwerte.
Setzen wir $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$, dann gilt $\lim_{k\to\infty}[z_{\phi(k)}] = \xi$ in $(\mathbb{K}^n, ||\cdot||_\infty)$. Dies ist eine Folge von

$$||[z_{\phi(k)}] - \xi||_\infty = \max_{1\leq i\leq n} |\xi_i^{\phi(k)} - \xi_i|$$

und $\lim_{k\to\infty} \xi_i^{\phi(k)} = \xi_i$. definieren wir nun

$$z = \varphi^{-1}(\xi) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i e_i,$$

dann konvergiert (trivialerweise) die Folge $(z_{\phi(k)})_{k\geq 1}$ gegen z in $(X, ||\cdot||_\varphi)$. Wegen $||z_{\phi(k)}||_\varphi = 1$, $k \in \mathbb{N}$ erhalten wir mit Hilfe der Dreiecksungleichung nach unten,

$$\big| ||z||_\varphi - 1 \big| = \big| ||z||_\varphi - ||z_{\phi(k)}||_\varphi \big| \leq ||z - z_{\phi(k)}||_\varphi.$$

Da die rechte Seite in dieser Ungleichung beliebig klein gemacht erden kann, muß $||z||_\varphi = 1$ gelten.
Aus der bereits bewiesenen Ungleichung $m||z_{\phi(k)} - z|| \leq ||z_{\phi(k)} - z||_\varphi$ folgert man, daß $\lim_{k\to\infty} z_{\phi(k)} = z$ auch in $(X, ||\cdot||)$ gelten muß. Wegen der Eindeutigkeit des Grenzwertes in $(X, ||\cdot||)$ müßte dann $z = 0$ gelten. Dies ist wegen $||z||_\varphi = 1$ nicht möglich.
2. Schritt: Je zwei beliebige Normen $||\cdot||_1$ und $||\cdot||_2$ in X sind äquivalent. Es wurde bereits gezeigt, daß es positive Konstante m_i, M_i, $i = 1, 2$, gibt, sodaß für alle $x \in X$ die Abschätzungen

$$m_i||x||_i \leq ||x||_\varphi \leq M_i||x||_i, \qquad i = 1, 2,$$

gelten. Daraus folgt

$$\frac{m_1}{M_2}||x||_1 \leq ||x||_2 \leq \frac{M_1}{m_2}||x||_1.$$

□

In Vektorräumen endlicher Dimension hat man also freie Wahl bei verwendeten Norm. Wir machen davon im nächsten Resultat Gebrauch:

Satz 3.10. *Eine Folge von Vektoren $(x_k) \in \mathbb{K}^n$, $x_k = (\xi_1^k, \dots, \xi_n^k)$, konvergiert genau dann gegen $x = (\xi_1, \dots, \xi_n)$, wenn die Komponentenfolgen (ξ_i^k) gegen ξ_i, $i = 1, \dots, n$, konvergieren.*

Beweis. Wir statten $\mathbb{K}^n$ mit der $||\cdot||_\infty$-Norm aus. Es sei $\varepsilon > 0$ und $N(\varepsilon)$ so gewählt, daß $||x_k - x||_\infty < \varepsilon$ für $k \geq N(\varepsilon)$ gilt. Berücksichtigt man $||x_k - x||_\infty = \max\{|\xi_i^k - \xi_i| \colon i = 1, \dots, n\}$, folgt $\lim_{k\to\infty} \xi_i^k = \xi_i$, $i = 1, \dots, n$. Gilt umgekehrt $\lim_{k\to\infty} \xi_i^k = \xi_i$, $i = 1, \dots, n$, erhält man $|\xi_i^k - \xi_i| < \varepsilon$ für $n \geq N_i(\varepsilon)$ und somit $\max\{|\xi_i^k - \xi_i| \colon i = 1, \dots, n\} < \epsilon$ für $n \geq \max\{N_i(\varepsilon) \colon i = 1, \dots, n\}$. □

Bei der Diskussion der Konvergenz einer Folge von Vektoren in $\mathbb{K}^n$ können wir uns somit auf die Untersuchung der skalaren Komponentenfolgen beschränken.

KOROLLAR 3.11. $(\mathbb{K}^n, ||\cdot||)$ ist bezüglich jeder Norm vollständig.

BEWEIS. Die Behauptung folgt aus Satz 3.10 und der Vollständigkeit von $\mathbb{K}$. $\square$

BEISPIEL 3.12.
(1) $(C([0,1],\mathbb{K}^n), ||\cdot||_\infty)$ ist vollständig. Dies folgt aus Satz V-8.5.
(2) $(\mathbb{Q}, |\cdot|)$ nicht vollständig.

DEFINITION 3.13.
(1) *Eine nichtleere Teilmenge A eines normierten Raumes X heißt* ***beschränkt****, wenn es $x_0 \in X$ und $r > 0$ gibt mit $A \subset K(x_0, r)$.*
(2) $\operatorname{diam} A := \sup\{||x-y|| : x, y \in A\} \in \bar{\mathbb{R}}$ *heißt* ***Durchmesser*** *der Menge A.*

Eine nichtleere Menge ist offenbar genau dann beschränkt, wenn ihr Durchmesser endlich ist. Eine Folge $(x_n)_{n\geq 1} \subset X$ ist beschränkt, wenn $\{x_n : n \geq 1\}$ beschränkt ist.

SATZ 3.14 (Bolzano–Weierstraß). *Jede beschränkte Folge des $\mathbb{K}^n$ enthält eine konvergente Teilfolge.*

BEWEIS. Wir versehen $\mathbb{K}^n$ wieder mit der Norm $||\cdot||_\infty$. Es sei $(x^k)_{k\geq 1} = (\xi_1^k, \dots, \xi_n^k))_{k\geq 1}$ eine beschränkte Folge in $\mathbb{K}^n$. Wegen der Beschränktheit der Folge gibt es $r > 0$ und $x_0 = (\eta_1, \dots, \eta_n)$ mit $\max\{|\xi_i^k - \eta_i| : i = 1, \dots, n\} \leq r$. Somit folgt

$$|\xi_i^k| \leq |\eta_i| + |\xi_i^k - \eta_i| \leq |\eta_i| + r, \quad k \in \mathbb{N}, i = 1, \dots, n,$$

d.h. die Komponentenfolgen (ξ_i^k), $i = 1, \dots, n$, sind beschränkt. Der Satz von Bolzano Weierstraß sichert die Existenz einer konvergenten Teilfolge $(\xi_1^{\phi_1(k)})$ von (ξ_1^k). Man wendet nun den Satz von Bolzano-Weierstraß auf die Teilfolge $(\xi_2^{\phi_1(k)})$ an und extrahiert eine konvergente Teilfolge $\xi_2^{\phi_2\circ\phi_1(k)}$. Die ersten beiden Komponentenfolgen der Teilfolge $x^{\phi_2\circ\phi_1(k)}$ sind somit konvergent. Induktiv fortfahrend ergibt sich die Behauptung. $\square$

DEFINITION 3.15. *Es sei $(X, ||\cdot||_X)$ ein normierter Raum und $D \subset X$. Ein Element $x_0 \in X$ heißt* ***Häufungspunkt*** *von D, wenn jede Umgebung von x_0 ein von x_0 verschiedenes Element von D enthält.*

DEFINITION 3.16. *Es seien $(X, ||\cdot||_X)$, $(Y, ||\cdot||_Y)$ normierte Räume und $\emptyset \neq D \subset X$.*
(1) *Eine Abbildung $f : D \to Y$ besitzt in einem Häufungspunkt x_0 von D den* ***Grenzwert*** *$y \underset{Def}{\Leftrightarrow}$*

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0\, \forall x \in D : 0 < ||x - x_0||_X < \delta \Rightarrow ||f(x) - y||_Y < \varepsilon.$$

(2) *Eine Abbildung $f : D \to Y$ ist* ***stetig*** *in $x_0 \in D \underset{Def}{\Leftrightarrow}$*

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0\, \forall x \in D : ||x - x_0||_X < \delta \Rightarrow ||f(x) - f(x_0||_Y < \varepsilon.$$

f ist stetig, wenn f an jeder Stelle $x \in D$ stetig ist.

Im Folgenden sei stets ein nichtleerer Definitionsbereich für Funktionen vorausgesetzt. Die Ungleichung (7) zeigt, daß jede Norm Lipschitz stetig mit Lipschitz Konstante 1 ist.

Beispiel 3.17.

$$f = \begin{cases} \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R} \\ (\xi,\eta) \to \frac{\xi^4+\eta^4}{\xi^2+\eta^2}. \end{cases}$$

Wir vermuten $\lim_{(\xi,\eta)\to(0,0)} f(\xi,\eta) = 0$. Die spezielle Form des Nenners legt nahe, den euklidischen Abstand $||(\xi,\eta) - (\tilde{\xi},\tilde{\eta})||_2 = ((\xi-\tilde{\xi})^2 + (\eta-\tilde{\eta})^2)^{\frac{1}{2}}$ zu verwenden. Es ist $x_0 = (0,0)$. Um unsere Vermutung zu beweisen, müssen wir also folgendes zeigen: $(D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\})$

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0\, \forall (\xi,\eta) \in \mathbb{R}^2 \colon 0 < ||(\xi,\eta) - (0,0)||_2 < \delta \Rightarrow |\frac{\xi^4+\eta^4}{\xi^2+\eta^2} - 0| < \varepsilon.$$

Wir beginnen wie bei Funktionen in einer Variablen

$$|\frac{\xi^4+\eta^4}{\xi^2+\eta^2}| \le \frac{\xi^2(\xi^2+\eta^2)+\eta^2(\xi^2+\eta^2)}{\xi^2+\eta^2} = \xi^2+\eta^2 = ||(\xi,\eta)-(0,0)||_2^2 < \varepsilon.$$

Die letzte Ungleichung ist richtig, falls $\delta < \sqrt{\varepsilon}$ gewählt wird.

Beispiel 3.18. $f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(\xi,\eta) = \sqrt[3]{\xi\eta}$. Wir untersuchen die Stetigkeit von f in $x_0 = (0,0)$ und demonstrieren den Einsatz verschiedener Normen in $\mathbb{R}^2$:
a) $\|(\xi,\eta)\|_\infty = \max\{|\xi|,|\eta|\}$,

$$\begin{aligned} |f(\xi,\eta) - f(0,0)| &= \sqrt[3]{|\xi||\eta|} \le \sqrt[3]{(\max\{|\xi|,|\eta|\})^2} \\ &= \|(\xi,\eta)\|_\infty^{\frac{2}{3}} < \varepsilon, \end{aligned}$$

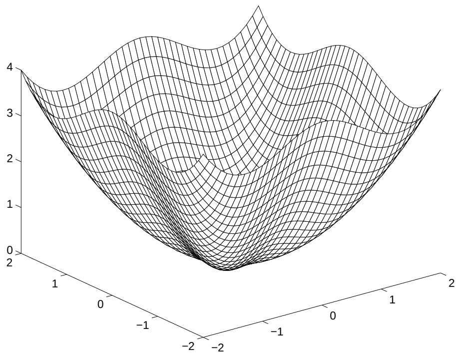
für $\delta < \varepsilon^{\frac{3}{2}}$.
b) $\|(\xi,\eta)\|_2 = \sqrt{\xi^2+\eta^2}$,

$$\begin{aligned} |f(\xi,\eta) - f(0,0)| &= \sqrt[3]{|\xi||\eta|} \le \sqrt[3]{\frac{1}{2}(|\xi|^2+|\eta|^2)} \\ &= \sqrt[3]{\frac{1}{2}} \cdot \|(\xi,\eta)\|_2^{\frac{2}{3}} < \varepsilon, \end{aligned}$$

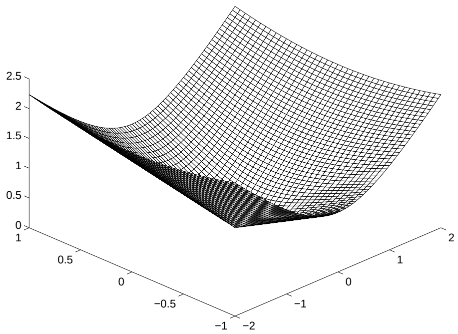
für $\delta < \sqrt[3]{2}\varepsilon^{\frac{3}{2}}$.
c) $\|(\xi,\eta)\|_1 = |\xi|+|\eta|$,

$$|f(\xi,\eta) - f(0,0)| = \sqrt[3]{|\xi||\eta|} \le \sqrt[3]{(|\xi|+|\eta|)^2} = \|(\xi,\eta)\|_1^{\frac{2}{3}} < \varepsilon,$$

für $\delta < \varepsilon^{\frac{3}{2}}$.



Beispiel 3.17



Beispiel 3.18

Die elementaren Eigenschaften stetiger Funktionen lassen sich ohne Mühe auch im Rahmen normierter Räume beweisen.

Satz 3.19. *Es sei X ein normierter Raum, $D \subset X$ $f, g\colon D \to \mathbb{K}$ seien stetig und $\lambda \in \mathbb{K}$. Dann sind auch die Abbildungen λf, $f + g$, fg, $|f|$ und für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ $\max(f, g)$ ($\max(f, g)(x) = \max(f(x), g(x))$) stetig. Gilt $g(x) \neq 0$ für alle $x \in D$, dann ist auch $\frac{f}{g}$ stetig.*

Die Stetigkeit von $f + g$ und λf kann auch dann (mit dem gleichen Argument) aus der Stetigkeit von f und g gefolgert werden, wenn der Wertevorrat von f und g selbst ein normierter Vektorraum ist.

Satz 3.20. *Es seien X, Y und Z normierte Räume, $D \subset X$, $E \subset Y$ und $f(D) \subset Y$. Sind die Abbildungen $f\colon D \to Y$ und $g\colon E \to Z$ stetig in x_0 bzw. in $f(x_0)$, dann ist auch $g \circ f\colon D \to Z$ stetig in x_0.*

Satz 3.21 (Folgenkriterium für Stetigkeit). *Es seien $(X, ||\cdot||_X)$ und $(Y, ||\cdot||_Y)$ normierte Räume und $f\colon D \to Y$, $D \subset X$. f ist stetig in x_0 genau dann, wenn für jede nach x_0 konvergierende Folge $(x_n) \subset D$ die Bildfolge $(f(x_n)) \subset Y$ nach $f(x_0)$ konvergiert.*

Beweis. "$\Rightarrow$" Zu $\varepsilon > 0$ sei $\delta = \delta(\varepsilon, x_0)$ so gewählt, daß aus $||x - x||_X < \delta$ die Abschätzung $||f(x) - f(x_0)||_Y < \varepsilon$ folgt. Wegen $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ gibt es einen Index

$N(\varepsilon)$ derart, daß $||x_n - x_0||_X < \delta$ und somit auch $||f(x_n) - f(x_0)||_Y < \varepsilon$ für alle $n \geq N(\varepsilon)$ zutrifft.
"$\Leftarrow$" Wir führen den Beweis indirekt und nehmen an, f sei in x_0 nicht stetig, d.h.

$$\exists \epsilon_0 > 0 \, \forall \delta > 0 \, \exists \, x_\delta \in D \colon ||x - x_\delta||_X < \delta \wedge ||f(x) - f(x_\delta)||_Y \geq \epsilon_0.$$

Wählt man $\delta = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$, erhält man eine Folge (x_n) mit $||x_n - x||_X < \frac{1}{n}$. Die Folge (x_n) konvergiert also gegen x, die Folge der Bilder $(f(x_n))$ konvergiert allerdings nicht gegen $f(x)$. □

Kombiniert man das Folgenkriterium 3.21 und Satz 3.10 ergibt sich für jede Norm in $\mathbb{K}^n$

Korollar 3.22. Eine Abbildung $f = (f_1, \ldots, f_n) \colon D \to \mathbb{K}^n$, $D \subset (X, || \cdot ||_X)$ ist stetig in $x_0 \in X$ genau dann, wenn jede der Komponentenabbildungen $f_i \colon D \to \mathbb{K}$, $i = 1, \ldots, n$, stetig in x_0 ist.

Wir formulieren nun die Stetigkeit einer Abbildung in der Sprache topologischer Räume.

Satz 3.23. *Es seien $(X, || \cdot ||_X)$ und $(Y, || \cdot ||_Y)$ normierte Räume und $f \colon D \to Y$, $D \subset X$. Äquivalent sind folgende Aussagen:*
(1) *f ist stetig in $x_0 \in D$.*
(2) *Zu jeder Umgebung V von $f(x_0)$ gibt es eine Umgebung U von x_0 mit $f(U \cap D) \subset V$.*

Beweis. Übung. □

Es ist klar, daß die Umgebungen V und U in der Charakterisierung der Stetigkeit durch offene Umgebungen ersetzt werden können.
Die globale Stetigkeit einer Funktion kann sehr elegant mit dem Begriff der offenen (abgeschlossenen) Mengen charakterisiert werden. Wir benötigen dazu folgende Verallgemeinerung dieser Konzepte.

Definition 3.24. *Es sei $(X, || \cdot ||)$ ein normierter Raum und $D \subset X$. Eine Teilmenge $U \subset D$ heißt* ***relativ offen (abgeschlossen) in D****, wenn es eine offene (abgeschlossene) Menge $M \subset X$ gibt mit*

$$U = D \cap M.$$

Man überzeuge sich davon, daß eine Menge U genau dann offen in D ist, wenn $D \setminus U$ abgeschlossen in D ist

Beispiel 3.25. Es sei $X = \mathbb{R}$ und $D = [0, 1]$, $E = (0, 1)$. Dann ist $[0, \frac{1}{2})$ relativ offen in D und $(0, \frac{1}{2}]$ relativ abgeschlossen in E. Natürlich ist auch D selber relativ offen in D.

Satz 3.26. *Es seien $(X, || \cdot ||_X)$ und $(Y, || \cdot ||_Y)$ normierte Räume und $f \in \mathcal{F}(D, Y)$, $D \subset X$. Folgende Aussagen sind äquivalent*

i) *f ist stetig auf D.*
ii) *Das Urbild offener Teilmengen in Y ist relativ offen in D.*
iii) *Das Urbild abgeschlossener Teilmengen in Y ist relativ abgeschlossen in D.*

Beweis. i) $\Rightarrow$ ii) Es sei f stetig auf X und V offen in Y. Zu zeigen ist: $f^{-1}(V) = \{x \in D : f(x) \in V\}$ ist offen in X. Dies ist trivial für $f^{-1}(V) = \emptyset$. Es sei also $x \in f^{-1}(V)$. Da f in x stetig ist, existiert eine offene Umgebung $U_x \in \mathfrak{U}_X(x)$ mit $f(U_x \cap D) \subset V$, d.h. $U_x \cap D \subset f^{-1}(V)$. Die Behauptung folgt nun aus der Darstellung

$$f^{-1}(V) = \bigcup\{U_x \cap D : x \in f^{-1}(V)\} = \bigcup\{U_x : x \in f^{-1}(V)\} \cap D,$$

und Satz 2.5.
ii) $\Rightarrow$ iii) Es sei $A \subset Y$ abgeschlossen, d.h. $\complement A$ ist offen in Y. Somit ist $f^{-1}(\complement A)$ relativ offen in D, d.h es gibt eine offene Menge $O \subset X$ mit $f^{-1}(\complement A) = O \cap D$. Wegen $f^{-1}(\complement A) = D \setminus f^{-1}(A)$ folgt

$$f^{-1}(A) = D \setminus (D \setminus f^{-1}(A)) = D \setminus (O \cap D) = D \cap \complement O,$$

d.h. $f^{-1}(A)$ ist relativ abgeschlossen.
iii) $\Rightarrow$ i) Wir wählen $x_0 \in X$ und $V \in \mathfrak{U}_Y(f(x_0))$. Dann ist V° eine offene Umgebung von $f(x_0)$ und somit $f^{-1}(\complement V^\circ)$ relativ abgeschlossen in D, d.h es gibt eine abgeschlossene Menge $A \subset X$ mit $f^{-1}(\complement V^\circ) = A \cap D$. Wie vorhin folgt nun

$$f^{-1}(V^\circ) = D \setminus (D \setminus f^{-1}(V^\circ)) = D \setminus (A \cap D) = D \cap \complement A.$$

Setzt man $U = \complement A$, dann ist offenbar U eine offene Umgebung von x_0 mit $f(U \cap D) \subset V^\circ \subset V$, d.h. f ist stetig in x_0. $\square$

Definition 3.27. *Eine bijektive Abbildung f einer Teilmenge U eines normierten Raumes $(X, \|\cdot\|_X)$ auf eine Teilmenge V eines normierten Raumes $(Y, \|\cdot\|_Y)$ heißt **Homöomorphismus**, wenn $f : U \to V$ und $f^{-1} : V \to U$ stetig sind. Man sagt auch, f bildet U homöomorph auf V ab, bzw. U ist homöomorph zu V.*

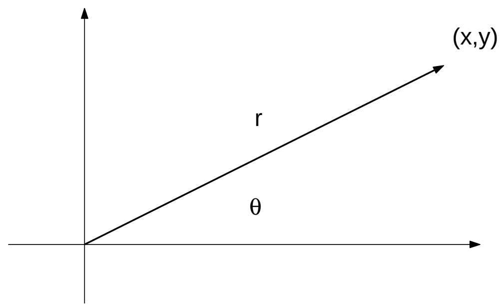
Beispiel 3.28 (Ebene Polarkoordinaten). Wir betrachten die Abbildung

$$\phi : \begin{cases} [0,\infty) \times [-\pi,\pi] \to \mathbb{R}^2, \\ (r,\varphi) \mapsto (r\cos\varphi, r\sin\varphi). \end{cases}$$

Man nennt (r, φ) Polarkoordinaten des Punktes in $\mathbb{R}^2$ mit den kartesischen Koordinaten $(x, y) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi)$.

Die Abbildung ϕ ist stetig und surjektiv. Sie ist aber nicht injektiv, denn es gilt $\phi(0, \varphi) = (0, 0)$ für alle $\varphi \in [-\pi, \pi]$ und $\phi(r, \pi) = \phi(r, -\pi) = (-r, 0)$ für alle $r > 0$. Offenbar bildet ϕ jedoch den halboffenen Halbstreifen $(0, \infty) \times (-\pi, \pi]$ bijektiv auf die punktierte Ebene $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ ab. Definiert man $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch

$$h(y) = \begin{cases} 1, & y \geq 0, \\ -1, & y < 0, \end{cases}$$



kann man die Umkehrabbildung $\phi^{-1}\colon \mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\} \to (0,\infty)\times(-\pi,\pi]$ kompakt schreiben in der Form

$$\phi^{-1}(x,y) = (\sqrt{x^2+y^2}, h(y)\arccos\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}).$$

Als Übung beweise man die Identitäten $\phi\circ\phi^{-1} = id_{\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}}$ und $\phi^{-1}\circ\phi = id_{(0,\infty)\times(-\pi,\pi]}$. Allerdings besitzt ϕ^{-1} in keinem Punkt des Halbstrahls $\{(-r,0)\colon r>0\}$ einen Grenzwert: es gilt nämlich

$$\lim_{n\to\infty}\phi^{-1}(-r,\frac{1}{n}) = (r,\pi),$$
$$\lim_{n\to\infty}\phi^{-1}(-r,-\frac{1}{n}) = (r,-\pi).$$

Man überzeuge sich davon, daß ϕ^{-1} auf $\mathbb{R}^2\setminus\{(-r,0)\colon r>0\}$ stetig ist. ϕ bildet also $(0,\infty)\times(-\pi,\pi)$ homöomorph auf die geschlitzte Ebene $\mathbb{R}^2\setminus\{(-r,0)\colon r>0\}$ ab.

4. Kompakte Mengen

Wir haben bereits gesehen, daß stetige reellwertige Funktionen auf abgeschlossenen und beschränkten Intervallen besonders gute Eigenschaften besitzen (vgl. Abschnitt V.5). Wir übertragen nun diese Resultate auf erheblich allgemeinere Situationen.

Definition 4.1. *Es sei $(X,||\cdot||)$ ein normierter Raum und $K\subset X$.*

i) *Eine Familie $\mathcal{C}$ offener Mengen heißt (offene)* ***Überdeckung*** *von $K \underset{Def}{\Leftrightarrow}$ $K\subset\bigcup\mathcal{C}$.*
Eine Teilfamilie $\mathcal{S}\subset\mathcal{C}$ heißt ***Teilüberdeckung*** *von $K \underset{Def}{\Leftrightarrow} \mathcal{S}$ ist Überdeckung von K.*

ii) *$K\subset X$ heißt* ***kompakt*** *$\underset{Def}{\Leftrightarrow}$ jede offene Überdeckung $\mathcal{C}$ von K besitzt eine endliche Teilüberdeckung (d.h. eine Überdeckung mit einer endlichen Anzahl von Elementen aus $\mathcal{C}$).*

Beispiel 4.2. 1) Jede endliche Teilmenge eines normierten Raumes ist kompakt. Man braucht aus einer beliebigen Überdeckung von K für jeden Punkt $x\in K$ nur ein Element der Überdeckung auswählen, welches x enthält.

2) Es sei $K = (0, 1] \subset \mathbb{R}$. K ist nicht kompakt. Um dies einzusehen, betrachten wir die Überdeckung

$$\mathcal{C} = \{(\frac{1}{n}, 2) \colon n \in \mathbb{N}\}$$

von K. Würden bereits endlich viele Elemente von $\mathcal{C}$, etwa die Mengen $(\frac{1}{n_i}, 2)$, $i = 1, \dots, N$, $n_1 > n_2 > \dots > n_N$, die Menge K überdecken, dann müßte $(0, 1] \subset \bigcup_{i=1}^N (\frac{1}{n_i}, 2) = (\frac{1}{n_1}, 2)$ gelten. Dies ist nicht möglich.
3) $K = [0, \infty)$ ist nicht kompakt, man betrachte etwa die Überdeckung

$$\mathcal{C} = \{(-1, n) \colon n \in \mathbb{N}\}$$

von K. $\mathcal{C}$ enthält keine endliche Teilüberdeckung von K.

Das folgende Resultat kann zwar mit elementaren Mitteln bewiesen werden, es es ist aber auch eine unmittelbare Folge eines wesentlich allgemeineren Prinzips (vgl. Korollar 4.13).

Satz 4.3 (Heine – Borel). *Jedes abgeschlossene Intervall $K = [a, b]$, $-\infty < a \le b < \infty$, ist kompakt in $\mathbb{R}$.*

Wir erweitern nun dieses Ergebnis zu einer Charakterisierung kompakter Mengen in $\mathbb{K}^n$. Dazu schicken wir einige allgemeine Bemerkungen voraus.

Satz 4.4. *Jede abgeschlossene Teilmenge einer kompakten Menge ist kompakt.*

Beweis. Es sei $(X, ||\cdot||)$ ein normierter Raum, $K \subset X$ kompakt und $A \subset K$ abgeschlossen. Ist $\mathcal{C}$ eine offene Überdeckung von A, dann ist $\mathcal{C} \cup \{\complement A\}$ eine offene Überdeckung von K ($\complement A$ ist offen), welche nach Voraussetzung eine endliche Teilüberdeckung $\{O_1, \dots, O_n, \complement A\}$, $O_i \in \mathcal{C}$, enthält. Die Mengen $O_1, \dots, O_n$ überdecken dann A. □

Lemma 4.5. *Jede kompakte Teilmenge eines normierten Raumes ist beschränkt.*

Beweis. Es sei $K \subset X$ kompakt und $x_0 \in X$. Die Familie

$$\mathcal{C} = \{K(x_0, n) \colon n \in \mathbb{N}\}$$

ist eine offene Überdeckung von X und daher auch von K. Da K kompakt ist, wird K bereits durch endlich viele Kugeln $K(x_0, n)$ überdeckt. Wegen $K(x_0, n) \subset K(x_0, n+1)$, $n \in \mathbb{N}$, gibt es also ein $N \in \mathbb{N}$ mit $K \subset K(x_0, N)$. Somit ist K beschränkt. □

Satz 4.6. *Jede kompakte Teilmenge eines normierten Raumes $(X, ||\cdot||)$ ist abgeschlossen und beschränkt.*

Beweis. Es sei K eine kompakte Teilmenge eines normierten Raumes $(X, ||\cdot||)$. Nach Lemma 4.5 ist K beschränkt und somit $\complement K \ne \emptyset$. Sei also $x \in \complement K$. Für jedes $y \in K$ wählen wir disjunkte Umgebungen $U_y \in \mathcal{U}(x)$ und $V_y \in \mathcal{U}(y)$. Die Familie $\{V_y \colon y \in K\}$ ist eine offene Überdeckung von K. Somit gibt es endlich viele Punkte $y_1, \dots, y_n \in K$ mit $K \subset \bigcup_{i=1}^n V_{y_i}$. Setzt man $U = \bigcap_{i=1}^n U_{y_i}$, folgt U ist offen und

$U \in \mathcal{U}(x)$. Ferner gilt $U \subset \complement K$. Gäbe es nämlich ein $z \in K \cap U$, dann müßte z auch in einer Umgebung $V_{y_{i_z}}$ und damit auch in $U_{y_{i_z}}$ liegen, im Widerspruch zu $U_{y_{i_z}} \cap V_{y_{i_z}} = \emptyset$. Somit ist x ist innerer Punkt von $\complement K$ und $\complement K$ ist offen. □

Die Umkehrung dieses Satzes ist jedoch in allgemeinen normierten Räumen falsch. Der Satz von Bolzano – Weierstrass sagt aus, daß jede beschränkte Folge in $\mathbb{K}$ eine konvergente Teilfolge enthält. Wir werden nun zeigen, daß in einem *normierten* Raum diese Eigenschaft die Kompaktheit einer Menge charakterisiert. Wir zerlegen den Beweis in mehrere Schritte:

SATZ 4.7. *Es sei K eine kompakte Teilmenge eines normierten Raumes $(X, ||\cdot||)$. Dann enthält jede Folge $(x_n)_{n\geq 1} \subset K$ eine konvergente Teilfolge (ihr Grenzwert liegt notwendigerweise in K).*

BEWEIS. Wir führen einen Widerspruchsbeweis und nehmen an, es gäbe eine Folge $(x_n)_{n\geq 1} \subset K$, welche keine konvergente Teilfolge enthält (insbesondere ist also die Menge $\{x_n : n \geq 1\}$ abzählbar unendlich). Wir behaupten: Für jedes $x \in K$ gibt es eine Kugel $K(x, \varepsilon)$, in welcher nur endlich viele Glieder der Folge liegen,

$$(*) \qquad \forall x \in K\, \exists \varepsilon_x > 0 \colon \{n \in \mathbb{N} \colon x_n \in K(x, \varepsilon_x)\} \text{ ist endlich.}$$

Gäbe es nämlich ein Element $x_0 \in K$, sodaß *jede* Kugel $K(x_0, \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, unendlich viele Folgenglieder enthält, könnte man wie im Beweis von Satz 3.3-ii) eine konvergente Teilfolge konstruieren. Es sei $K(x, \varepsilon_x)$ durch $(*)$ gegeben. Dann bildet das System

$$\mathcal{C} = \{K(x, \varepsilon_x) \colon x \in K\}$$

eine offene Überdeckung von K. Da jede Kugel $K(x, \varepsilon_x)$ nur endlich viele Elemente von $\{x_n : n \geq 1\}$ enthält, ist es nicht möglich, daß bereits endlich viele dieser Kugeln K überdecken. Dies widerspricht der Kompaktheit von K. □

BEISPIEL 4.8. Als Anwendung zeigen wir, daß die abgeschlossene Einheitskugel in $(C([0,1], \mathbb{R}), ||\cdot||)$ nicht kompakt ist. Dazu betrachten wir die Folge stetiger Funktionen

$$f_n(x) = \begin{cases} -nx + 1, & 0 \leq x \leq \frac{1}{n}, \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Diese Folge konvergiert punktweise, aber nicht gleichmäßig gegen die Grenzfunktion

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x = 0, \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Da jede Teilfolge gegen dieselbe Grenzfunktion konvergiert, kann es keine gleichmäßig konvergente Teilfolge geben.

Um die Gültigkeit der Umkehrung von Satz 4.7 nachzuweisen, zeigen wir vorerst, daß unter diesen Umständen eine ganz spezielle Überdeckung von K, nämlich

$$\mathcal{C} = \{K(x, \varepsilon) \colon x \in K\}$$

für jedes $\varepsilon > 0$ eine endliche Teilüberdeckung enthält:

LEMMA 4.9. *Es sei $K \neq \emptyset$ eine Teilmenge eines normierten Raumes $(X, ||\cdot||)$ mit der Eigenschaft, daß jede Folge $(x_n)_{n\geq 1} \subset K$ eine konvergente Teilfolge enthält. Ferner sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es Elemente $x_1, \dots, x_n \in K$, sodaß*

$$K \subset \bigcup_{i=1}^{n} K(x_i, \varepsilon).$$

(Unter diesen Voraussetzungen ist K natürlich beschränkt).

BEWEIS. Wir führen einen konstruktiven Beweis: Wir wählen ein beliebiges $x_1 \in K$. Gilt bereits $K \subset K(x_1, \varepsilon)$, sind wir fertig. Anderenfalls gibt es ein Element $x_2 \in K \setminus K(x_1, \varepsilon)$. Wir brechen das Verfahren ab, falls $K \subset K(x_1, \varepsilon) \cup K(x_2, \varepsilon)$. Wir halten fest: $||x_2 - x_1|| \geq \varepsilon$. Ist die Abbruchbedingung nicht erfüllt, wählen wir $x_3 \in K \setminus (K(x_1, \varepsilon) \cup K(x_2, \varepsilon))$, also gilt $||x_3 - x_1|| \geq \varepsilon$, $||x_3 - x_2|| \geq \varepsilon$. Nach einer endlichen Anzahl von Schritten muß allerdings dieses Auswahlverfahren abbrechen, da man ansonsten eine Folge $(x_n)_{n\geq 1} \subset K$ erhält, für deren Folgenglieder

$$\forall n, m \in \mathbb{N}\colon n \neq m \Rightarrow ||x_n - x_m|| \geq \varepsilon$$

gelten müßte. Eine derartige Folge kann aber keine konvergente Teilfolge besitzen. $\square$

LEMMA 4.10. *Es sei K eine abgeschlossene Teilmenge eines normierten Raumes $(X, ||\cdot||)$ mit der Eigenschaft, daß jede Folge $(x_n)_{n\geq 1} \subset K$ eine konvergente Teilfolge enthält. Ferner sei $\mathcal{C}$ eine offene Überdeckung von K. Dann gilt*

$$\exists \varepsilon > 0\, \forall x \in K\, \exists O_x \in \mathcal{C}\colon K(x, \varepsilon) \subset O_x.$$

BEWEIS. Angenommen, die Behauptung wäre falsch, also

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists x \in K\, \forall O \in \mathcal{C}\colon K(x, \varepsilon) \not\subset O.$$

Läßt man ε die Folge $(\frac{1}{n})_{n\geq 1}$ durchlaufen, erhalten wir eine Folge $(x_n)_{n\geq 1} \subset K$ mit

$$(*) \qquad \forall n \in \mathbb{N}\, \forall O \in \mathcal{C}\colon K\left(x_n, \frac{1}{n}\right) \not\subset O.$$

Nach Voraussetzung enthält $(x_n)_{n\geq 1}$ eine konvergente Teilfolge $(x_{\varphi(n)})_{n\geq 1}$. Da K abgeschlossen ist folgt $\lim_{n\to\infty} x_{\varphi(n)} = x \in K$. Der Grenzwert x liegt daher in einer Menge $O_x \in \mathcal{C}$. Da O_x offen ist, existiert $\rho > 0$ mit $K(x, \rho) \subset O_x$. Wir wählen nun $N_\rho \in \mathbb{N}$ so, daß

$$||x - x_{\varphi(N_\rho)}|| < \frac{\rho}{2} \quad \text{und} \quad \frac{1}{\varphi(N_\rho)} < \frac{\rho}{2}$$

gilt. Für jedes $y \in K(x_{\varphi(N_\rho)}, \frac{1}{\varphi(N_\rho)})$ folgt also

$$||y - x|| \leq ||y - x_{\varphi(N_\rho)}|| + ||x_{\varphi(N_\rho)} - x|| < \frac{1}{\varphi(N_\rho)} + \frac{\rho}{2} < \rho.$$

Dies zeigt $K(x_{\varphi(N_\rho)}, \frac{1}{\varphi(N_\rho)}) \subset K(x, \rho) \subset O_x$, im Widerspruch zu $(*)$. $\square$

Lemma 4.11. *Eine abgeschlossene Teilmenge K eines normierten Raumes $(X, ||\cdot||)$ mit der Eigenschaft, daß jede Folge $(x_n)_{n\geq 1} \subset K$ eine konvergente Teilfolge besitzt, ist kompakt.*

Beweis. Es sei $\mathcal{C}$ eine offene Überdeckung von K. Nach Lemma 4.10 existiert $\varepsilon > 0$ sodaß

$$(*) \qquad \forall x \in K\, \exists O_x \in \mathcal{C} \colon K(x, \varepsilon) \subset O_x.$$

Lemma 4.9 sichert die Existenz von $x_1, \ldots, x_n \in K$ mit

$$K \subset \bigcup_{i=1}^{n} K(x_i, \varepsilon).$$

Die Beziehung $(*)$ zeigt, daß jede Kugel $K(x_i, \varepsilon)$ zur Gänze in einer Überdeckungsmenge $O_{x_i} \in \mathcal{C}$ enthalten ist. Also gilt auch

$$K \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} O_{x_i},$$

somit ist K kompakt. $\square$

Satz 4.6, Satz 4.7 und Lemma 4.11 ergeben zusammen die gesuchte Charakterisierung:

Satz 4.12. *Eine Teilmenge K eines normierten Raumes ist kompakt genau dann, wenn K abgeschlossen ist und jede Folge $(x_n)_{n\geq 1} \subset K$ eine konvergente Teilfolge enthält.*

In einem normierten Raum ist somit eine Menge K genau dann kompakt, wenn jede Folge $(x_n) \subset K$ eine Teilfolge enthält, welche gegen ein Element aus K konvergiert. In einem endlichdimensionalen normierten Raum ist wegen der Äquivalenz der Normen die Kompaktheit einer Teilmenge unabhängig von der Wahl der Norm. Einen topologischen Raum $(X, \mathcal{T})$ mit der Eigenschaft, daß jede Folge eine konvergente Teilfolge enthält, nennt man **folgenkompakt**. Der letzte Satz bringt also zum Ausdruck, daß in einem normierten Raum Kompaktheit und Folgenkompaktheit äquivalent sind.

Korollar 4.13 (Heine-Borel). Eine Teilmenge K des normierten Raumes $\mathbb{K}^n$ ist kompakt genau dann, wenn K abgeschlossen und beschränkt ist.

Beweis. Die Behauptung ergibt sich unmittelbar aus dem Satz von Bolzano-Weierstraß 3.14 und Satz 4.12. $\square$

Beispiel 4.14. Die abgeschlossene Einheitskugel in $\mathbb{R}^n$, $\bar{K}(0,1) = \{x \in \mathbb{R}^n \colon \|x\| \leq 1\}$ und die Einheitssphäre $S(0,1) = \{x \in \mathbb{R}^n \colon \|x\| = 1\}$ sind kompakt.

5. Stetige Funktionen auf kompakten Mengen

SATZ 5.1. *Es seien* $(X, ||\cdot||_X)$ *und* $(Y, ||\cdot||_Y)$ *normierte Räume und* $f \in \mathcal{F}(D, Y)$, $D \subset X$ *stetig. Ist* $K \subset D$ *kompakt, dann ist auch* $f(K)$ *kompakt.*

BEWEIS. Es sei $K \subset D$ kompakt und $\mathcal{C}$ eine offene Überdeckung von $f(K)$. Da f stetig ist,gibt es nach Satz 3.26 für alle $C \in \mathcal{C}$ eine offene Teilmenge $U_C \subset X$ mit $f^{-1}(C) = U_C \cap D$. Es folgt

$$K \subset f^{-1}(f(K)) \subset f^{-1}(\bigcup_{C\in\mathcal{C}} C) = \bigcup_{C\in\mathcal{C}} f^{-1}(C) = \bigcup_{C\in\mathcal{C}}(U_C \cap D) \subset \bigcup_{C\in\mathcal{C}} U_C,$$

also ist $\mathcal{V} = \{U_C : C \in \mathcal{C}\}$ eine offene Überdeckung von K. Wegen der Kompaktheit von K enthält $\mathcal{V}$ eine endliche Teilüberdeckung. Es gibt also ein $n \in \mathbb{N}$ und $U_i \equiv U_{C_i} \in \mathcal{C}$, $1 \le i \le n$, mit

$$K \subset \bigcup_{i=1}^{n} U_i \quad \text{also auch } K \subset \bigcup_{i=1}^{n}(U_i \cap D).$$

Dies hat zur Folge

$$f(K) \subset \bigcup_{i=1}^{n} f(U_i \cap D) \subset \bigcup_{i=1}^{n} C_i,$$

d.h. $\{C_1, \cdots, C_n\}$ ist eine endliche Teilüberdeckung von $f(K)$. Somit ist $f(K)$ kompakt. □

KOROLLAR 5.2. In einem normierten Raum $(X, ||\cdot||)$ nimmt jede stetige Funktion $f \in \mathcal{F}(D, \mathbb{R})$, $D \subset X$, auf einer kompakten Teilmenge $K \subset D$ Maximum und Minimum auf K an.

BEWEIS. Es sei $f \in C(D, \mathbb{R})$ und $K \subset D$ kompakt. Nach Satz 5.1 ist $f(K) \subset \mathbb{R}$ kompakt, also nach Satz 4.3 abgeschlossen und beschränkt. Somit existieren $\alpha = \inf f(K)$ und $\beta = \sup f(K)$ in $\mathbb{R}$. Wegen der Abgeschlossenheit von $f(K)$ folgt $\{\alpha, \beta\} \subset f(K)$, d.h. $\exists m, M \in K$ mit

$$\forall x \in K : \alpha = f(m) \le f(x) \le f(M) = \beta.$$

□

Dieses Korollar bleibt richtig, wenn nur $f|_K$ stetig ist. Satz 5.1 ist die Grundlage einer nützlichen hinreichenden Bedingung für die Stetigkeit der Umkehrfunktion:

SATZ 5.3. *Es seien* $(X, ||\cdot||_X)$ *und* $(Y, ||\cdot||_Y)$ *normierte Räume,* $K \subset X$ *kompakt und* $f \in \mathcal{F}(K, Y)$ *stetig und injektiv. Dann ist die Umkehrfunktion* $f^{-1} : f(K) \to X$ *stetig.*

BEWEIS. Nach Satz 3.26 genügt es zu zeigen, daß das Urbild jeder abgeschlossenen Menge $A \subset X$ unter f^{-1} relativ abgeschlossen in $f(K)$ ist. Dies ist eine Folge von

$$(f^{-1})^{-1}(A) = (f^{-1})^{-1}(A \cap K) = f(A \cap K)$$

Da K kompakt und A abgeschlossen ist, ist $A \cap K$ nach Satz 4.4 kompakt. Somit ist auch $f(A \cap K)$ kompakt (Satz 5.1) und daher nach Satz 4.6 abgeschlossen. Wegen $f(A \cap K) = f(A \cap K) \cap f(K)$ ist $f(A \cap K)$ abgeschlossen in $f(K)$. $\square$

Wir wenden uns nun einer wichtigen Variante des Stetigkeitsbegriffes zu. Dazu untersuchen wir vorerst ein einfaches Beispiel etwas genauer:

Beispiel 5.4. Es sei $f\colon (0,1] \to \mathbb{R}$ die Abbildung $x \mapsto \frac{1}{x}$, $x_0 \in (0,1]$ und $\varepsilon > 0$. Eine einfache Rechnung ergibt

$$|f(x) - f(x_0)| = \frac{|x - x_0|}{x x_0},$$

für $0 < \delta < x_0$ und $|x - x_0| \le \delta$ erhält man weiter

$$|f(x) - f(x_0)| \le \frac{\delta}{x_0(x_0 - \delta)}.$$

Die Abschätzung kann nicht verbessert werden, da für $x = x_0 - \delta$ Gleichheit eintritt. Somit gilt $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ für $|x - x_0| < \delta$ soferne $\frac{\delta}{x_0(x_0-\delta)} < \varepsilon$. Das Supremum aller δ, die mit dieser Ungleichung verträglich sind, ist gegeben durch $\Delta(\varepsilon, x_0) = \frac{\varepsilon x_0^2}{1+\varepsilon x_0}$. Aus $\inf_{x_0 \in (0,1]} \Delta(\varepsilon, x_0) = 0$ folgt, daß es nicht möglich ist, zu $\varepsilon > 0$ ein $\delta = \delta(\varepsilon)$ anzugeben, welches für alle $x \in (0,1]$ die $\varepsilon\delta$-Charakterisierung der Stetigkeit verifiziert.

Definition 5.5. *Es seien $(X, ||\cdot||_X)$, $(Y, ||\cdot||_Y)$ normierte Räume und $K \subset D \subset X$, $f \in \mathcal{F}(D, Y)$.*
*f heißt **gleichmäßig stetig** auf K, wenn*

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta = \delta(\varepsilon)\, \forall x, y \in K\colon ||x - y||_X < \delta \Rightarrow ||f(x) - f(y)||_Y < \varepsilon.$$

Insbesondere folgt, daß eine auf D gleichmäßig stetige Funktion stetig auf D ist. Das vorhergehende Beispiel zeigt, daß die Umkehrung nicht gilt. Durch Negation erhält man leicht folgende Charakterisierung:

$$f \text{ ist nicht gleichmäßig stetig auf } K \Leftrightarrow$$
$$\exists \varepsilon_0 > 0\, \exists (x_n)_{n\ge1}, (y_n)_{n\ge1} \subset K\, \forall n \in \mathbb{N}\colon ||x_n - y_n||_X < \tfrac{1}{n} \wedge ||f(x_n), -f(y_n)||_Y \ge \varepsilon_0.$$

Man verifiziere diese Bedingung in Beispiel 5.4.

Satz 5.6. *Es seien $(X, ||\cdot||_X)$, $(Y, ||\cdot||_Y)$ normierte Räume und $f \in \mathcal{F}(D, Y)$, $D \subset X$, stetig. Dann ist f auf jeder kompakten Teilmenge $K \subset D$ gleichmäßig stetig.*

Beweis. Es sei $K \subset D$ kompakt und f stetig, aber nicht gleichmäßig stetig auf K. Somit gibt es $\varepsilon_0 > 0$ und Folgen $(x_n)_{n\ge1}$, $(y_n)_{n\ge1} \subset K$ mit

$$||x_n - y_n||_X < \frac{1}{n} \text{ und } ||f(x_n) - f(y_n)||_Y \ge \varepsilon_0.$$

Da K kompakt ist, enthält (x_n) eine konvergente Teilfolge $(x_{\varphi(n)})$: Es gibt also ein $x \in K$ mit $\lim_{n\to\infty} x_{\varphi(n)} = x$. Aus

$$||y_{\varphi(n)} - x||_X \le ||y_{\varphi(n)} - x_{\varphi(n)}||_X + ||x_{\varphi(n)} - x||_X \le \frac{1}{\varphi(n)} + ||x_{\varphi(n)} - x||_X$$

folgt

$$\lim_{n\to\infty} y_{\varphi(n)} = x.$$

Wegen der Stetigkeit von f gibt es zu ε_0 einen Index N_0, sodaß

$$||f(x_{\varphi(n)}) - f(x)||_Y < \frac{\varepsilon_0}{4} \text{ und } ||f(y_{\varphi(n)}) - f(x)||_Y < \frac{\varepsilon_0}{4}$$

für alle $n \geq N_0$ erfüllt ist. Dies führt allerdings zu einem Widerspruch. Denn mit $n \geq N_0$ ist

$$\begin{aligned}\varepsilon_0 \leq ||f(x_{\varphi(n)}) - f(y_{\varphi(n)})||_Y &\leq ||f(x_{\varphi(n)}) - f(x)||_Y + ||f(y_{\varphi(n)}) - f(x)||_Y \\ &< \frac{\varepsilon_0}{2}.\end{aligned}$$

□

Satz 5.7 (Dini). *Es sei $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt, f und $f_l \in C(K,\mathbb{R})$, $l \in \mathbb{N}$. Gilt*

$$\begin{aligned}&\forall l \in \mathbb{N}\colon f_l \leq f_{l+1},\\ &\forall x \in K\colon \lim_{l\to\infty} f_l(x) = f(x),\end{aligned}$$

dann konvergiert die Folge (f_l) gleichmäßig gegen f.

Beweis. Wir setzen

$$g_l = f - f_l, \qquad l \in \mathbb{N}.$$

Dann gilt $g_l \geq g_{l+1} \geq 0$ für alle $l \in \mathbb{N}$ und $\lim_{l\to\infty} g_l(x) = 0$ für alle $x \in K$. Es sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Für jedes $x \in K$ gibt es einen Index $N(x)$, so daß

$$g_l(x) \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

für $l \geq N(x)$ zutrifft. Wegen der Stetigkeit von $g_{N(x)}$ gibt es ferner eine Umgebung $K(x,\delta(x))$ mit

$$|g_{N(x)}(\xi) - g_{N(x)}(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

für $\xi \in K(x,\delta(x))$. Für $l \geq N(x)$ und $\xi \in K(x,\delta(x))$ folgt daher

$$(*) \qquad g_l(\xi) \leq g_{N(x)}(\xi) \leq g_{N(x)}(x) + |g_{N(x)}(\xi) - g_{N(x)}(x)| < \varepsilon.$$

Da K kompakt ist, genügen bereits endlich viele der Kugeln $K(x,\delta(x))$, um K zu überdecken. Somit gibt es $x_1,\ldots,x_s \in K$ mit

$$K \subset \bigcup_{i=1}^{s} K(x_i,\delta(x_i)).$$

Setzt man $N = \max\{N(x_1),\ldots,N(x_s)\}$, ergibt $(*)$

$$\forall \xi \in K\, \forall l \geq N\colon g_l(\xi) = |f(\xi) - f_l(\xi)| \leq \varepsilon,$$

das ist die gleichmäßige Konvergenz von (f_l) gegen f. □

Nach dem Satz von Dini ist somit die punktweise, monotone Konvergenz stetiger Funktionen gegen eine stetige Grenzfunktion auf kompakten Teilmengen von $\mathbb{R}^n$ sogar gleichmäßig. Wir weisen darauf hin, daß jede der Voraussetzungen, Monotonie der Konvergenz, Kompaktheit von K und Stetigkeit der Grenzfunktion, notwendig ist. Wo wird im Beweis die Stetigkeit der Grenzfunktion verwendet?

6. Zusammenhang und Stetigkeit

Unsere Anschauung legt nahe, Mengen als zusammenhängend zu bezeichnen, wenn sie aus einem einzigen Stück bestehen: Es sollte also ein Intervall in $\mathbb{R}$ zusammenhängend sein, während man etwa die Mengen $[0,1] \cup [2,3]$ oder $[0,1) \cup (1,3]$ nicht als zusammenhängend betrachtet. Bei komplizierteren Mengen allerdings kann man sich in dieser Frage nicht mehr auf die Anschauung verlassen.

Definition 6.1. *Eine Teilmenge M eines normierten Raumes $(X, ||\cdot||)$ heißt* ***zusammenhängend****, wenn M nicht als Vereinigung zweier nicht leerer, disjunkter und in M relativ offener Mengen dargestellt werden kann, d.h.*

$$\begin{aligned} &\nexists U, V \subset X : \text{relativ offen in } M, \text{ nicht leer} \\ &U \cap V = \emptyset, U \cup V = M. \end{aligned}$$

Die Mengen U bzw. V sind genau dann relativ offen in M, wenn es in X offene Mengen O_1 bzw. O_2 gibt, sodaß die Darstellungen $U = O_1 \cap M$ bzw. $V = O_2 \cap M$ gelten. M ist somit nicht zusammenhängend, wenn es offene Mengen O_1 und O_2 mit folgenden Eigenschaften gibt:

$$\begin{aligned} &M \subset O_1 \cup O_2, \\ &O_1 \cap O_2 \cap M = \emptyset, \\ &O_1 \cap M \neq \emptyset, \quad O_2 \cap M \neq \emptyset. \end{aligned}$$

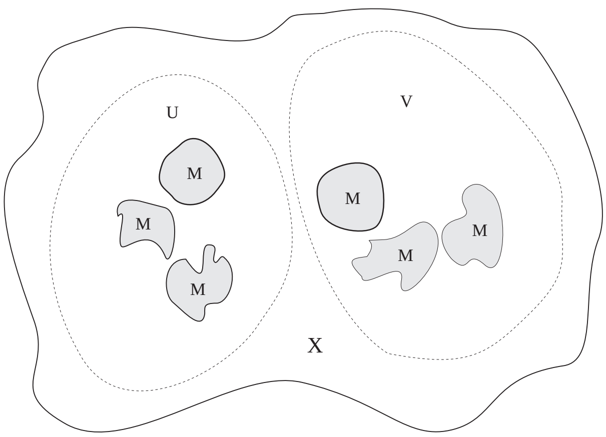


Abbildung 2. M ist nicht zusammenhängend

Beispiel 6.2. 1) $X = \mathbb{R}$. $M = [0,1] \cup [2,3]$ ist nicht zusammenhängend: Wähle $O_1 = (-1, \frac{3}{2})$, $O_2 = (\frac{3}{2}, 4)$. Man beachte, daß $U = O_1 \cap M = [0,1]$ und $V = O_2 \cap M = [2,3]$ beide M-offen und M-abgeschlossen sind.
2) $X = \mathbb{R}$. $\mathbb{Q}$ ist nicht zusammenhängend: Wähle $O_1 = (-\infty, \sqrt{2})$, $O_2 = (\sqrt{2}, \infty)$.
3) In jedem normierten Raum $(X, ||\cdot||)$ sind die Mengen $\{x\}$, $x \in X$, zusammenhängend. Wäre dies nicht der Fall, dann müßte es offene Mengen O_1 ,O_2 geben mit $\{x\} \subset O_1 \cup O_2$, $O_1 \cap O_2 \cap \{x\} = \emptyset$, $O_1 \cap \{x\} \neq \emptyset$ und $O_2 \cap \{x\} \neq \emptyset$. Die letzten beiden Bedingungen implizieren $x \in O_1 \cap O_2$. Dies führt auf den Widerspruch $O_1 \cap O_2 \cap \{x\} = \{x\} \neq \emptyset$.
4) $M = \emptyset$ ist in jedem normierten Raum zusammenhängend: Dies liegt daran, weil es keine nicht leere in M offene Mengen gibt..

Satz 6.3. *In einem normierten Raum $(X, ||\cdot||)$ sind folgende Aussagen äquivalent:*
1. *$\emptyset \neq M \subset X$ ist zusammenhängend.*
2. *M ist die einzige nicht leere Teilmenge von M, welche zugleich offen und abgeschlossen in M ist.*

Beweis. Es sei M zusammenhängend und $D \subset M$ nicht leer, relativ offen und relativ abgeschlossen in M. Insbesondere gibt es eine in X abgeschlossene Menge A mit $D = A \cap M$. Dann ist $M \setminus D = \complement A \cap M$ offen in M und folglich $M = (M \setminus D) \cup D$ eine Zerlegung von M in disjunkte, in M offene Mengen. Da M zusammenhängend und D nicht leer ist, muß $M \setminus D = \emptyset$, d.h $D = M$ gelten.
Ist umgekehrt M nicht zusammenhängend, kann man M darstellen als $M = U \cup V$, $U \cap V = \emptyset$, U und V offen in M und nicht leer. Es sei $V = M \cap O$ und O offen in X. Es folgt $U = M \setminus V = \complement O \cap M$. Somit ist U auch relativ abgeschlossen in M und wegen $V \neq \emptyset$ folgt auch $U \neq M$. □

Bemerkung 6.4. Auf diesem Satz beruht folgendes Beweisprinzip: Will man nachweisen, daß eine Eigenschaft P für alle Elemente einer zusammenhängenden Teilmenge M eines normierten Raumes zutrifft, genügt der Nachweis, daß

$$E = \{x \in M \colon P(x)\}$$

nicht leer, offen und zugleich abgeschlossen in M ist.

Die Beispiele in 6.2 zeigen, daß es oft verhältnismäßig einfach ist, nachzuweisen, daß eine Menge nicht zusammenhängend ist. Es genügt, passende relativ offene Mengen zu finden, welche die einzelnen Teile der Menge trennen, vgl. Bild 6. Der direkte Nachweis des Zusammenhangs einer Menge ist wesentlich schwieriger. Oft ist es zweckmäßig, folgende geometrische Charakterisierung des Zusammenhangs zu verwenden.

Definition 6.5. *Es sei $(X, ||\cdot||)$ ein normierter Raum und $-\infty < a \leq b < \infty$.*
*1.) Jede stetige Abbildung $\gamma : [a,b] \to X$ heißt **(parametrisierte) Kurve** (stetiger Weg), mit Anfangspunkt $\gamma(a)$ und Endpunkt $\gamma(b)$. Das Bild $\gamma([a,b])$ heißt **Spur** der*

Kurve.
2.) Eine Teilmenge M von X heißt ***wegzusammenhängend****, wenn es zu jedem Punktepaar $(x, y) \in M \times M$ eine Kurve mit Anfangspunkt x und Endpunkt y gibt, deren Spur zur Gänze in M liegt.*
3.) Für je zwei Punkte x, $y \in X$ ist $\gamma\colon [0,1] \to X$, $\gamma(t) = x + t(y - x)$ eine stetige Parametrisierung eines Geradensegmentes mit Anfangspunkt x und Endpunkt y. Dieses wird auch mit $[x, y]$ bezeichnet. Eine Teilmenge $M \subset X$ heißt ***konvex*** *, wenn mit je zwei Punkten x, $y \in M$ auch die Verbindungsstrecke $[x, y]$ zu M gehört.*
4.) Eine Kurve $\gamma\colon [a, b] \to X$ heißt polygonal (stückweise linear), falls es ein $n \in \mathbb{N}$ und reelle Zahlen α_i , $i = 0, \cdots, n$ gibt, mit $a = \alpha_0 < \alpha_1 < \cdots < \alpha_n = b$ und

$$\gamma(\alpha_{i-1} + t(\alpha_i - \alpha_{i-1})) = \gamma(\alpha_{i-1}) + t(\gamma(\alpha_i) - \gamma(\alpha_{i-1}))$$

für $t \in [0, 1]$ und $1 \leq i \leq n$.

Eine Menge $M \subset X$ ist demnach konvex genau dann, wenn mit je zwei Punkten x und $y \in M$ auch $z_\lambda = \lambda x + (1 - \lambda)y$ für alle $\lambda \in [0, 1]$ zu M gehört. Man nennt z_λ auch Konvexkombination der Punkte x und y.

Satz 6.6. *Eine wegzusammenhängende Teilmenge eines normierten Raumes $(X, ||\cdot||)$ ist zusammenhängend.*

Beweis. Angenommen eine (notwendigerweise) nicht leere Teilmenge $M \subset X$ wäre wegzusammenhängend, aber nicht zusammenhängend. Dann gäbe es offene Mengen $O_i \subset X$, mit $M \cap O_i \neq \emptyset$, $i = 1, 2$, $M \subset O_1 \cup O_2$ und $M \cap O_1 \cap O_2 = \emptyset$. Wir wählen $x_i \in O_i \cap M$, $i = 1, 2$ und nach Voraussetzung eine Kurve $\gamma\colon I \to M$, $I = [a, b]$ $\gamma(a) = x_1$ und $\gamma(b) = x_2$. Wir setzen nun $t^* = \sup T$ mit

$$T = \{t \in [a, b]\colon \gamma([a, t]) \subset M \cap O_1\}$$

Wegen der Stetigkeit von γ ist $\gamma^{-1}(O_i) = \gamma^{-1}(O_i \cap M)$, $i = 1, 2$ relativ offen in I. Ist $\gamma(t_0) \in M \cap O_i$ für ein $t_0 \in I$, dann gibt es ein $\delta_{t_0} > 0$ mit $\gamma(t) \in M \cap O_i$ für alle $t \in I \cap (t_0 - \delta_{t_0}, t_0 + \delta_{t_0})$. Dies hat $a < t^* < b$ zur Folge. Wäre $\gamma(t^*) \in M \cap O_1$, müßte daher auch $\gamma([t^*, t^* + \delta_{t^*}) \cap I) \subset M \cap O_1$ gelten, wäre $\gamma(t^*) \in M \cap O_2$, müßte auch $\gamma((t^* - \delta_{t^*}, t^*]) \cap I) \subset M \cap O_2$ sein. In beiden Fällen erhält man einen Widerspruch zur Definition von t^*. Es folgt $\gamma(t^*) \notin (M \cap O_1) \cup (M \cap O_2) = M$. Dies steht im Widerspruch zu $\gamma(I) \subset M$. □

Bemerkung 6.7. 1.) Eine Teilmenge in $\mathbb{R}$ ist konvex genau dann, wenn sie ein Intervall ist (vgl Satz V-4.1).
2.) Offensichtlich ist eine konvexe Menge wegzusammenhängend und damit zusammenhängend.

Beispiel 6.8. In einem normierten Raum $(X, ||\cdot||)$ sind die offenen und abgeschlossenen Kugeln $K(x,r)$ bzw. $\bar{K}(x,r)$ mit $x \in X$ und $r > 0$ konvex und somit zusammenhängend. Dies ist eine Folge der Ungleichungen

$$\begin{aligned}||\lambda y + (1-\lambda)z|| &= ||\lambda(y-x) + (1-\lambda)(z-x)|| \leq \lambda||y-x|| + (1-\lambda)||z-x|| \\ &< \lambda r + (1-\lambda)r = r,\end{aligned}$$

für y, $z \in K(x,r)$ und $\lambda \in [0,1]$. Der Beweis für die abgeschlossenen Kugeln verläuft vollkommen analog.

Satz 6.9. *Eine Teilmenge von $\mathbb{R}$ ist genau dann zusammenhängend, wenn sie ein Intervall ist.*

Beweis. Man beachte, $\emptyset$ und einelementige Mengen sind Intervalle, vgl. Definition II-3.13. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir im Folgenden daher davon ausgehen, daß die betrachteten Mengen zumindest zwei verschiedene Elemente enthalten.
$\Rightarrow$ Wir führen den Beweis indirekt und nehmen an, es sei $M \subset \mathbb{R}$ kein Intervall. Nach Satz V-4.1 gibt es also Elemente $x, y \in M$, $z \notin M$ und $x < z < y$. Setzt man $O_1 = (-\infty, z)$, $O_2 = (z, \infty)$, ergibt sich $M \subset O_1 \cup O_2 = \mathbb{R} \setminus \{z\}$, $O_1 \cap O_2 \cap M = \emptyset$, $x \in O_1 \cap M$, $y \in O_2 \cap M$, d.h. M ist nicht zusammenhängend.
$\Leftarrow$ Ein Intervall ist konvex und somit zusammenhängend. $\square$

Satz 6.9 gibt eine vollständige Charakterisierung zusammenhängender Mengen in $\mathbb{R}$. Es gibt keine ähnlich einfache Beschreibung der zusammenhängenden Mengen in $\mathbb{R}^n$ für $n > 1$.
Die Umkehrung von Satz 6.6 gilt i.A. nicht. Zum Beispiel ist $M = \{(x, \sin\frac{1}{x}) \in \mathbb{R}^2 \colon x > 0\} \cup \{(0,0)\}$ zusammenhängend, aber nicht wegzusammenhängend.

Satz 6.10. *Jede zusammenhängende offene Teilmenge M eines normierten Raumes ist $(X, ||\cdot||)$ wegzusammenhängend. Je zwei Punkte x, $y \in M$ können durch eine polygonale Kurve in M verbunden werden.*

Beweis. Die Behauptung ist für $M = \emptyset$ klar. Es sei also $M \neq \emptyset$ zusammenhängend. Für ein fest gewähltes $x_0 \in M$ sei

$$\begin{aligned}Z = \{y \in M \colon & y \text{ und } x_0 \text{ können durch einen polygonalen Weg in } M \\ & \text{verbunden werden.}\}\end{aligned}$$

Nach dem Beweisprinzip aus Bemerkung 6.4 genügt es zu zeigen, daß Z offen und abgeschlossen in M ist.
1. Schritt: Z ist offen in M. Es sei also $y \in Z$ und $\gamma \colon [0,1] \to M$ mit $\gamma(0) = x_0$ und $\gamma(1) = y$. Da M offen ist, ist y ein innerer Punkt von M, d.h. es gibt $r > 0$ mit $K(y,r) \subset M$. Die Kugel $K(y,r)$ ist konvex. Somit kann jeder weitere Punkt $z \in K(y,r)$ durch das Segment $\sigma(t) = y + t(z-y)$, $t \in [0,1]$, in $K(y,r)$ mit y

verbunden werden. Die Abbildung $\rho\colon [0,2] \to M$

$$\rho(t) = \begin{cases} \gamma(t) & t \in [0,1] \\ \sigma(t-1) & t \in [1,2] \end{cases}$$

ist ein stetiger Weg der x_0 und z in M verbindet, d.h. $z \in Z$. Da $z \in K(y,r)$ beliebig gewählt war, folgt $K(y,r) \subset Z$, d.h. Z ist offen und somit erst recht offen in M.
2.Schritt: Z ist abgeschlossen in M, d.h. $M \setminus Z$ ist offen in M. Dies ist trivial für $M \setminus Z = \emptyset$. Es sei also $x \in M \setminus Z$. Da M offen ist, folgt $K(x,r) \subset M$ für ein $r > 0$. Gäbe es ein Element $y \in K(x,r) \cap Z$, könnte man einerseits y mit x_0, andererseits y mit x und somit x mit x_0 in M verbinden, d.h. $x \in Z$. Somit gilt sogar $K(x,r) \subset M \setminus Z$, d.h. $M \setminus Z$ ist offen und somit offen in M. □

Wir beenden diesen Abschnitt mit folgender Definition:

Definition 6.11. *Es sei $(X, ||\cdot||)$, ein normierter Raum, $M \subset X$ und $x \in M$.*

i) $Z_x = \bigcup\{Z \subset M : x \in Z, Z \text{ ist zusammenhängend }\}$ *heißt* ***Zusammenhangskomponente* von *x***.
ii) $Z \subset M$ *heißt* **Zusammenhangskomponente von *X*** $\underset{Def}{\Leftrightarrow} \exists x \in X : Z = Z_x$.

Die Zusammenhangskomponente Z_x von x ist somit die größte zusammenhängende Teilmenge von M, welche x enthält. Eine offene, zusammenhängende Teilmenge eines normierten Raumes heißt **Gebiet**.

Satz 6.12. *Es seien $(X, ||\cdot||_X)$ und $(Y, ||\cdot||_Y)$ normierte Räume und $f \in \mathcal{F}(D,Y)$, $D \subset X$, stetig. Ist $M \subset D$ zusammenhängend, dann ist auch $f(M)$ zusammenhängend.*

Beweis. Angenommen $M \subset D$ wäre zusammenhängend und $f(M)$ nicht zusammenhängend, d.h. es gäbe offene Mengen U, V derart, daß

$$f(M) \subset U \cup V, \quad U \cap V \cap f(M) = \emptyset,$$
$$U \cap f(M) \neq \emptyset, \quad V \cap f(M) \neq \emptyset.$$

Wir setzen $U_1 = f^{-1}(U)$, $U_2 = f^{-1}(V)$. Nach Satz 3.26 sind U_1 und U_2 offen in D. Es gibt also in X offene Mengen O_i mit $U_i = O_i \cap D$, $i = 1,2$. Es folgt

$$M \subset f^{-1}(U \cup V) = f^{-1}(U) \cup f^{-1}(V) = U_1 \cup V_1 \subset O_1 \cup O_2.$$

Wegen $U \cap f(M) \neq \emptyset$ existiert ein Element $a \in M$ mit $f(a) \in U \cap f(M)$, d.h. $a \in f^{-1}(U) \cap M = U_1 \cap M = O_1 \cap D \cap M = O_1 \cap M$. Es gilt also

$$O_1 \cap M \neq \emptyset$$

und analog

$$O_2 \cap M \neq \emptyset.$$

Die Bedingung $U \cap V \cap f(M) = \emptyset$ bedeutet $f(M) \subset \complement(U \cap V)$, d.h. $M \subset f^{-1}(\complement(U \cap V)) = \complement f^{-1}(U \cap V) = \complement(U_1 \cap U_2) = \complement(O_1 \cap O_2 \cap D)$, d.h.

$$O_1 \cap O_2 \cap D \cap M = O_1 \cap O_2 \cap M = \emptyset.$$

Somit wäre im Widerspruch zur Voraussetzung M nicht zusammenhängend. $\square$

KOROLLAR 6.13. Es sei $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum, $f\colon D \to \mathbb{R}$, $D \subset X$ stetig. Ist $M \subset D$ zusammenhängend, dann ist $f(M)$ ein Intervall.

BEWEIS. Dies folgt unmittelbar aus Satz 6.12 und Satz 6.9. $\square$

Das Korollar bleibt richtig, wenn nur $f|_M$ stetig ist. Ist M ein Intervall in $\mathbb{R}$, ergibt sich der Zwischenwertsatz V-4.3 für reelle Funktionen.

7. Lineare Abbildungen

Lineare Abbildungen sind mit der linearen Struktur eines normierten Raumes besonders gut verträglich. Wir rufen vorerst die Definition der Linearität einer Abbildung in Erinnerung.

DEFINITION 7.1. *Es seien X und Y Vektorräume über demselben Körper $\mathbb{K}$.*

*$f\colon X \to Y$ heißt **linear** $\underset{Def}{\Leftrightarrow}$ $\forall x, y \in X\ \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}\colon f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y)$.*

Eine einfache Induktion zeigt die Gleichwertigkeit von Definition 7.1 mit folgender Eigenschaft

$$\forall n \in \mathbb{N}\ \forall x_1, \dots, x_n \in X\ \forall \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}\colon f(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i).$$

Setzt man $\lambda = 0$ und $y = 0$ in Definition 7.1 ein, erhält man

$$f(0) = 0$$

als notwendige Bedingung für die Linearität von f. Lineare Abbildungen zwischen normierten Räumen haben bemerkenswerte Eigenschaften.

SATZ 7.2. *Es seien $(X, \|\cdot\|_X)$, $(Y, \|\cdot\|_Y)$ normierte Räume und $f \in \mathcal{F}(X, Y)$ linear. Folgende Aussagen sind äquivalent.*

i) *f ist stetig,*
ii) *f ist stetig in 0,*
iii) *$\exists M > 0\ \forall x \in X\colon \|f(x)\|_Y \le M\|x\|_X$.*

BEWEIS. i) $\Rightarrow$ ii) trivial.
ii) $\Rightarrow$ iii) Es sei f stetig in 0. Wegen $f(0) = 0$ gibt es zu $K_Y(0, 1)$ ein $\delta > 0$ mit $f(K_X(0, \delta)) \subset K_Y(0, 1)$. Es sei $x \in X$, $x \ne 0$. Wir setzen $z_x = \frac{x}{\|x\|_X}\frac{\delta}{2}$. Wegen $z_x \in K_X(0, \delta)$ folgt $\|f(z_x)\|_Y < 1$. Wegen der Linearität von f folgt

$$\|f(z_x)\|_Y = \left\|f\left(\frac{x}{\|x\|_X}\frac{\delta}{2}\right)\right\|_Y = \left\|\frac{\delta}{2\|x\|_X} f(x)\right\|_Y = \frac{\delta}{2\|x\|_X}\|f(x)\|_Y < 1,$$

d.h. es gilt iii) mit $M = \frac{2}{\delta}$.

iii) $\Rightarrow$ i) Dies folgt aus

$$\|f(x) - f(y)\|_Y = \|f(x-y)\|_Y \leq M\|x-y\|_X.$$

$\square$

Eine lineare Abbildung mit der Eigenschaft iii) aus Satz 7.2 nennt man **beschränkt**. Dies ist nach unserer bisherigen Definition gleichbedeutend mit der Beschränktheit von $f|_{\bar{K}_X(0,1)}$. Es ist üblich, die Beschränktheit einer *linearen* Abbildung durch die Bedingung

$$\|f\| := \sup\{\|f(x)\|_Y : \|x\|_X \leq 1\} < \infty$$

zu charakterisieren. Nach der in Satz 3.5 gegebenen Definition wäre nur die lineare Abbildung $f \equiv 0$ beschränkt. Satz 7.2 zeigt, daß für lineare Abbildungen die Stetigkeit äquivalent ist zur Beschränktheit der Abbildung.

Wir bezeichnen den Vektorraum der stetigen linearen Abbildungen von X nach Y mit $\mathfrak{L}(X,Y)$,

$$\mathfrak{L}(X,Y) = \{f : X \to Y : f \text{ ist linear }, ||f|| < \infty\}.$$

Wir überlassen es dem Leser, nachzuweisen, daß $\|\cdot\|$ eine Norm auf $\mathfrak{L}(X,Y)$ darstellt. Wir bemerken noch, daß die Norm $||f||$ auch charakterisiert werden kann durch die Beziehung

$$\|f\| = \inf\{k \in \mathbb{R} : \forall x \in X : \|f(x)\|_Y \leq k\|x\|_X\}.$$

Hat man also für eine lineare Abbildung die Abschätzung

$$||f(x)||_Y \leq M||x||_X$$

für alle $x \in X$ nachgewiesen, folgt $||f|| \leq M$.

In der linearen Algebra wird gezeigt, daß zwischen linearen Abbildungen von $\mathbb{K}^n$ nach $\mathbb{K}^m$ und den Matrizen in $\mathbb{K}^{m\times n}$ ein enger Zusammenhang besteht.

Wir erinnern: Eine Matrix vom Typ (m,n) über einem Körper $\mathbb{K}$ ist eine Anordnung von nm Körperelementen k_{ij}, $i = 1,\dots,m$, $j = 1,\dots,n$, in m Zeilen und n Spalten. Wir fassen alle Matrizen vom Typ (m,n) zusammen in der Menge $\mathbb{K}^{m\times n}$. In $\mathbb{K}^{m\times n}$ kann man elementweise Addition und Multiplikation mit einem Skalar erklären. Es seien $A, B \in \mathbb{K}^{m\times n}$ und $\lambda \in \mathbb{K}$. Die Matrixelemente von A und B seien a_{ij} und b_{ij}, $i = 1,\dots,m$, $j = 1,\dots,n$. Wir drücken dies kurz durch $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ aus. Man definiert

$$\begin{array}{lll} C := A + B, & c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, & \\ & & i = 1,\dots,m, \quad j = 1,\dots,n. \\ D := \lambda A, & d_{ij} = \lambda a_{ij}, & \end{array}$$

$\mathbb{K}^{m\times n}$ mit dieser linearen Struktur ist ein Vektorraum. Für Matrizen $A \in \mathbb{K}^{m\times s}$, $B \in \mathbb{K}^{s\times n}$ kann man auch ein Produkt definieren. Die Produktmatrix $C = AB$ liegt in $\mathbb{K}^{m\times n}$ (man achte auf die Dimension!). Das ij-te Matrixelement von C ist gegeben durch

$$c_{ij} = \sum_{r=1}^{s} a_{ir}b_{rj}, \quad i = 1,\dots,m,\ j = 1,\dots,n.$$

Satz 7.3. *Wir wählen in $\mathbb{K}^n$ und $\mathbb{K}^m$ jeweils die kanonische Basis.*

i) *Jeder linearen Abbildung $f \in \mathcal{F}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m)$ ist eine eindeutig bestimmte Matrix $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ zugeordnet. Für $y = (\eta_1, \dots, \eta_m) \in \mathbb{K}^m$ und $x = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{K}^n$ gilt*

$$(*) \qquad y = f(x) \Leftrightarrow \eta_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\xi_j, \quad i = 1, \dots, m \quad (\Leftrightarrow y = Ax).$$

ii) *Jede Matrix $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$ definiert eindeutig eine lineare Abbildung $f \in \mathcal{F}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m)$.*

iii) *Es seien $f, g \in \mathcal{F}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m)$ lineare Abbildungen und $\lambda \in \mathbb{K}$ und A und B die Matrixdarstellungen von f bzw. g. Dann gilt: Die Abbildung $f+g$ wird durch $A+B$ und λf durch λA dargestellt (und umgekehrt).*

iv) *Es seien $g \in \mathcal{F}(\mathbb{K}^s, \mathbb{K}^m)$, $f \in \mathcal{F}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^s)$ lineare Abbildungen mit der Matrixdarstellung $A \in \mathbb{K}^{m\times s}$ bzw. $B \in \mathbb{K}^{s\times n}$. Der linearen Abbildung $g \circ f \in \mathcal{F}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m)$ entspricht die Produktmatrix $AB \in \mathbb{K}^{m\times n}$ (und umgekehrt).*

Im Zusammenhang mit Matrizen ist es zweckmäßig, die Koordinatenvektoren von Elementen $x \in \mathbb{K}^n$ als Spaltenvektoren zu schreiben.
Es sei $f \in \mathcal{F}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m)$ eine lineare Abbildung mit der Matrixdarstellung $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$. Verwenden wir $\|\cdot\|_\infty$ in $\mathbb{K}^n$ und $\mathbb{K}^m$, erhalten wir aus $(*)$

$$\begin{aligned}
\|f(x)\|_\infty &= \max\{|\eta_i|\colon i = 1, \dots, m\} \\
&= \max\{|\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\xi_j|\colon i = 1, \dots, m\} \\
&\le \max\{\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|\colon i = 1, \dots, m\} \cdot \max\{|\xi_j|\colon j = 1, \dots, n\} \\
&= \max\{\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|\colon i = 1, \dots, m\}\|x\|_\infty.
\end{aligned}$$

Nach Satz 7.2 ist f stetig und

$$||f|| \le \max\{\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|\colon i = 1, \dots, m\}.$$

Es gilt also folgender Satz.

Satz 7.4. *Jede lineare Abbildung von $\mathbb{K}^n$ nach $\mathbb{K}^m$ ist stetig.*

Wir untersuchen nun die Stetigkeit der operatorwertigen Abbildung $x \to T(x)$.

Satz 7.5. *Es sei $T\colon U \to \mathcal{L}(\mathbb{K}^m, \mathbb{K}^n)$, $U \subset \mathbb{K}^k$ offen, und $A(x) \in \mathbb{K}^{n\times m}$ die Matrixdarstellung von $T(x)$, $x \in U$, in Bezug auf eine Basis $(a_1, \dots, a_m)$ in $\mathbb{K}^m$ und eine Basis $(b_1, \dots, b_n)$ in $\mathbb{K}^n$. Wir bezeichnen die Matrixelemente von $A(x)$ mit $a_{ij}(x)$,*

$i=1,\dots,n$, $j=1,\dots,m$. Dann ist die Abbildung $x\to T(x)$ genau dann stetig, wenn alle $a_{ij}\colon U\to\mathbb{K}$, $i=1,\dots,n$, $j=1,\dots,m$ stetig sind.

Beweis. Da $(a_1,\dots,a_m)$ eine Basis des $\mathbb{K}^m$ und $(b_1,\dots,b_n)$ eine Basis des $\mathbb{K}^n$ ist, läßt sich jedes $z\in\mathbb{K}^m$ und jedes $y\in\mathbb{K}^n$ in eindeutiger Weise als Linearkombination der Basisvektoren darstellen

$$z=\sum_{j=1}^m \zeta_j a_j, \qquad y=\sum_{j=1}^n \eta_j b_j,$$

$\zeta_j\in\mathbb{K}$, $j=1,\dots,m$ und $\eta_j\in\mathbb{K}$, $j=1,\dots,n$. Wir verwenden o.B.d.A. in $\mathbb{K}^m$ und in $\mathbb{K}^n$ jeweils die Norm

$$\|z\|_1=\sum_{j=1}^m|\zeta_j|, \qquad \|y\|_\infty=\max\{|\eta_1|,\dots,|\eta_n|\}.$$

Der Koordinatenvektor von $T(x)a_j$ ist durch die Spalte $\operatorname{col}(a_{1j}(x),\dots,a_{nj}(x))$, $j=1,\dots,m$, gegeben. Wegen der Linearität von $T(x)$ folgt

$$\begin{aligned}T(x)z&=\sum_{j=1}^m\zeta_jT(x)a_j=\sum_{j=1}^m\zeta_j\sum_{i=1}^n a_{ij}(x)b_i\\&=\sum_{i=1}^n[\sum_{j=1}^m a_{ij}(x)\zeta_j]b_i.\end{aligned}$$

Für x_0, $x\in U$ und $z\in\mathbb{K}^m$ erhält man daher

$$(*)\qquad\begin{aligned}\|T(x)z-T(x_0)z\|_\infty&=\|\sum_{i=1}^n[\sum_{j=1}^m(a_{ij}(x)-a_{ij}(x_0))\zeta_j]b_i\|_\infty\\&=\max_{1\le i\le n}|\sum_{j=1}^m(a_{ij}(x)-a_{ij}(x_0))\zeta_j|.\end{aligned}$$

Es sei nun $x\mapsto T(x)$ in $x_0\in U$ stetig. Wählt man $z=a_k$, $k=1,\dots,m$, in $(*)$, findet man mit $\|a_k\|_1=1$

$$\begin{aligned}\max_{1\le i\le n}|a_{ik}(x)-a_{ik}(x_0)|&=\|T(x)a_k-T(x_0)a_k\|_\infty\\&\le\|T(x)-T(x_0)\|_{\mathcal{L}(\mathbb{K}^m,\mathbb{K}^n)}\|a_k\|=\|T(x)-T(x_0)\|_{\mathcal{L}(\mathbb{K}^m,\mathbb{K}^n)}.\end{aligned}$$

Dies zeigt die Stetigkeit von $x\mapsto a_{ij}(x)$ in $x=x_0$, $i=1,\dots,n$, $j=1,\dots,m$.
Umgekehrt seien nun die Matrixelemente von $A(x)$ stetig in $x=x_0$. Aus $(*)$ folgt die Ungleichung

$$\|T(x)z-T(x_0)z\|_\infty\le\max_{1\le i\le n}\sum_{j=1}^m|a_{ij}(x)-a_{ij}(x_0)|\cdot\|z\|_1,$$

also

$$\|T(x) - T(x_0)\|_{\mathcal{L}(\mathbb{K}^m,\mathbb{K}^n)} \leq \max_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^{m} |a_{ij}(x) - a_{ij}(x_0)|.$$

Ein einfaches Argument zeigt nun die Stetigkeit von $x \to T(x)$ in $x = x_0$. □

Bemerkung 7.6. Da die Dimension des Raumes $\mathcal{L}(\mathbb{K}^m, \mathbb{K}^n)$ endlich ist, sind sämtliche Normen in $\mathcal{L}(\mathbb{K}^m, \mathbb{K}^n)$ äquivalent. Insbesondere hängt daher die Stetigkeit der Abbildung $x \to T(x)$ nicht von der Wahl der Norm in $\mathbb{K}^m$ bzw. $\mathbb{K}^n$ ab. Der Satz bleibt offenbar gültig, wenn man $\mathbb{K}^n$ bzw. $\mathbb{K}^m$ durch beliebige endlich dimensionale normierte Räume ersetzt.

8. Produkte normierter Räume

Die Produktbildung ist ein nützliches Hilfsmittel um einen gegebenen normierten Raum aus einfachen Bausteinen aufzubauen.

Definition 8.1. *Es seien* $(X_i, ||\cdot||_i)$, $(X, ||\cdot||)$ *normierte Räume mit* $X = X_1 \times \cdots \times X_n$.

> $(X, ||\cdot||)$ *heißt* ***Produkt*** *der normierten Räume* $(X_i, ||\cdot||_i)$, $i = 1, \ldots, n$
>
> $$\underset{Def}{\Leftrightarrow}$$
>
> *Für alle* $x = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ *gilt*
> i) $||\xi_i||_i \leq \|x\|$, $i = 1, \ldots, n$,
> ii) $\|x\| \leq \sum\limits_{i=1}^{n} ||\xi_i||_i$.

Natürlich gibt es viele Möglichkeiten, eine Norm auf $X_1 \times \cdots \times X_n$ zu erklären. Man kann jedoch zeigen, daß alle Normen auf $X_1 \times \cdots \times X_n$, welche die Bedingungen i) und ii) erfüllen, äquivalent sind, also zu ein und derselben metrischen Topologie auf $X_1 \times \cdots \times X_n$ führen. Vom topologischen Standpunkt aus gesehen sind daher diese normierten Räume nicht zu unterscheiden. Es ist somit sinnvoll, von *dem* Produktraum der normierten Räume $(X_i, ||\cdot||_i)$, $i = 1, \ldots, n$, zu sprechen.

Beispiel 8.2. Es seien $(X_i, ||\cdot||_i) = (\mathbb{K}, |\cdot|)$, $i = 1, \ldots, n$. $(\mathbb{K}^n, ||\cdot||_k)$, $k = 1, 2, \infty$, kann als Produktraum von $(X_i, ||\cdot||_k)$, $i = 1, \ldots, n$, gemäß Definition 8.1 aufgefaßt werden.
2.) Es seien $(X, \|\cdot\|_X)$ und $(Y, \|\cdot\|_Y)$ normierte Räume. Dann definieren $\|(x, y)\|_\infty = \max\{\|x\|_X, \|y\|_Y\}$, $\|(x, y)\|_2 = (\|x\|_X^2 + \|y\|_Y^2)^{1/2}$ und $\|(x, y)\|_1 = \|x\|_X + \|y\|_Y$ äquivalente Normen auf $(X \times Y)$.

Von besonderem Interesse ist, welche Eigenschaften der Faktoren $(X_i, ||\cdot||_i)$ sich auf das Produkt $(X, ||\cdot||)$ übertragen.

Satz 8.3. $(X, ||\cdot||)$ *sei Produkt der normierten Räume* $(X_i, ||\cdot||_i)$, $i = 1, \ldots, n$, *und* $(x_k)_{k\geq 1}$ *eine Folge in* $(X, ||\cdot||)$. *Es sei* $x_k = (\xi_1^k, \ldots, \xi_n^k)$, $x = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$. *Dann gilt*

a) (x_k) *ist beschränkt* $\Leftrightarrow (\xi_i^k)_{k\geq 1}$ *sind beschränkt in* $(X_i, ||\cdot||_i)$, $i = 1, \ldots, n$.
b) (x_k) *ist eine Cauchyfolge in* $(X, ||\cdot||) \Leftrightarrow (\xi_i^k)_{k\geq 1}$ *sind Cauchy Folgen in* $(X_i, ||\cdot||_i)$, $i = 1, \ldots, n$.
c) $\lim_{k\to\infty} x_k = x \Leftrightarrow \lim_{k\to\infty} \xi_i^k = \xi_i$, $i = 1, \ldots, n$.

Beweis. Der Beweis von a) und b) sei dem Leser als Übung überlassen.
c) „$\Rightarrow$" Es gelte $\lim_{k\to\infty} x_k = x$, d.h.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) \forall k \geq N(\varepsilon)\colon \|x_k - x\| < \varepsilon.$$

Nach 8.1-i) folgt für $k \geq N(\varepsilon)$ daher erst recht

$$||\xi_i^k - \xi_i||_i < \varepsilon, \quad i = 1, \ldots, n,$$

d.h. $\lim_{k\to\infty} \xi_i^k = \xi_i$, $i = 1, \ldots, n$.
„$\Leftarrow$" Es gelte $\lim_{k\to\infty} \xi_i^k = \xi_i$, $i = 1, \ldots, n$, d.h.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_i(\varepsilon) \forall k \geq N_i(\varepsilon)\colon ||\xi_i^k - \xi_i||_i < \frac{\varepsilon}{n},$$

$i = 1, \ldots, n$. Setzt man $N(\varepsilon) = \max\{N_i(\varepsilon)\colon i = 1, \ldots, n\}$, folgt aus 8.1-ii) für $k \geq N(\varepsilon)$.

$$\|x_k - x\| \leq \sum_{i=1}^{n} ||\xi_i^k - \xi_i||_i < \varepsilon.$$

□

Satz 8.4. $(X, ||\cdot||)$ *sei Produkt der normierten Räume* $(X_i, ||\cdot||_i)$, $i = 1, \ldots, n$. *Dann gilt*

a) *Sind die Mengen* K_i *kompakt in* $(X_i, ||\cdot||_i)$, $i = 1, \ldots, n$, *dann ist* $K = \prod_{i=1}^n K_i$ *kompakt in* $(X, ||\cdot||)$.
b) $(X, ||\cdot||)$ *ist vollständig* $\Leftrightarrow (X_i, ||\cdot||_i)$ *ist vollständig*, $i = 1, \ldots, n$.

Beweis. a) Es sei $(x_k)_{k\geq 1} \subset K$, $x_k = (\xi_1^k, \ldots, \xi_n^k)$. Da K_1 kompakt in $(X_1, ||\cdot||_1)$ ist, enthält die Folge $(\xi_1^k)_{k\geq 1}$ eine konvergente Teilfolge $(\xi_1^{\varphi_1(k)})_{k\geq 1}$ mit Grenzwert $\xi_1 \in K_1$. Wegen der Kompaktheit von K_2 in $(X_2, ||\cdot||_2)$ kann man in $(\xi_2^{\varphi_1(k)})$ eine konvergente Teilfolge $(\xi_2^{(\varphi_2\circ\varphi_1)(k)})_{k\geq 1}$ mit Grenzwert $\xi_2 \in K_2$ finden. Als Teilfolge von $(\xi_1^{\varphi_1(k)})$ ist auch die Folge $(\xi_1^{(\varphi_2\circ\varphi_1)(k)})$ konvergent. Nach n Schritten erhält man eine Teilfolge $(x_{\chi(k)}) \subset (x_k)$ mit $\lim_{k\to\infty} \xi_i^{\chi(k)} = \xi_i$, $i = 1, \ldots, n$. Dies ist nach Satz 8.3-c) äquivalent zu $\lim_{k\to\infty} x_{\chi(k)} = x$, $x = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$. Da x in K liegt, ist K abgeschlossen in $(X, ||\cdot||)$ und somit nach Satz 4.12 kompakt.

ad b) „$\Rightarrow$" Es sei X vollständig und (ξ_i^k) eine Cauchy Folge in $(X_i, ||\cdot||_i)$. Wie vorhin definieren wir die Folge $(x_k) \subset X$, $x_k = (\eta_1, \ldots, \eta_{i-1}, \xi_i^k, \eta_{i+1}, \ldots, \eta_n)$. Es folgt mit $\xi_j^k = \eta_j$, $j \neq i$,

$$||x_k - x_\ell|| \leq \sum_{j=1}^{n} ||\xi_j^\ell - \xi_j^k||_j = ||\xi_i^\ell - \xi_i^k||_i,$$

d.h. (x_k) ist eine Cauchy Folge in X. Wegen der Vollständigkeit von X, gibt es ein Element $x^* \in X$, $x^* = (\xi_1^*, \dots, \xi_n^*)$, mit $\lim_{k\to\infty} x_k = x^*$. Nach Satz 8.3-c) gilt dann auch $\lim_{k\to\infty} \xi_i^k = \xi_i^*$, $i = 1, \dots, n$.
„$\Leftarrow$“ Es seien die Räume $(X_i, ||\cdot||_i)$, $i = 1, \dots, n$, vollständig und (x_k) eine Cauchy Folge in X. Dann ist auch $(\xi_i^k)_{k\geq 1}$, $i = 1, \dots, n$ jeweils eine Cauchy Folge in X_i. Wegen der Vollständigkeit von X_i sind die Folgen $(\xi_i^k)_{k\geq 1}$ konvergent, $i = 1, \dots, n$, d.h. die Folge (x_k) ist konvergent (Satz 8.3). □

SATZ 8.5. *Es seien $(X, ||\cdot||_X)$, $(Y_i, ||\cdot||_i)$ normierte Räume und $(Y, ||\cdot||)$ Produkt der Räume $(Y_i, ||\cdot||_i)$, $i = 1, \dots, n$. Ferner sei $f_i \in \mathcal{F}(D, Y_i)$, $D \subset X$, $i = 1, \dots, n$, und $F = (f_1, \dots, f_n) \in \mathcal{F}(D, Y)$ erklärt durch*

$$F(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x)), \quad x \in D.$$

Folgende Aussagen sind äquivalent

i) *F ist stetig in x_0,*
ii) *f_i ist stetig in x_0, $i = 1, \dots, n$.*

BEWEIS. Satz 3.21 und 8.3-c). □

SATZ 8.6. *Es seien $(X_i, ||\cdot||_i)$, $i = 1, \dots, n$, normierte Räume und $(X, ||\cdot||)$ ihr Produktraum. Dann sind die Abbildungen*

$$\pi_i\colon \begin{cases} (X, ||\cdot||) \to (X_i, ||\cdot||_i), \\ x = (\xi_1, \dots, \xi_n) \mapsto \xi_i, \end{cases} \qquad i = 1, \dots, n,$$

*gleichmäßig stetig auf X. Man nennt π_i **i-te Projektion**.*

BEWEIS. Die Behauptung folgt aus der Abschätzung $(x = (\xi_1, \dots, \xi_n), y = (\eta_1, \dots, \eta_n))$

$$||\pi_i(x) - \pi_i(y)||_i = ||\xi_i - \eta_i||_i \leq \|x - y\|.$$

□

Wir demonstrieren den Einsatz von Projektionen an einem einfachen Beispiel: Es seien $\varphi, \psi\colon D \to \mathbb{K}$, $D \subset \mathbb{K}^n$ stetig. Dann sind auch die Abbildungen

$$f\colon \begin{cases} D \times D \to \mathbb{K} \\ (\xi, \eta) \mapsto \varphi(\xi) + \psi(\eta) \end{cases} \qquad g\colon \begin{cases} X \times X \to Y \\ (\xi, \eta) \mapsto \varphi(\xi)\psi(\eta) \end{cases}$$

stetig auf $D \times D$. Dies ist eine Folge der Sätze 3.20 und 8.6 angewendet auf

$$f = \varphi \circ \pi_1 + \psi \circ \pi_2, \quad g = (\varphi \circ \pi_1)(\psi \circ \pi_2),$$

und der Tatsache, daß Summe und Produkt stetiger Funktionen selbst wieder stetig sind.

KAPITEL vii

Differenzierbare Funktionen

1. Differenzierbarkeit

Die Stetigkeit einer Abbildung f an einer Stelle x_0 bedeutet, daß man lokal, dh. in einer Umgebung U von x_0, die Funktionswerte $f(x)$ durch $f(x_0)$ approximieren kann. Natürlich bringt dies i.A. nur eine sehr grobe Näherung an den tatsächlichen Funktionsverlauf. Bedeutend besser kann man den Graph von f durch eine affine Funktion $t_1(x) = f(x_0) + A_{x_0}(x - x_0)$ approximieren. Die Forderung, der Approximationsfehler $r(x) = f(x) - t_1(x)$ möge in einer Umgebung von x_0 klein sein, liefert jedoch allein keine Bedingung für A_{x_0}. Es ist also notwendig, die Anforderungen an die Approximationsgüte zu erhöhen. Eine Präzisierung dieser Idee führt auf das Konzept der Differenzierbarkeit einer Funktion.
Im Folgenden bezeichnen X, Y jeweils normierte Räume mit Normen $||\cdot||_X$ bzw. $||\cdot||_Y$. Wenn die verwendete Norm aus dem Zusammenhang ersichtlich ist, wird auf die Unterscheidung der Normen durch einen Index verzichtet.

Definition 1.1. *Es sei $f\colon U \to Y$, $U \subset X$ offen und $x_0 \in U$.*
*1.) f heißt **FRECHET-differenzierbar** an der Stelle $x_0 \in U$, wenn es eine stetige, lineare Abbildung $A_{x_0} \in \mathcal{L}(X,Y)$, eine Kugel $K(0,\delta)$ und eine Abbildung $r\colon K(0,\delta) \to Y$ gibt mit der Eigenschaft*

i) $\forall h \in K(0,\delta)\colon f(x_0 + h) = f(x_0) + A_{x_0}(h) + r(h)$,
ii) $\lim_{h\to x_0} \frac{r(h)}{||h||} = 0$.

*2.) Die lineare Abbildung A_{x_0} heißt **(FRECHET) Ableitung** von f an der Stelle x_0. Man schreibt $f'(x_0) = \frac{df}{dx}(x_0) = Df(x_0) = A_{x_0}$*
3.) f heißt (FRECHET) differenzierbar auf U, wenn f an jeder Stelle $x \in U$ differenzierbar ist. Die Abbildung

$$f'\colon \begin{cases} U \to \mathcal{L}(X,Y) \\ x \mapsto f'(x) \end{cases}$$

heißt Ableitung von f. Anstelle von f' schreibt man auch Df.

Wegen i) muß $r(0) = 0$ gelten. Wir zeigen zuerst, daß diese Definition sinnvoll ist, d.h. daß durch die beiden Bedingungen i) und ii) die Abbildung A_{x_0} und der Korrekturterm r eindeutig festgelegt werden: Angenommen es gäbe $T_i \in \mathcal{L}(X,Y)$ und $r_i \in \mathcal{F}((K(0,\delta),Y)$, $i = 1,2$, mit

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + T_1(h) + r_1(h) = f(x_0) + T_2(h) + r_2(h).$$

Dann gilt

$$T_1(h) + r_1(h) = T_2(h) + r_2(h)$$

für alle $h \in K(0, \delta)$. Ersetzt man in dieser Beziehung h durch th mit $0 < t \leq 1$ und dividiert durch t, findet man

$$T_1(h) + \frac{1}{t} r_1(th) = T_2(h) + \frac{1}{t} r_2(th).$$

Beachtet man $||\frac{1}{t} r_i(th)|| = ||h|| \cdot \frac{||r_i(th)||}{||th||}$, folgt mit $\lim_{t \to 0} \frac{||r_i(th)||}{||th||} = 0$, $i = 1, 2$,

$$T_1 h = T_2 h$$

für alle $h \in K(0, \delta)$. Wegen der Linearität von T_i folgt daraus $T_1 = T_2$. Die Gleichheit von r_1 und r_2 ist dann eine unmittelbare Folge von $T_1 = T_2$.

Beispiel 1.2. Wir betrachten die affine Abbildung $f \colon X \to Y$, $f(x) = Ax + b$, mit $b \in Y$ und $A \in \mathfrak{L}(X, Y)$. Aus der Linearität von A folgt

$$f(x + h) = A(x + h) + b = f(x) + Ah.$$

Setzt man $r(h) = 0$ für alle $h \in X$, folgt die Differenzierbarkeit von f und

$$f'(x) = A$$

für alle $x \in X$.

Differenzierbarkeit ist eine stärkere Eigenschaft einer Funktion als Stetigkeit:

Satz 1.3. *Ist eine Abbildung $f \colon U \to Y$ differenzierbar in $x_0 \in U$, dann ist f stetig in x_0.*

Beweis. Die Behauptung ergibt sich unmittelbar aus der Darstellung

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)(h) + r(h)$$

und der Stetigkeit von $f'(x_0)$ und r. □

Bemerkung 1.4. 1.) Die Frechet Ableitung wird auch **totale Ableitung** oder **(totales) Differential** der Funktion f genannt.
2.) Gleichwertig ist folgende Charakterisierung der Differenzierbarkeit von f in $x_0 \in U$: es gibt eine stetige, lineare Abbildung $A_{x_0} \in \mathfrak{L}(X, Y)$ mit

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - A_{x_0}(h)}{||h||_X} = 0.$$

Dieser Grenzwert kann auch geschrieben werden als

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - A_{x_0}(x - x_0)}{||x - x_0||_X} = 0.$$

3.) Sind die Dimensionen der Räume X und Y endlich, genügt es, nur die Linearität von A_{x_0} zu fordern, da eine lineare Abbildung zwischen endlich dimensionalen Räumen automatisch stetig ist.
4.) Aus Satz 8.3 folgt, daß eine Abbildung $f \colon U \to \mathbb{K}^n$, $f = (f_1, \ldots, f_n)$, in $x_0 \in U$

genau dann differenzierbar ist, wenn jede Komponentenfunktion f_i, $i = 1, \dots, n$, in x_0 differenzierbar ist. Daher kann man sich bei vielen Untersuchungen auf skalare Funktionen beschränken.
5.) Man beachte, daß in Defintion 1.1 die Differenzierarkeit nur in einem inneren Punkt des Definitionsbereiches von f betrachtet wird. Dies wird erzwungen durch die Annahme, daß der Definitionsbereich offen ist. Ein Grund für diese Einschränkung besteht darin, daß dadurch Randpunkte ausgeschlossen werden und somit Annäherungen an x_0 aus beliebiger Richtung möglich sind. Das folgende Beispiel zeigt, daß die Eindeutigkeit der Ableitung verloren gehen kann, wenn der Definitionsbereich nicht offen ist:

Beispiel 1.5. Es sei $f\colon \mathbb{R} \times \{0\} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $(x, 0) \mapsto 2x$. Eine lineare Abbildung von $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}$ wird durch eine Matrix (α, β) dargestellt. Für die Untersuchung der Differenzierbarkeit von f in $(0, 0)$ betrachten wir daher den Grenzwert

$$\lim_{||(x,0)||\to 0} \frac{1}{||(x,0)||}(f(x,0) - f(0,0) - (\alpha,\beta)\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}) \tag{8}$$

$$= \lim_{|x|\to 0} \frac{1}{|x|}(2x - \alpha x) = (2-\alpha) \lim_{|x|\to 0} \operatorname{sign} x \tag{9}$$

(In $\mathbb{R}^2$ können wir z.B. die euklidische Norm verwenden). Durch die Forderung, daß der Grenzwert existiert und gleich Null ist, wird offenbar β nicht festgelegt. Jede durch $(2, \beta)$ beschriebene lineare Abbildung käme als Ableitung von f in $(0, 0)$ in Frage.

Wir betrachten nun den wichtigen Spezialfall reeller Funktionen $f\colon I \to \mathbb{R}$, $I \subset \mathbb{R}$, offen. Wegen Satz vi-2.13 können wir annehmen, daß I ein offenes Intervall ist. Wenn f in $x_0 \in I$ differenzierbar ist, dann gibt es eine lineare Abbildung $A_{x_0} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ mit den Eigenschaften

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + A_{x_0}(h) + r(h),$$
$$\lim_{h\to 0} \frac{r(h)}{h} = 0.$$

Jede lineare Abbildung $A_{x_0} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ wird durch eine reelle Zahl $\alpha \in \mathbb{R}$ dargestellt und es gilt $A_{x_0}(h) = \alpha h$ mit $\alpha = A_{x_0}(1)$, und umgekehrt. Diese Überlegung erlaubt es, die Ableitung von f in x_0 mit der reellen Zahl α zu identifizieren. Ist f in $x_0 \in I$ differenzierbar, dann gibt es also $f'(x_0) \in \mathbb{R}$ mit

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + r(h),$$
$$\lim_{h\to 0} \frac{r(h)}{h} = 0.$$

Die Ableitung $f'(x_0)$ ist daher gegeben durch den Grenzwert

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}(f(x_0 + h) - f(x_0)). \tag{10}$$

Existiert umgekehrt der Grenzwert (10) und definiert man $r\colon K(0,\delta) \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + r(h)$$

für $h \in K(0,\delta)$ (δ so, daß $K(x_0,\delta) \subset I$), erhält man

$$\lim_{h\to 0} \frac{r(h)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}(f(x_0+h) - f(x_0)) - f'(x_0) = 0,$$

d.h. f ist differenzierbar in x_0. Der Grenzwert in (10) ist jedoch auch in den Randpunkten von I sinnvoll. Für reelle Funktionen wird daher die Differenzierbarkeit allgemeiner gefaßt:

Definition 1.6. *Es sei $f\colon D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$, und $x_0 \in D$ ein Häufungspunkt von D. Man nennt f differenzierbar in x_0, wenn der Grenzwert*

$$f'(x_0) := \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}(f(x_0+h) - f(x_0))$$

existiert.

Die vorausgehende Diskussion zeigt, daß für innere Punkte $x_0 \in D$ die Definitionen 1.1 und 1.6 äquivalent sind.
Gelegentlich ist es bei reellen Funktionen zweckmäßig, nur einseitige Annäherungen an x_0 zuzulassen. Dies führt auf das Konzept der einseitigen Ableitungen:

Definition 1.7. *Es sei $f\colon D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$, und $x_0 \in D$ ein Häufungspunkt von D. f ist in $x_0 \in D$* ***rechtsseitig (linksseitig) differenzierbar****, wenn der Grenzwert*

$$\lim_{h\downarrow 0} \frac{1}{h}(f(x_0+h) - f(x_0)) \qquad \textit{bzw.} \qquad \lim_{h\uparrow 0} \frac{1}{h}(f(x_0+h) - f(x_0))$$

existiert. Die linksseitige (rechtsseitige) Ableitung in x_0 wird mit $f'_-(x_0)$ bzw. $f'_+(x_0)$ bezeichnet.

Für eine auf einem abgeschlossenen Intervall $[a,b]$ differenzierbare Abbildung f bedeuten $f'(a)$ natürlich die rechtsseitige und $f'(b)$ die linksseitige Ableitung.
Aus Lemma V-7.5 folgt unmittelbar

Satz 1.8. *Es sei $f \in \mathcal{F}(D,\mathbb{R})$, $x_0 \in D$ ein Häufungspunkt von D. Äquivalent sind*

(1) *f ist differenzierbar an der Stelle x_0,*
(2) *f ist stetig in x_0, es existieren die links- und rechtsseitige Ableitungen von f an der Stelle x_0 und sind gleich: $f'_-(x_0) = f'_+(x_0)$.*

Beispiel 1.9. 1.) Die Abbildung $x \to |x|$, $x \in \mathbb{R}$, ist in $x_0 = 0$ nicht differenzierbar, da der Quotient

$$\frac{|x| - 0}{x - 0} = \operatorname{sign} x$$

für $x \to 0$ keinen Grenzwert hat. Wegen

$$\lim_{x\downarrow 0} \operatorname{sign} x = 1, \qquad \lim_{x\uparrow 0} \operatorname{sign} x = -1$$

existieren jedoch die einseitigen Ableitungen und es gilt $f'_+(0) = 1$, $f'_-(0) = -1$.
2.) Das Beispiel der Funktion

$$f(x) = \begin{cases} x & x < 1 \\ x + 2 & x \geq 1 \end{cases}$$

zeigt, daß aus der Existenz und Gleichheit der einseitigen Ableitungen in x_0 nicht einmal auf die Stetigkeit von f in x_0 geschlossen werden kann.

Den Quotienten $\frac{1}{h}(f(x_0 + h) - f(x_0))$ bezeichnet man als **Differenzenquotient**. Geometrisch kann er als Anstieg der Sekante durch die Punkte $(x_0, f(x_0))$ und $(x_0+h, f(x_0+h))$ interpretiert werden. Die Differenzierbarkeit einer reellen Funktion f in x_0 bedeutet demnach, daß die Anstiege der Sekanten einen eindeutig bestimmten Grenzwert, nämlich $f'(x_0)$, besitzen, wenn h gegen Null strebt. Es ist somit gerechtfertigt, $f'(x_0)$ als Anstieg des Graphen von f in $(x_0, f(x_0))$ zu betrachten. Da alle Sekanten durch den Punkt $(x_0, f(x_0))$ gehen, wird durch den Grenzanstieg $f'(x_0)$ eine Grenzgerade, die **Tangente** an den Graphen von f im Punkt $(x_0, f(x_0))$, eindeutig festgelegt. Analytisch wird die Tangente beschrieben durch die affine Funktion $\mathcal{T}_1 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$\mathcal{T}_1(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0). \tag{11}$$

Im Fall einer Funktion in mehreren Veränderlichen $f \colon U \to \mathbb{R}$, $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, stellt $\mathcal{T}_1 \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$$\mathcal{T}_1(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0). \tag{12}$$

die Tangentialebene an den Graphen von f im Punkt $(x_0, f(x_0))$ dar. Die Forderung

$$\lim_{x \to x_0} \frac{r(x - x_0)}{||x - x_0||} = \lim_{x \to x_0} \frac{1}{||x - x_0||}(f(x) - \mathcal{T}_1(x)) = 0$$

bringt zum Ausdruck, daß die Tangente die Funktionswerte von f in einer Umgebung von x_0 besser als von 1. Ordnung approximiert.

Bemerkung 1.10. Da $\mathbb{C}$ als Vektorraum über $\mathbb{C}$ Dimension 1 hat, kann man die Diskussion vor Definition 1.6 auch auf Funktionen $f \colon D \to \mathbb{C}$ sinngemäß übertragen. Es folgt, daß eine Abbildung $f \colon D \to \mathbb{C}$ genau dann differenzierbar in $x_0 \in D$ ist, wenn sowohl Real-, als auch Imaginärteil von f in x_0 differenzierbar sind. Da $\mathbb{C}$ andererseits isomorph zu $\mathbb{R}^2$ ist, entfaltet der resultierende Differenzierbarkeitsbegriff seine volle Stärke erst bei der Beschränkung auf offene Mengen.

Beispiel 1.11. 1.) Wir betrachten die Potenzfunktion $p_n(z) = z^n$, $z \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$ und demonstrieren zuerst die Differenzierbarkeit mittels Definition 1.1: Wir versuchen, in der Differenz $p_n(z+h) - p_n(z)$ den *linearen* Anteil αh zu isolieren und schreiben:

$$\begin{aligned} p_n(z+h) - p_n(z) = (z+h)^n - z^n &= \sum_{k=0}^{n} h^k z^{n-k} \binom{n}{k} - z^n \\ &= n z^{n-1} h + \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} h^k z^{n-k}. \end{aligned}$$

Der kleinste Exponent von h in $r(h) := \sum\limits_{k=2}^{n} \binom{n}{k} h^k z^{n-k}$ ist 2, somit folgt $\lim_{h \to 0} \frac{1}{h} r(h) = 0$, dh. $f'(z) = n z^{n-1}$.
Geht man von Definition 1.6 aus, betrachtet man den Differenzenquotienten

$$\frac{1}{h}(p_n(z+h) - p_n(z)) = \frac{1}{h}((z+h)^n - z^n) = \sum_{i=0}^{n-1} (z+h)^i z^{n-1-i}$$

und folgert

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h}(p_n(z+h) - p_n(z)) = \sum_{i=0}^{n-1} \lim_{h \to 0} (z+h)^i z^{n-1-i} = \sum_{i=0}^{n-1} z^i z^{n-1-i} = n z^{n-1}.$$

Lemma 1.12. *Es gilt* $\lim_{z \to 0} \frac{1}{z}(e^{\alpha z} - 1) = \alpha$, $\alpha \in \mathbb{C}$.

Beweis. Es genügt $\lim_{z \to 0} \frac{1}{z}(e^z - 1) = 1$ zu zeigen. Aus der Potenzreihe für e^z folgt

$$\frac{1}{z}(e^z - 1) = \frac{1}{z} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^{k-1}}{k!}.$$

Die Behauptung ergibt sich nun aus der Beobachtung, daß die Potenzreihe auf der rechten Seite auf $\mathbb{C}$ konvergiert und daher eine stetige Funktion f mit $f(0) = 1$ darstellt. □

Eine ähnliche Rechnung oder die Kombination dieses Grenzwertes mit Satz V-10.7 zeigt die nützlichen Grenzwerte

$$\lim_{z \to 0} \frac{\sin z}{z} = 1, \qquad \lim_{z \to 0} \frac{\cos z - 1}{z} = 0 \tag{13}$$

2.) Als weitere Anwendung von Lemma 1.12 untersuchen wir die Differenzierbarkeit der komplexen Exponentialfunktion $f(z) = e^{\alpha z}$, $z \in \mathbb{C}$ und $\alpha \in \mathbb{C}$. Für festes z und $h \in \mathbb{C}$ finden wir

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h}(f(z+h) - f(z)) = e^{\alpha z} \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}(e^{\alpha h} - 1) = \alpha e^{\alpha z}$$

Somit ist f auf $\mathbb{C}$ differenzierbar und es gilt

$$\frac{d}{dz} e^{\alpha z} = \alpha e^{\alpha z}, \qquad z \in \mathbb{C}.$$

Abschließend demonstrieren wir den Einsatz von Definition 1.1 für den Nachweis der Differenzierbarkeit einer Funktion in mehreren Veränderlichen.

Beispiel 1.13. Es sei $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x,y,z) = zx^2 + ye^z$. Definition 1.1 verlangt, den Zuwachs der Funktionswerte linear zu approximieren. Wir betrachten daher

$$\begin{aligned} f(x+h, y+k, z+l) - f(x,y,z) &= (z+l)(x+h)^2 + (y+k)e^{z+l} - zx^2 - ye^z \\ &= 2xzh + ke^z + l(x^2 + ye^z) + r(h,k,l) \end{aligned}$$

mit

$$r(h,k,l) = zh^2 + 2xlh + lh^2 + ke^z(e^l - 1) + ye^z(e^l - l - 1).$$

Diese Aufspaltung berücksichtigt

$$\begin{aligned} ke^{z+l} &= ke^z + k\mathcal{O}(l), \\ ye^{z+l} - ye^z &= lye^z + \mathcal{O}(l^2). \end{aligned}$$

Wir schätzen nun den Korrekturterm $r(h,k,l)$ unter Verwendung der Maximum Norm $||(h,k,l)||_\infty = \max(|h|,|k|,|l|)$ ab. Als Abkürzung schreiben wir vorübergehend $\delta = (h,k,l)$.

$$\begin{aligned} |r(h,k,l)| \le (|z| + 2|x|)||\delta||_\infty^2 + ||\delta||_\infty^3 + ||\delta||_\infty^2\, e^z |\frac{1}{l}(e^l - 1)| \\ + |y|\, e^z ||\delta||_\infty^2 \sum_{k=2}^\infty \frac{|l|^{k-2}}{k!}. \end{aligned}$$

Da $\frac{1}{l}(e^l - 1)$ beschränkt ist (vgl. Lemma 1.12) und $\sum_{k=2}^\infty \frac{|l|^{k-2}}{k!} \le e^{|l|}$ ergibt sich

$$\lim_{(h,k,l)\to(0,0,0)} \frac{|r(h,k,l)|}{||(h,k,l)||_\infty} = 0.$$

Somit ist f auf $\mathbb{R}^3$ differenzierbar und es gilt

$$f'(x,y,z) = (2xz, e^z, x^2 + ye^z).$$

Der Nachweis der Differenzierbarkeit für Funktionen in mehreren Veränderlichen kann noch etwas vereinfacht werden, da der Kandidat für $f'(x_0)$ a priori bekannt ist. Wir kommen darauf in Abschnitt 4 zurück.

2. Rechenregeln für differenzierbare Funktionen

In diesem Abschnitt entwickeln wir einige Regeln, die es erlauben, die Ableitung komplizierterer Funktionen mit Hilfe der bekannten Ableitung einfacherer Funktionen zu berechnen.

SATZ 2.1. *Es seien $f, g: U \to Y$, $U \subset X$ offen, differenzierbar in $x_0 \in U$ und $\lambda \in \mathbb{K}$. Dann sind auch $f+g$ und λf an der Stelle x_0 differenzierbar und es gilt*

$$(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0,)$$
$$(\lambda f)'(x_0) = \lambda f'(x_0).$$

Die Menge der in x_0 differenzierbaren Funktionen bildet somit einen Vektorraum über $\mathbb{K}$.

BEWEIS. Der Beweis ist eine unmittelbare Folgerung aus den Darstellungen

$$\begin{aligned} f(x_0+h) &= f(x_0) + f'(x_0)(h) + r_f(h), \\ g(x_0+h) &= g(x_0) + g'(x_0)(h) + r_g(h) \end{aligned} \tag{14}$$

mit geeigneten Funktionen r_f und r_g, die sich aus der Differenzierbarkeit von f und g ergeben. □

Eine unmittelbare Folge von Beipiel 1.11 ist nun die Differenzierbarkeit von Polynomfunktionen $p_n(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$ und

$$p_n'(z) = \sum_{k=1}^{n} k a_k z^{k-1}.$$

Für Funktionen mit Werten in $\mathbb{K}$ ist folgende Regel nützlich.

SATZ 2.2. *Es seien $f, g: U \to \mathbb{K}$, $U \subset X$ offen, differenzierbar in $x_0 \in U$. Dann sind fg und, falls $f(x_0) \neq 0$ ist, auch $\frac{1}{f}$ an der Stelle x_0 differenzierbar und es gilt*

$$\begin{array}{ll} (fg)'(x_0) = g(x_0)f'(x_0) + f(x_0)g'(x_0) & \text{PRODUKTREGEL} \\ (\frac{1}{f})'(x_0) = -\frac{1}{f^2(x_0)} f'(x_0) & \text{REZIPROKREGEL} \\ (\frac{g}{f})'(x_0) = \frac{1}{f^2(x_0)}(f(x_0)g'(x_0) - g(x_0)f'(x_0)) & \text{QUOTIENTENREGEL} \end{array}$$

BEWEIS. Mit Hilfe der Darstellungen (14) folgt

$$(fg)(x_0+h) = (fg)(x_0) + g(x_0)f'(x_0)(h) + f(x_0)g'(x_0)(h) + R(h)$$

mit

$$R(h) = (f'(x_0)(h) + r_f(h))(g'(x_0)(h) + r_g(h)) + f(x_0)r_g(h) + g(x_0)r_f(h). \tag{15}$$

Wegen $f'(x_0) \in \mathfrak{L}(X, \mathbb{K})$ ist $f'(x_0)$ beschränkt, vgl. Satz 7.2, d.h. es gilt

$$|f'(x_0)(h)| \leq ||f'(x_0)||_{\mathfrak{L}(X,\mathbb{K})} ||h||_X$$

und analog für $g'(x_0)(h)$. Somit kann man $R(h)$ abschätzen durch

$$\begin{aligned} |R(h)| \leq (||f'(x_0)||_{\mathfrak{L}(X,\mathbb{K})} + \frac{|r_f(h)|}{||h||_X})(||g'(x_0)||_{\mathfrak{L}(X,\mathbb{K})} + \frac{|r_g(h)|}{||h||_X})||h||_X^2 \\ + |f(x_0)|\,|r_g(h)| + |g(x_0)|\,|r_f(h)|, \end{aligned}$$

was $\lim_{h\to 0}\frac{R(h)}{||h||_X}=0$ zur Folge hat. Mit der Beobachtung $g(x_0)f'(x_0)+f(x_0)g'(x_0)\in\mathcal{L}(X,\mathbb{K})$ ist die Produktregel bewiesen. Für den Nachweis der Reziprokregel betrachten wir

$$\begin{aligned}(\frac{1}{f})(x_0+h)-(\frac{1}{f})(x_0)&=-\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{f(x_0+h)f(x_0)}\\&=-\frac{1}{f(x_0+h)f(x_0)}(f'(x_0)(h)+r_f(h))\\&=-\frac{1}{f(x_0)^2}f'(x_0)(h)+R(h)\end{aligned}$$

mit

$$R(h)=(\frac{1}{f(x_0)}-\frac{1}{f(x_0+h)})\frac{1}{f(x_0)}(f'(x_0)(h)+r_f(h)).$$

Aus der Abschätzung

$$|R(h)|\le|\frac{1}{f(x_0)}-\frac{1}{f(x_0+h)}|\,|\frac{1}{f(x_0)}|(||f'(x_0)||_{\mathcal{L}(X,\mathbb{K})}||h||_X+|r_f(h)|)$$

und der Stetigkeit von f in x_0 folgt

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{||h||}R(h)=0.$$

Somit ist die Reziprokregel gezeigt. Die Quotientenregel ergibt sich nun durch Kombination der Produkt- und der Reziprokregel. □

Als Folgerung aus der Quotientenregel notieren wir die Differenzierbarkeit der rationalen Funktionen.
Besonders vielfältige Anwendungen findet die Regel für die Ableitung der Verkettung differenzierbarer Funktionen.

Satz 2.3 (Kettenregel). *Es seien X, Y, Z normierte Räume, $f\colon U\to Y$, $U\subset X$ offen, $g\colon V\to Z$, $V\subset Y$ offen und $f(U)\subset V$. Sind f in $x_0\in U$ und g in $f(x_0)\in V$ differenzierbar, dann ist $g\circ f$ in x_0 differenzierbar und es gilt*

$$(g\circ f)'=g'(f(x_0))\circ f'(x_0).$$

Beweis. Wir greifen wieder auf die lokalen Darstellungen

$$\begin{aligned}f(x_0+h)&=f(x_0)+f'(x_0)(h)+r_f(h),\\g(f(x_0)+k)&=g(f(x_0))+g'(f(x_0))(k)+r_g(k)\end{aligned}$$

zurück, welche in $K_X(x_0,\delta)$ beziehungsweise in $K_Y(f(x_0),\delta)$ mit einem geeigneten $\delta>0$ gelten. Die Komposition von g nach f läßt sich dann schreiben in der Form

$$(g\circ f)(x_0+h)=g(f(x_0+h))=g(f(x_0)+f'(x_0)(h)+r_f(h)).$$

Für h hinreichend klein liegt $k = f'(x_0)(h) + r_f(h)$ in $K_Y(0,\delta)$ und somit gilt

$$\begin{aligned}(g\circ f)(x_0+h) &= (g\circ f)(x_0) + g'(f(x_0))\big(f'(x_0)(h)+r_f(h)\big) + r_g\big(f'(x_0)(h)+r_f(h)\big)\\ &= (g\circ f)(x_0) + \big(g'(f(x_0))\circ f'(x_0)\big)(h) + R(h)\end{aligned}$$

mit

$$R(h) = g'(f(x_0))(r_f(h)) + r_g\big(f'(x_0)(h)+r_f(h)\big).$$

Wegen $g'(f(x_0))\circ f'(x_0) \in \mathfrak{L}(X,Z)$ genügt es $\lim_{h\to 0}\frac{1}{||h||}R(h) = 0$ zu zeigen. Dies folgt aus der Abschätzung

$$\begin{aligned}||R(h)||_Z \le{}& ||g'(f(x_0))||_{\mathfrak{L}(Y,Z)}||r_f(h)||_Y\\ &+ \frac{||r_g(f'(x_0)(h)+r_f(h))||_Z}{||f'(x_0)(h)+r_f(h)||Y}(||f'(x_0)||_{\mathfrak{L}(X,Y)}||h||_X + ||r_f(h)||_Y)\end{aligned}$$

und den Eigenschaften von r_f und r_g. □

Beispiel 2.4. Es sei $f\colon U\to Y$ injektiv und es seien f in x_0 und f^{-1} in $y_0 = f(x_0)$ differenzierbar. Dann ist nach der Kettenregel $f^{-1}\circ f$ in x_0 differenzierbar und es gilt

$$(f^{-1}\circ f)' = (f^{-1})'(f(x_0))\circ f'(x_0).$$

Wegen $f^{-1}\circ f = \mathrm{id}_X$ folgt mit Beispiel 1.2

$$(f^{-1})'(f(x_0))\circ f'(x_0) = \mathrm{id}_X$$

Ist nun $f'(x_0)$ invertierbar, erhält man

$$(f^{-1})'(f(x_0)) = (f'(x_0))^{-1}.$$

Die Schwachstelle dieser Argumentation ist natürlich, daß die Differenzierbarkeit der Umkehrfunktion bereits gesichert sein muß. Dieser Mangel wird im Folgenden behoben.

Satz 2.5. *Es sei $f\colon U\to Y$, $U\subset X$ offen, differenzierbar in $x_0\in U$. Ferner sei f injektiv, $V = f(U)$ offen und die Umkehrabbildung $f^{-1}\colon V\to U$ sei stetig an der Stelle $y_0 = f(x_0)$. Besitzt die Ableitung $f'(x_0)\in\mathfrak{L}(X,Y)$ eine stetige Inverse, dann ist auch f^{-1} an der Stelle y_0 differenzierbar und es gilt*

$$(f^{-1})'(f(x_0)) = \big(f'(x_0)\big)^{-1}.$$

Beweis. O.B.d.A. können wir $x_0 = 0$ und $y_0 = f(x_0) = 0$ annehmen (ersetze $x\to f(x)$ durch die Abbildung $x\to f(x_0+x) - f(x_0)$. Man überzeuge sich davon, daß auch diese Abbildung die Voraussetzungen des Satzes erfüllt). Da V offen ist, gilt $K_Y(y_0,\delta)\subset V$ für $\delta > 0$ hinreichend klein. Wegen der Differenzierbarkeit von f in 0 gilt

$$f(x) = f'(0)(x) + r_f(x) \tag{$*$}$$

für alle $x \in K_X(0, \delta_X)$. Da f^{-1} in 0 stetig ist und V offen ist, gibt es eine Kugel $K_Y(0, \delta_Y) \subset V$ so, daß $f^{-1}(y) \in K_X(0, \delta_X)$ für alle $y \in K_Y(0, \delta_Y)$ zutrifft. Somit gilt die Entwicklung $(*)$ für alle $x = f^{-1}(y)$ mit $y \in K_Y(0, \delta_Y)$ und daher auch

$$y = f'(0)(f^{-1}(y)) + r_f(f^{-1}(y)),$$

für alle $y \in K_Y(0, \delta_Y)$. Nach Voraussetzung besitzt $f'(0)$ eine stetige Inverse, somit folgt

$$\begin{aligned} f^{-1}(y) &= f'(0)^{-1}(y) - f'(0)^{-1}\big(r_f(f^{-1}(y))\big) \\ &= f'(0)^{-1}(y) + R(y) \end{aligned} \tag{16}$$

mit

$$R(y) = -f'(0)^{-1}\big(r_f(f^{-1}(y))\big).$$

Wegen $f'(0)^{-1} \in \mathfrak{L}(Y, X)$ genügt es $\lim_{y \to 0} \frac{1}{||y||} R(y) = 0$ zu zeigen. In der Abschätzung

$$\frac{||R(y)||}{||y||} \le ||f'(0)^{-1}|| \cdot \frac{||r_f(f^{-1}(y))||}{||f^{-1}(y)||} \cdot \frac{||f^{-1}(y)||}{||y||}$$

bemerken wir, daß wegen $f^{-1}(0) = 0$ aus der Injektivität von f auch $f^{-1}(y) \neq 0$ für $y \neq 0$ folgt. Wegen der Stetigkeit von f^{-1} in $y_0 = 0$ folgt weiters $\lim_{y \to 0} f^{-1}(y) = 0$ und somit

$$\lim_{y \to 0} \frac{||r_f(f^{-1}(y))||}{||f^{-1}(y)||} = 0. \tag{17}$$

Es genügt daher zu zeigen, daß $\frac{||f^{-1}(y)||}{||y||}$ beschränkt ist. Dazu schätzen wir das Wachstum von $||f^{-1}(y)||$ mit Hilfe von (16) folgendermaßen ab

$$||f^{-1}(y)|| \le ||f'(0)^{-1}|| \, ||y|| + ||f'(0)^{-1}|| \frac{||r_f(f^{-1}(y))||}{||f^{-1}(y)||} \, ||f^{-1}(y)||$$

Für y hinreichend klein erhält man schließlich mit (17)

$$||f^{-1}(y)|| \le \frac{||f'(0)^{-1}||}{1 - ||f'(0)^{-1}|| \frac{||r_f(f^{-1}(y))||}{||f^{-1}(y)||}} \, ||y|| \le 2||f'(0)^{-1}|| \, ||y||.$$

$\square$

Bemerkung 2.6. 1.) Ist f ein Homöomorphismus von U auf V, dann ist V automatisch offen, da ein Homöomorphismus offene Mengen auf offene Mengen abbildet.
2.) Im Allgemeinen muß die Existenz *und* Stetigkeit der Inversen von $f'(x_0)$ gefordert werden. Sind X und Y jedoch endlich dimensionale Räume, ist $f'(x_0)^{-1}$ nach Satz 7.4 stetig (falls die Inverse existiert).
3.) Die Umkehrfunktion einer streng monotonen Funktion $f\colon I \to \mathbb{R}$, $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, ist automatisch stetig. Ein vergleichbares Resultat existiert für Funktionen in mehreren Veränderlichen nicht. Für reelle Funktionen können daher die Voraussetzungen in Satz 2.5 erheblich abgeschwächt werden:

Satz 2.7. *Es sei I ein Intervall und $f\colon I \to \mathbb{R}$ streng monoton. Ist f in $x_0 \in I$ differenzierbar mit $f'(x_0) \neq 0$, dann ist f^{-1} in $y_0 = f(x_0)$ differenzierbar und es gilt*

$$(f^{-1})'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Beweis. Die einfachen Modifikationen des Beweises von Satz 2.5 seien dem Leser überlassen. □

3. Ableitung der elementaren Funktionen

Potenzfunktion: $p_n(z) = z^n$, $n \in \mathbb{N}$. Wir haben die Differenzierbarkeit von p_n zwar bereits in Beispiel 1.11 untersucht, können nun aber einen einfacheren Beweis führen, der nur die Differenzierbarkeit von p_1 verwendet. Es sei $z \in \mathbb{C}$ beliebig gewählt. Wir behaupten: $p_n'(z) = nz^{n-1}$, $n \in \mathbb{N}$, (wir vereinbaren hier, $0^0 = 1$ zu setzen) und führen einen Induktionsbeweis. Es gilt $p_1'(z) = 1$. Als Induktionsvoraussetzung verwenden wir: p_n ist differenzierbar in z und $p_n'(z) = nz^{n-1}$. Wegen $p_{n+1} = p_n p_1$ ist dann nach Satz 2.2 auch p_{n+1} an der Stelle z differenzierbar und es gilt:

$$\begin{aligned} p_{n+1}'(x_0) &= p_n'(z)p_1(z) + p_n(z)p_1'(z) \\ &= nz^{n-1}z + z^n = (n+1)z^n. \end{aligned}$$

Aus der Reziprokregel folgt nun für $z \neq 0$:

$$\frac{d}{dz}(\frac{1}{p_n})(z) = -\frac{p_n'(z)}{(p_n(z))^2} = -\frac{nz^{n-1}}{z^{2n}} = -nz^{-n-1}.$$

Zusammenfassend gilt

$$\frac{dz^n}{dz} = nz^{n-1}, \qquad \begin{cases} z \in \mathbb{C}, & n \in \mathbb{N}, \\ z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, & n \in -\mathbb{N}. \end{cases}$$

Wurzelfunktion: $w_n(x) = \sqrt[n]{x}$, $x \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$. Wir können die Regel Satz 2.7 für die Differentiation der Umkehrfunktion verwenden: diese garantiert einerseits die Differenzierbarkeit von w_n für alle $x > 0$, andererseits gilt

$$\begin{aligned} w_n'(x) &= \frac{1}{p_n'(w_n(x))} = \frac{1}{n(w_n(x))^{n-1}} \\ &= \frac{1}{n}\frac{1}{x^{\frac{n-1}{n}}} = \frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}. \end{aligned}$$

Für $n > 1$ sind die Wurzelfunktionen in $x = 0$ nicht differenzierbar. Wäre nämlich w_n in $x = 0$ differenzierbar, müßte nach der Kettenregel $w_n'(0)p_n'(0) = 1$ gelten. Dies ist nicht möglich, da $p_n'(0) = 0$ für $n > 1$ gilt.

Exponentialfunktion: $\exp(\alpha z)$, $z \in \mathbb{C}$. Es wurde bereits in Beispiel 1.11 die Differenzierbarkeit und die Gültigkeit von

$$\frac{de^{\alpha z}}{dz} = \alpha e^{\alpha z} \tag{18}$$

für alle $z \in \mathbb{C}$ nachgewiesen.

Logarithmus: $x \mapsto \ln x$, $x > 0$. Die Differenzierbarkeit des Logarithmus folgt wieder aus Satz 2.7. Weiters gilt

$$\frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{\left(\frac{d}{dx} e^x\right)\big|_{x=\ln x}} = \frac{1}{e^{\ln x}} = \frac{1}{x}.$$

Oben wurde die Schreibweise: $f'(z)|_{z=z_0} := f'(z_0)$ verwendet. Der Übersichtlichkeit halber werden wir im Folgenden von dieser Notation nur sparsam Gebrauch machen.

Trigonometrische Funktionen: Die Ableitung der trigonometrischen Funktionen an einer Stelle $z \in \mathbb{C}$ ergeben sich aus der Ableitung der Exponentialfunktion: Wegen Satz V-10.7 gilt die Darstellung

$$\sin z = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz}), \qquad \cos z = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz})$$

Die Differenzierbarkeit von sin und cos folgt nun aus Satz 2.1 und mit (18) erhalten wir

$$\frac{d}{dz} \sin z = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}) = \cos z,$$

und auf analoge Weise

$$\frac{d}{dz} \cos z = -\sin z.$$

Die Ableitung des Tangens und Kotangens ergeben sich aus der Quotientenregel

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} \tan z = \frac{d}{dz} \frac{\sin z}{\cos z} &= \frac{(\frac{d}{dz} \sin z) \cos z - \sin z \frac{d}{dx} \cos z}{\cos^2 z} \\ &= \frac{\sin^2 z + \cos^2 z}{\cos^2 z} = \frac{1}{\cos^2 z}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{(2k+1)\frac{\pi}{2} \colon k \in \mathbb{Z}\}, \end{aligned}$$

analog

$$\frac{d}{dz} \cot z = -\frac{1}{\sin^2 z}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{k\pi \colon k \in \mathbb{Z}\}.$$

Arcus Funktionen: Die Differenzierbarkeit der Arcusfunktionen als Umkehrfunktionen der (Einschränkungen von) trigonometrischen Funktionen folgt aus Satz 2.7. Weiters erhält man für $x \in (-1, 1)$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \arcsin x &= \frac{1}{\frac{d}{dz} \sin z\big|_{z=\arcsin x}} = \frac{1}{\cos(\arcsin x)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2(\arcsin x)}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}. \end{aligned}$$

Im vorletzten Schritt ist das positive Vorzeichen bei der Wurzel zu wählen, da $\arcsin x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ und somit $\cos(\arcsin x) > 0$ ist.
Auf gleiche Weise folgt

$$\frac{d}{dx} \arccos x = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, \quad x \in (-1, 1).$$

Man beachte, daß Satz 2.7 für $|x| = 1$ nicht anwendbar ist: Es ist nämlich $\frac{d}{dx}\sin x\big|_{x=\arcsin(\pm 1)} = \cos(\pm\frac{\pi}{2}) = 0$. Ähnlich findet man für $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\arctan x &= \frac{1}{\frac{d}{dz}\tan z\big|_{z=\arctan x}} = \cos^2(\arctan x)\\ &= \frac{1}{1+\tan^2(\arctan x)} = \frac{1}{1+x^2},\end{aligned}$$

und

$$\frac{d}{dx}\operatorname{arccot} x = -\frac{1}{1+x^2}.$$

Allgemeine Potenzfunktion: $p_\rho(x) = x^\rho$, $x > 0$, $\rho \neq 0$. Ausgehend von der Identität

$$p_\rho(x) = \exp(\rho \ln x),$$

findet man mit Hilfe der Kettenregel für $x > 0$

$$\begin{aligned}p'_\rho(x) &= \frac{d}{dy}e^y\big|_{y=\rho\ln x}\frac{d}{dx}(\rho\ln x)\\ &= e^{\rho\ln x}\rho\frac{1}{x} = \rho x^{\rho-1}.\end{aligned}$$

Exponentialfunktion zur Basis a: $x \mapsto a^x$. Ausgehend von der Identität

$$a^x = \exp(x\ln a)$$

findet man für $x \in \mathbb{R}$ mit Hilfe der Kettenregel

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}a^x &= \frac{d}{dy}e^y\big|_{y=x\ln a}\frac{d}{dx}(x\ln a)\\ &= (\ln a)e^{x\ln a} = (\ln a)a^x.\end{aligned}$$

Wir fassen die Ergebnisse tabellarisch zusammen:

Funktion $f(x)$		Ableitung $f'(x)$
x^n,	$x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$	nx^{n-1}
x^n,	$x \neq 0, n \in \mathbb{Z}$	nx^{n-1}
x^ρ,	$x > 0, \rho \in \mathbb{R}$	$\rho x^{\rho-1}$
e^x,	$x \in \mathbb{R}$	e^x
a^x,	$x \in \mathbb{R}, a > 0$	$(\ln a)a^x$
$\sin x$,	$x \in \mathbb{R}$,	$\cos x$
$\cos x$,	$x \in \mathbb{R}$,	$-\sin x$
$\tan x$,	$x \in \mathbb{R}$,	$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$
$\cot x$,	$x \in \mathbb{R}$,	$-\frac{1}{\sin^2 x} = -1 - \cot^2 x$
$\arcsin x$,	$x \in (-1, 1)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos x$,	$x \in (-1, 1)$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arctan x$,	$x \in \mathbb{R}$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\operatorname{arccot} x$,	$x \in \mathbb{R}$	$-\frac{1}{1+x^2}$

4. Richtungsableitungen, partielle Ableitungen, Jakobi-Matrizen

Bei der totalen Ableitung einer Funktion an der Stelle x_0 werden die Funktionswerte von f in einer *vollen* Umgebung von x_0 mit $f(x_0)$ verglichen. Wesentlich schwächer ist das Konzept der Richtungsableitung, bei welchem f nur auf einem durch x_0 verlaufenden Geradensegment ausgewertet wird.

DEFINITION 4.1. *Es sei $f\colon U \to Y$, $U \subset X$ offen, $x_0 \in U$ und $h \in X$. Die Funktion f besitzt in x_0 die* ***Richtungsableitung in Richtung (längs)*** **h**, *wenn der Grenzwert*

$$\lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(f(x_0 + th) - f(x_0)) \tag{19}$$

existiert. Übliche Bezeichnungen für die Richtungsableitung von f in x_0 längs h sind $\frac{\partial f}{\partial h}(x_0)$ oder $\partial_h f(x_0)$ oder $f'(x_0; h)$.

Da U offen ist, gibt es $\delta > 0$ so, daß $\{x_0 + th\colon |t| < \delta\} \subset U$. Definiert man die Funktion $\phi_h\colon (-\delta, \delta) \to Y$ durch $\phi_h(t) = f(x_0 + th)$, dann bedeutet die Existenz des Grenzwertes (19) die übliche Differenzierbarkeit von ϕ_h in $t = 0$ und es gilt

$$\phi_h'(0) = \frac{\partial f}{\partial h}(x_0)$$

Ersetzt man in (19) die Richtung h durch λh, $\lambda \in \mathbb{R}$, erhält man

$$f'(x_0; \lambda h) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(f(x_0 + t\lambda h) - f(x_0)) = \lambda \lim_{t\to 0} \frac{1}{\lambda t}(f(x_0 + t\lambda h) - f(x_0)) = \lambda f'(x_0; h),$$

die Richtungsableitung ist somit homogen bezüglich der Richtung h. Aus diesem Grunde wird ein Richtungsvektor oft normiert, d.h. $||h|| = 1$ gesetzt.

Beispiel 4.2. Die Abbildung $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei gegeben durch

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^4} & (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Um die Richtungsableitung von f in $(0,0)$ in Richtung $h = (\xi, \eta)$ zu berechnen, betrachten wir den Differenzenquotienten

$$\begin{aligned} \frac{1}{t}(f(x_0+th) - f(x_0)) &= \frac{1}{t}(f(th) - f(0,0)) \\ &= \frac{1}{t} f(t\xi, t\eta) = \frac{\xi\eta^2}{\xi^2 + t^2\eta^4} \underset{t\to 0}{\longrightarrow} \begin{cases} \frac{\eta^2}{\xi}, & \xi \neq 0, \\ 0, & \xi = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Die Abbildung f besitzt also in $(0,0)$ in jede Richtung h eine Richtungsableitung. Wir erinnern daran, daß f in $(0,0)$ jedoch nicht stetig ist. Somit kann f in $(0,0)$ nicht differenzierbar sein. Dies äußert sich auch darin, daß $h \to f'((0,0); h)$ nicht linear ist.

Satz 4.3. *Ist $f\colon U \to Y$, $U \subset X$ offen, in $x_0 \in U$ differenzierbar, dann ist f in x_0 längs jeder Richtung h differenzierbar und es gilt*

$$\partial_h f(x_0) = f'(x_0)(h).$$

Beweis. Da f in x_0 differenzierbar ist, gilt

$$f(x_0+th) - f(x_0) = tf'(x_0)(h) + r(th),$$

also

$$\frac{1}{t}(f(x_0+th) - f(x_0)) = f'(x_0)(h) + \frac{r(th)}{t||h||}||h||.$$

Die Behauptung folgt nun aus $\lim_{t\to 0} \frac{r(th)}{t||h||} = \lim_{t\to 0} \frac{r(th)}{||th||} \operatorname{sign} t = 0$. $\square$

Das Beispiel 4.2 zeigt, daß die Umkehrung dieses Satzes falsch ist.
Wir betrachten nun den Spezialfall $X = \mathbb{K}^m$ versehen mit der Standardbasis $(e_1, \dots, e_m)$.

Definition 4.4. *Es sei $f\colon U \to Y$, $U \subset \mathbb{K}^m$ offen, $x_0 \in U$ und $h \in \mathbb{K}^m$. Die Richtungsableitung von f in x_0 in Richtung des j-ten Standardbasisvektors e_j heißt* **j**-*te* ***partielle Ableitung*** *1. Ordnung von f in x_0. Anstelle von $\frac{\partial f}{\partial e_j}(x_0)$ schreibt man $\frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0)$ bzw. $\partial_j f(x_0)$ bzw. $f_{x_j}(x_0)$, $j = 1, \dots, m$.*

Wird $x_0 = (\xi_1^0, \dots, \xi_m^0)$ gesetzt, ist die partielle Ableitung nach der j-ten Koordinate an der Stelle x_0 durch den Grenzwert des Differenzenquotienten bestimmt

$$\begin{aligned} \frac{1}{t}(f(x_0+te_j) - f(x_0)) = \frac{1}{t}(&f(\xi_1^0, \dots, \xi_{j-1}^0, \xi_j^0 + t, \xi_{j+1}^0, \dots, \xi_m^0) \\ &- f(\xi_1^0, \dots, \xi_i^0, \dots, \xi_m^0)). \end{aligned}$$

Dies zeigt, daß man die partielle Ableitung nach der j-ten Koordinate an der Stelle x_0 erhält, indem man alle Veränderlichen mit Ausnahme von ξ_j als Konstante betrachtet und die nunmehr nur noch von ξ_j abhängige Funktion in gewohnter Weise differenziert.

Ist f an jeder Stelle $x \in U$ partiell nach ξ_j differenzierbar, sagt man, f sei auf U partiell nach ξ_j differenzierbar und nennt die Abbildung

$$\frac{\partial f}{\partial \xi_j} \colon \begin{cases} U \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{\partial f}{\partial \xi_j}(x) \end{cases}$$

die partielle Ableitung von f nach ξ_j auf U.
Die Funktion $f \colon U \to \mathbb{K}^n$, $U \subset \mathbb{K}^m$ offen, $f = (f_1, \ldots, f_n)$ sei differenzierbar in $x_0 \in U$. Sowohl in $\mathbb{K}^n$, als auch in $\mathbb{K}^m$ sei die Standardbasis zugrundegelegt. Dann wird die Ableitung $f'(x_0)$ durch eine $n \times m$- Matrix dargestellt, in deren j-ten Spalte der Vektor

$$f'(x_0)(e_j) = \begin{pmatrix} f_1'(x_0)(e_j) \\ \vdots \\ f_n'(x_0)(e_j) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial \xi_j}(x_0) \\ \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial \xi_j}(x_0). \end{pmatrix}$$

steht. Die Matrixdarstellung von $f'(x_0)$ bezüglich der Standardbasen in $\mathbb{K}^m$ und $\mathbb{K}^n$ ist daher durch die **Jacobimatrix** (**Funktionalmatrix**) gegeben:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial \xi_1}(x_0) & \ldots & \frac{\partial f_1}{\partial \xi_m}(x_0) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial \xi_1}(x_0) & \ldots & \frac{\partial f_n}{\partial \xi_m}(x_0) \end{pmatrix}. \tag{20}$$

Da wir in $\mathbb{K}^m$ und $\mathbb{K}^n$ stets die Standardbasen verwenden, werden wir $f'(x_0)$ und die zugehörige Jacobimatrix identifizieren und daher gleich bezeichnen. Wir schreiben $f'(x_0)h$ anstelle von $f'(x_0)(h)$, wenn wir $f'(x_0)$ als Matrix auffassen.

Als Kandidat für $f'(x_0)$ kommt also nur die Jacobimatrix in Frage. Man kann daher beim Nachweis der Differenzierbarkeit einer Funktion $f \colon U \to \mathbb{K}^n$ die gesuchte lineare Abbildung durch die Jacobimatrix ersetzen. Die Differenzierbarkeit von f in x_0 ist daher gleichwertig mit

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{||h||}(f_k(x_0 + h) - f_k(x_0) - \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f_k}{\partial \xi_j}(x_0) h_j) \tag{21}$$

$k = 1, \ldots, n$, $h = (h_1, \ldots, h_m)$. Beispiel 4.2 zeigt jedoch, daß die Existenz der partiellen Ableitungen allein über die Differenzierbarkeit von f nichts aussagt. Noch deutlicher kommt dies in folgendem Beispiel zum Ausdruck.

Beispiel 4.5. Es sei $f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(t, 0) = f(0, t) = 1$, $t \in \mathbb{R}$ und sonst vollkommen beliebig. Dann existieren die partiellen Ableitungen 1. Ordnung in $(0, 0)$ und es ist $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$. Sonst kann über f keine weitere Aussage gemacht werden.

Es sei $f\colon U \to \mathbb{R}$, $U \subset \mathbb{R}^m$ offen, differenzierbar in $x_0 \in U$. In Bezug auf die Standardbasis im $\mathbb{R}^m$ ist die Jacobimatrix von f gegeben durch die $1 \times m$-Matrix

$$(\frac{\partial f}{\partial \xi_1}(x_0), \dots, \frac{\partial f}{\partial \xi_m}(x_0)).$$

Somit gilt für $h = (\sigma_1, \dots, \sigma_m)$

$$f'(x_0)(h) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial \xi_j}(x_0)\sigma_i.$$

Oft ist es zweckmäßig, die partiellen Ableitungen erster Ordnung von f zu einem Vektor zusammenzufassen:

Definition 4.6. *$f\colon U \to \mathbb{R}$, $U \subset \mathbb{R}^m$ offen, besitze in x_0 sämtliche partielle Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial \xi_i}$, $i = 1, \dots, m$. Der Spaltenvektor*

$$\operatorname{grad} f(x_0) := \left(\frac{\partial f}{\partial \xi_1}(x_0), \dots, \frac{\partial f}{\partial \xi_m}(x_0)\right)^T \in \mathbb{R}^m$$

*heißt **Gradient** von f an der Stelle x_0. Ebenfalls gebräuchlich ist die Schreibweise: $\nabla f(x_0)$, eine veraltete Bezeichung ist „Nabla“.*

Wegen Satz 4.3 kann man daher die Richtungsableitung von f in x_0 längs einer Richtung h mit Hilfe des Gradienten als inneres Produkt schreiben

$$(*) \qquad \partial_h f(x_0) = \langle \operatorname{grad} f(x_0), h \rangle.$$

Aus der Ungleichung von Cauchy-Schwarz folgt dann

$$|\partial_h f(x_0)| \le ||\operatorname{grad} f(x_0)||_2 ||h||_2 = ||\operatorname{grad} f(x_0)||_2.$$

Die Änderungsrate von f in x_0 entlang jeder Richtung h ist somit durch die (euklidische) Norm des Gradienten von f in x_0 begrenzt. Diese Schranke ist sogar scharf: dies ist trivial für $\operatorname{grad} f(x_0) = 0$, im Falle $\operatorname{grad} f(x_0) \neq 0$ setzen wir in $(*)$ die Richtung $h^* = \frac{\operatorname{grad} f(x_0)}{||\operatorname{grad} f(x_0)||}$ ein und erhalten

$$\partial_{h^*} f(x_0) = ||\operatorname{grad} f(x_0)||.$$

Lemma 4.7. *Es sei $f\colon U \to \mathbb{R}$, $U \subset \mathbb{R}^m$ offen, differenzierbar in $x_0 \in U$. Dann gibt der Gradient von f in x_0 die Richtung des stärksten Anstieges der Funktionswerte von f an.*

Analog folgt, daß $-\operatorname{grad} f(x_0)$ in die Richtung des stärksten Gefälles der Funktionswerte weist.

Wir kehren noch einmal zur Kettenregel zurück und betrachten die Situation $f\colon U \to \mathbb{K}^p$, $U \subset \mathbb{K}^m$ offen, $g\colon V \to \mathbb{K}^n$, $V \subset \mathbb{K}^p$ offen, $f(U) \subset V$, f sei in $x_0 \in U$ und g in $f(x_0) \in V$ differenzierbar. Nach der Kettenregel ist $h = g \circ f\colon U \to \mathbb{K}^n$ in x_0 differenzierbar und es gilt

$$(22) \qquad h'(x_0) = (g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \circ f'(x_0).$$

Der Verknüpfung der linearen Abbildungen auf der rechten Seite entspricht das Produkt der jeweiligen Jacobimatrizen. Konkret bedeutet (22) in diesem Fall also
(23)

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial \xi_1}(x_0) & \dots & \frac{\partial h_1}{\partial \xi_m}(x_0) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial h_n}{\partial \xi_1}(x_0) & \dots & \frac{\partial h_n}{\partial \xi_m}(x_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial \eta_1}(f(x_0)) & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial \eta_p}(f(x_0)) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial g_n}{\partial \eta_1}(f(x_0)) & \dots & \frac{\partial g_n}{\partial \eta_p}(f(x_0)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial \xi_1}(x_0) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial \xi_m}(x_0) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial \xi_1}(x_0) & \dots & \frac{\partial f_p}{\partial \xi_m}(x_0) \end{pmatrix}$$

Wir diskutieren nun zwei häufige Anwendungen der Kettenregel. Zuerst diskutieren wir die Ableitung einer Funktion g entlang einer differenzierbaren Kurve γ.

Korollar 4.8. Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, $\gamma\colon I \to \mathbb{R}^p$ differenzierbar auf I, $g\colon V \to \mathbb{R}$, $\gamma(I) \subset V \subset \mathbb{R}^p$, V offen, differenzierbar auf V. Dann ist die reelle Funktion $\Phi := g \circ \gamma\colon I \to \mathbb{R}$ auf I differenzierbar und es gilt für alle $t \in I$

$$\begin{aligned} \Phi'(t) = g'(\gamma(t)) \circ \gamma'(t) &= \sum_{j=1}^{p} \frac{\partial g}{\partial \xi_j}(\gamma(t)) \, \frac{d\gamma_j}{dt}(t) \\ &= \langle \operatorname{grad} g(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle \end{aligned}$$

mit $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \dots, \gamma_p(t))$.

Beweis. Satz 2.3. □

Beispiel 4.9. Wir betrachten die Abbildungen

$$\gamma\colon \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \\ t \mapsto (t^2+1, t) \end{cases} \qquad g\colon \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (\xi, \eta) \mapsto \xi - \eta^2. \end{cases}$$

Man überzeuge sich davon, daß $\Phi = g \circ \gamma$ durch

$$\Phi(t) \equiv 1, \quad t \in \mathbb{R},$$

gegeben ist. Also gilt $\Phi'(t) = 0$, $t \in \mathbb{R}$. Für die Anwendung der Kettenregel benötigen wir

$$\gamma'(t) = \begin{pmatrix} 2t \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 1}, \quad g'(\xi, \eta) = (1 \quad -2\eta) \in \mathbb{R}^{1\times 2}.$$

Nach der Kettenregel gilt

$$\Phi'(t) = g'(\gamma(t)) \circ \gamma'(t) = (1 \quad -2t) \begin{pmatrix} 2t \\ 1 \end{pmatrix} = 0.$$

Korollar 4.10. Es sei $f\colon U \to \mathbb{R}^p$, $U \subset \mathbb{R}^m$ offen, differenzierbar auf U und $g\colon V \to \mathbb{R}$, $V \subset \mathbb{R}^p$ offen, differenzierbar auf V und $f(U) \subset V$. Dann ist die reellwertige

Abbildung $h := g \circ f\colon U \to \mathbb{R}$ differenzierbar auf U und es gilt für alle $x \in U$

$$\begin{aligned} h'(x) &= g'(f(x)) \circ f'(x) \\ &= \left(\frac{\partial g}{\partial \eta_1}(f(x)) \dots \frac{\partial g}{\partial \eta_p}(f(x))\right) \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial \xi_1}(x) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial \xi_m}(x) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial \xi_1}(x) & \dots & \frac{\partial f_p}{\partial \xi_m}(x) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Insbesondere gilt

$$(*) \qquad \frac{\partial h}{\partial \xi_i}(x) = \sum_{j=1}^{p} \frac{\partial g}{\partial \eta_j}(f(x)) \frac{\partial f_j}{\partial \xi_i}(x), \quad i = 1, \dots, m.$$

Beweis.

$$\frac{\partial h}{\partial \xi_i}(x) = (h'(x))(e_i) = (g'(f(x)))(f'(x)e_i).$$

□

Der typische Anwendungsbereich dieses Korollars umfaßt Koordinatentransformationen bei reellwertigen Funktionen mehrerer Veränderlicher:

Beispiel 4.11. Es sei $g\colon V \to \mathbb{R}$, $V \subset \mathbb{R}^p$. Oft ist es zweckmäßig, anstelle der cartesischen Koordinaten $(\eta_1, \dots, \eta_p)$ eines Punktes $x \in \mathbb{R}^p$ andere, problemangepaßte Koordinaten $(\xi_1, \dots, \xi_p)$ zu verwenden. Der Zusammenhang zwischen $(\eta_1, \dots, \eta_p)$ und $(\xi_1, \dots, \xi_p)$ wird durch eine zumindest injektive Abbildung $f\colon U \to \mathbb{R}^p$, $U \subset \mathbb{R}^p$, $f(\xi_1, \dots, \xi_p) = (\eta_1(\xi_1, \dots, \xi_p), \dots, \eta_p(\xi_1, \dots, \xi_p))$, beschrieben. In den neuen Variablen $(\xi_1, \dots, \xi_p)$ wird die Abbildung g dann dargestellt durch $h = g \circ f$. Unter den Voraussetzungen von Korollar 4.10 gilt die Ableitungsregel $(*)$,welche häufig in folgender einprägsamen Form geschrieben wird

$$(\dagger) \qquad \frac{\partial h}{\partial \xi_i}(x) = \sum_{j=1}^{p} \frac{\partial g}{\partial \eta_j}(f(x)) \frac{\partial \eta_j}{\partial \xi_i}(x), \quad i = 1, \dots, m,$$

in der die generische unabhängige Variable von g und die Komponentenfunktionen von f gleich bezeichnet werden.

Zur Illustration betrachten wir die Abbildung $g(\eta_1, \eta_2) = \eta_1^2 + \eta_2^2$ in ebenen Polarkoordinaten $(r, \theta) \in (0, \infty) \times (-\pi, \pi]$,

$$\begin{aligned} \eta_1 &= r \cos\theta, \\ \eta_2 &= r \sin\theta, \end{aligned}$$

vgl. Beispiel 3.28. Der Übergang zu Polarkoordinaten wird beschrieben durch die Abbildung $((\xi_1, \xi_2) \sim (r, \theta))$

$$f\colon \begin{cases} (0, \infty) \times (-\pi, \pi] \to \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}, \\ (r, \theta) \mapsto (\eta_1, \eta_2) = (r\cos\theta, r\sin\theta) \end{cases}$$

und $h(r,\theta) = (g \circ f)(r,\theta) = r^2$. Somit gilt $\frac{\partial h}{\partial r}(r,\theta) = 2r$, $\frac{\partial h}{\partial \theta}(r,\theta) = 0$. Zu demselben Ergebnis gelangen wir auch, wenn wir die Kettenregel in der Form $(*)$ anwenden. Dazu berücksichtigen wir, daß die Abbildung f auf der offenen Menge $(0,\infty) \times (-\pi,\pi)$ differenzierbar ist, und berechnen zuerst die benötigten partiellen Ableitungen für $(r,\theta) \in (0,\infty) \times (-\pi,\pi)$

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial g}{\partial \eta_1}(\eta_1,\eta_2) = 2\eta_1, &&\frac{\partial \eta_1}{\partial r}(r,\theta) = \cos\theta, &&\frac{\partial \eta_1}{\partial \theta}(r,\theta) = -r\sin\theta,\\
&\frac{\partial g}{\partial \eta_2}(\eta_1,\eta_2) = 2\eta_2, &&\frac{\partial \eta_1}{\partial r}(r,\theta) = \sin\theta, &&\frac{\partial \eta_2}{\partial \theta}(r,\theta) = r\cos\theta.
\end{aligned}$$

Aus (†) folgt dann

$$\begin{aligned}
\frac{\partial h}{\partial r}(r,\theta) &= \frac{\partial g}{\partial \eta_1}(r\cos\theta, r\sin\theta)\frac{\partial \eta_1}{\partial r}(r,\theta) + \frac{\partial g}{\partial \eta_2}(r\cos\theta, r\sin\theta)\frac{\partial \eta_2}{\partial r}(r,\theta)\\
&= 2r\cos\theta \cdot \cos\theta + 2r\sin\theta \cdot \sin\theta = 2r
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial h}{\partial \theta}(r,\theta) &= \frac{\partial g}{\partial \eta_1}(r\cos\theta, r\sin\theta)\frac{\partial \eta_1}{\partial \theta}(r,\theta) + \frac{\partial g}{\partial \eta_2}(r\cos\theta, r\sin\theta)\frac{\partial \eta_2}{\partial \theta}(r,\theta)\\
&= 2r\cos\theta(-r\sin\theta) + 2r\sin\theta(r\cos\theta) = 0.
\end{aligned}$$

Dieselbe Rechnung wird übersichtlicher in der Matrixschreibweise der Kettenregel dargestellt:

$$\begin{aligned}
h'(r,\theta) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial h}{\partial r}(r,\theta) & \frac{\partial h}{\partial \theta}(r,\theta) \end{pmatrix} = g'(r\cos\theta, r\sin\theta) \circ f'(r,\theta)\\
&= (2r\cos\theta \quad 2r\sin\theta)\begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta\\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix} = (2r \quad 0).
\end{aligned}$$

Wir bemerken, daß in Korollar 4.10 die Existenz der partiellen Ableitungen von h und die Darstellung der partiellen Ableitungen bereits unter der schwächeren Voraussetzung bewiesen werden kann, daß die Komponenten von f lediglich alle partiellen Ableitungen auf U besitzen.

5. Differenzierbarkeit komplexer Funktionen

Wir gehen nun etwas näher auf die Differenzierbarkeit komplexer Funktionen $f\colon U \to \mathbb{C}$, $U \subset \mathbb{C}$ offen, ein. Nach Definition 1.1 ist f differenzierbar, wenn es eine (stetige) lineare Abbildung $T \in \mathcal{L}(\mathbb{C},\mathbb{C})$ und eine Funktion $r\colon K(0,\delta) \to \mathbb{C}$ gibt, sodaß

$$(*) \qquad \begin{aligned}
&f(z_0 + h) = f(z_0) + T(h) + r(h), \qquad h \in K(0,\delta),\\
&\lim_{h\to 0} \frac{r(h)}{h} = 0
\end{aligned}$$

gilt. Jede lineare Abbildung $T\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ kann dargestellt werden als komplexe Multiplikation mit $a = T(1)$, d.h.

$$T(z) = az.$$

Da $\mathbb{C}$ isomorph zu $\mathbb{R}^2$ ist, kann man f auch als Abbildung $F\colon V \to \mathbb{R}^2$ auffassen, wobei V ist bestrimmt ist durch die Forderung

$$(x, y) \in V \Leftrightarrow z = x + iy \in U.$$

F heißt reelle Interpretation von f und ist definiert durch

$$F(x, y) = (u(x, y), v(x, y)), \qquad (x, y) \in V$$

genau dann, wenn $z = x + iy \in U$ und

$$f(z) = u(z) + iv(z)$$

gilt (etwas unpräzise unterscheiden wir dabei in der Notation nicht zwischen $u(x, y)$ und $u(x + iy)$ und analog für v). Ist $a = \alpha + i\beta$ und $z = x + iy$ dann ist die reelle Interpretation von $z \to az = \alpha x - \beta y + i(\beta x + \alpha y))$ gegeben durch

$$(x, y) \to \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Man kann daher die Differenzierbarkeitsbedingung $(*)$ übersetzen in eine Bedingung an die reelle Interpretation F von f. Mit $h = \sigma_1 + i\sigma_2$ und $r(h) = r_1(h) + ir_2(h)$ ergibt sich

$$(\dagger) \quad \begin{gathered} F(x_0 + \sigma_1, y_0 + \sigma_2) = F(x_0, y_0) + \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} r_1(\sigma_1, \sigma_2) \\ r_2(\sigma_1, \sigma_2) \end{pmatrix} \\ \lim_{||(\sigma_1,\sigma_2)||_2 \to 0} \frac{r_1(\sigma_1, \sigma_2)}{||(\sigma_1, \sigma_2)||_2} = 0, \quad \text{und} \quad \lim_{||(\sigma_1,\sigma_2)||_2 \to 0} \frac{r_2(\sigma_1, \sigma_2)}{||(\sigma_1, \sigma_2)||_2} = 0 \end{gathered}$$

(man beachte $|h| = ||(\sigma_1, \sigma_2)||_2$). Somit ist $F\colon V \to \mathbb{R}^2$ Frechet-differenzierbar und es gilt

$$F'(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}.$$

Andererseits ist $F'(x_0, y_0)$ auch gegeben durch die Jacobimatrix von F, d.h.

$$F'(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} u_x(x_0, y_0) & u_y(x_0, y_0) \\ v_x(x_0, y_0) & v_y(x_0, y_0) \end{pmatrix}.$$

Wegen der Eindeutigkeit der Ableitung muß

$$(\ddagger) \quad \begin{aligned} u_x(x_0, y_0) &= v_y(x_0, y_0) \\ u_y(x_0, y_0) &= -v_x(x_0, y_0) \end{aligned}$$

gelten.
Ist umgekehrt $F\colon V \to \mathbb{R}^2$, $V \subset \mathbb{R}^2$ offen, differenzierbar in $(x_0, y_0) \in V$ und gelten die beiden Gleichungen $(\ddagger)$, dann kann man

$$F'(x_0, y_0)(h) = \begin{pmatrix} u_x(x_0, y_0) & -v_x(x_0, y_0) \\ v_x(x_0, y_0) & u_x(x_0, y_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{pmatrix}$$

interpretieren als $(u_x(x_0, y_0) + iv_x(x_0, y_0))(\sigma_1 + i\sigma_2)$ und (†) führt auf die Differenzierbarkeitsbedingung $(*)$ für die komplexe Funktion $z \to f(z) = u(z) + iv(z)$. Somit gilt

Satz 5.1. *Die komplexe Funktion $f\colon U \to \mathbb{C}$, $f(z) = u(z) + iv(z)$ ist in $z_0 = x_0 + iy_0$ genau dann differenzierbar, wenn ihre reelle Interpretation $F\colon V \to \mathbb{R}^2$, $F(x, y) = (u(x, y), v(x, y))$, in (x_0, y_0) differenzierbar ist und die* ***Cauchy-Riemannschen Gleichungen***

$$\text{(CR)} \qquad u_x = v_y, \qquad u_y = -v_x$$

in (x_0, y_0) erfüllt sind. Dabei ist $V \subset \mathbb{R}^2$ bestimmt durch die Forderung, $(x, y) \in V \Leftrightarrow x + iy \in U$. Ferner gilt dann

$$f'(z_0) = u_x(x_0, y_0) + iv_x(x_0, y_0),$$
$$|f'(z_0)|^2 = \det F'(x_0, y_0).$$

Beispiel 5.2. Wir untersuchen die Differenzierbarkeit der Abbildung $f(z) = \operatorname{Re} z$, $z \in \mathbb{C}$. Mit $z = x + iy$ ist die reelle Interpretation von f gegeben durch

$$F(x, y) = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Als lineare Abbildung ist F nach Beispiel 1.2 differenzierbar und es gilt

$$F'(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Da die Cauchy-Riemannschen Gleichungen für kein $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ erfüllt sind, ist die Abbildung $z \to \operatorname{Re} z$ nirgendwo (komplex) differenzierbar. Es ist überraschend, daß es im Komplexen so leicht ist, eine Funktion zu finden, welche an keiner Stelle differenzierbar ist. Dies liegt daran, daß komplexe Differenzierbarkeit eine sehr starke Eigenschaft einer Funktion ist: man kann nämlich zeigen, daß die Differenzierbarkeit von f auf U bereits die Existenz aller höheren Ableitungen von f auf U nach sich zieht, d.h. $C^1(U) = C^\infty(U)$! Im Gegensatz dazu ist es sehr mühsam, eine *reelle* Funktion zu konstruieren, die an keiner Stelle eines (offenen) Intervalles differenzierbar ist.

6. Mittelwertsatz

6.1. Lokale Extrema. Nach dem Satz von Weierstraß (Korollar V-5.3) nimmt eine stetige, reellwertige Funktion f auf einer kompakten Menge K Maximum und Minimum an. Im Fall des Maximums bedeutet dies: $\exists x_0 \in K\, \forall x \in K\colon f(x) \leq f(x_0)$. Dieser Satz bringt eine *globale* Eigenschaft stetiger Funktionen zum Ausdruck, da sämtliche Funktionswerte zum Vergleich zugelassen sind. Er gibt aber keinerlei Hinweis darauf, *wo* ein globales Extremum liegt. Bei differenzierbaren Funktionen ist es jedoch möglich, aus dem *lokalen* Verhalten der Funktion, d.h. dem Verhalten in einer *Umgebung* einer Stelle x_0, auf das Vorliegen eines Extremums (relativ zur Umgebung) in x_0 zu schließen.

Definition 6.1. *Es sei $f\colon D \to \mathbb{R}$, $D \subset X$ und $x_0 \in D$.*

i) *f besitzt in x_0 ein **lokales Maximum** (**Minimum**) $\underset{Def}{\Leftrightarrow}$ es gibt eine Umgebung U von x_0 mit der Eigenschaft*

$$\forall x \in U \cap D\colon f(x) \le f(x_0) \quad (f(x) \ge f(x_0)).$$

ii) *f besitzt in $x_0 \in D$ ein **lokales Extremum** $\underset{Def}{\Leftrightarrow}$ f besitzt in x_0 ein lokales Maximum oder lokales Minimum.*

Wir formulieren vorerst eine **notwendige** Bedingung für das Vorliegen eines lokalen Extremums.

Satz 6.2 (Notwendige Optimalitätsbedingung 1. Ordnung). *Es sei $f\colon U \to \mathbb{R}$, $U \subset X$ offen. Ist f differenzierbar in x_0 und besitzt f in x_0 ein lokales Extremum, dann gilt $f'(x_0) = 0$.*

Beweis. O.B.d.A. besitze f in x_0 ein lokales Maximum (anderenfalls betrachte man $-f$). Nach Definition 6.1 gibt es ein $\delta > 0$ mit $f(x_0 + h) - f(x_0) \ge 0$ für $h \in K(0, \delta)$. Für eine festes $h \in X$ und $t \in (-1, 1)$ erhalten wir aus der Differenzierbarkeit von f in x_0

$$f(x_0 + th) - f(x_0) = tf'(x_0)(h) + r(th) \ge 0.$$

Dividiert man diese Ungleichung durch t und führt anschließend den Grenzübergang $t \to 0$ durch, erhält man $f'(x_0)(h) = 0$. Da h beliebig gewählt war, bedeutet dies $f'(x_0) = 0$. ☐

Bemerkung 6.3. (1) Die notwendige Bedingung für das Auftreten eines lokalen Extremums gilt nur in *inneren* Punkten des Definitionsbereiches von f (wir haben dies erzwungen, indem wir als Definitionsbereich eine offene Menge wählten). Der Satz gilt nicht in den Randpunkten von U: Als Beispiel betrachte man $f = \mathrm{id}|_{[0,1]}$. f besitzt ein lokales Minimum in $x = 0$ und ein lokales Maximum in $x = 1$, aber es ist $f'(0) = f'(1) = 1$.
(2) Die Bedingung $f'(x_0) = 0$ ist nicht hinreichend: Für $f(x) = x^3$, $x \in [-1, 1]$ gilt $f'(0) = 0$, aber f besitzt in $x = 0$ kein lokales Extremum.
(3) Es gibt auch innere lokale Extrema, die durch Satz 6.2 nicht erfaßt werden: $f(x) = |x|$, $x \in [-1, 1]$, besitzt in $x = 0$ ein lokales Minimum und ist an dieser Stelle nicht differenzierbar.
(4) Als Kandidaten für lokale Extremstellen einer Abbildung $f\colon D \to \mathbb{R}$ kommen also in Frage

a) die Randpunkte von D,
b) die Nullstellen von f',
c) jene Stellen, in denen f nicht differenzierbar ist.

Wir wenden uns nun Funktionen in einer Veränderlichen zu. Eine bemerkenswerte Konsequenz aus Satz 6.2 ist die Zwischenwerteigenschaft einer Ableitung. Wir betrachten dafür vorerst genauer die Konsequenzen von $f'(x_0) > 0$.

LEMMA 6.4. *Es sei $f\colon I \to R$, $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, differenzierbar in $x_0 \in I$ und $f'(x_0) > 0$. Dann gibt es eine Umgebung $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ von x_0 mit*

$$f(x) \begin{cases} < f(x_0) & x \in (x_0 - \delta, x_0), \\ > f(x_0) & x \in (x_0, x_0 + \delta). \end{cases}$$

Eine analoge Behauptung gilt für $f'(x_=) < 0$.

BEWEIS. Zu $0 < \varepsilon < f'(x_0)$ existiert nach Definition 1.6 ein $\delta > 0$ so, daß

$$f(x_0) + (f'(x_0) - \varepsilon)(x - x_0) < f(x) < f(x_0) + (f'(x_0) + \varepsilon)(x - x_0), \qquad x \in (x_0, x_0 + \delta) \cap I, \tag{24}$$

$$f(x_0) + (f'(x_0) + \varepsilon)(x - x_0) < f(x) < f(x_0) + (f'(x_0) - \varepsilon)(x - x_0), \qquad x \in (x_0 - \delta, x_0) \cap I, \tag{25}$$

gilt. Die Behauptung ist nun unmittelbar klar. □

Man beachte, daß **nicht** behauptet wird, die Funktion sei monoton auf einer Umgebung von x_0. Dieser Schluß ist i.A. falsch!

SATZ 6.5 (Zwischenwertsatz). *Es sei $f \in C([a, b], \mathbb{R})$ differenzierbar auf $[a, b]$ und $f'(a) \neq f'(b)$. Dann nimmt f' in (a, b) jeden Wert zwischen $f'(a)$ und $f'(b)$ an.*

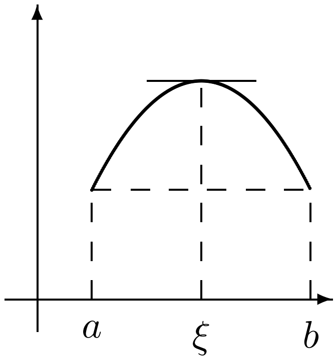
BEWEIS. Es sei o.B.d.A. $f'(a) < \lambda < f'(b)$. Wir setzen $g(x) = f(x) - \lambda x$. Wegen $g'(a) < 0$ und $g'(b) > 0$ gibt es nach Lemma 6.4 Konstante δ_0, $\delta_1 > 0$ so, daß $g(x) < g(a)$ für alle $x \in (a, a + \delta_0)$ und $g(x) < g(b)$ für alle $x \in (b - \delta_1, b)$ gilt. Da g stetig ist, nimmt g auf $[a, b]$ das Minimum an. Die vorausgehende Überlegung zeigt, daß das Minimum nicht in den Randpunkten a und b angenommen werden kann. Nach Satz 6.2 gibt es daher eine Stelle $x_0 \in (a, b)$ mit $g'(x_0) = f'(x_0) - \lambda = 0$. □

Nicht jede Funktion kann daher eine Ableitung sein.

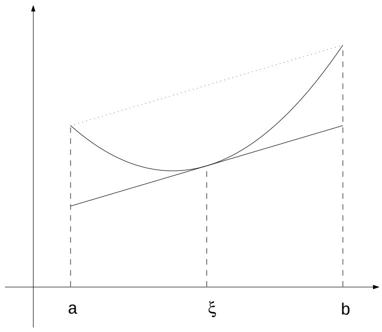
6.2. Mittelwertsatz für reelle Funktionen in einer Veränderlichen. Die nächste Satzgruppe erscheint trivial, trotzdem gehören diese Sätze zu den nützlichsten Hilfsmitteln der Analysis:

SATZ 6.6 (Satz von Rolle). *Es sei $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig auf $[a, b]$, und f sei differenzierbar auf (a, b). Ist $f(a) = f(b)$, dann gibt es eine Zwischenstelle $\xi \in (a, b)$ mit $f'(\xi) = 0$.*

BEWEIS. Ist f konstant, dann gilt $f'(\xi) = 0$ für alle $\xi \in (a, b)$. Andernfalls nimmt f als stetige Funktion auf $[a, b]$ nach Korollar V-5.3 ein Maximum und Minimum an. Mindestens einer der Extremwerte ist von $f(a) = f(b)$ verschieden. Somit wird ein Extremum an einer Stelle $\xi \in (a, b)$ angenommen. Nach Satz 6.2 ist $f'(\xi) = 0$. □



Satz von Rolle



Mittelwertsatz

Das Beispiel $f(x) = |x|$, $x \in [-1, 1]$, zeigt, daß die Behauptung des Satzes von Rolle nicht zutreffen muß, wenn die Funktion auch nur an einer einzigen Stelle $x \in (a, b)$ nicht differenzierbar ist.

SATZ 6.7 (Mittelwertsatz, Lagrange). *Es sei $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig auf $[a, b]$ und differenzierbar auf (a, b). Dann gibt es eine Zwischenstelle $\xi \in (a, b)$ mit*

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a).$$

BEWEIS. Die Hilfsfunktion $\varphi\colon [a, b] \to \mathbb{R}$

$$\varphi(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

erfüllt die Voraussetzungen des Satzes von Rolle. Es gibt daher eine Zwischenstelle $\xi \in (a, b)$ mit $\varphi'(\xi) = 0$, d.h

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}. \tag{26}$$

□

Die gleichwertige Formulierung (26) des Mittelwertsatzes führt zu folgender geometrischen Interpretation: es gibt im Inneren des Intervalles $[a, b]$ eine Zwischenstelle ξ, sodaß die Tangente an den Graph von f im Punkt $(\xi, f(\xi))$ parallel ist zur Sekante durch die Punkte $(a, f(a))$ und $(b, f(b))$, vgl. Abbildung Mittelwertsatz. Häufig findet man folgende Formulierung des Mittelwertsatzes: Es gibt eine Zahl $\vartheta \in (0, 1)$ mit

$$f(b) = f(a) + f'(a + \vartheta(b - a))(b - a).$$

Wir geben eine erste Anwendung des Mittelwertsatzes:

SATZ 6.8. *Es sei $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig auf $[a, b]$ und differenzierbar auf (a, b). Existiert $\lambda = \lim_{x \to a} f'(x)$, dann ist f in a differenzierbar und es gilt $f'(a) = \lambda$.*

BEWEIS. Nach dem Mittelwertsatz gilt

$$\frac{1}{h}(f(a + h) - f(a)) = f'(a + \vartheta h),$$

für ein $\vartheta \in (0,1)$. Es ist zwar ϑ von h abhängig, es gilt aber $\lim_{h\to 0}(a+\vartheta h) = a$ und somit $\lim_{h\to 0} f'(a+\vartheta h) = \lambda$. $\square$

KOROLLAR 6.9. Es sei $f \in C([a,b],\mathbb{R})$ differenzierbar auf $[a,b]$. Dann kann f' keine Unstetigkeiten 1. Art auf $[a,b]$ haben.

BEISPIEL 6.10. Wir betrachten die Abbildung $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Mit Hilfe der Regeln von Satz 2.2, 2.3 berechnet man leicht

$$f'(x) = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} \qquad \text{für } x \neq 0.$$

Man beachte: $\nexists \lim_{x\to 0} f'(x)$. Existierte $\lim_{x\to 0} f'(x)$, wäre f automatisch in $x_0 = 0$ differenzierbar, vgl. Satz 6.8, und $f \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Für den Nachweis der Differenzierbarkeit von f in $x_0 = 0$ gehen wir daher auf die Definition zurück und betrachten

$$\frac{1}{h}(f(h) - f(0)) = h \sin \frac{1}{h}.$$

Wegen $|\sin x| \leq 1$, $x \in \mathbb{R}$, folgt daraus $f'(0) = 0$. Dieses Beispiel zeigt, daß es Funktionen gibt, die zwar überall differenzierbar, aber nicht stetig differenzierbar sind.

Gelegentlich ist folgende Verallgemeinerung des Mittelwertsatzes nützlich.

SATZ 6.11 (Verallgemeinerter Mittelwertsatz, Cauchy). *Die Funktionen f, $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ seien stetig auf $[a,b]$ und differenzierbar auf (a,b). Dann gibt es eine Zwischenstelle $\xi \in (a,b)$ mit*

$$(f(b) - f(a))g'(\xi) = (g(b) - g(a))f'(\xi).$$

BEWEIS. der Beweis ist identisch zum Beweis des Mittelwertsatzes. Wir verwenden nun die Hilfsfunktion $\varphi \in C([a,b],\mathbb{R})$

$$\varphi(x) = (f(b) - f(a))g(x) - (g(b) - g(a))f(x).$$

$\square$

6.3. Der Mittelwertsatz für Funktionen in mehreren Veränderlichen. Der Mittelwertsatz läßt sich mühelos auf *reellwertige* Funktionen in mehreren Veränderlichen übertragen.

SATZ 6.12. *Es sei X ein normierter Raum, $f\colon U \to \mathbb{R}$, $U \subset X$ offen, differenzierbar, x_0 und $x_0 + h$ seien Punkte, die mitsamt ihrer Verbindungsstrecke in U liegen. Dann gibt es ein $\vartheta \in (0,1)$, so daß gilt*

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = f'(x_0 + \vartheta h)(h).$$

Beweis. Wir parametrisieren Verbindungsstrecke zwischen x_0 und $x_0 + h$ durch $\gamma\colon [0,1] \to X$, $\gamma(t) = x_0 + th$. Diese Abbildung ist differenzierbar und hat die konstante Ableitung

$$\gamma'(t) = h.$$

Die Abbildung $\varphi\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, $\varphi(t) = (f \circ \gamma)(t)$ ist nach der Kettenregel differenzierbar. Somit kann der gewöhnliche Mittelwertsatz VI-6.7 angewendet werden: Es gibt $\vartheta \in (0,1)$ mit

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = \varphi(1) - \varphi(0) = \varphi'(\vartheta).$$

Andererseits ergibt die Kettenregel für die Ableitung von φ

$$\varphi'(\vartheta) = f'(\gamma(\vartheta))\gamma'(\vartheta) = f'(x_0 + \theta h)h.$$

□

Eine Inspektion des Beweises zeigt, daß der Satz gültig bleibt, wenn U eine offene Teilmenge eines beliebigen normierten Raumes ist.

Bemerkung 6.13. Der Mittelwertsatz gilt allerdings nicht in dieser Form (als Gleichung) für vektorwertige Funktionen. Dies liegt daran, daß die Zwischenstellen $x_0 + \vartheta h$ für die einzelnen Komponentenfunktionen i.a. nicht gleich sind: Es sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ die Abbildung $t \mapsto (t - t^2, t - t^3)$. Es ist also $f(1) - f(0) = (0,0)$. Die Ableitung ist gegeben durch $f'(t) = (1 - 2t, 1 - 3t^2)$. Da $f'(t) \neq 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt, kann die Gleichung $f(1) - f(0) = f'(t)(1 - 0)$ für keinen Wert von t zutreffen. Einen teilweisen Ersatz bietet folgende Ungleichung.

Satz 6.14. *Es seien X und Y normierte Räume.*
1.) E sei $f\colon [a,b] \to Y$, stetig und differenzierbar auf (a,b). Ferner sei f' beschränkt, d.h. $||f'(t)|| \le M$ für $t \in (a,b)$. Dann gilt für alle t, $s \in [a,b]$

$$||f(t) - f(s)|| \le M|t - s|.$$

2.) Es sei $f\colon U \to Y$, $U \subset X$ offen. Liegt die Verbindungsstrecke $[x,y]$ zweier Elemente x, $y \in U$ in U und ist f auf $[x,y]$ differenzierbar, dann gilt

$$||f(y) - f(x)||_Y \le (\sup_{z \in [x,y]} ||f'(z)||)||y - x||_X.$$

Beweis. ad 1.) Wegen der Stetigkeit von f auf $[a,b]$ genügt es, die Ungleichung

$$||f(t) - f(s)|| \le M|t - s|$$

für alle $a < s < t < b$ zu zeigen. Dazu betrachten wir für beliebiges $\varepsilon > 0$

$$S_\varepsilon = \{\alpha \in [s,t]\colon ||f(\beta) - f(s)|| \le (M + \varepsilon)(\beta - s), \quad \beta \in [s,\alpha]\}.$$

Wegen $\alpha \in S_\varepsilon$ ist S_ε nicht leer. Die Menge S_ε ist auch abgeschlossen: betrachten wir nämlich eine Folge $(\alpha_n) \subset S_\varepsilon$, die gegen $\bar\alpha \in [s,t]$ konvergiert. Ist $\alpha_n \ge \bar\alpha$ für unendlich viele Folgenglieder, erhält man durch Übergang zu einer entsprechenden Teilfolge $(\alpha_{\varphi(n)}) \subset (\alpha_n)$

$$(*) \qquad ||f(\beta) - f(s)|| \le (M + \varepsilon)|\beta - s|, \qquad \beta \in [s, \alpha_{\varphi(n)}], \quad n \in \mathbb{N}$$

Somit gilt $(*)$ auf $[s, \bar{\alpha}] \subset [s, \alpha_{\varphi(n)}]$, $n \in \mathbb{N}$. Ist hingegen $\alpha_n < \bar{\alpha}$ für alle $n \geq n_0$, folgt die Gültigkeit von $(*)$ auf $[s, \bar{\alpha})$ und wegen der Stetigkeit von f auch auf $[s, \bar{\alpha}]$. In beiden Fällen finden wir also $\bar{\alpha} \in S_\varepsilon$. Somit ist S_ε auch kompakt.
Es sei $\alpha^* = \sup S_\varepsilon$. Wegen der Kompaktheit von S_ε erhält man $\alpha^* \in S_\varepsilon \cap [s, t]$. Da f in α^* differenzierbar ist, gibt es ein $\delta = \delta(\varepsilon, \alpha^*)$ mit der Eigenschaft

$$||f(\beta) - f(\alpha^*) - f'(\alpha^*)(\beta - \alpha^*)|| \leq \varepsilon|\beta - \alpha^*|$$

für $|\beta - \alpha^*| < \delta$. Somit folgt für $\alpha^* \leq \beta < \alpha^* + \delta$

$$\begin{aligned}||f(\beta) - f(\alpha^*)|| &\leq ||f(\beta) - f(\alpha^*) - f'(\alpha^*)(\beta - \alpha^*)|| + ||f'(\alpha^*)(\beta - \alpha^*)|| \\ &\leq \varepsilon(\beta - \alpha^*) + ||f'(\alpha^*)||(\beta - \alpha^*) \leq (M + \varepsilon)(\beta - \alpha^*)\end{aligned}$$

und daher

$$\begin{aligned}||f(\beta) - f(s)|| &\leq ||f(\beta) - f(\alpha^*)|| + ||f(\alpha^*) - f(s)|| \\ &\leq (M + \varepsilon)(\beta - \alpha^* + \alpha^* - s) = (M + \varepsilon)(\beta - s).\end{aligned}$$

Dies hat $[s, \alpha^* + \delta) \subset S_\varepsilon$ zur Folge und somit muß $\alpha^* = t$ gelten. Folglich gilt

$$||f(t) - f(s)|| \leq (M + \varepsilon)|t - s|$$

für alle $a < t < s < b$ und $\varepsilon > 0$. Führt man nun den Grenzübergang $\varepsilon \to 0^+$ und anschließend $s \to a^+$ und $t \to b^-$ durch, erhält man die gesuchte Ungleichung.
ad 2.) Wir betrachten die Funktion $g(t) = f(x + t(y - x))$ als Verkettung $g = f \circ \varphi$, mit $\varphi(t) = x + t(y - x)$, $t \in [0, 1]$. Dann folgt $g(1) - g(0) = f(y) - f(x)$ und g ist differenzierbar mit $g'(t) = f'(x + t(y - x))(y - x)$. Somit erhalten wir aus Teil 1

$$||f(y) - f(x)|| \leq (\sup_{z \in [x,y]} ||f'(z)||)||y - x||.$$

□

Somit ist unter den Voraussetzungen des Satzes f Lipschitz stetig, falls U konvex ist.

Bemerkung 6.15. Der Schrankensatz gilt auch für Funktionen $f\colon U \to \mathbb{C}^n$, $U \subset \mathbb{C}^m$.

Korollar 6.16. Die offene Menge $U \subset X$ sei konvex und $f\colon U \to Y$ differenzierbar. Ist $f'(x) = 0$ für alle $x \in U$, dann ist f konstant.

Satz 6.17. *$U \subset X$ sei offen und zusammenhängend und $f, g\colon U \to Y$ differenzierbar.*
(1) *Ist $f' = 0$ auf U, dann ist f konstant.*
(2) *Ist $f' = g'$ auf U, dann gibt es eine Konstante $c \in \mathbb{R}$ mit $f = g + c$. Ist $f(x_0) = g(x_0)$ für mindestens ein $x_0 \in U$, gilt $f = g$.*

Beweis. Wir wählen $x_0 \in U$ und setzen $D = \{x \in U\colon f(x) = f(x_0)\}$ also $D = f^{-1}(\{f(x_0)\})$. Da f stetig in x_0 ist, ist D als Urbild einer abgeschlossenen Menge abgeschlossen in U. Wählen wir andererseits $x_1 \in D \subset U$, dann ist x_1 innerer Punkt von U. Es gibt also ein $\varepsilon > 0$ mit $K(x_1, \varepsilon) \subset U$. Nach Beispiel V-6.8 ist $K(x_1, \varepsilon)$ konvex, nach Korollar 6.16 gilt daher $f(x) = f(x_0)$ für $x \in K(x_1, \varepsilon)$, d.h. $K(x_1, \varepsilon) \subset D$. Die Menge D ist daher sowohl offen, als auch abgeschlossen in U.

Da U zusammenhängend ist, muß $D = U$ gelten (Bemerkung V-6.4). Die zweite Behauptung ist eine direkte Folge der ersten. □

Bemerkung 6.18. 1.) Die einzigen zusammenhängenden Teilmengen in $\mathbb{R}$ sind Intervalle. Das Beispiel $f \equiv -1$ auf $[0,1]$ und $f \equiv 1$ auf $[2,3)$ zeigt, daß der Zusammenhang des Definitionsbereiches notwendig ist.
2.) Die Voraussetzung „U offen" ist wesentlich im $\mathbb{R}^m$ für $m \geq 2$, denn es ist möglich, eine zusammenhängende Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^2$ und eine Abbildung $f\colon U \to \mathbb{R}$ zu konstruieren, so daß zwar $f'(x) = 0$ für alle $x \in U$ gilt, f auf U aber nicht konstant ist!

7. Anwendungen des Mittelwertsatzes

7.1. Monotonie und 1. Ableitung. Das erste Resultat ist eine Präzisierung von Satz 6.17 für reelle Funktionen, welche auf einem Intervall definiert sind.

Satz 7.1. *Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und f, $g\colon I \to \mathbb{R}$ stetig auf I und differenzierbar im Inneren von I.*

(1) *Gilt $f' \equiv 0$ im Inneren von I, dann ist f konstant auf I.*
(2) *Gilt $f' \equiv g'$ im Inneren von I, dann gibt es eine Konstante $c \in \mathbb{R}$ mit $f = g + c$. Ist $f(x_0) = g(x_0)$ für mindestens ein $x_0 \in I$, gilt $f = g$.*

Beispiel 7.2. Als Anwendung dieses Satzes zeigen wir, daß $f(x) = ce^{\lambda x}$, $x \in \mathbb{R}$, die einzige (bis auf den Faktor $c \in \mathbb{R}$) Funktion mit der Eigenschaft $f' = \lambda f$ auf $\mathbb{R}$ ist. Sei f eine differenzierbare Funktion mit dieser Eigenschaft. Dann gilt

$$(f(x)e^{-\lambda x})' = f'(x)e^{-\lambda x} - \lambda f(x)e^{-\lambda x} = 0, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Somit gibt es eine Konstante $c \in \mathbb{R}$ mit $f(x)e^{-\lambda x} = c$, $x \in \mathbb{R}$.

Die Monotonieeigenschaften einer differenzierbaren Funktion lassen sich aus dem Vorzeichen der 1. Ableitung ablesen.

Satz 7.3. *Es sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig auf $[a,b]$ und differenzierbar auf (a,b). Es gilt:*

(1) *f ist monoton wachsend (fallend) auf $[a,b]$ genau dann, wenn $f'(x) \geq 0$ ($f'(x) \leq 0$) für alle $x \in (a,b)$ gilt.*
(2) *Gilt $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$) für alle $x \in (a,b)$, dann ist f streng monoton wachsend (fallend) auf $[a,b]$.*

Beweis. Es sei $x, y \in [a,b]$ und $x < y$. Wir wenden den MWS auf $f|_{[x,y]}$ an und erhalten:

$$f(y) - f(x) = f'(\xi)(y - x)$$

für ein $\xi \in (x,y)$. Aus dieser Darstellung liest man alle Behauptungen ab. □

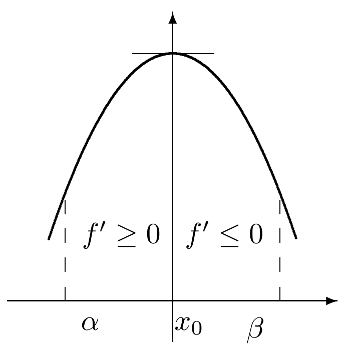
Bemerkung 7.4. Das Beispiel $f(x) = x^3$, $x \in \mathbb{R}$ zeigt, daß die Ableitung einer streng monotonen Funktion Nullstellen besitzen kann. Allerdings kann die Menge der Nullstellen von f' keine inneren Punkte enthalten.

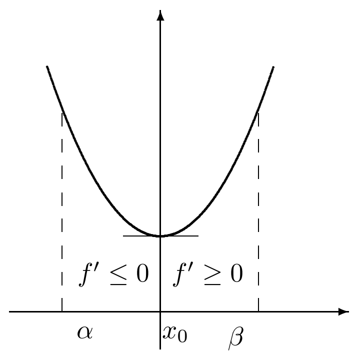
Wir sind nun auch in der Lage, eine hinreichende Bedingung für das Auftreten lokaler Extrema in einer Nullstelle von f' zu formulieren.

Satz 7.5. *Es sei* $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ *differenzierbar auf einer Umgebung* $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ *von* $x_0 \in (a,b)$. *Ist* $f'(x_0) = 0$, *so hat* f *in* x_0

a) *ein lokales Maximum, falls* $f'(x) \geq 0$ *für alle* $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ *und* $f'(x) \leq 0$ *für alle* $x \in (x_0, x_0 + \delta)$,
b) *ein lokales Minimum, falls* $f'(x) \leq 0$ *für alle* $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ *und* $f'(x) \geq 0$ *für alle* $x \in (x_0, x_0 + \delta)$.

Beweis. zu a): Nach Korollar 7.3 ist f monoton wachsend auf $(x_0 - \delta, x_0]$ und monoton fallend auf $[x_0, x_0 + \delta)$, d.h. für alle $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ gilt $f(x) \leq f(x_0)$. $\square$





7.2. Regel von de L'Hospital. Wir wenden uns nun Grenzwerten zu, die auf sogenannte **unbestimmte Formen** führen: $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, \infty - \infty, \infty^0, 0^0, 0 \cdot \infty$. Es genügt, die unbestimmten Formen $\frac{0}{0}$ bzw. $\frac{\infty}{\infty}$ zu betrachten, da sich die anderen unbestimmten Formen durch geeignete Transformationen auf diese beiden Möglichkeiten zurückführen lassen.

Wir gehen von folgender Beobachtung aus: Zu berechnen ist $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ und es sei $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = 0$. Dieser Grenzwert läßt sich mühelos bestimmen, falls f und g in x_0 differenzierbar sind und $g'(x_0) \neq 0$ ist: da in diesem Falle f und g in x_0 stetig sind, gilt $f(x_0) = g(x_0) = 0$ und es folgt

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \lim_{x\to x_0} \frac{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}{\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}.$$

Diese Vorgangsweise läßt sich erheblich verallgemeinern. Insbesondere kann auf die Differenzierbarkeit von f und g in x_0 verzichtet werden, mehr noch, f und g müssen in x_0 nicht einmal definiert sein. Im folgenden sind die auftretenden Grenzwerte entweder im eigentlichen oder uneigentlichen Sinne zu verstehen:

Satz 7.6 (Regel von de L'Hospital). *Es seien f, $g\colon (a,b) \to \mathbb{R}$, $-\infty \le a < b \le \infty$, f, g differenzierbar auf (a,b) und es sei $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in (a,b)$. Es existiere $\lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ in $\bar{\mathbb{R}}$. In jeder der beiden Situationen*

a) $\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^+} g(x) = 0$,
b) $\lim_{x\to a^+} g(x) = \infty$

existiert dann auch $\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)}$ und es ist

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

(Eine analoge Aussage gilt auch für $x \to b^-$ bzw. $g(x) \to -\infty$.)

Beweis. Fall 1: $L = \lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} \in [-\infty, \infty)$. Wir wählen $q \in \mathbb{R}$ mit $L < q$ und anschließend $r \in \mathbb{R}$ mit $L < r < q$. Zu r gibt es ein $\xi_r \in \mathbb{R}$, sodaß

$$\forall x \in (a, \xi_r)\colon \frac{f'(x)}{g'(x)} < r$$

zutrifft. Es sei nun $a < x < y < \xi_r$. Wegen $g'(x) \neq 0$ auf (a,b) gilt nach Satz 6.5 entweder $g'(x) > 0$ oder $g'(x) < 0$ auf (a,b). Daher ist g strikt monoton, insbesondere gilt $g(x) - g(y) \neq 0$. Nach dem Mittelwertsatz 6.11 gibt es eine Zwischenstelle $\tau \in (x,y)$, sodaß

$$(*) \qquad \frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} = \frac{f'(\tau)}{g'(\tau)} < r.$$

Es sei a) erfüllt. Läßt man x gegen a rücken, folgt daher

$$\frac{f(y)}{g(y)} \le r < q \text{ für alle } y \in (a, \xi_r).$$

(Man beachte, daß die Zwischenstelle τ von x und y abhängig ist.) Es sei nun b) erfüllt. Wir halten wieder y fest und bestimmen $\xi_y \in (a,y)$ so, daß

$$g(x) > \max\{0, g(y)\} \qquad \text{für alle } x \in (a, \xi_y)$$

zutrifft. Es ist also $(g(x) - g(y))/g(x)$ positiv. Multipliziert man $(*)$ mit diesem Bruch ergibt sich für alle $x \in (a, \xi_y)$

$$\frac{f(x) - f(y)}{g(x)} < r - \frac{g(y)}{g(x)} r$$

bzw.

$$\frac{f(x)}{g(x)} < r + \frac{f(y)}{g(x)} - r\frac{g(y)}{g(x)}.$$

Die rechte Seite dieser Ungleichung konvergiert für $x \to a$ nach r. Daraus läßt sich jedoch nicht ableiten, daß auch $\frac{f(x)}{g(x)} \le r$ für alle $x \in (a, \xi_y)$ zutrifft. Wohl aber kann man auf die Existenz von $\sigma \in (a, \xi_y)$ schließen, sodaß

$$\frac{f(x)}{g(x)} < q \qquad \text{für alle } x \in (a, \sigma)$$

zutrifft (erst an dieser Stelle des Beweises machen wir von q Gebrauch). Für beide Situationen a) und b) wurde also bisher folgendes gezeigt:

$$\forall q > L\, \exists x_1 \in (a, b)\, \forall x \in (a, x_1)\colon \frac{f(x)}{g(x)} < q. \tag{1}$$

Fall 2: $L = \lim_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} \in (-\infty, \infty]$. Analog wie im ersten Fall kann gezeigt werden:

$$\forall p < L\, \exists x_2 \in (a, b)\, \forall x \in (a, x_2)\colon \frac{f(x)}{g(x)} > p. \tag{2}$$

Die Behauptung folgt nun leicht aus (1) und (2): Gilt $L = -\infty$ bzw. $L = \infty$, ist die Behauptung durch (1) bzw. (2) bereits bewiesen. Es sei $L \in \mathbb{R}$. Zu $\varepsilon > 0$ wählen wir $q = L + \varepsilon$ in (1), bzw. $p = L - \varepsilon$ in (2) und setzen $\bar{x} = \min\{x_1, x_2\}$. Für $x \in (a, \bar{x})$ gilt dann $|\frac{f(x)}{g(x)} - L| < \varepsilon$. □

Wir haben die Regel von de L'Hospital für Randpunkte des Definitionsbereiches formuliert. Dies bedeutet jedoch keine Einschränkung, da man immer auf einseitige Limiten geeigneter Einschränkungen zurückgehen kann.

Beispiel 7.7. Man verifiziere in den folgenden Beispielen die Voraussetzungen von Satz 7.6:

(1) $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \to 0} \cos x = 1.$ (Form: $\frac{0}{0}$)

(2) $\forall \alpha > 0\colon \lim_{x \to \infty} \frac{e^{\alpha x}}{x} = \infty.$ (Form: $\frac{\infty}{\infty}$)

(3) $\lim_{x \downarrow 0} x \ln x = \lim_{x \downarrow 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \downarrow 0} \frac{\frac{1}{x}}{-(\frac{1}{x})^2} = -\lim_{x \downarrow 0} x = 0.$ (Form: $0 \cdot \infty$)

(4) $\lim_{x \to 0^+} x^x = 1$ (Form: 0^0)

Wir verwenden die Identität $x^x = e^{x \ln x}$. Wegen der Stetigkeit der Exponentialfunktion genügt es vorerst $\lim_{x \to 0^+} x \ln x$ zu untersuchen. Nach (3) gilt $\lim_{x \to 0^+} x \ln x = 0$ und daher $\lim_{x \to 0^+} x^x = \lim_{x \to 0^+} e^{x \ln x} = \exp(\lim_{x \to 0^+} x \ln x) = 1$.

(5) $\lim_{x \to \infty} (e^x + x)^{\frac{1}{x}} = e.$ (Form: ∞^0)

Es gilt $(e^x + x)^{\frac{1}{x}} = \exp(\frac{1}{x} \ln(e^x + x))$. Aus

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\ln(e^x + x)}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{e^x + 1}{e^x + x} = 1$$

folgt wie in Beispiel 4 die Behauptung.

(6) $\lim_{x\to 1}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)=\frac{1}{2}$. (Form: $\infty-\infty$)

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 1}\left(\frac{x}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{x\ln x-x+1}{(x-1)\ln x} \qquad (\text{Form: } \frac{0}{0})\\
&=\lim_{x\to 1}\frac{\ln x+1-1}{\ln x+1-\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{\ln x+1-\frac{1}{x}} \qquad (\text{Form:} \frac{0}{0})\\
&=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}=\frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Dieses Beispiel zeigt, daß es in manchen Fällen notwendig ist, die Regel von de L'Hospital mehrfach anzuwenden. Da der Rechenaufwand rasch anwächst, sei vor einer reflexartigen Anwendung dieser Regel gewarnt. Viele Grenzwerte lassen sich durch einen Potenzreihenansatz bedeutend einfacher berechnen.

(7) $\lim_{x\to\infty}\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}=1$. (Form: $\frac{\infty}{\infty}$)

Eine blinde Anwendung von Satz 7.6 ergibt

$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}=\dots,$$

also eine endlose Schleife, während eine einfache Umformung sofort auf den gewünschten Grenzwert führt:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}}=1.$$

Zuletzt zeigen wir noch, daß Satz 7.6 sich nicht (ohne Zusatzvoraussetzungen) auf komplexwertige Funktionen übertragen läßt:

Beispiel 7.8. g, $f\colon (0,1)\to\mathbb{C}$ seien definiert durch $g(x)=x+x^2e^{\frac{i}{x^2}}$ und $f(x)=x$. Wegen $|e^{\frac{i}{x^2}}|=1$ für $x\in(0,1)$ folgt

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=1.$$

Satz 7.6 führt auf

$$\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{(1+(2x-\frac{2i}{x})e^{\frac{i}{x^2}})}.$$

Wegen

$$|g'(x)|\geq|2x-\frac{2i}{x}|-1\geq\frac{2}{x}-1$$

und somit

$$|\frac{f'(x)}{g'(x)}|\leq\frac{x}{2-x},$$

erhält man

$$\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=0.$$

Da $g'(x) \neq 0$ würde Satz 7.6 zu dem falschen Ergebnis

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

führen.

7.3. Differenzierbarkeit von Funktionen in mehreren Veränderlichen. Aus dem Mittelwertsatz ergibt sich sich auch ein sehr praktisches Kriterium für die Differenzierbarkeit von Funktionen in mehreren Veränderlichen.

Satz 7.9. *Die Abbildung $f\colon U \to \mathbb{R}^n$, $U \subset \mathbb{R}^m$ offen, besitze auf U sämtliche partiellen Ableitungen $\frac{\partial f_j}{\partial \xi_i}(x)$, $j = 1, \dots, n$, $i = 1, \dots, m$. Sind diese stetig an der Stelle $x_0 \in U$, dann ist f in x_0 differenzierbar.*

Beweis. Es genügt, den Satz für reellwertige Funktionen $f\colon U \to \mathbb{R}$ zu beweisen. Da als Ableitung nur die lineare Abbildung mit der Matrixdarstellung $f'(x_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial \xi_1}(x_0) \dots \frac{\partial f}{\partial \xi_m}(x_0)\right) \in \mathbb{R}^{1\times m}$ in Frage kommt, müssen wir

$$(*) \qquad \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0) - f'(x_0)h}{\|h\|} = 0$$

nachweisen. Wir verbinden x_0 und $x_0 + h$, $h = (\sigma_1, \dots, \sigma_m)$, durch einen achsenparallelen Weg durch die Punkte x_i,

$$x_i = x_{i-1} + \sigma_i e_i, \quad i = 1, \dots, m,$$

also $x_i = x_0 + \sum_{j=1}^{i} \sigma_j e_j$ und $x_m = x_0 + h$. Für h hinreichend klein liegt dieser Weg in U. Man kann daher $f(x_0 + h) - f(x_0)$ in der Form

$$f(x_0+h) - f(x_0) = \sum_{i=1}^{m} \big(f(x_i) - f(x_{i-1})\big).$$

schreiben. Es sei $x_{i-1} = (\xi_1^{i-1}, \dots, \xi_m^{i-1})$, $i = 1, \dots, m$. Aus

$$\begin{aligned} f(x_i) - f(x_{i-1}) &= f(x_{i-1} + \sigma_i e_i) - f(x_{i-1}) \\ &= f(\xi_1^{i-1}, \dots, \xi_i^{i-1} + \sigma_i, \dots, \xi_m^{i-1}) - f(\xi_1^{i-1}, \dots, \xi_i^{i-1}, \dots, \xi_m^{i-1}) \end{aligned}$$

folgt mit Hilfe des Mittelwertsatzes 6.7

$$f(x_i) - f(x_{i-1}) = \frac{\partial f}{\partial \xi_i}(\xi_1^{i-1}, \dots, \xi_i^{i-1} + \theta_i\sigma_i, \dots, \xi_m^{i-1})\sigma_i$$

mit einem geeigneten $\vartheta_i \in (0,1)$. Bezeichnen wir die Zwischenstellen $(\xi_1^{i-1}, \dots, \xi_i^{i-1} + \theta_i\sigma_i, \dots, \xi_m^{i-1})$ mit $x_i^*(h)$, ergibt sich schließlich

$$f(x_0+h) - f(x_0) - f'(x_0)h = \sum_{i=1}^{m} \left(\frac{\partial f}{\partial \xi_i}(x_i^*(h)) - \frac{\partial f}{\partial \xi_i}(x_0)\right)\sigma_i,$$

und weiter

$$|f(x_0+h)-f(x_0)-f'(x_0)h| \le \sum_{i=1}^{m} \Big|\frac{\partial f}{\partial \xi_i}(x_i^*(h)) - \frac{\partial f}{\partial \xi_i}(x_0)\Big| \|h\|_\infty .$$

Wegen $x_i = x_{i-1} + \vartheta_i \sigma_i e_i$ folgt

$$\|x_i^*(h) - x_0\|_\infty = \|x_{i-1} - x_0 + \theta_i \sigma_i e_i\|_\infty = \|\sum_{j=1}^{i-1} \sigma_j e_j + \theta_i \sigma_i e_i\|_\infty \le \|h\|_\infty,$$

d.h. $\lim_{h\to 0} x_i^*(h) = x_0$, $i = 1, \dots, m$. Wegen der Stetigkeit der partiellen Ableitungen ergibt sich nun die Behauptung, wenn wir in $(*)$ die Norm $\|\cdot\|_\infty$ verwenden. □

Definition 7.10. *$f\colon U \to \mathbb{R}^n$, $U \subset \mathbb{R}^m$ offen, sei differenzierbar und $x_0 \in U$.*

*f heißt **stetig differenzierbar** (an der Stelle x_0) $\underset{Def}{\Leftrightarrow}$*

$f'\colon U \to \mathfrak{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$, $x \mapsto f'(x)$, ist stetig (an der Stelle x_0).

Nach Satz 7.9 und Satz V-7.5 ist die Stetigkeit von f' gleichbedeutend mit der Stetigkeit der Elemente der Jacobimatrix.
Eine unmittelbare Konsequenz aus Satz 7.9 ist

Satz 7.11. *Es sei $f\colon U \to \mathbb{R}^n$, $U \subset \mathbb{R}^m$ offen. Äquivalent sind*

i) *f ist stetig differenzierbar,*

ii) *alle partiellen Ableitungen $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$, $i = 1 \dots, n$, $j = 1 \dots, m$ sind stetig auf U.*

Beispiel 7.12. $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei gegeben durch $f(\xi,\eta) = e^{\xi\eta}$. Die Existenz der partiellen Ableitungen $\frac{\partial}{\partial \xi} f(\xi,\eta) = \eta e^{\xi\eta}$, $\frac{\partial}{\partial \eta} f(\xi,\eta) = \xi e^{\xi\eta}$ ist trivial, deren Stetigkeit als Abbildung von $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ leicht zu argumentieren. Daher ist f auf $\mathbb{R}^2$ stetig differenzierbar. Man versuche zum Vergleich den Nachweis der Differenzierbarkeit an einer Stelle (ξ_0, η_0) an Hand der Definition.

8. Differenzierbarkeit und gleichmäßige Konvergenz

Wir haben bereits in Abschnitt V.8 gesehen, daß Funktionenfolgen bzw. Funktionenreihen ein sehr flexibles Instrument zur Darstellung stetiger Funktionen sind. Wir wenden uns nun der Differenzierbarkeit der Grenzfunktion zu.

Beispiel 8.1. Wir betrachten die Funktionenfolge $(f_n)_{n\ge 1} \subset C(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $f_n(x) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sin nx$. Die Abschätzung $\|f_n\|_\infty \le \frac{1}{\sqrt{n}}$ zeigt, daß f_n *gleichmäßig* auf $\mathbb{R}$ gegen $f = 0$ konvergiert. Es gilt $f_n'(x) = \sqrt{n} \cos nx$ und $f'(x) = 0$. Wir behaupten, daß für jedes $x \in \mathbb{R}$ die Folge $(f_n'(x))_{n\ge 1}$ unbeschränkt ist und daher insbesondere nicht nach $f'(x)$ konvergieren kann. Wir wählen also ein beliebiges $x \in \mathbb{R}$. Wenn $|\cos nx| < \frac{1}{2}$ für ein $n \in \mathbb{N}$ ist, dann folgt

$$|\cos 2nx| = |2\cos^2(nx) - 1| > \frac{1}{2}.$$

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt daher entweder

$$|\cos nx| \geq \frac{1}{2} \quad \text{oder} \quad |\cos 2nx| > \frac{1}{2}$$

und daher auch

$$\sup\{|f_n'(x)|\colon n \in \mathbb{N}\} = \infty.$$

Dieses Beispiel zeigt, daß es möglich ist, daß eine Folge differenzierbarer Funktionen (f_n) gleichmäßig konvergiert, aber die Ableitungsfolge (f_n') sogar nirgends konvergiert. Das Beispiel zeigt auch auf, daß man den Hebel bei der Folge der Ableitungen ansetzen muß. Wir verwenden die Vollständigkeit von $\mathcal{F}([a,b],\mathbb{R})$, welche im ersten Teil des Beweises von Satz VI-3.5 nachgewiesen wurde.

Satz 8.2. *Es sei $(f_n)_{n\geq 1} \subset C([a,b],\mathbb{R})$, $a < b$, eine Folge differenzierbarer Funktionen. Es gelte*

(1) *(f_n') ist gleichmäßig konvergent, d.h. $\exists g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ mit $\lim_{n\to\infty} f_n' = g$, glm.,*
(2) *$\exists x_0 \in [a,b]\colon (f_n(x_0))_{n\geq 1}$ ist konvergent.*

Dann konvergiert die Folge (f_n) gleichmäßig gegen eine differenzierbare Funktion $f \in C([a,b],\mathbb{R})$ und es gilt

$$f' = g, \qquad \textit{also } (\lim_{n\to\infty} f_n)' = \lim_{n\to\infty} f_n'.$$

Beweis. 1. Schritt: Wir konstruieren zuerst die Grenzfunktion und zeigen zu diesem Zweck die gleichmäßige Konvergenz von (f_n):

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq |f_n(x) - f_m(x) - (f_n(x_0) - f_m(x_0))| + |f_n(x_0) - f_m(x_0)|.$$

Auf die Abbildung $f_n - f_m$ wenden wir den Mittelwertsatz an und erhalten für eine geeignete Zwischenstelle ξ zwischen x und x_0:

$$(*) \qquad \begin{aligned} |f_n(x) - f_m(x)| &= |f_n'(\xi) - f_m'(\xi)||x - x_0| + |f_n(x_0) - f_m(x_0)| \\ &\leq \|f_n' - f_m'\|_\infty (b-a) + |f_n(x_0) - f_m(x_0)|. \end{aligned}$$

Nach Voraussetzung ist die Ableitungsfolge (f_n') gleichmäßig konvergent, also eine Cauchy Folge bezüglich der $\|\cdot\|_\infty$-Norm. Folglich existiert zu $\varepsilon > 0$ ein $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ so, daß für alle $n, m \geq N(\varepsilon)$

$$\|f_n' - f_m'\| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)},$$

wegen der Konvergenz von $(f_n(x_0))_{n\geq 1}$, kann man darüber hinaus $N(\varepsilon)$ so groß wählen, daß für alle $n, m \geq N(\varepsilon)$ auch

$$|f_n(x_0) - f_m(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

zutrifft. Somit gilt für alle $n, m \geq N(\varepsilon)$ wegen $(*)$

$$\|f_n - f_m\| < \varepsilon,$$

d.h. (f_n) ist eine gleichmäßige Cauchy Folge und daher gleichmäßig konvergent. Die Grenzfunktion f ist wegen der Stetigkeit von f_n, $n \in \mathbb{N}$, nach Satz V-8.5 stetig.

2. Schritt: Die Grenzfunktion f ist an jeder Stelle $y \in [a,b]$ differenzierbar mit $f'(y) = \lim_{n\to\infty} f_n'(y)$.
Jede Abbildung f_n ist an der Stelle y differenzierbar, d.h. es gibt eine Funktion $r_n\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, sodaß

$$(*) \qquad \begin{aligned} &\forall x \in [a,b]\colon f_n(x) = f_n(y) + f_n'(y)(x-y) + r_n(x-y) \\ &\lim_{x\to y} \frac{r_n(x-y)}{x-y} = 0. \end{aligned}$$

Setzen wir für $x \in [a,b]$

$$R_n(x) = \begin{cases} \frac{r_n(x-y)}{x-y}, & \text{für } x \neq y, \\ 0, & \text{für } x = y, \end{cases}$$

dann ist R_n stetig in $x = y$. Wir zeigen, daß die Funktionenfolge (R_n) gleichmäßig konvergiert. Dazu betrachtn wir für $x \neq y$

$$R_n(x) - R_m(x) = \big(f_n(x) - f_m(x) - (f_n(y) - f_m(y))\big)(x-y)^{-1} - (f_n'(y) - f_m'(y)).$$

Wie im ersten Schritt ergibt eine Anwendung des Mittelwertsatzes

$$|R_n(x) - R_m(x)| \le 2\|f_n' - f_m'\|, \quad x \in [a,b],$$

also auch

$$\|R_m - R_n\| \le 2\|f_n' - f_m'\|.$$

Wegen der Vollständigkeit von $\mathcal{F}([a,b],\mathbb{R})$ existiert $R \in \mathcal{F}([a,b],\mathbb{R})$ mit $R_n \to R$ gleichmäßig. Nach Satz V-8.5 ist R stetig in y und es gilt

$$R(y) = \lim_{n\to\infty} R_n(y) = 0.$$

Wegen

$$r_n(x-y) = R_n(x)(x-y), \qquad x \in [a,b]$$

ist auch die Funktionenfolge $x \to r_n(x-y)$, $n \in \mathbb{N}$, gleichmäßig konvergent gegen $r(x-y) = R(x)(x-y)$, $x \in [a,b]$. Man kann daher in der Beziehung $(*)$ den Grenzübergang $n \to \infty$ durchführen und erhält

$$f(x) = f(y) + g(y)(x-y) + r(x-y)$$

und

$$\lim_{x\to y} \frac{r(x-y)}{x-y} = \lim_{x\to y} R(x) = R(y) = 0,$$

d.h. f ist an der Stelle y differenzierbar und es ist $f'(y) = g(y) = \lim_{n\to\infty} f_n'(y)$.

□

Wenden wir diesen Satz auf gleichmäßig konvergente Reihen differenzierbarer Funktionen an, erhalten wir

Korollar 8.3. Es sei $(f_n) \subset C([a,b],\mathbb{R})$ eine Folge differenzierbarer Funktionen. Es gelte

i) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n'$ ist gleichmäßig konvergent,

ii) $\exists x_0 \in [a,b]\colon \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x_0)$ ist konvergent.

Dann konvergiert die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ gleichmäßig gegen eine differenzierbare Funktion $f \in C([a,b],\mathbb{R})$ und es gilt

$$\forall x \in [a,b]\colon f'(x) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x).$$

Satz 8.2 bzw. Korollar 8.3 geben hinreichende Bedingungen an, die die Vertauschbarkeit von Limes und Ableitung gewährleisten. Unter diesen Voraussetzungen darf man also gliedweise differenzieren.

Korollar 8.4. Eine Potenzreihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$, $(a_n)_{n\geq 1} \subset \mathbb{C}$, stellt im Inneren des Konvergenzkreises $K(z_0,R)$ eine differenzierbare Funktion f dar. Es gilt

$$\forall z \in K(z_0,R)\colon f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z-z_0)^{n-1}.$$

Beweis. Satz 8.2 wurde zwar für reelle Funktionen auf einem Intervall bewiesen. Ersetzt man jedoch im Beweis den Mittelwertsatz durch den Schrankensatz und das Intervall $[a,b]$ durch den Kreis $K(z_0,R)$ kann die Gültigkeit Satz 8.2 auch auf komplexe Funktionen $K(z_0,R) \to \mathbb{C}$ ausgedehnt werden. Die gliedweise differenzierte Potenzreihe

$$h(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n (x-x_0)^{n-1}$$

besitzt ebenfalls den Konvergenzradius R (Übung). Die Potenzreihe h konvergiert daher gleichmäßig auf jeder abgeschlossenen und beschränkten Teilmenge von $K(z_0,R)$. Mit Korollar 8.3 folgt daher $h(z) = f'(z)$, $z \in K(z_0,R)$. $\square$

9. Höhere Ableitungen

9.1. Funktionen in einer Veränderlichen. Es sei $f\colon I \to \mathbb{R}$, $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, differenzierbar auf I. Dann existiert die Abbildung $f'\colon x \mapsto f'(x)$. Ist f' selbst wieder an einer Stelle $x_0 \in I$ differenzierbar, nennt man die Ableitung von f' die **2. Ableitung** von f an der Stelle x_0 und bezeichnet sie mit $f''(x_0)$ oder auch $\frac{d^2 f}{dx^2}(x_0)$. Es gilt also $f''(x_0) = (f')'(x_0)$. Es sind auch die Bezeichnungen $f^{(0)} = f$, $f^{(1)} = f'$ und $f^{(2)} = f'', \ldots$ usw. üblich. Allgemein definiert man nun höhere Ableitungen rekursiv. Wenn für $n \in \mathbb{N}$ die $(n-1)$-te Ableitung $f^{(n-1)}$ existiert und in $x_0 \in I$ differenzierbar ist, setzt man

$$f^{(n)}(x_0) = (f^{(n-1)})'(x_0).$$

Man nennt $f^{(n)}(x_0)$ auch Ableitung n-ter Ordnung an der Stelle x_0. Die Existenz der n-ten Ableitung von f an der Stelle x_0 setzt also voraus, daß die $(n-1)$-te Ableitung von f auf einer Umgebung von x_0 (geschnitten mit I) existiert. Besitzt f an jeder Stelle $x \in I$ Ableitungen n-ter Ordnung, heißt f n-mal differenzierbar. Existieren an einer Stelle x_0 sämtliche Ableitungen $f^{(n)}(x_0)$ für alle $n \in \mathbb{N}$, sagt man f ist **unendlich oft differenzierbar in $\mathbf{x_0}$**. Ist f an jeder Stelle $x \in I$ unendlich oft differenzierbar, nennt man f **unendlich oft differenzierbar**, kurz, f ist eine **$\mathbf{C^\infty}$-Funktion**. Wir können nun folgende Unterräume von $C(I, \mathbb{R})$ betrachten:

Definition 9.1.

$$\begin{aligned} C^0(I,\mathbb{R}) &= C(I,\mathbb{R}) \\ C^n(I,\mathbb{R}) &= \{f \in C(I,\mathbb{R})\colon f \textit{ ist } n\textit{-mal differenzierbar, } f^{(n)} \in C(I,\mathbb{R})\ \} \\ C^\infty(I,\mathbb{R}) &= \{f \in C(I,\mathbb{R})\colon f \textit{ ist unendlich oft differenzierbar}\} \end{aligned}$$

Wir schreiben gelegentlich auch $C^k(I)$ für $C^k(I, \mathbb{R})$.

Beispiel 9.2. Als Beispiel betrachten wir $f\colon x \mapsto |x|^3$, $x \in \mathbb{R}$. Wir überlassen es dem Leser, folgende Fakten zu verifizieren:

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 & x \geq 0 \\ -3x^2 & x < 0 \end{cases} \qquad f''(x) = \begin{cases} 6x & x \geq 0 \\ -6x & x < 0 \end{cases}$$

$$f'''(x) = \begin{cases} 6 & x > 0 \\ -6 & x < 0 \end{cases} \qquad f'''(0) \text{ existiert nicht.}$$

Es gilt also $f \in C^2(\mathbb{R}) \setminus C^3(\mathbb{R})$.

Die folgende Kette von Inklusionen ergibt sich unmittelbar aus der Definition:

$$C^\infty(I,\mathbb{R}) \subsetneq \cdots \subsetneq C^{n+1}(I,\mathbb{R}) \subsetneq C^n(I,\mathbb{R}) \subsetneq C(I,\mathbb{R}).$$

Polynome, trigonometrische Funktionen, Exponentialfunktionen sind Beispiele für C^∞-Funktionen. Auch für höhere Ableitungen gelten die üblichen Rechenregeln:

Lemma 9.3. *Es seien $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $f, g\colon I \to \mathbb{R}$ n-mal differenzierbar in $x_0 \in I$ und $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann sind auch λf, $f + g$ und fg n-mal differenzierbar und es gilt*

i) $(\lambda f)^{(n)}(x_0) = \lambda f^{(n)}(x_0)$

ii) $(f+g)^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0) + g^{(n)}(x_0)$

iii) $(fg)^{(n)}(x_0) = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)}(x_0) g^{(k)}(x_0)$ (Leibniz Regel) .

Beweis. Den Nachweis von i) und ii) überlassen wir dem Leser als Übung und führen einen Induktionsbeweis zu iii). Für $n = 1$ ergibt sich die Produktregel aus Satz 2.2. Wir nehmen nun an, die Behauptung iii) sei für $n - 1 \in \mathbb{N}$ erfüllt. Aus der rekursiven Definition der n-ten Ableitung an der Stelle x_0 ergibt sich

$$(*) \qquad f^{(n)}(x_0) = (f')^{(n-1)}(x_0) \text{ und } g^{(n)}(x_0) = (g')^{(n-1)}(x_0),$$

d.h. die Ableitungen f' und g', die zumindest in einer Umgebung von x_0 existieren müssen, sind an der Stelle x_0 $(n-1)$-mal differenzierbar. Wegen der Induktionsvoraussetzung besitzen dann auch $f'g$ und $g'f$ Ableitungen $(n-1)$-ter Ordnung an der Stelle x_0 und es gilt nach ii)

$$\begin{aligned}(f'g)^{(n-1)}(x_0)+(g'f)^{(n-1)}(x_0) &= (f'g+g'f)^{(n-1)}(x_0)\\ &= ((fg)')^{(n-1)}(x_0) \overset{(*)}{=} (fg)^{(n)}(x_0),\end{aligned}$$

d.h. fg ist n-mal differenzierbar an der Stelle x_0. Wegen der Induktionsvoraussetzung gilt weiter

$$\begin{aligned}(fg)^{(n)}(x_0) &= (f'g)^{(n-1)}(x_0)+(g'f)^{(n-1)}(x_0)\\ &= \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}(f')^{(n-1-k)}(x_0)g^{(k)}(x_0)+\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}f^{(n-1-k)}(x_0)(g')^{(k)}(x_0)\\ &= \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}f^{(n-k)}(x_0)g^{(k)}(x_0)+\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}f^{(n-1-k)}(x_0)g^{(k+1)}(x_0)\\ &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f^{(n-k)}(x_0)g^{(k)}(x_0).\end{aligned}$$

Das letzte Gleichheitszeichen kann genauso wie im Beweis des binomischen Lehrsatzes II-4.22 gerechtfertigt werden. $\square$

LEMMA 9.4. *Es seien $I,J\subset\mathbb{R}$ Intervalle und $f\colon I\to J$, $g\in\colon J\to\mathbb{R}$. f sei in $x_0\in I$ und g sei in $f(x_0)\in J$ n-mal differenzierbar. Dann ist auch $g\circ f$ an der Stelle x_0 n-mal differenzierbar.*

BEWEIS. Wir führen wieder einen Induktionsbeweis: Für $n=1$ folgt die Behauptung aus der Kettenregel. Wir nehmen nun an, die Behauptung sei richtig für ein $n-1\in\mathbb{N}$. Es gilt (in einer Umgebung von x_0):

$$(g\circ f)'(x)=(g'\circ f)(x)f'(x).$$

g' und f sind in $x=x_0$ $n-1$ mal differenzierbar, wegen der Induktionsvoraussetzung besitzt auch $g'\circ f$ Ableitungen $(n-1)$-ter Ordnung in x_0. Nach Lemma 9.3 ist auch $(g'\circ f)f'$ und somit auch $(g\circ f)'$ $(n-1)$-mal differenzierbar an der Stelle x_0. $\square$

Entsprechende Überlegungen gelten auch für komplexe Funktionen in einer komplexen Veränderlichen.

9.2. Höhere partielle Ableitungen. Wir schieben die Diskussion höherer Ableitungen von Abbildungen zwischen normierten Räumen etwas auf und betrachten vorerst nur Funktionen $f\colon U\to\mathbb{R}$, $U\subset\mathbb{R}^m$ offen. Ist f an jeder Stelle $x\in U$ partiell nach ξ_i differenzierbar, sagt man, f sei auf U partiell nach ξ_i differenzierbar und nennt die Abbildung

$$f_{\xi_i}\colon \begin{cases} U \to \mathbb{R} \\ x \mapsto f_{\xi_i}(x) \end{cases}$$

die partielle Ableitung von f nach ξ_i auf U. Anstelle von f_{ξ_i} schreibt man auch $\frac{\partial f}{\partial \xi_i}$ bzw. $D_i f$. Existiert f_{ξ_i} (auf U), kann man versuchen, die partielle Ableitung f_{ξ_i} an einer Stelle $x_0 \in U$ partiell nach ξ_j zu differenzieren, $j = 1, \ldots, m$. Wir erhalten auf diese Weise die zweite partielle Ableitung von f nach ξ_i und ξ_j an der Stelle x_0,

$$f_{\xi_i \xi_j}(\xi_1^0, \ldots, \xi_m^0) =: \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\xi_1^0, \ldots, \xi_m^0) =: D_j D_i(\xi_1^0, \ldots, \xi_m^0).$$

Auf analoge Weise definiert man partielle Ableitungen höherer Ordnung.
Wir illustrieren diese Begriffe an einem einfachen Beispiel:

Beispiel 9.5. Es sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(\xi, \eta) = \xi\eta^3 + \xi^2\eta^2$. Man verifiziert

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial f}{\partial \xi}(\xi, \eta) = \eta^3 + 2\xi\eta^2, && \frac{\partial f}{\partial \eta}(\xi, \eta) = 3\xi\eta^2 + 2\xi^2\eta, \\
&\frac{\partial^2 f}{\partial \xi^2}(\xi, \eta) = 2\eta^2, && \frac{\partial^2 f}{\partial \eta \partial \xi}(\xi, \eta) = 3\eta^2 + 4\xi\eta, \\
&\frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2}(\xi, \eta) = 6\xi\eta + 2\xi^2, && \frac{\partial^2 f}{\partial \xi \partial \eta}(\xi, \eta) = 3\eta^2 + 4\xi\eta, \\
&\frac{\partial^3 f}{\partial \xi^3}(\xi, \eta) = 0, && \frac{\partial^3 f}{\partial \xi \partial \eta \partial \xi}(\xi, \eta) = 4\eta, \\
&\frac{\partial^3 f}{\partial \xi \partial \eta^2}(\xi, \eta) = 6\eta + 4\xi, && \frac{\partial^3 f}{\partial \xi^2 \partial \eta}(\xi, \eta) = 4\eta, \\
&\qquad \text{etc.}
\end{aligned}$$

Es fällt auf, daß die gemischten Ableitungen $\frac{\partial^2 f}{\partial \eta \partial \xi}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial \xi \partial \eta}$ bzw. $\frac{\partial^3 f}{\partial \xi \partial \eta \partial \xi}$, $\frac{\partial^3 f}{\partial \xi^2 \partial \eta}$ gleich sind. Dies ist kein Zufall, wie der nächste Satz zeigt:

Satz 9.6 (H.A. Schwarz). *Es sei $f\colon U \to \mathbb{R}$, $U \subset \mathbb{R}^m$ offen und $x_0 \in U$. f besitze auf U die partiellen Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial \xi_k}$, $\frac{\partial f}{\partial \xi_l}$ und die gemischte Ableitung $\frac{\partial^2 f}{\partial \xi_k \partial \xi_\ell}$,$k \neq \ell$. Ist die gemischte partielle Ableitung $\frac{\partial^2 f}{\partial \xi_k \partial \xi_\ell}$ stetig in x_0, dann existiert auch $\frac{\partial^2 f}{\partial \xi_\ell \partial \xi_k}$ und es gilt*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \xi_\ell \partial \xi_k}(\xi_1^0, \ldots, \xi_m^0) = \frac{\partial^2 f}{\partial \xi_k \partial \xi_\ell}(\xi_1^0, \ldots, \xi_m^0).$$

Beweis. O.B.d.A. können wir von $\xi_k = \xi_1$ und $\xi_\ell = \xi_2$ ausgehen (anderenfalls ordnet man die Variablen um). Da die übrigen Variablen als Konstante behandelt werden, genügt es, den Satz für eine Abbildung $f\colon U \to \mathbb{R}$, $U \subset \mathbb{R}^2$, zu zeigen, für welche die partiellen Ableitungen erster Ordnung und die gemischte Ableitung $\frac{\partial^2 f}{\partial \xi \partial \eta}$

auf U existieren. Ferner sei $\frac{\partial^2 f}{\partial\xi\partial\eta}$ stetig in $x_0 = (\xi_0, \eta_0)$. Zu $\varepsilon > 0$ gibt es daher eine Kugel $K_\infty(0, \delta)$ so, daß für alle $y = (h, k) \in K_\infty(0, \delta)$

$$(\dagger) \qquad \begin{aligned} &x_0 + y \in U, \\ &\left|\frac{\partial^2 f}{\partial\xi\partial\eta}(\xi_0 + h, \eta_0 + k) - \frac{\partial^2 f}{\partial\xi\partial\eta}(\xi_0, \eta_0)\right| < \varepsilon \end{aligned}$$

gelten. Für $y = (h, k) \in K_\infty(0, \delta)$ betrachten wir nun den Ausdruck

$$F(h, k) = f(\xi_0 + h, \eta_0 + k) - f(\xi_0, \eta_0 + k) - f(\xi_0 + h, \eta_0) + f(\xi_0, \eta_0).$$

und zeigen

$$F(h, k) = \frac{\partial^2 f}{\partial\xi\partial\eta}(\tilde{\xi}, \tilde{\eta})hk$$

für ein $(\tilde{\xi}, \tilde{\eta}) \in K_\infty(x_0, \delta)$. Man beachte $F(h, k) = 0$, falls $hk = 0$. Wir können daher $hk \neq 0$ annehmen. Wir bezeichnen mit $I(a, b)$ das Intervall mit den Randpunkten a und b. Die Abbildung

$$\varphi(\eta) = f(\xi_0 + h, \eta) - f(\xi_0, \eta), \quad \eta \in I(\eta_0, \eta_0 + k)$$

ist auf $I(\eta_0, \eta_0 + k)$ differenzierbar. Aus dem Mittelwertsatz folgt daher

$$\begin{aligned} F(h, k) &= \varphi(\eta_0 + k) - \varphi(\eta_0) = \varphi'(\tilde{\eta})k, \quad \tilde{\eta} \in I^\circ(\eta_0, \eta_0 + k) \\ &= \left[\frac{\partial f}{\partial\eta}(\xi_0 + h, \tilde{\eta}) - \frac{\partial f}{\partial\eta}(\xi_0, \tilde{\eta})\right] k. \end{aligned}$$

Nach Voraussetzung existiert $\frac{\partial^2 f}{\partial\xi\partial\eta} = \frac{\partial}{\partial\xi}(\frac{\partial f}{\partial\eta})$ auf U. Wendet man daher noch einmal den Mittelwertsatz auf $\frac{\partial f}{\partial\eta}(\xi_0 + h, \tilde{\eta}) - \frac{\partial f}{\partial\eta}(\xi_0, \tilde{\eta})$ an, ergibt sich für ein $\tilde{\xi} \in I^\circ(\xi_0, \xi_0 + h)$

$$F(h, k) = \frac{\partial^2 f}{\partial\xi\partial\eta}(\tilde{\xi}, \tilde{\eta})hk.$$

Wegen $(\tilde{\xi}, \tilde{\eta}) \in K_\infty(x_0, \delta)$ und $(\dagger)$ folgt

$$(*) \qquad \left|\frac{1}{hk}F(h, k) - \frac{\partial^2 f}{\partial\xi\partial\eta}(\xi_0, \eta_0)\right| = \left|\frac{\partial^2 f}{\partial\xi\partial\eta}(\tilde{\xi}, \tilde{\eta}) - \frac{\partial^2 f}{\partial\xi\partial\eta}(\xi_0, \eta_0)\right| < \varepsilon.$$

Nun ist

$$\frac{1}{hk}F(h, k) = \frac{1}{k}\Big[\frac{1}{h}\big(f(\xi_0 + h, \eta_0 + k) - f(\xi_0, \eta_0 + k)\big) - \frac{1}{h}\big(f(\xi_0 + h, \eta_0) - f(\xi_0, \eta_0)\big)\Big],$$

und somit

$$\frac{1}{k}\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}F(h, k) = \frac{1}{k}\left(\frac{\partial f}{\partial\xi}(\xi_0, \eta_0 + k) - \frac{\partial f}{\partial\xi}(\xi_0, \eta_0)\right).$$

Führt man daher den Grenzübergang $h \to 0$ in $(*)$ durch, erhält man daher

$$\left|\frac{1}{k}\left(\frac{\partial f}{\partial\xi}(\xi_0, \eta_0 + k) - \frac{\partial f}{\partial\xi}(\xi_0, \eta_0)\right) - \frac{\partial^2 f}{\partial\xi\partial\eta}(\xi_0, \eta_0)\right| \leq \varepsilon$$

für $|k| < \delta$. Dies zeigt die Existenz von $\frac{\partial^2 f}{\partial\eta\partial\xi}(\xi_0, \eta_0)$ und

$$\frac{\partial^2 f}{\partial\eta\partial\xi}(\xi_0, \eta_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial\xi\partial\eta}(\xi_0, \eta_0).$$

□

DEFINITION 9.7. *Es sei $U \subset \mathbb{R}^m$ offen und $k \in \mathbb{N}_0$.*

$$\begin{aligned} C^k(U) := \{f\colon U \to \mathbb{R}\colon\ & \textit{alle partiellen Ableitungen von } f \\ & \textit{der Ordnung} \leq k \textit{ existieren und sind auf } U \textit{ stetig}\}. \end{aligned}$$

Eine unmittelbare Folge aus Satz 9.6 ist

SATZ 9.8 (H.A. Schwarz). *Für jedes $f \in C^k(U)$, $U \subset \mathbb{R}^m$ offen, sind die partiellen Ableitungen der Ordnung $\leq k$ unabhängig von der Reihenfolge der Differentiationen.*

10. Taylorpolynome und Taylorreihen

Der Differenzierbarkeitsbegriff wurde in Abschnitt 6.1 mit dem Bestreben motiviert, eine Funktion f lokal durch eine möglichst einfache Funktion, z.B. ein Polynom ersten Grades $T_1(x) = a_0 + a_1(x - x_0)$, zu approximieren. Die Forderung $T_1(x_0) = f(x_0)$ ergab $a_0 = f(x_0)$. Weiters sollte der Approximationsfehler $r(x - x_0) = f(x) - T_1(x)$ hinreichend rasch abklingen: $\lim_{x\to x_0} \frac{r(x-x_0)}{x-x_0} = 0$. Diese Bedingung legt nicht nur den Wert von a_1 fest, sie sichert auch die Eindeutigkeit der Approximation. Es ist intuitiv klar, daß eine Verbesserung der Approximationsgüte zu erwarten ist, wenn Polynome höheren Grades zur Approximation verwendet werden.

SATZ 10.1. *Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f\colon I \to \mathbb{R}$ n-mal an der Stelle $x_0 \in I$ differenzierbar. Das Polynom*

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)(x - x_0)^k$$

ist das eindeutig bestimmte Polynom n-ten Grades mit

$$T_n^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0), \quad k = 0, \ldots, n.$$

*T_n heißt **n-tes Taylorpolynom** von f um die Entwicklungsstelle x_0.*

BEWEIS. Wir setzen T_n in der Form

$$T_n(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i(x - x_0)^i, \quad a_i \in \mathbb{R}, \quad i = 0, \ldots, n,$$

an. Es folgt

$$T_n^{(k)}(x) = \sum_{i=k}^{n} \prod_{j=0}^{k-1} (i - j) a_i (x - x_0)^{i-k}$$

und insbesondere

$$T_n^{(k)}(x_0) = \prod_{j=0}^{k-1}(k-j)a_k = k!a_k.$$

Die Bedingung $T_n^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0)$ ergibt dann

$$a_k = \frac{1}{k!}f^{(k)}(x_0), \quad k = 0, \ldots, n.$$

Da Polynome n-ten Grades durch Angabe der $n+1$ Koeffizienten eindeutig bestimmt sind, folgt, daß T_n das einzige Polynom mit den geforderten Eigenschaften ist. □

LEMMA 10.2. *Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f\colon I \to \mathbb{R}$ n-mal an der Stelle $x_0 \in I$ differenzierbar. T_n bezeichne das n-te Taylorpolynom von f an der Stelle x_0. Dann gilt*

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - T_n(x)}{(x-x_0)^n} = 0.$$

BEWEIS. Die Abbildung $R_n(x) := f(x) - T_n(x)$, $x \in I$, ist n mal differenzierbar an der Stelle x_0 und erfüllt

$$R_n^{(k)}(x_0) = 0, \quad k = 0, \ldots, n.$$

Wenden wir die Regel von de L'Hospital $n-1$ mal an erhalten wir

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to x_0} \frac{R_n(x)}{(x-x_0)^n} &= \frac{1}{n!}\lim_{x\to x_0} \frac{R_n^{(n-1)}(x)}{x-x_0} \\
&= \frac{1}{n!}\lim_{x\to x_0} \frac{f^{(n-1)}(x) - T_n^{(n-1)}(x)}{x-x_0} \\
&= \frac{1}{n!}\lim_{x\to x_0} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(x_0) - f^{(n)}(x_0)(x-x_0)}{x-x_0} = 0.
\end{aligned}$$

Die letzte Gleichung folgt aus der Existenz der n-ten Ableitung von f an der Stelle x_0. Wir bemerken, daß eine unmittelbare n-fache Anwendung der Regel von de L'Hospital nicht möglich ist, da $f^{(n)}(x)$ für $x \neq x_0$ nicht zu existieren braucht. □

Dieses Lemma rechtfertigt zwar, ein Taylorpolynom als lokale Approximation von f zu betrachten, gibt aber keine Information über die Größe des Approximationsfehlers. Dies erfordert zusätzliche Glattheit von f (d.h. bessere Differenzierbarkeitseigenschaften):

SATZ 10.3 (Satz von Taylor). *Es sei $f \in C^n([x_0, x], \mathbb{R})$, $x_0 < x$, und es existiere $f^{(n+1)}$ zumindest auf (x_0, x). Dann gibt es für alle $s > 0$ eine Zwischenstelle $\xi \in (x_0, x)$ mit*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}f^{(k)}(x_0)(x-x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{sn!}\left(\frac{x-\xi}{x-x_0}\right)^{n-s+1}(x-x_0)^{n+1}.$$

*Der letzte Summand heißt **Restglied nach Schlömilch**. Eine analoge Aussage gilt auch für $x < x_0$.*

Beweis. Wir gehen aus von der Darstellung

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)(x - x_0)^k + R_n(x),$$

mit einem noch zu bestimmenden Restglied $R_n(x)$. Wir betrachten die Abbildung $F \in C([x_0, x], \mathbb{R})$ definiert durch

$$F(t) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(t)(x - t)^k.$$

Die Abbildung F beschreibt den Fehler bei der approximation von f durch das n-te Taylorpolynom in Abhängigkeit vom Entwicklungszentrum t. Somit gilt

$$(*) \qquad F(x) = 0, \quad F(x_0) = R_n(x).$$

F ist auf (x_0, x) differenzierbar und es ist

$$\begin{aligned} F'(t) &= -f'(t) - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}[f^{(k+1)}(t)(x-t)^k - kf^{(k)}(t)(x-t)^{k-1}] \\ &= -\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} f^{(k+1)}(t)(x-t)^k - \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n + \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{j!} f^{(j+1)}(t)(x-t)^j. \end{aligned}$$

also

$$F'(t) = -\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x - t)^n.$$

Es sei nun $\psi \in C([x_0, x], \mathbb{R})$ eine beliebige, streng monotone Abbildung, differenzierbar auf (x_0, x) mit $\psi'(\xi) \neq 0$ für $\xi \in (x_0, x)$. Wir wenden nun den verallgemeinerten Mittelwertsatz 6.11 auf die Funktionen F und ψ an und erhalten

$$\frac{F(x) - F(x_0)}{\psi(x) - \psi(x_0)} = \frac{F'(\xi)}{\psi'(\xi)}, \quad \text{für ein } \xi \in (x_0, x).$$

Aus $(*)$ folgt somit

$$\begin{aligned} R_n(x) = F(x_0) &= -\frac{F(x) - F(x_0)}{\psi(x) - \psi(x_0)}(\psi(x) - \psi(x_0)) \\ &= -(\psi(x) - \psi(x_0))\frac{F'(\xi)}{\psi'(\xi)} = \frac{\psi(x) - \psi(x_0)}{\psi'(\xi)} \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x - \xi)^n. \end{aligned}$$

Wählt man speziell $\psi(t) = (x - t)^s$, $s > 0$, erhält man die Schlömilchsche Form des Restgliedes

$$R_n(x) = (x - x_0)^s \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{sn!}(x - \xi)^{n-s+1} = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{sn!} \cdot \left(\frac{x - \xi}{x - x_0}\right)^{n-s+1} (x - x_0)^{n+1}.$$

$\square$

Ohne Schwierigkeit ergeben sich nun leichter handhabbare Formen des Restgliedes:

KOROLLAR 10.4. f sei wie in Satz 10.3 und $f(x) = T_n(x) + R_n(x)$. Es gibt eine Zwischenstelle $\xi \in I(x_0, x)$ so, daß R_n folgende Darstellungen besitzt:

i) $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$. (Restglied nach **Lagrange**)

ii) $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}\left(\frac{x-\xi}{x-x_0}\right)^n (x - x_0)^{n+1}$. (Restglied nach **Cauchy**)

BEWEIS. Setze $s = n + 1$ bzw. $s = 1$ in 10.3. □

Wir weisen darauf hin, daß die Zwischenstelle ξ von x_0, x, n und s abhängt. Da der Satz von Taylor keine Information liefert, wo die Zwischenstelle liegt, ist man auf Abschätzungen von $|R_n(x)|$ angewiesen, um beurteilen zu können, wie gut $T_n(x)$ den Funktionswert $f(x)$ approximiert. Oft ist es bei derartigen Abschätzungen zweckmäßig, die Zwischenstelle ξ in der Form

$$\xi = x_0 + \vartheta(x - x_0), \quad \vartheta \in (0, 1),$$

zu schreiben. Setzt man noch $h = x - x_0$ und $R_n^X(h) = R_n(x) = R_n(x_0 + h)$, nimmt der Satz von Taylor folgende Form an:

$$f(x_0 + h) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0) h^k + R_n^X(h), \quad X = S, L, C,$$

mit

$$R_n^S(h) = \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \vartheta h)}{sn!}(1 - \vartheta)^{n-s+1} h^{n+1} \qquad \text{SCHLÖMILCH},$$

$$R_n^L(h) = \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \vartheta h)}{(n+1)!} h^{n+1} \qquad \text{LAGRANGE},$$

$$R_n^C(h) = \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \vartheta h)}{n!}(1 - \vartheta)^n h^{n+1} \qquad \text{CAUCHY}.$$

BEISPIEL 10.5. Als Beispiel betrachten wir die Logarithmusfunktion $f(x) = \ln(1 + x)$ in einer Umgebung von $x_0 = 0$. Man verifiziert induktiv

$$\forall k \in \mathbb{N}\colon f^{(k)}(x) = (-1)^{k-1}(k - 1)!(1 + x)^{-k} \quad \text{und somit}$$
$$\forall k \in \mathbb{N}\colon f^{(k)}(0) = (-1)^{k-1}(k - 1)!.$$

Es gilt daher für alle $h > -1$ die Darstellung

$$\ln(1 + h) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} \frac{h^i}{i} + R_n^L(h).$$

Der Approximationsfehler ist nach Korollar 10.4 gegeben durch

$$R_n^L(h) = (-1)^n \frac{1}{(1 + \vartheta h)^{n+1}} \frac{h^{n+1}}{n + 1}.$$

Für $h > 0$ folgt

$$|R_n^L(h)| < \frac{h^{n+1}}{n + 1},$$

da $1 + \vartheta h > 1$ gilt (eine bessere Abschätzung ist nicht möglich, da ϑ beliebig nahe bei 0 liegen kann). Für $h \in (-1, 0)$ ergibt sich

$$|R_n^L(h)| < \frac{1}{n+1} \frac{|h|^{n+1}}{(1-|h|)^{n+1}}.$$

Diese Abschätzung für $|R_n^L|$ kann sehr schlecht sein, z.B. ergibt sich für $h = -\frac{2}{3}$

$$|R_n^L(-\frac{2}{3})| \leq \frac{2^{n+1}}{n+1},$$

also etwa $|R_9^L(-\frac{2}{3})| \leq \frac{1024}{10}$. Verwenden wir jedoch die Cauchysche Form des Restgliedes, erhalten wir

$$R_n^C(h) = (-1)^n \left(\frac{1-\vartheta}{1+\vartheta h}\right)^n (1+\vartheta h)^{-1} h^{n+1}, \quad \vartheta \in (0,1).$$

Für $h \in (-1, 0)$ folgt nun wegen

$$1 + \vartheta h > 1 - \vartheta \quad \text{ also } \quad 0 < \frac{1-\vartheta}{1+\vartheta h} < 1$$

die Abschätzung

$$(*) \qquad |R_n^C(h)| < \frac{1}{1-|h|} |h|^{n+1}.$$

Für $h = -\frac{2}{3}$ ergibt sich nun die bedeutend bessere Fehlerabschätzung

$$|R_n^C(-\frac{2}{3})| < 3(\frac{2}{3})^{n+1},$$

z.B. $|R_9^C(-\frac{2}{3})| < 0{,}053$.

Beispiel 10.6. Wir entwickeln nun die Potenzfunktion $f(x) = (1+)x^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$, in einer Umgebung von $x_0 = 0$. Für alle $h > -1$ gilt mit dem Restglied nach Lagrange die Darstellung

$$(*) \qquad (1+h)^\alpha = \sum_{k=0}^{n} \binom{\alpha}{k} h^k + \binom{\alpha}{n+1} (1+\vartheta h)^{\alpha-n-1} h^{n+1},$$

in der wir die Definition der Binomialkoeffizienten in naheliegender Weise erweitert haben:

$$\binom{\alpha}{0} := 1, \qquad \forall n \in \mathbb{N}\colon \binom{\alpha}{n} := \frac{1}{n!} \prod_{j=0}^{n-1} (\alpha - j).$$

Induktiv bestätigt man

$$\forall k \in \mathbb{N}\colon f^{(k)}(x) = \prod_{j=0}^{k-1}(\alpha - j)(1+x)^{\alpha-k} = k!\binom{\alpha}{k}(1+x)^{\alpha-k}, \qquad \text{also}$$

$$\forall k \in \mathbb{N}\colon f^{(k)}(1) = \prod_{j=0}^{k-1}(\alpha - j) = k!\binom{\alpha}{k},$$

dies impliziert $(*)$. Als Näherung für $(1+h)^\alpha$ verwendet man oft das 1. Taylorpolynom

$$(1+h)^\alpha \approx 1 + h\alpha, \qquad R_1^L(h) = \binom{\alpha}{2}(1+\vartheta h)^{\alpha-2}h^2$$

(das Symbol „$\approx$" bedeutet ungefähr gleich), insbesondere ergibt sich

$$\sqrt{1+h} \approx 1 + \frac{h}{2}, \quad \frac{1}{\sqrt{1+h}} \approx 1 - \frac{h}{2} \quad (|h| \text{ klein }).$$

Damit der Fehler klein ist, sollte also $|h|$ klein sein. Will man etwa $\sqrt[3]{2}$ berechnen, kann man z.B. von $2 = \frac{2}{x^3}x^3$, $x > 0$, ausgehen. Wir erhalten dann

$$\sqrt[3]{2} = x\sqrt[3]{1 + (\frac{2}{x^3} - 1)}.$$

Damit h klein ist wählen wir x so, daß $\frac{2}{x^3} - 1$ klein ist, z.B. $x = \frac{5}{4}$. Wir erhalten dann

$$\sqrt[3]{2} = \frac{5}{4}\sqrt[3]{1 + \frac{3}{125}} = \frac{5}{4}(1 + \frac{1}{125} + R_1^L(\frac{3}{125})).$$

Da $R_1^L(h)$ für $|h| < 1$ negativ ist $\left(\binom{\frac{1}{3}}{2} = -\frac{1}{9}\right)$, ergibt die Abschätzung

$$|R_1^L(\frac{3}{125})| < \frac{1}{9}(\frac{3}{125})^2$$

die Ungleichungen

$$\frac{5}{4} + \frac{1}{100} - \frac{5}{4}\frac{1}{(125)^2} < \sqrt[3]{2} < \frac{5}{4} + \frac{1}{100},$$

d.h.

$$1,25992 < \sqrt[3]{2} < 1,26.$$

Die Dezimalentwicklung von $\sqrt[3]{2}$ beginnt also mit 1,2599. . .

Als weitere Anwendung des Satzes von Taylor können wir nun die hinreichende Bedingung aus Satz 7.5 für das Auftreten innerer, lokaler Extrema erweitern.

Satz 10.7. *Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $f \in C^{n-1}(I, \mathbb{R})$. Es existiere die $f^{(n)}$ auf I und $f^{(n)}$ sei stetig in $x_0 \in I$. Ader Stelle x_0 gelte*

$$f^{(k)}(x_0) = 0, \quad k = 1, \ldots, n-1 \quad \textit{und} \quad f^{(n)}(x_0) \neq 0.$$

Dann folgt:

(1) *Ist n ungerade, dann liegt in x_0 kein lokales Extremum vor.*

(2) *Ist n gerade, dann liegt in x_0 ein lokales Minimum vor falls $f^{(n)}(x_0) > 0$, und ein lokales Maximum, falls $f^{(n)}(x_0) < 0$.*

Beweis. Unter den Voraussetzungen des Satzes liefert die Taylorsche Formel mit dem Restglied nach Lagrange die Entwicklung

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \frac{f^{(n)}(x_0 + \vartheta h)}{n!} h^n, \quad \vartheta \in (0, 1),$$

aus der man die Behauptung ablesen kann: Wegen der Stetigkeit von $f^{(n)}$ stimmt das Vorzeichen von $f^{(n)}(x_0 + \vartheta h)$ für $|h|$ hinreichend klein mit dem Vorzeichen von $f^{(n)}(x_0) \neq 0$ überein. Ist n ungerade, ändert das Restglied sein Vorzeichen, wenn man h durch $-h$ ersetzt. Es kann an der Stelle x_0 daher kein lokales Extremum vorliegen. Ist hingegen n gerade, dann wird das Vorzeichen des Restgliedes in einer hinreichend kleinen Umgebung von x_0 durch das Vorzeichen von $f^{(n)}(x_0)$ bestimmt. Auf dieser Umgebung gilt dann

$$f(x_0 + h) \geq f(x_0) \qquad \text{falls } f^{(n)}(x_0) > 0$$

bzw.

$$f(x_0 + h) \leq f(x_0) \qquad \text{falls } f^{(n)}(x_0) < 0,$$

was zu beweisen war. □

Die Restgliedabschätzung in Beispiel 10.5 läßt vermuten, daß der Approximationsfehler mit wachsendem Grad n des Taylorpolynoms auf einer immer größer werdenden Umgebung von x_0 immer kleiner wird. Ist $f \in C^\infty$, ist es naheliegend, die Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n$$

zu betrachten.

Definition 10.8. *Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $x_0 \in I$ und $f \in C^\infty(I, \mathbb{R})$. Die Potenzreihe*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n$$

heißt ***Taylorreihe*** *von f um x_0. (Im Falle $x_0 = 0$ ist auch die Bezeichnung* ***Maclaurin Reihe*** *üblich.)*

Die Taylorreihe kann zwar für jedes $f \in C^\infty$ angeschrieben werden, es ergeben sich aber sofort zwei Fragen:

- Für welche x konvergiert die Taylorreihe?
- Stimmt die Summenfunktion der Taylorreihe mit f überein?

Da die Taylorreihe eine Potenzreihe ist, kann die Konvergenzfrage mit den Methoden aus Abschnitt IV-12 vollständig beantwortet werden. Die zweite Frage wird durch folgenden Satz geklärt.

Satz 10.9. *Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $J \subset I$ ein Teilintervall, $x_0 \in J$ und $f \in C^\infty(I, \mathbb{R})$. f wird genau dann auf J durch seine Taylorreihe um x_0 dargestellt, d.h. es gilt*

$$\forall x \in J\colon f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n,$$

wenn für das Restglied $R_n(x)$ in der Taylorschen Formel für alle $x \in J$

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$$

gilt. Insbesondere ist dies der Fall, wenn es positive Konstanten α und M gibt mit

$$\forall x \in J\, \forall n \in \mathbb{N}_0\colon |f^{(n)}(x)| \le \alpha M^n.$$

Beweis. Die erste Behauptung ergibt sich unmittelbar aus der Darstellung

$$f(x) = R_n(x) - T_n(x).$$

Genügt $f^{(n)}$ der angegebenen Abschätzung, ergibt sich

$$|R_n^L(x)| \le \alpha \frac{(M|x - x_0|)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Die rechte Seite ist das $(n+1)$-te Glied der Exponentialreihe für $\alpha e^{M|x-x_0|}$ und strebt daher für $n \to \infty$ nach 0. □

Dieser Satz ist nicht trivial: Es gibt C^∞-Funktionen, die nicht durch ihre Taylorreihe dargestellt werden:

Beispiel 10.10. Wir betrachten die Abbildung $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \le 0 \\ e^{-\frac{1}{x}} & x > 0. \end{cases}$$

Da $x \mapsto \frac{1}{x}$ und $x \mapsto e^x$ beide C^∞-Funktionen auf $\mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$ sind, folgt mit Satz **??** $f \in C^\infty(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \mathbb{R})$. f besitzt aber auch an der Stelle $x = 0$ Ableitungen beliebig hoher Ordnung: Für $x > 0$ gilt nämlich

$$f'(x) = \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}}.$$

Mit Hilfe der Abschätzung

$$(*) \qquad e^{-\frac{1}{x}} \le k! x^k \quad \text{für } x > 0 \text{ und beliebiges } k \in \mathbb{N}$$

folgt

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = 0 \text{ und } \lim_{x\to 0^+} f(x) = 0 = f(0),$$

daher existiert $f'_+(0)$ und es gilt $f'_+(0) = f'_-(0) = 0$. f ist also in $x_0 = 0$ differenzierbar und es gilt $f'(0) = 0$. Induktiv zeigen wir nun: Es gibt Polynome p_n, $\operatorname{grad} p_n = 2n$, sodaß

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} p_n(\frac{1}{x}) e^{-\frac{1}{x}}, & x > 0 \\ 0, & x \le 0. \end{cases}$$

Die Behauptung stimmt für $n = 1$. $f^{(n)}$ besitze nun die angegebene Form. Für $x > 0$ ist $f^{(n)}$ differenzierbar mit

$$f^{(n+1)}(x) = \left(\frac{d}{dx} p_n(\frac{1}{x}) + p_n(\frac{1}{x}) \frac{1}{x^2} \right) e^{-\frac{1}{x}}.$$

$\frac{d}{dx} p_n(\frac{1}{x})$ ist ein Polynom in $\frac{1}{x}$ vom Grade $2n + 1$. Aus $\operatorname{grad}(p_n(\frac{1}{x})\frac{1}{x^2}) = 2n + 2$ folgt $\operatorname{grad}\left(\frac{d}{dx} p_n(\frac{1}{x}) + p_n(\frac{1}{x})\frac{1}{x^2}\right) = 2(n+1)$. Dies beweist die Struktur von $f^{(n)}(x)$ für $x > 0$. Mit $(*)$ für $k > 2n$ folgt aber

$$\lim_{x \to 0^+} f^{(n)}(x) = 0,$$

und daraus wie bei f' auch $f^{(n)}(0) = 0$. Alle Koeffizienten der Taylorreihe von f um 0 sind daher Null. Trivialerweise konvergiert diese Reihe auf ganz $\mathbb{R}$. Da $f(x)$ für $x > 0$ positiv ist, kann die Taylorreihe f an keiner Stelle $x > 0$ darstellen.

Beispiel 10.11. Es sei f die Summenfunktion einer Potenzreihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k(x - x_0)^k$ mit Konvergenzradius $R > 0$. Nach Korollar 8.4 ist $f \in C^\infty((x_0 - R, x_0 + R), \mathbb{R})$ und

$$\forall k \in \mathbb{N}_0 \colon f^{(k)}(x_0) = k! a_k.$$

Die Taylorreihe einer durch eine Potenzreihe mit Entwicklungszentrum x_0 dargestellen Funktion um x_0 stimmt demnach mit der Potenzreihe überein. Dies ist natürlich nicht mehr der Fall, wenn man die Taylorreihe um eine andere Stelle als x_0 betrachtet.

Beispiel 10.12. Wir führen nun die Diskussion der Taylorreihe der Logarithmusfunktion $\ln(1 + x)$, $x > -1$, (vgl. Beispiel 10.5)

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k},$$

zu Ende. Für $x > 0$ wurde in Beispiel 10.5 das Restglied nach Lagrange abgeschätzt durch

$$|R_n^L(x)| < \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

Für $x \in [0, 1]$ gilt daher

$$\lim_{n \to \infty} R_n^L(x) = 0,$$

für $x \in (-1, 0)$ führte die Cauchysche Form des Restgliedes auf

$$|R_n^C(x)| < \frac{1}{1 - |x|} |x|^{n+1},$$

woraus

$$\lim_{n \to \infty} R_n^C(x) = 0$$

folgt. Nach Satz 10.9 ist die Darstellung

$$(*) \qquad \ln(1 + x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k}$$

für alle $x \in (-1, 1]$ gültig. Für $x = -1$ ist $\ln(1 + x)$ nicht definiert, entsprechend divergiert die Taylorreihe. Für $|x| > 1$ ist die Taylorreihe divergent.

Beispiel 10.13 (Binomialreihe). Als weiteres Beispiel betrachten wir die Taylorreihe von $f(x) = (1 + x)^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$, def $f = (-1, \infty)$, in $x_0 = 0$,

$$\sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k,$$

vgl. Beispiel 10.6. Das Restglied nach Cauchy ist für alle $x > -1$ gegeben durch

$$\begin{aligned} R_n^C(x) &= \frac{1}{n!} \prod_{j=0}^{n} (\alpha - j) \left(\frac{1 - \vartheta}{1 + \vartheta x} \right)^n (1 + \vartheta x)^{\alpha - 1} x^{n+1} \\ &= \alpha x \left(\frac{1 - \vartheta}{1 + \vartheta x} \right)^n (1 + \vartheta x)^{\alpha - 1} \prod_{j=1}^{n} [(\frac{\alpha}{j} - 1)x]. \end{aligned}$$

mit $\vartheta = \vartheta(n, x) \in (0, 1)$. Wir fixieren nun x, β so, daß

$$0 < |x| < \beta < 1$$

gilt und wählen $N(\beta) \in \mathbb{N}$ derart, daß für alle $j > N(\beta)$

$$|(\frac{\alpha}{j} - 1)x| < \beta$$

zutrifft. Wir können nun das mögliche Anwachsen von $|\prod_{j=0}^{n} (\alpha - j)|$ folgendermaßen ausgleichen: für $n > N(\beta)$ gilt nämlich

$$\begin{aligned} |\prod_{j=1}^{n} (\frac{\alpha}{j} - 1)x| &= |\prod_{j=1}^{N(\beta)} (\frac{\alpha}{j} - 1)x| \cdot |\prod_{j=N(\beta)+1}^{n} (\frac{\alpha}{j} - 1)x| \\ &\leq (|\alpha| + 1)^{N(\beta)} \beta^{N(\beta)} \cdot \beta^{n - N(\beta)} = (|\alpha| + 1)^{N(\beta)} \beta^n. \end{aligned}$$

Zusammen mit den (bezüglich n gleichmäßigen) Abschätzungen

$$|\frac{1 - \vartheta}{1 + \vartheta x}| < 1$$

und

$$0 < (1 + \vartheta x)^{\alpha - 1} \leq M := \begin{cases} 2^{\alpha - 1} & \text{falls } \alpha \geq 1 \\ (1 - \beta)^{\alpha - 1} & \text{falls } \alpha < 1, \end{cases}$$

erhalten wir endlich

$$|R_n^C(x)| \leq M |\alpha| (|\alpha| + 1)^{N(\beta)} \cdot \beta^{n+1}$$

also $\lim_{n \to \infty} R_n^C(x) = 0$ für $|x| < 1$. Nach Satz 10.9 gilt daher die Darstellung

$$(1 + x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n \qquad \text{(Binomialreihe)}$$

für alle $x \in (-1, 1)$. Als Spezialfall erhält man für $\alpha \in \mathbb{N}$ den binomischen Lehrsatz. Die Untersuchung des Konvergenzverhaltens der Binomialreihe in den Randpunkten des Konvergenzintervalles erfordert Hilfsmittel, die wir nicht entwickelt haben.

Wir betonen noch einmal: Die Bestimmung des Konvergenzradius einer Taylorreihe gibt allgemein keinen Aufschluß darüber, ob eine Funktion durch ihre Taylorreihe tatsächlich dargestellt wird. Die meist erheblich kompliziertere Diskussion des Restgliedes erledigt beide Fragen gleichzeitig. Oft kann diese Diskussion nur auf einer echten Teilmenge J des Konvergenzintervalles K der Taylorreihe durchgeführt werden und es bleibt die Frage offen, ob die Taylorreihe auch auf $K \setminus J$ die Funktion f darstellt. Die Entscheidung, ob dies tatsächlich der Fall ist, erfordert tiefer reichende Methoden der komplexen Analysis.
Die komplizierte Restglieddiskussion kann man manchmal durch eine andere Methode ersetzen:

Beispiel 10.14. Wir betrachten wieder die Taylorreihe von $f(x) = \ln(1 + x)$ um $x_0 = 0$, also die Reihe

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$$

und weisen die Gültigkeit von $f(x) = g(x)$ für $|x| < 1$ nach. Die Reihe konvergiert für $|x| < 1$, somit ist $g \in C^\infty((-1, 1), \mathbb{R})$ und es ist (vgl. Korollar 8.4)

$$g'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} x^{n-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^k = \frac{1}{1+x}, \ |x| < 1.$$

Für $|x| < 1$ gilt also

$$f'(x) - g'(x) = 0,$$

nach Korollar 7.3 gibt es also eine Konstante α mit

$$\forall x \in (-1, 1)\colon f(x) - g(x) = \alpha.$$

Aus $f(0) = g(0) = 0$ folgt $\alpha = 0$ und damit auch die Darstellung

$$\ln(1 + x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} \quad \text{für } x \in (-1, 1).$$

Wir demonstrieren diese Methode noch einmal am Beispiel der Binomialreihe:

Beispiel 10.15. Die Taylorreihe von $f(x) = (x + 1)^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $x > -1$,

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n,$$

konvergiert für $|x| < 1$ und kann dort gliedweise differenziert werden:

$$g'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \binom{\alpha}{n} n x^{n-1} = \alpha \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha - 1}{n} x^n$$

(wir verwenden $n\binom{\alpha}{n} = \alpha\binom{\alpha-1}{n-1}$). Für den Quotienten $h = \frac{g}{f}$ findet man

$$h'(x) = \frac{g'(x)f(x) - \alpha g(x)(1+x)^{\alpha-1}}{f(x)^2} = \frac{\alpha}{f(x)(1+x)}((1+x)g'(x) - \alpha g(x)).$$

Multipliziert man $g'(x)$ mit $(1+x)$, erhält man

$$\begin{aligned}(1+x)g'(x) &= \alpha\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha-1}{n}x^n + \alpha\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha-1}{n}x^{n+1}\\ &= \alpha + \alpha\sum_{n=1}^{\infty}\left[\binom{\alpha-1}{n} + \binom{\alpha-1}{n-1}\right]x^n = \alpha\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}x^n\\ &= \alpha g(x).\end{aligned}$$

(vgl. II-4.21) und somit $h'(x) = 0$ für $|x| < 1$. Also ist h konstant. Aus $h(0) = 1$ folgt dann $f = g$, d.h.

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}x^n \quad \text{für } |x| < 1.$$

Wir beenden diesen Abschnitt mit dem Beispiel einer C^∞-Funktion, deren Taylorreihe nur an der Entwicklungsstelle konvergiert:

Beispiel 10.16. Die Funktion f sei definiert durch

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\cos n^2 x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Diese Reihe konvergiert gleichmäßig auf $\mathbb{R}$, somit ist f stetig auf $\mathbb{R}$. Die Reihe der Ableitungen

$$-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2^n}\sin n^2 x$$

ist ebenfalls gleichmäßig konvergent auf $\mathbb{R}$, da die Majorante $\sum\frac{n^2}{2^n}$ konvergiert. Nach Korollar 8.3 ist f differenzierbar und es gilt

$$f'(x) = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2^n}\sin n^2 x.$$

Ähnlich zeigt man, daß auch sämtliche höheren Ableitungen existieren,

$$\begin{aligned}f^{(2k)}(x) &= (-1)^k\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{4k}}{2^n}\cos n^2 x,\\ f^{(2k+1)}(x) &= (-1)^{k+1}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{4k+2}}{2^n}\sin n^2 x, \quad k \in \mathbb{N}_0.\end{aligned}$$

Wegen $f^{(2k+1)}(0) = 0$, $k \in \mathbb{N}_0$, lautet die Taylorreihe von f um $x_0 = 0$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} f^{(2k)}(0) x^{2k}.$$

Für alle $n, k \in \mathbb{N}$ gilt

$$|f^{(2k)}(0)| = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{j^{4k}}{2^j} > \frac{n^{4k}}{2^n}$$

und somit

$$|\frac{1}{(2k)!} f^{(2k)}(0) x^{2k}| > \frac{(n^2|x|)^{2k}}{2^n (2k)!}.$$

Speziell für $n = 2k$ ergibt sich die Abschätzung

$$|\frac{1}{(2k)!} f^{(2k)}(0) x^{2k}| > \frac{1}{2^{2k}} (2k|x|)^{2k} \frac{(2k)^{2k}}{(2k)!} \geq (k|x|)^{2k},$$

sodaß die Taylorreihe von f für $x \neq 0$ nicht konvergieren kann.

11. Konvexe Funktionen

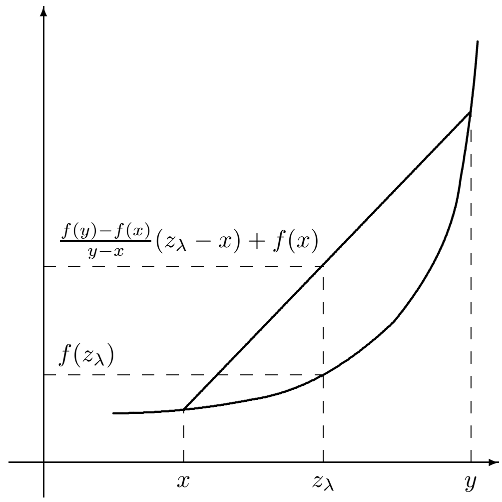
Konvexe Funktionen sind u.a. in der Optimierung von großer Bedeutung. Außerdem verknüpfen sie die zweite Ableitung mindestens zweimal differenzierbarer Funktionen mit einer globalen Eigenschaft dieser Funktion, ähnlich, wie die erste Ableitung einer Funktion Monotonieeigenschaften zum Ausdruck bringt.

Definition 11.1. *Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f: I \to \mathbb{R}$.*

i) *f heißt* ***(streng) konvex*** *(auf I) $\underset{Def}{\Leftrightarrow} \forall x, y \in I$, $x \neq y$, $\forall \lambda \in [0, 1]$:*

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$$
$$(f(\lambda x + (1-\lambda)y) < \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y))$$

ii) *f heißt* ***(streng) konkav*** *(auf I) $\underset{Def}{\Leftrightarrow} -f$ ist (streng) konvex auf I.*



Bemerkung 11.2. Die Konvexitätsbedingung besitzt eine einfache geometrische Veranschaulichung: Es sei $z_\lambda = \lambda x + (1-\lambda)y$, x, y, λ wie in Definition 11.1 und $x < y$. Man verifiziert leicht $z_\lambda \in [x, y]$. Umgekehrt läßt sich jeder Zwischenpunkt $z \in [x, y]$ in der Form

$$z = \underbrace{\frac{y-z}{y-x}}_{\lambda} x + \underbrace{\frac{z-x}{y-x}}_{1-\lambda} y = \lambda x + (1-\lambda)y$$

darstellen. Die Konvexitätsbedingung ist daher gleichwertig mit

$$(*) \qquad f(z_\lambda) \leq \frac{y - z_\lambda}{y-x} f(x) + \frac{z_\lambda - x}{y-x} f(y)$$

$$(27) \qquad = \frac{f(y)-f(x)}{y-x}(z_\lambda - x) + f(x),$$

d.h. f ist konvex genau dann, wenn der Graph von f stets unterhalb der Verbindungsstrecke zweier beliebiger Punkte $(x, f(x))$ und $(y, f(y))$ liegt.

Die Konvexität einer Funktion kann man auch durch Monotonieeigenschaften des Differenzenquotienten charakterisieren.

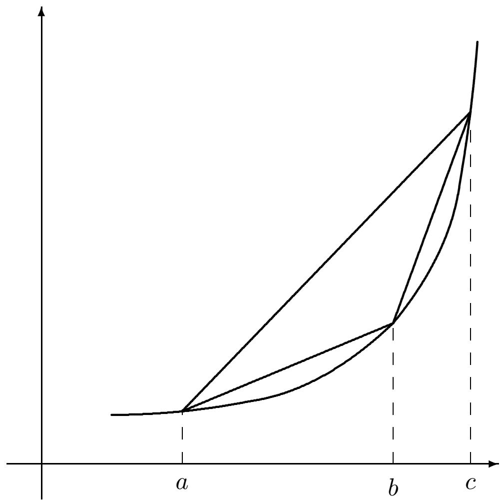
Lemma 11.3. *Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall. 1.) $f\colon I \to \mathbb{R}$ ist genau dann konvex, wenn*

$$\frac{f(z)-f(x)}{z-x} \leq \frac{f(y)-f(z)}{y-z}$$

für alle $x, y, z \in I$ mit $x < z < y$ gilt.
2.) Ist f konvex, dann gilt für jedes derartige Tripel

$$\frac{f(z)-f(x)}{z-x} \leq \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leq \frac{f(y)-f(z)}{y-z}.$$

Im Fall der strengen Konvexität sind die Ungleichungen strikt.



Beweis. ad 1.)Die Konvexitätsbedingung $(*)$ ist gleichwertig mit den Ungleichungen

$$(y-z-(x-z))f(z) \leq (z-x)f(y)+(y-z)f(x),$$

also

$$(y-z)(f(z)-f(x)) \leq (z-x)(f(y)-f(z)).$$

Dies ist äquivalent zur Behauptung.
ad 2.) Es sei

$$z=\lambda y+(1-\lambda)x, \qquad \text{mit } \lambda=\frac{z-x}{y-x}.$$

Da f konvex ist, folgt

$$f(z) \leq \lambda f(y)+(1-\lambda)f(x),$$

somit

$$f(z)-f(x) \leq \lambda(f(y)-f(x))=\frac{z-x}{y-x}(f(y)-f(x)).$$

Dies ergibt

$$\frac{f(z)-f(x)}{z-x} \leq \frac{f(y)-f(x)}{y-x}.$$

Ersetzt man λ durch $\mu=1-\lambda=\frac{y-z}{y-x}$, erhält man

$$f(z) \leq \mu f(x)+(1-\mu)f(y)$$

und daraus folgt wie vorhin die zweite Ungleichung. □

Für differenzierbare Funktionen kann dieses Resultat folgendermaßen verschärft werden.

Satz 11.4. *Es sei $f \in C([a,b],\mathbb{R})$ differenzierbar in (a,b). Dann ist f genau dann (streng) konvex, wenn f' (streng) monoton wächst.*

Beweis. Es sei f konvex. Dann gilt für $a \leq x < z < y \leq b$

$$\frac{f(z)-f(x)}{z-x} \leq \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leq \frac{f(y)-f(z)}{y-z}.$$

Führt man in der ersten Ungleichung den Grenzübergang $z \downarrow x$, in der zweiten den Grenzübergang $z \uparrow y$ durch erhält man

$$f'(x) \leq \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leq f'(y),$$

d.h. f' ist monoton wachsend. Ist f streng konvex, dann sind die Differenzenquotienten streng monoton fallend, bzw. steigend, was $f'(x) < f'(y)$ zur Folge hat.
Ist umgekehrt f' monoton wachsend, folgt wegen Lemma 11.3 die Konvexität von f aus der Ungleichung

$$\frac{f(z)-f(x)}{z-x} \leq \frac{f(y)-f(z)}{y-z},$$

falls $a \leq x < z < y \leq b$. Wegen des Mittelwertsatzes gibt es Zwischenstellen $x < z_x < z < z_y < y$ mit

$$\frac{f(z)-f(x)}{z-x} = f'(z_x),$$
$$\frac{f(y)-f(z)}{y-z} = f'(z_y).$$

Die gewünschte Ungleichung für die Differenzenquotienten folgt nun aus der Monotonie von f'. $\square$

Korollar 11.5. Es sei $f \in C([a,b],\mathbb{R})$ zwei Mal differenzierbar in (a,b). Dann ist f genau dann konvex, wenn $f''(x) \geq 0$ für alle $x \in (a,b)$. Ist $f''(x) > 0$ für alle $x \in (a,b)$, dann ist f streng konvex.

Mit Hilfe dieses Kriteriums ergibt sich nun leicht, daß z.B. die Abbildungen

$$x \mapsto e^x, \quad x \mapsto e^{-x}, \quad x \in \mathbb{R},$$
$$x \mapsto x^\alpha, \quad \alpha > 1, \qquad x \in \mathbb{R}^+,$$

streng konvex sind, und die Abbildung

$$x \mapsto \ln x, \qquad x > 0,$$

streng konkav ist.

Wir können nun auch die geometrische Anschauung untermauern, daß der Graph einer konvexen Funktion immer oberhalb der Tangente liegt:

Satz 11.6. *Es sei $f \in C([a,b],\mathbb{R})$ konvex auf $[a,b]$ und differenzierbar in $[a,b]$. Dann gilt für alle $x_0 \in [a,b]$*

$$f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0), \qquad x \in [a,b].$$

Die Ungleichung ist strikt für $x \neq x_0$, wenn f streng konvex ist.

Beweis. Für $x_0 \in (a,b]$ und $a < x < y < x0 \leq b$ gilt

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leq \frac{f(y)-f(x_0)}{y-x_0}.$$

Führt man den Grenzübergang $y \uparrow x_0$ durch erhält man

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leq f'(x_0)$$

und daraus

$$f(x)-f(x_0) \geq f'(x_0)(x-x_0).$$

Analog argumentiert man für $a \leq x_0 < y < x \leq b$. □

Satz 11.7 (Jensensche Ungleichung). *Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f\colon I \to \mathbb{R}$ konvex. Ferner seien $x_j \in I$, $\lambda_j > 0$, $j = 1,\dots,n$, und $\sum\limits_{j=1}^{n} \lambda_j = 1$. Dann gilt*

$$f(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j) \leq \sum_{j=1}^{n} \lambda_j f(x_j).$$

Ist f streng konvex, gilt die Gleichheit genau dann, wenn $x_1 = \cdots = x_n$

Beweis. Für $n = 1$ ist die Aussage trivial ($\lambda_1 = 1$). Die Behauptung sei nun richtig für n und es sei $x_i \in I$, $\lambda_i > 0$ $i = 1,\dots,n+1$ und es gelte $\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1$. Wir setzen

$$s = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i, \qquad x_0 = \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{s} x_i$$

Es folgt

$$\begin{aligned} f(\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i) &= f(sx_0 + \lambda_{n+1}x_{n+1}) \\ &\overset{(*)}{\leq} sf(x_0) + \lambda_{n+1} f(x_{n+1}) \\ &\overset{(\dagger)}{\leq} s\sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{s} f(x_i) + \lambda_{n+1} f(x_{n+1}) = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i f(x_i) \end{aligned}$$

Die erste Ungleichung folgt aus der Konvexität von f, die zweite Ungleichung ergibt sich aus der Induktionsvoraussetzung. Ist f streng konvex und

$$f(\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i) = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i f(x_i)$$

dann ergibt die mit $(*)$ markierte Ungleichung

$$f(sx_0 + \lambda_{n+1}x_{n+1}) = sf(x_0) + \lambda_{n+1} f(x_{n+1}).$$

Wegen der strengen Konvexität von f muß $x_0 = x_{n+1}$ gelten. Ferner ist die mit (†) markierte Ungleichung eine Gleichheit, welche

$$f(\sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{s} x_i) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{s} f(x_i)$$

zur Folge hat. Aus der Induktionsannahme ergibt sich dann

$$x_1 = \ldots, = x_n = x,$$

also auch

$$x_0 = x$$

und daher auch $x_{n+1} = x$. □

Korollar 11.8 (Ungleichung zwischen arithmetischem und geometrischem Mittel). Sind $x_1, \ldots, x_m$ und $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ beliebige positive reelle Zahlen mit $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$, dann gilt

$$\prod_{i=1}^{n} x_i^{\lambda_i} \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i.$$

Insbesondere gilt

$$\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i} \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i.$$

Das Gleichheitszeichen steht jeweils genau dann, wenn $x_1 = \cdots = x_n$.

Beweis. Da der natürliche Logarithmus streng konkav ist, ergibt die Jensensche Ungleichung

$$\ln(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i) \geq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \ln x_i.$$

Die erste Behauptung folgt nun durch Anwendung der Exponentialfunktion. Die Aussage zur Gleichheit ergibt sich aus der strengen Konkavität des natürlichen Logarithmus. Für die zweite Behauptung setzt man $\lambda_i = \frac{1}{n}$, $i = 1, \ldots, n$. □

Wir verwenden nun die Ungleichung zwischen arithmetischem und geometrischen Mittel, um die Ungleichung von Cauchy- Schwarz zu verallgemeinern. Zu diesem Zweck setzen wir für $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ und $p \geq 1$

$$||x||_p = (\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p)^{1/p}. \tag{28}$$

Korollar 11.9 (Höldersche Ungleichung). Es seien p, $q > 1$ reelle Zahlen mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Dann gilt für beliebige Vektoren x, $y \in \mathbb{K}^n$

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i y_i| \leq ||x||_p ||y||_q.$$

Reelle Zahlen p, $q > 1$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ nennt man **konjugiert**.

Beweis. O.B.d.A. können wir $x \neq 0$ und $y \neq 0$ annehmen. Nach der Ungleichung zwischen arithmetischem und geometrischem Mittel gilt

$$\frac{|x_i|}{||x||_p} \frac{|y_i|}{||y||_q} = (\frac{|x_i|^p}{||x||_p^p})^{1/p} (\frac{|y_i|^q)}{||y||_q^q})^{1/q} \leq \frac{1}{p} \frac{|x_i|^p}{||x||_p^p} + \frac{1}{q} \frac{|y_i|^q}{||y||_q^q},$$

für $i = 1, \ldots, n$. Addiert man diese Ungleichungen ergibt sich

$$\frac{\sum_{i=1}^n |x_i y_i|}{||x||_p ||y||_q} \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

□

Man beachte, daß sich für $p = q = 2$ die Ungleichung von Cauchy-Schwarz ergibt. Abschließend diskutieren wir eine Verallgemeinerung der Dreiecksungleichung.

Korollar 11.10 (Minkowski Ungleichung). Für beliebige Vektoren x, $y \in \mathbb{K}^n$ und $p \geq 1$ gilt

$$||x + y||_p \leq ||x||_p + ||y||_p.$$

Beweis. Für $p = 1$ ist die Ungleichung eine Folge der Dreiecksungleichung. Es sei also $p > 1$. Multipliziert man die Dreiecksungleichung

$$|x_k + y_k| \leq |x_k| + |y_k|,$$

mit $s_k = |x_k + y_k|^{p-1}$, $k = 1, \ldots, n$ ergibt sich

$$|x_k + y_k|^p \leq |x_k| s_k + |y_k| s_k.$$

Durch Addition dieser Ungleichungen erhält man

$$||x + y||_p^p \leq \sum_{k=1}^n |x_k| s_k + \sum_{k=1}^n |x_k| s_k.$$

Wendet man auf der rechten Seite die Höldersche Ungleichung an, folgt

$$||x + y||_p^p \leq (||x||_p + ||y||_p)(\sum_{k=1}^n |x_k + y_k|^{(p-1)q})^{1/q}$$

mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Somit gilt $(p-1)q = p$ und

$$(\sum_{k=1}^n |x_k + y_k|^{(p-1)q})^{1/q} = ||x + y||_p^{p/q}.$$

Dies führt auf die Ungleichung

$$||x + y||_p^{p - p/q} \leq ||x||_p + ||y||_p.$$

Wegen $p - p/q = 1$ folgt die Behauptung. □

12. Der Satz von Taylor für Funktionen in mehreren Veränderlichen

Es sei $f \in C^{n+1}(u, \mathbb{R})$, $U \subset \mathbb{R}^n$ offen, $x_0 \in U$ und $h = (\sigma_1, \ldots, \sigma_m)$ so, daß die Verbindungsstrecke von x_0 und $x_0 + h$ in U liegt. Man kann dann den Satz von Taylor für Funktionen in mehreren Veränderlichen zurückführen auf den Satz von Taylor für Funktionen in einer Veränderlichen: dazu parametrisiert man die Gerade durch die Punkte x_0 und $x_0 + h$ durch $\varphi\colon (-\delta, 1+\delta) \to \mathbb{R}^m$, $\varphi(t) = x_0 + th$ und setzt

$$F = f \circ \varphi\colon (-\delta, 1+\delta) \to \mathbb{R}$$

für ein hinreichend kleines $\delta > 0$. Die Kettenregel sichert dann die Differenzierbarkeit von F und es gilt

$$F'(t) = f'(\varphi(t)) \circ \varphi'(t) = \sum_{i=1}^{m} (\partial_i f)(\varphi(t)) \sigma_i.$$

Für $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ wurde die abkürzende Schreibweise $\partial_i f$ verwendet. Setzt man $g_1 = \sum_{i=1}^m \sigma_i \partial_i f$, dann ist $g_1 \in C^n(U, \mathbb{R})$ und $F' = g_1 \circ \varphi$. Die Funktion g_1 besitzt somit zumindest stetige partielle Ableitungen 1. Ordnung und ist nach Satz 7.9 differenzierbar. Somit existiert F'' und es gilt

$$\begin{aligned} F''(t) = g_1'(\varphi(t)) \circ \varphi'(t) &= \sum_{i=1}^{m} (\partial_i g_1)(\varphi(t)) \sigma_i \\ &= \sum_{i=1}^{m} \sigma_i \partial_i (\sum_{j=1}^{m} \sigma_j \partial_j f)(\varphi(t)) \\ &= \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} \sigma_i \sigma_j (\partial_i \partial_j f)(\varphi(t)) \equiv (g_2 \circ \varphi)(t), \end{aligned}$$

mit

$$g_2 = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} \sigma_i \sigma_j (\partial_i \partial_j f).$$

Es folgt $g_2 \in C^{n-1}(U, \mathbb{R})$ und wie vorhin schließt man auf die Existenz von F'''. Um die höheren Ableitungen von F übersichtlich anschreiben zu können, betrachten wir die lineare Abbildung

$$D_h\colon \begin{cases} C^k(U, \mathbb{R}) \to C^{k-1}(U, \mathbb{R}), & k = 1, \ldots, n+1 \\ D_h u = \sum_{i=1}^m \sigma_i \partial_i u \end{cases}$$

Dann kann man F' schreiben als

$$F' = (D_h f) \circ \varphi.$$

Wir zeigen induktiv

$$(*) \qquad F^{(k)} = (D_h^k f) \circ \varphi.$$

Der Induktionsschritt verläuft folgendermaßen: Es gelte $(*)$. Da in D_h^k nur partielle Ableitungen k-ter Ordnung auftreten, gilt $D_h^k f \in C^{n+1-k}(U,\mathbb{R})$. Insbesondere ist D_h^k nach Satz 7.9 differenzierbar und somit existiert $F^{(k+1)}$. Die Kettenregel ergibt

$$\begin{aligned}F^{(k+1)}(t) &= \frac{d}{dt}((D_h^k f)(\varphi(t)) \\ &= (\sum_{i=1}^m \sigma_i \partial_i D_h^k f)(\varphi(t)) = (D_h(D_h^k f)(\varphi(t)) \\ &= (D_h^{k+1} f)(\varphi(t)).\end{aligned}$$

F ist demnach $n+1$-mal differenzierbar und es folgt mit dem Satz von Taylor 10.3

$$F(1) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} F^{(k)}(0) + \frac{1}{(n+1)!} F^{(n+1)}(\vartheta),$$

also

$$f(x_0+h) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}(D_h^k f)(x_0) + \frac{1}{(n+1)!}(D_h^{n+1} f)(x_0+\vartheta h),$$

für ein $\vartheta \in (0,1)$. In jedem der Terme

$$D_h^k f = (\sum_{i=1}^m \sigma_i \partial_i)^k f$$

kommen alle m^k partiellen Ableitungen der Ordnung k vor. Für $f \in C^{n+1}(U,\mathbb{R})$ sind nach dem Satz von Schwarz, Satz 9.6, alle Ableitungen gleich, in welchen beispielsweise α_1-mal nach x_1, …, α_m-mal nach x_m abgeleitet wird. Mit Hilfe von Multiindices kann man diese Terme zusammenfassen. Ein Multiindex der Dimension m ist ein m-Tupel $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m) \in \mathbb{N}_0^m$. Folgende Notation ist üblich:

$$\begin{aligned}|\alpha| &= \sum_{i=1}^m \alpha_i, \\ \alpha! &= \prod_{i=1}^m \alpha_i!, \\ h^\alpha &= \prod_{i=1}^m \sigma_i^{\alpha_i}, \qquad \text{für } h = (\sigma_1, \dots, \sigma_m) \\ \partial_\alpha &= \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_m^{\alpha_m}}.\end{aligned}$$

Beispiel 12.1. Es sei $m = 3$ und $\alpha = (2,0,1)$. Dann ist $|\alpha| = 3$, $\alpha! = 2!0!1! = 2$, $h^\alpha = \sigma_1^2\sigma_2^0\sigma_3^1 = \sigma_1^2\sigma_3$ und $\partial_\alpha f = \partial_{(2,0,1)} f = \frac{\partial^3}{\partial x_1^2 \partial x_3}$.

Lemma 12.2. *Es gilt*

$$D_h^k f = (\sum_{i=1}^{m} \sigma_i \partial_i)^k f = \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!} h^\alpha \partial_\alpha f.$$

Beweis. Die Gültigkeit der Behauptung ergibt sich aus dem Multinomialsatz (einer Verallgemeinerung des binomischen Lehrsatzes auf m Summanden). Man kann sie auch folgendermaßen einsehen: Es sei $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$ ein beliebiger Multiindex der Länge k. Die einzelnen Summanden von $D_h^k f$ haben die Form

$$\sigma_{i_1} \cdots \sigma_{i_k} \frac{\partial^k}{\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_k}},$$

$1 \le i_j \le m$, $j = 1, \ldots, k$. Man faßt jene zusammen, welche gleich $h^\alpha \partial_\alpha f$ sind. Das sind jene, bei welchen unter den Indices $(i_1, \ldots, i_k)$ der Index j genau α_j-mal vorkommt, $j = 1, \ldots, m$. Es treten genau $k!$ derartiger Summanden in $D_h^k f$ auf. Wir unterteilen diese Summanden in m disjunkte Gruppen, die sich durch die Reihenfolge der partiellen Ableitungen unterscheiden. Jede Gruppe ist durch eine bestimmte Abfolge der partiellen Ableitungen charakterisiert. Jedem Ableitungsmuster einer Gruppe entsprechen $\alpha!$ Summanden, da ja die partiellen Ableitungen nach der i-ten Variablen permutiert werden können, ohne die Abfolge der Ableitungen zu verändern. Somit folgt $k! = m\alpha!$, also $m = \frac{k!}{\alpha!}$, da auf diese Weise alle der Ableitung $\partial_\alpha f$ entsprechenden Summanden in $D_h^k f$ erfasst werden. □

Bisher wurde somit gezeigt:

Satz 12.3 (Satz von Taylor). *Es sei $f \in C^{n+1}(U, \mathbb{R})$, $U \subset \mathbb{R}^m$ offen, $x_0 \in U$ und $h = (\sigma_1, \ldots, \sigma_m)$ so, daß die Verbindungsstrecke von x_0 und $x_0 + h$ in U liegt. Dann gibt es ein $\vartheta \in (0, 1)$ so, daß*

$$\begin{aligned} f(x_0 + h) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} (D_h^k f)(x_0) + \frac{1}{(n+1)!} (D_h^{n+1} f)(x_0 + \vartheta h) \\ &= \sum_{|\alpha| \le n} \frac{h^\alpha}{\alpha!} (\partial_\alpha f)(x_0) + \sum_{|\alpha|=n+1} \frac{h^\alpha}{\alpha!} (\partial_\alpha f)(x_0 + \vartheta h). \end{aligned}$$

Beispiel 12.4. Für $m = 2$ und $f \in C^3(U, \mathbb{R})$ erhalten wir

$$\begin{aligned} f(x_0 + h) &= f(x_0) + \sigma_1 f_x(x_0) + \sigma_2 f_y(x_0) \\ &\quad + \frac{1}{2!} (\sigma_1^2 f_{xx}(x_0) + 2\sigma_1\sigma_2 f_{xy}(x_0) + \sigma_2^2 f_{yy}(x_0)) + R_2(h) \\ R_2(h) &= \frac{1}{3!} (\sigma_1^3 f_{xxx}(x_0 + \vartheta h) + 3\sigma_1^2 \sigma_2 f_{xxy}(x_0 + \vartheta h) \\ &\quad + 3\sigma_1 \sigma_2^2 f_{xyy}(x_0 + \vartheta h) + \sigma_2^3 f_{yyy}(x_0 + \vartheta h)). \end{aligned}$$

Man überzeuge sich davon, daß die Verwendung von Multiindices auf dasselbe Resultat führt. Es treten folgende Multiindices auf

$$\begin{array}{lllll} k=0: & (0,0) & & & \\ k=1: & (1,0), & (0,1) & & \\ k=2: & (2,0), & (1,1), & (0,2) & \\ k=3: & (3,0), & (2,1), & (1,2), & (0,3). \end{array}$$

Bemerkung 12.5. Es wurde eingangs gezeigt, daß für eine C^{n+1}-Funktion f die Funktionen $D_h^k f$, $k=1,\dots,n$, differenzierbar sind. Wir geben nun eine neue Interpretation von $D_h^k f$. Wegen

$$f'(x)h = \sum_{i=1}^m \sigma_i (\partial_i f)(x)$$

kann man

$$f'(x)h = (D_h f)(x)$$

schreiben. Differenziert man $x \to f'(x)h$ noch einmal (mit Inkrement h) erhält man

$$(f'(x)h)'h = (D_h^2 f)(x).$$

Anstelle von $(f'(x)h)'h$ schreibt man üblicherweise $f''(x)(h,h)$. Induktiv fortfahrend überzeugt man sich von der Beziehung

$$f^{(k)}(x)(h,\dots,h) = (D_h^k f)(x).$$

Somit läßt sich der Satz von Taylor auch in der vertrauten Form anschreiben

$$f(x_0+h) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)\underbrace{(h,\dots,h)}_{k \text{ fach}} + \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x_0+\vartheta h)\underbrace{(h,\dots,h)}_{(n+1) \text{ fach}}.$$

Definition 12.6. *Es sei $f\colon U \to \mathbb{R}$, $U \subset \mathbb{R}^m$ offen, zweimal stetig differenzierbar. Die Matrix*

$$\mathcal{H}_f(x_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial \xi_1^2}(x_0) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial \xi_m \partial \xi_1}(x_0) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial \xi_1 \partial \xi_m}(x_0) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial \xi_m^2}(x_0) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m\times m}$$

*heißt **Hesse Matrix** von f an der Stelle x_0.*

Für eine C^2-Funktion ist die Hesse-Matrix nach dem Satz von Schwarz symmetrisch. Mit ihrer Hilfe kann man den Term 2. Ordnung in der Taylorentwicklung darstellen als

$$\frac{1}{2}(D_h^2 f)(x_0) = \frac{1}{2} h^T \mathcal{H}_f(x_0) h.$$

Die Taylorentwicklung einer C^2-Funktion f kann man daher auch folgendermaßen anschreiben:

$$f(x_0+h) = f(x_0) + \langle \operatorname{grad} f(x_0), h\rangle + \frac{1}{2} h^T \mathcal{H}_f(x_0+\vartheta h) h.$$

Satz 12.7. *Es sei* $f \in C^2(U)$, $U \subset \mathbb{R}^m$ *offen,* $x_0 \in U$ *und* $K(x_0, \varepsilon) \subset U$. *Dann gibt es eine Abbildung* $\rho\colon K(0,\varepsilon) \to \mathbb{R}$ *so, daß für alle* $h \in K(0,\varepsilon)$ *die Darstellung gilt:*

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + \frac{1}{2} h^T \mathcal{H}_f(x_0) h + \|h\|^2 \rho(h)$$

mit $\lim_{h\to 0} \rho(h) = 0$.

Beweis. Aus dem Satz von Taylor folgt mit $h = (\sigma_1, \ldots, \sigma_m)$

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^{m} \frac{\partial^2 f(x_0)}{\partial \xi_i \partial \xi_k} \sigma_i \sigma_k + r(h)$$

wobei

$$r(h) = \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^{m} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial \xi_i \partial \xi_k}(x_0 + \theta h) - \frac{\partial^2 f(x_0)}{\partial \xi_i \partial \xi_k} \right) \sigma_i \sigma_k .$$

Die Behauptung folgt aus der Abschätzung

$$|r(h)| \le \frac{1}{2} ||h||_\infty^2 \sum_{i,k=1}^{m} \Big| \frac{\partial^2 f}{\partial \xi_i \partial \xi_k}(x_0 + \theta h) - \frac{\partial^2 f}{\partial \xi_i \partial \xi_k}(x_0) \Big| \equiv ||h||_\infty^2 \, \rho(h).$$

und der Stetigkeit der zweiten partiellen Ableitungen. □

13. Lokale Extrema für Funktionen in mehreren Veränderlichen

Wir haben bereits in Satz 6.2 gesehen, daß eine notwendige Bedingung für das Auftreten eines lokalen Extremums einer differenzierbaren Funktion f an einer inneren Stelle x_0 des Definitionsbereiches $f'(x_0) = 0$ ist. Man nennt die Nullstellen der 1. Ableitung auch **kritische Stellen**. Ist $\operatorname{def} f \subset \mathbb{R}^m$, dann ist $x_0 \in \operatorname{def} f$ genau dann kritisch, wenn $\operatorname{grad} f(x_0) = 0$ ist, also x_0 das nichtlinearen Gleichungssystem

$$f_{x_i}(x) = 0, \quad i = 1, \ldots, m$$

löst.

Wie im skalaren Fall läßt sich die Natur eines lokalen Extremums unter bestimmten Voraussetzungen am quadratischen Term in der Taylorformel ablesen. Dazu benötigen wir einige Eigenschaften quadratischer Formen. Wir erinnern: Es sei $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times m}$, die Abbildung $Q_A\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$,

$$Q_A(x) = x^T A x = \sum_{i,j=1}^{m} a_{ij} \xi_i \xi_j$$

heißt **quadratische Form**. Offenbar gilt

$$(*) \qquad Q_A(\lambda x) = \lambda^2 Q_A(x)$$

für alle $\lambda \in \mathbb{R}$. Gilt für alle $x \neq 0$

$$Q_A(x) > 0 \quad (\text{bzw. } Q_A(x) < 0),$$

nennt man A **positiv definit** (bzw. **negativ definit**). Gilt für alle $x \in \mathbb{R}^m$

$$Q_A(x) \geq 0 \quad (\text{bzw. } Q_A(x) \leq 0),$$

heißt A **positiv semidefinit** (bzw. **negativ semidefinit**). Nimmt Q_A sowohl positive wie negative Werte an, nennt man A **indefinit**.
Ohne Beweis zitieren wir folgendes Definitheitskriterium.

Satz 13.1 (Hurwitz-Kriterium). *$A \in \mathbb{R}^{m\times m}$ sei symmetrisch, d.h. $A = A^T$. Wir bezeichnen mit δ_k den k-ten Hauptminor von A, d.h.*

$$\delta_k = \det \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{kk} \end{pmatrix}, \quad k = 1, \dots, m.$$

Dann gilt

a) *A ist positiv definit $\Leftrightarrow \delta_k > 0$, $k = 1, \dots, m$.*
b) *A ist negativ definit $\Leftrightarrow$ die Vorzeichen von δ_k alternieren in folgender Weise: $(-1)^k\delta_k > 0$, $k = 1, \dots, m$.*
c) *A ist indefinit, falls $\delta_k \neq 0$, $k = 1, \dots, m$, und weder a) noch b) zutrifft.*

Korollar 13.2. Es sei $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} = A^T$, $\det A = ac - b^2$. Dann gilt

a) A ist positiv definit $\Leftrightarrow a > 0, \det A > 0$.
b) A ist negativ definit $\Leftrightarrow a < 0, \det A > 0$.
c) A ist indefinit $\Leftrightarrow \det A < 0$.

Lemma 13.3. *Für $A \in \mathbb{R}^{m\times m}$ sind folgende Aussagen äquivalent:*

(1) *A ist positiv (negativ) definit.*
(2) *Es gibt ein $\alpha > 0$ derart, daß für alle $x \in \mathbb{R}^m$ gilt:*

$$Q_A(x) \geq \alpha\|x\|^2 \quad (Q_A(x) \leq -\alpha\|x\|^2)$$

Beweis. Wegen $Q_{-A}(x) = -Q_A(x)$ ist A genau dann negativ definit, wenn $-A$ positiv definit ist.
(2) $\Rightarrow$ (1) trivial.
(1) $\Rightarrow$ (2) Es sei A positiv definit. $Q_A \colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ ist stetig (Übung) und nimmt daher auf der kompakten Menge $S(0,1) := \{x \in \mathbb{R}^n \colon \|x\| = 1\}$ ein Minimum an, d.h. es gibt $x_0 \in S(0,1)$ so, daß für alle $x \in S(0,1)$

$$Q_A(x) \geq Q_A(x_0) = \alpha > 0$$

erfüllt ist (die strikte Ungleichung gilt, da A positiv definit ist). Für beliebige $x \neq 0$ bilden wir den Vektor $z_x = \frac{x}{\|x\|} \in S(0,1)$. Es folgt

$$\alpha \leq Q_A(z_x) = Q_A(\frac{x}{\|x\|}) = \frac{1}{\|x\|^2} Q_A(x)$$

d.h.

$$\alpha\|x\|^2 \leq Q_A(x), \quad x \neq 0.$$

Für $x = 0$ ist die Ungleichung trivialerweise erfüllt. $\square$

SATZ 13.4 (Hinreichende Optimalitätsbedingung). *Es sei $f \in C^2(U)$, $U \subset \mathbb{R}^m$ offen, und $x_0 \in U$ ein kritischer Punkt von f, d.h. $f'(x_0) = 0$. Dann gilt:*

i) $\mathcal{H}_f(x_0)$ *positiv definit* $\Rightarrow f$ *besitzt in x_0 ein striktes lokales Minimum.*
ii) $\mathcal{H}_f(x_0)$ *negativ definit* $\Rightarrow f$ *besitzt in x_0 ein striktes lokales Maximum.*
iii) $\mathcal{H}_f(x_0)$ *indefinit* $\Rightarrow f$ *besitzt in x_0 kein lokales Extremum.*

Kritische Punkte von f in denen die Hesse-Matrix indefinit ist, nennt man auch **Sattelpunkte**.

BEWEIS. ad i) Wir bezeichnen mit Q die zur Matrix $\frac{1}{2}\mathcal{H}_f(x_0)$ gehörige quadratische Form. Da x_0 ein kritischer Punkt von f ist, folgt nach Satz 12.7

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = Q(h) + \|h\|^2 \rho(h)$$

für alle $h \in K(0, \varepsilon)$, ε hinreichend klein, mit

$$\lim_{h \to 0} \rho(h) = 0. \tag{1}$$

Mit der Eigenschaft $(*)$ quadratischer Formen schließen wir für $h \neq 0$ auf

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{\|h\|^2} = Q(\frac{h}{\|h\|}) + \rho(h). \tag{2}$$

$\mathcal{H}_f(x_0)$ ist positiv definit, nach Lemma 13.3 gibt es also ein $\alpha > 0$ mit

$$Q(x) \geq \alpha > 0 \quad \text{für alle } x \in S(0, 1).$$

Wegen (1) gibt es ein $0 < \delta < \varepsilon$ so, daß für alle $h \in K(0, \delta)$

$$|\rho(h)| < \frac{\alpha}{2}$$

erfüllt ist. Für $h \in K(0, \delta)$ ergibt sich daher

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{\|h\|^2} \geq \alpha + \rho(h) \geq \alpha - |\rho(h)| \geq \alpha - \frac{\alpha}{2} = \frac{\alpha}{2},$$

d.h.

$$f(x_0 + h) - f(x_0) \geq \frac{\alpha}{2}\|h\|^2.$$

Insbesondere gilt also für alle $x \in K(x_0, \delta)$

$$f(x) \geq f(x_0),$$

f besitzt somit in x_0 ein striktes lokales Minimum.
ii) (Übung).
iii) Es sei $\mathcal{H}_f(x_0)$ indefinit. Es gibt also von 0 verschiedene Vektoren h_+ und h_- mit

$$Q(h_+) > 0 \quad \text{und} \quad Q(h_-) < 0.$$

Ersetzen wir in (2) h durch λh_+, bzw. λh_-, $\lambda \neq 0$, ergibt sich

$$\begin{aligned}\frac{f(x_0+\lambda h_\pm)-f(x_0)}{\lambda^2\|h_\pm\|^2} &= Q(\frac{\lambda h_\pm}{\|\lambda h_\pm\|}) + \rho(\lambda h_\pm)\\ &= \frac{\lambda^2}{\|\lambda h_\pm\|^2}Q(h_\pm) + \rho(\lambda h_\pm) = \frac{1}{\|h_\pm\|^2}Q(h_\pm)+\rho(\lambda h_\pm).\end{aligned}$$

Wählen wir nun $0 < \delta$ so klein, daß für alle $|\lambda| < \delta$

$$x_0 + \lambda h_\pm \in U,$$

und

$$|\rho(\lambda h_\pm)| \leq \frac{1}{2}\frac{1}{\|h_\pm\|^2}|Q(h_\pm)|,$$

erfüllt sind, dann erhalten wir für alle $0 < |\lambda| < \delta$

$$\begin{aligned}\frac{f(x_0+\lambda h_+)-f(x_0)}{\lambda^2\|h_+\|} &\geq \frac{1}{2}\frac{1}{\|h_+\|^2}Q(h_+) > 0,\\ \frac{f(x_0+\lambda h_-)-f(x_0)}{\lambda^2\|h_+\|} &\leq -\frac{1}{2}\frac{1}{\|h_-\|^2}|Q(h_-)| < 0,\end{aligned}$$

also

$$f(x_0+\lambda h_+) \geq f(x_0) \quad \text{und} \quad f(x_0+\lambda h_-) \leq f(x_0).$$

f kann also in x_0 kein lokales Extremum besitzen. □

Im speziellen Fall von Funktionen in zwei Veränderlichen ist die Anwendung der hinreichenden Bedingungen aus Satz 13.4 besonders einfach.

Satz 13.5. *Es sei $f \in C^2(D)$, $D \subset \mathbb{R}^2$ offen, und $x_0 \in D$ sei ein kritischer Punkt von f. Ferner sei*

$$\delta = \det \mathcal{H}_f(x_0) = f_{\xi\xi}(x_0)f_{\eta\eta}(x_0) - f_{\xi\eta}(x_0)^2.$$

Dann gilt

i) $f_{\xi\xi}(x_0) > 0, \delta > 0 \Rightarrow$ *f besitzt in x_0 ein striktes lokales Minimum,*
ii) $f_{\xi\xi}(x_0) < 0, \delta > 0 \Rightarrow$ *f besitzt in x_0 ein striktes lokales Maximum,*
iii) $\delta < 0 \Rightarrow$ *f besitzt in x_0 einen Sattelpunkt.*

Beispiel 13.6. $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(\xi,\eta) = \xi^3 - 6\xi\eta + 3\eta^2 - 24\xi + 4$. Es ist $f'(\xi,\eta) = (3\xi^2 - 6\eta - 24, \quad -6\xi + 6\eta)$. Die Gleichung $f'(\xi,\eta) = (0 \quad 0)$ ergibt die kritischen Punkte $(4,4)$, $(-2,-2)$. Die Hesse Matrix ist gegeben durch

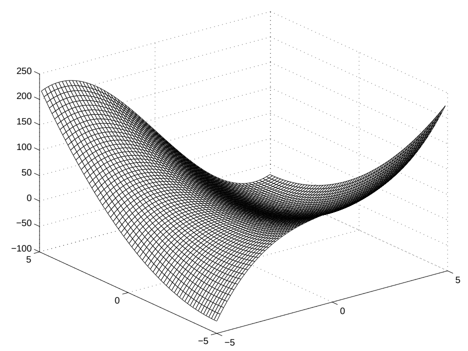
$$\mathcal{H}_f(\xi,\eta) = \begin{pmatrix} f_{\xi\xi} & f_{\xi\eta} \\ f_{\xi\eta} & f_{\eta\eta}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6\xi & -6 \\ -6 & 6\end{pmatrix},$$

also

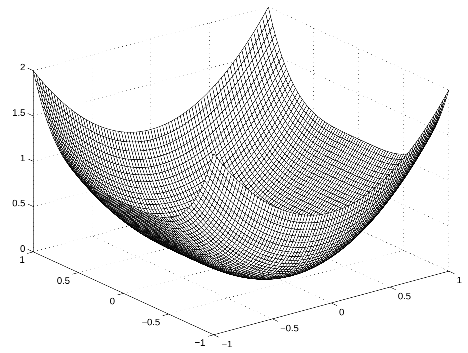
$$\mathcal{H}_f(4,4) = \begin{pmatrix} 24 & -6 \\ -6 & 6\end{pmatrix}, \quad \mathcal{H}_f(-2,-2) = \begin{pmatrix} -12 & -6 \\ -6 & 6\end{pmatrix}.$$

Satz 13.5 zeigt, daß f in $(4,4)$ ein striktes lokales Minimum und in $(-2,-2)$ einen Sattelpunkt besitzt.

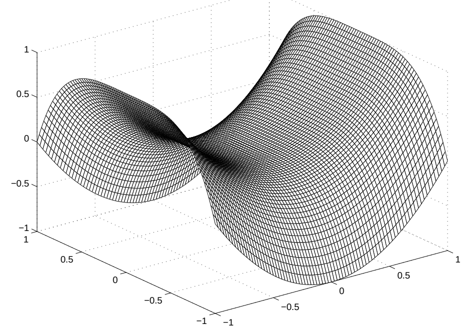
Leider werden mit den Sätzen 13.4, 13.5 nicht alle Möglichkeiten erfaßt. Dies liegt daran, daß nicht jede quadratische Form entweder positiv definit oder negativ definit oder indefinit ist. Zur Illustration betrachten wir folgendes Beispiel: Die Abbildungen



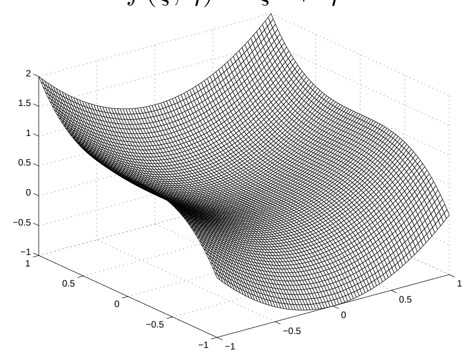
$f(\xi,\eta) = \xi^3 - 6\xi\eta + 3\eta^2 - 24\xi + 4$



$f(\xi,\eta) = \xi^2 + \eta^4$



$g(\xi,\eta) = \xi^2 - \eta^4$



$h(\xi,\eta) = \xi^2 + \eta^3$

$$\begin{aligned} f(\xi,\eta) &= \xi^2 + \eta^4, \\ g(\xi,\eta) &= \xi^2 - \eta^4, \\ h(\xi,\eta) &= \xi^2 + \eta^3, \end{aligned}$$

haben alle in $(0,0)$ einen kritischen Punkt. In jedem Falle ist die Hesse-Matrix in $(0,0)$ durch

$$\mathcal{H}(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

gegeben. $\mathcal{H}(0,0)$ ist also positiv semidefinit. In $(0,0)$ besitzt jedoch f ein (globales) Minimum, g einen Sattelpunkt, während h an der Stelle weder einen Sattelpunkt noch ein lokales Extremum aufweist. Bei der Untersuchung derartiger kritischer Stellen, an denen die Sätze 13.4, 13.5 nicht anwendbar sind, ist man auf ad hoc Methoden angewiesen.

14. Lokale Umkehrbarkeit, implizite Funktionen

14.1. Fixpunktsatz von Banach. Wir wenden uns n un einer Satzgruppe zu, die die Lösbarkeit von nichtlinearen Gleichungen $f(x) = y$ zum Inhalt hat. Ein wesentliches Beweismittel ist folgendes Fixpunktprinzip.

Satz 14.1 (Fixpunktsatz von Banach). *Es sei X ein Banach Raum, $U \subset X$, $f\colon U \to X$ eine Abbildung und M eine abgeschlossene Teilmenge von U mit folgenden Eigenschaften:*
i) $\exists \ell \in [0,1) \forall x, y \in M\colon \|f(x) - f(y)\| \le \ell \|x - y\|$,
*d.h. f ist eine **Kontraktion** auf M.*
ii) $f(M) \subset M$, *d.h. M ist **invariant** unter f.*
Dann gibt es in M genau ein Element x^* mit $f(x^*) = x^*$.

Elemente x mit der Eigenschaft $f(x) = x$ nennt man **Fixpunkte** von f. Satz 14.1 sichert also unter bestimmten Vorausssetzungen die Existenz eines eindeutig bestimmten Fixpunktes von f.

Beweis. Wir wählen ein *beliebiges* Element x_0 in M und definieren rekursiv die Folge (x_n) durch

$$x_{n+1} = f(x_n), \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Wegen der Invarianz von M folgt aus $x_0 \in M$, daß auch $x_1 = f(x_0)$ in M liegt. Eine einfache Induktion zeigt dann $(x_n)_{n\ge 1} \subset M$.
Wir zeigen nun, daß (x_n) eine Cauchy Folge ist: dazu verifiziere man vorerst die Abschätzung (Übung):

$$\|f(x_n) - f(x_{n-1})\| \le \ell^n \|f(x_0) - x_0\|, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Daraus folgt mit Hilfe eines "Teleskoparguments" für alle $n \in \mathbb{N}$ und $p \in \mathbb{N}_0$ die Ungleichung

$$(*) \qquad \|f(x_{n+p}) - f(x_n)\| \le \sum_{i=0}^{p-1} \|f(x_{n+i+1}) - f(x_{n+i})\| \le \sum_{i=0}^{p-1} \ell^{n+i+1} \|f(x_0) - x_0\|$$
$$< \ell^{n+1} \frac{\|f(x_0) - x_0\|}{1 - \ell}.$$

Wegen $\ell < 1$ ist (x_n) eine Cauchy Folge. X ist vollständig, also ist (x_n) konvergent. Somit gibt es ein Element $x^* \in X$ mit

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x^*.$$

Aus $(x_n) \subset M$ und der Abgeschlossenheit von M folgt mit Satz vi-3.3 $x^* \in M$. Die Stetigkeit von f ergibt

$$x^* = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(\lim_{n\to\infty} x_n) = f(x^*),$$

x^* ist also ein Fixpunkt von f.

Die Eindeutigkeit des Fixpunktes ist eine Folge der Kontraktionseigenschaft von f. Angenommen es gäbe einen weiteren Fixpunkt y^* in M, dann folgt

$$\|x^* - y^*\| = \|f(x^*) - f(y^*)\| \leq \ell \|x^* - y^*\|,$$

also

$$(1-\ell)\|x^* - y^*\| \leq 0.$$

Dies kann nur für $x^* = y^*$ gelten. □

Bemerkung 14.2. 1) Eine Schwierigkeit bei der Anwendung des Banachschen Fixpunktsatzes besteht oft darin, eine geeignete invariante feilmenge M zu finden, auf der man die Kontraktionseigenschaft von f nachweisen kann. Die Lipschitzkonstante ℓ kann dabei nicht durch 1 ersetzt werden. Es genügt also nicht, die etwas schwächere Ungleichung

$$\forall x, y \in M\colon \|f(x) - f(y)\| \leq \|x - y\|$$

nachzuweisen.
2) Der Beweis von Satz 14.1 ist konstruktiv: der Fixpunkt von f kann berechnet werden, indem man für einen beliebigen Startwert $x_0 \in M$ die Folge der iterierten Bilder $(f^n(x_0)) = (x_n)$ berechnet. Man erhält auch eine Abschätzung des Fehlers, der entsteht, wenn man die Iteration nach dem n-ten Schritt abbricht. Führt man nämlich in $(*)$ den Grenzübergang $p \to \infty$ durch (und ersetzt n durch $n-1$), ergibt sich

$$\|x^* - x_n\| = \lim_{p\to\infty} \|x_{n+p} - x_n\| = \lim_{p\to\infty} \|f(x_{n-1+p}) - f(x_{n-1})\| \leq \frac{\ell^n}{1-\ell}\|f(x_0) - x_0\|.$$

Beispiel 14.3. Wir demonstrieren die Anwendung des Fixpunktsatzes auf die Abbildung $f(x) = \frac{1}{2} + x - \frac{x^2}{6}$, $x \geq 0$. Offensichtlich ist $x^* = \sqrt{3}$ der gesuchte Fixpunkt. Wir wählen $M = [\frac{3}{2}, 2]$. Wegen $0 < \frac{1}{3} \leq f'(x) \leq \frac{1}{2}$, $x \in M$, ist f auf M streng monoton steigend. Aus $f(\frac{3}{2}) = \frac{13}{8} > \frac{3}{2}$ und $f(2) = \frac{11}{6} < 2$ folgt somit die Invarianz von M. Als Lipschitzkonstante kann man $L = \frac{1}{2}$ wählen. Nach dem Fixpunktsatz von Banach existiert in M genau ein Fixpunkt, welcher mit Hilfe der Iteration $x_{n+1} = f(x_n)$, $x_o \in M$, berechnet werden kann. Wie groß muß n gewählt werden, damit $|x^* - x_n| < 10^{-5}$ gewährleistet ist? Mit Hilfe der vorausgehenden Bemerkung findet man für $x_0 = \frac{3}{2}$

$$|x^* - x_n| \leq (\frac{1}{2})^n \frac{\frac{1}{2} - \frac{x_0^2}{6}}{1 - \frac{1}{2}} = (\frac{1}{2})^{n+2}.$$

Eine einfache Rechnung zeigt die Gültigkeit der Ungleichung $(\frac{1}{2})^{n+2} < 10^{-5}$ für $n \geq 15$. Führt man die Rechnung durch, findet man $x_{15} = 1.73205$ und $|x_{15} - \sqrt{3}| \leq 7 \cdot 10^{-7}$.

14.2. Lokale Invertierbarkeit. Im Folgenden greifen wir auf den Begriff der Norm einer Matrix $M \in \mathbb{K}^{m\times m}$ zurück: verwenden wir in $\mathbb{K}^m$ die Norm $||\cdot||_p$, dann ist die zugehörige Matrixnorm festgelegt durch $||M||_p = \inf\{c \geq 0\colon ||Mx||_p \leq c||x||_p, x \in$

$\mathbb{R}^m\} = \sup\{||Mx||_p \colon ||x||_p \le 1\}$, vgl. Abschnitt vi-7. Verwenden wir im $\mathbb{K}^m$ beispielsweise die Norm $||x||_\infty = \max\{|\xi_i| \colon 1 \le i \le m\}$, $x = (\xi_1, \dots, \xi_i)$, dann ist ergibt sich für die zugehörige Matrix Norm

$$||M||_\infty = \max_{1\le i\le m} \sum_{j=1}^m |m_{ij}|.$$

Satz 14.4. *Es bezeichne $||\cdot||$ eine beliebige Matrixnorm.*
1.) Gilt $||I - A|| < 1$, dann ist A regulär.
2.) Ist $A \in \mathbb{K}^{m\times m}$ regulär und $||B - A|| < \frac{1}{||A^{-1}||}$, dann ist B regulär. Für $||B - A|| < \frac{1}{2||A^{-1}||}$ gilt dann $||B^{-1}|| < 2||A^{-1}||$. Somit ist die Gruppe der regulären Matrizen $GL_m(\mathbb{K})$ offen in $\mathbb{K}^{m\times m}$.
3.) Die Abbildung $inv \colon GL_m(\mathbb{K}) \to \mathfrak{L}(\mathbb{K}^m, \mathbb{K}^m)$, $inv(A) = A^{-1}$ ist stetig differenzierbar mit

$$inv'(A)\delta A = -A^{-1}\,\delta A\,A^{-1}, \quad \delta A \in \mathbb{K}^{m\times m}.$$

Beweis. ad 1.) Es genügt die Injektivität von A nachzuweisen. Die Annahme $Ax = 0$ für ein $x \ne 0$ führt dann auf

$$||x|| \le ||x - Ax|| + ||Ax|| \le ||I - A||\,||x||,$$

also auf den Widerspruch $||I - A|| \ge 1$.
ad 2.) Wir betrachten

$$||I - A^{-1}B|| = ||A^{-1}(A - B)|| \le ||A^{-1}||\,||A - B|| < 1.$$

Somit ist $A^{-1}B$ regulär und daher auch $B = A(A^{-1}B)$. Für jede reguläre Matrix $||B||$ folgt aus der Ungleichung

$$||Bx|| \ge \alpha||x||, \qquad x \in \mathbb{K}^m$$

für ein $\alpha > 0$ die Abschätzung

$$||B^{-1}|| \le \frac{1}{\alpha}.$$

Für $||B - A|| < \frac{1}{2||A^{-1}||}$ ergeben sich folgende Abschätzungen

$$\begin{aligned} ||Bx|| &\ge ||(B - A)x + Ax|| \ge ||Ax|| - ||(B - A)x|| \\ &\ge \frac{1}{||A^{-1}||}||x|| - ||B - A||\,||x|| \ge \frac{1}{2||A^{-1}||}||x||. \end{aligned}$$

ad 3.) Wir zeigen inv ist stetig in $A \in GL_m(\mathbb{K})$. Es sei $\varepsilon > 0$ beliebig gewählt und $0 < \delta < \min\{\frac{1}{2||A^{-1}||}, \frac{\varepsilon}{2||A^{-1}||^2}\}$. Falls $||B - A|| < \delta$ ist B regulär und es folgt

$$\begin{aligned} ||inv(A) - inv(B)|| &= ||A^{-1} - B^{-1}|| = ||B^{-1}(A - B)A^{-1}|| \\ &\le ||A^{-1}||\,||B^{-1}||\,||A - B|| \le 2||A^{-1}||^2\delta < \varepsilon. \end{aligned}$$

Die Differenzierbarkeit von inv sieht man folgendermaßen ein: Es sei $A \in GL_m(\mathbb{K})$ und $||\delta A|| < \frac{1}{2||A^{-1}||}$. Dann ist $(A + \delta A) \in GL_m(\mathbb{K})$ und

$$\begin{aligned} inv(A + \delta A) - inv(A) &= (A + \delta A)^{-1} - A^{-1} = -A^{-1}\delta A(A + \delta A)^{-1} \\ &= -A^{-1}\delta A\, A^{-1} + r(\delta A) \end{aligned}$$

mit

$$r(\delta A) = -A^{-1}\delta A((A + \delta A)^{-1} - A^{-1})$$

Aus der Abschätzung

$$||r(\delta A)|| \le ||A^{-1}||\,||\delta A||\,||(A + \delta A)^{-1} - A^{-1}||$$

zusammen mit der Stetigkeit von inv folgt

$$\lim_{\delta A \to 0} \frac{r(\delta A)}{||\delta A||} = 0.$$

Wegen der Linearität und Stetigkeit von $\delta A \to -A^{-1}\delta A\, A^{-1}$ ist inv differenzierbar und es gilt

$$inv'(A)(\delta A) = -A^{-1}\delta A\, A^{-1}.$$

Die Stetigkeit der Ableitung $inv'\colon GL_m(\mathbb{K}) \to \mathcal{L}(\mathbb{K}^{m\times m}, \mathbb{K}^{m\times m})$ betrachten wir für A, $B \in GL_m(\mathbb{K})$ und $\delta A \in \mathbb{K}^{m\times m}$

$$\begin{aligned} ||inv'(A)\delta A - inv'(A)\delta A|| &= || - A^{-1}\delta A\, A^{-1} + B^{-1}\delta A\, B^{-1}|| \\ &\le || - (A^{-1} - B^{-1})\delta A\, A^{-1}|| + ||B^{-1}\delta A\,(A^{-1} - B^{-1})|| \\ &\le ||A^{-1} - B^{-1}||(||A^{-1}|| + ||B^{-1}||)||\delta A|| \end{aligned}$$

also

$$||inv'(A) - inv'(A)|| \le (||A^{-1}|| + ||B^{-1}||)||inv(A) - inv(B)||.$$

Die Stetigkeit von inv' folgt nun aus der Stetigkeit von inv. □

Satz 14.5. *Es sei $f\colon U \to \mathbb{R}^m$, $U \subset \mathbb{R}^m$ offen, stetig differenzierbar. An der Stelle $x_0 \in U$ sei $f'(x_0)\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ invertierbar. Dann gibt es eine offene Umgebung $O \in \mathcal{U}(x_0)$ mit folgenden Eigenschaften:*

i) *$f|_O$ ist injektiv,*
ii) *$f(O)$ ist offen,*
iii) *die Umkehrabbildung g von $f|_O$ ist stetig differenzierbar und es gilt für alle $y \in f(O)$*

$$g'(y) = (f'(g(y)))^{-1}.$$

Beweis. Wir unterteilen den Beweis in mehrere Schritte.

1) Vereinfachung des Problems: Indem wir an Stelle von f die Abbildung $x \mapsto f(x_0 + x) - f(x_0)$ betrachten, können wir o.B.d.A. von $x_0 = 0$ und $f(0) = 0$ ausgehen. Nach Voraussetzung ist also $f'(0)$ regulär. Ersetzen wir f durch $h = f'(0)^{-1} \circ f$, folgt aus der Kettenregel

$$h'(x) = f'(0)^{-1} \circ f'(x), \text{ also } h'(0) = id_{\mathbb{R}^m}.$$

Wir setzen deshalb o.B.d.A. von nun an voraus, daß

$$f(0) = 0 \text{ und } f'(0) = id_{\mathbb{R}^m}$$

gilt.
2) Fixpunktargument: Wir zeigen, daß jedes y aus einer geeigneten Umgebung von 0 genau ein Urbild besitzt, indem wir Fixpunkte der Abbildung $\phi_y \colon U \to \mathbb{R}^m$

$$\phi_y(x) = x - f(x) + y$$

suchen. Es gilt nämlich

$$\phi_y(x) = x \Leftrightarrow y = f(x).$$

Wir greifen dabei auf den Fixpunktsatz von Banach VII-14.1 zurück.
3) Invarianz von $\bar{K}(0, 2r)$ für geeignete $r > 0$: Wegen $f'(0) = id_{\mathbb{R}^m}$ und der Stetigkeit von f' an der Stelle $x_0 = 0$ gibt es ein $r > 0$, sodaß

$$(*) \qquad \|x\| \leq 2r \Rightarrow \|id_{\mathbb{R}^m} - f'(x)\| \leq \frac{1}{2}$$

gilt. Setzen wir $h(x) = x - f(x)$, folgt $h(0) = 0$ und $h'(x) = id_{\mathbb{R}^m} - f'(x)$. Somit gilt $||h'(x)|| \leq \frac{1}{2}$ für $||x|| \leq 2r$. Mit Hilfe des Schrankensatzes 6.14 ergibt sich daraus für $x \in \bar{K}(0, 2r)$

$$||x - f(x)|| = ||h(x) - h(0)|| = \sup_{z \in \bar{K}(0,2r)} ||h'(z)|| \, ||x|| \leq \frac{1}{2}||x|| \leq r.$$

Dies ergibt für $||y|| < r$ und $||x|| \leq 2r$

$$||\phi_y(x)|| \leq ||x - f(x)|| + ||y|| < r + r = 2r,$$

d.h. $\phi_y(\bar{K}(0, 2r)) \subset K(0, 2r)$ für alle $y \in K(0, r)$.
4) ϕ_y ist für jedes $y \in K(0, r)$ eine Kontraktion auf $\bar{K}(0, 2r)$: Dies ist wiederum eine unmittelbare Folge des Schrankensatzes.

$$(\dagger) \qquad ||\phi_y(x) - \phi_y(\tilde{x})|| = ||h(x) - h(\tilde{x})|| \leq \sup_{z \in \bar{K}(0,2r)} ||h'(z)|| \, ||x - \tilde{x}|| \leq \frac{1}{2}||x - \tilde{x}||.$$

5) Beweis von i) und ii): Da $\bar{K}(0, 2r)$ abgeschlossen ist, garantiert der Fixpunktsatz von Banach für alle $y \in K(0, r)$ die Existenz eines *eindeutigen* Fixpunktes von ϕ_y, der sogar in $K(0, 2r)$ liegt.
Mit anderen Worten: Jedes $y \in K(0, r)$ besitzt ein eindeutiges Urbild in $K(0, 2r)$. Setzen wir $O = f^{-1}(K(0, r)) \cap K(0, 2r)$, dann ist wegen der Stetigkeit von f die Menge O offen (Satz vi-3.26) und $f|_O \colon O \to K(0, r)$ ist eine Bijektion.

6) Differenzierbarkeit von $g := (f|_O)^{-1}$: In Hinsicht auf Satz 2.5 ist die Stetigkeit von g nachzuweisen. Für x und $\tilde{x} \in O$ gilt

$$f(x) - f(\tilde{x}) = x - \tilde{x} - (h(x) - h(\tilde{x})).$$

Aus (†) folgt daher

$$\|f(x) - f(\tilde{x})\| \geq \|x - \tilde{x}\| - \|h(x) - h(\tilde{x})\| \geq \frac{1}{2}\|x - \tilde{x}\|.$$

Schreibt man $y = f(x)$, $\tilde{y} = f(\tilde{x})$ und $x = g(y)$, $\tilde{x} = g(\tilde{y})$, dann gilt y, $\tilde{y} \in K(0, r)$ und

$$\|g(y) - g(\tilde{y})\| \leq 2\|y - \tilde{y}\|,$$

d.h. g ist Lipschitz stetig auf $K(0, r)$. Für $y \in K(0, r)$ liegt $g(y)$ in $K(0, 2r)$ und somit ist wegen $(*)$ und Satz 14.4 $f'(g(y))$ invertierbar. Aus Satz 2.5 folgt nun die Differenzierbarkeit von g und

$$g'(y) = (f'(g(y)))^{-1}, \quad y \in K(0, r).$$

7) Stetige Differenzierbarkeit von g: Dies ergibt sich aus der Beobachtung, daß g' sich folgendermaßen als Verkettung stetiger Funktionen darstellen läßt

$$g' = inv \circ f' \circ g.$$

□

KOROLLAR 14.6. Es sei $f : U \to \mathbb{R}^m$, $U \subset \mathbb{R}^m$ offen, stetig differenzierbar. Ist $f'(x)$ für alle $x \in U$ regulär, dann ist $f(U)$ offen.

BEWEIS. Jeder Punkt $x \in U$ besitzt nach dem Umkehrsatz eine Umgebung O_x, so daß $f(O_x)$ offen ist. Dann ist auch $f(U) = \cup_{x \in U} f(O_x)$ offen. □

DEFINITION 14.7. *Es seien U und V offene Teilmengen von $\mathbb{R}^m$. Ist die Abbildung $f : U \to V$ heißt C^k-**Diffeomorphismus**, wenn f bijektiv ist und sowohl f, als auch f^{-1} von der Klasse C^k für ein $k \in \mathbb{N}$ sind.*

KOROLLAR 14.8. Es sei $f : U \to \mathbb{R}^m$, $U \subset \mathbb{R}^m$ offen, stetig differenzierbar. Ist $f'(x)$ für alle $x \in U$ regulär und ist f injektiv, dann ist f ein C^1-Diffeomorphismus von U auf die offene Menge $f(U)$.

BEWEIS. $f(U)$ ist wegen Korollar 14.6 offen. Nach Voraussetzung existiert die Umkehrabbildung $f^{-1} : f(U) \to U$. Nach dem Umkehrsatz existiert für jedes $x \in U$ eine offene Umgebung O_x, so daß die Umkehrabbildung g der Einschränkung von f auf O_x stetig differenzierbar ist. Da f^{-1} auf $f(O_x)$ mit g übereinstimmt folgt die Behauptung. □

BEMERKUNG 14.9. Die Voraussetzung der Regularität von $f'(x)$ für *alle* $x \in U$ sichert nur die *lokale* Injektivität von f. Folgendes Beispiel, zeigt daß globale Injektivität nicht gefolgert werden kann. Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$f(\xi, \eta) = \begin{pmatrix} e^\xi \cos \eta \\ e^\xi \sin \eta \end{pmatrix}.$$

Dann ist $\det(f'(\xi,\eta)) = e^{\xi} > 0$ für alle $(\xi,\eta) \in \mathbb{R}^2$. somit ist f an jeder Stelle (ξ,η) auf einer geeigneten Umgebung injektiv, aber nicht injektiv auf $\mathbb{R}^2$.

14.3. Implizite Funktionen. Wir wenden uns nun der Frage zu, ob und unter welchen Umständen z.B. eine Gleichung in zwei Unbekannten

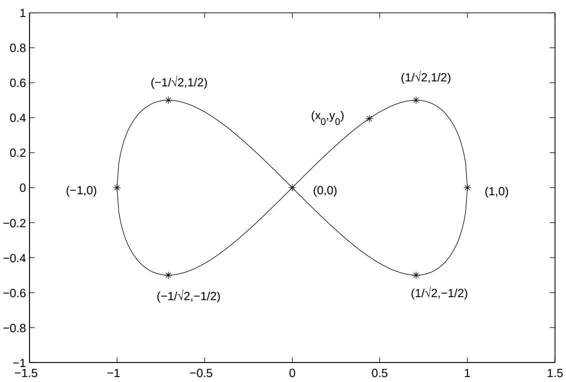
$$(*) \qquad f(x,y) = 0$$

nach y oder nach x aufgelöst werden kann. Also, ob es Funktionen $\varphi\colon I \to \mathbb{R}$ oder $\psi\colon J \to \mathbb{R}$ gibt mit der Eigenschaft

$$\forall x \in I\colon y = \varphi(x) \Leftrightarrow f(x,\varphi(x)) = 0,$$
$$\forall y \in J\colon x = \psi(y) \Leftrightarrow f(\psi(y),y) = 0.$$

Man sagt auch, die Funktionen φ oder ψ seien **implizit definiert** durch die Gleichung $(*)$ und die Gleichung $(*)$ wird durch φ nach y, bzw. durch ψ nach x aufgelöst.
Zur Illustration der auftretenden Probleme betrachten wir das Beispiel $f(x,y) = x^2(1-x^2) - y^2$. Die Gleichung $f(x,y) = 0$ besitzt offenbar die Lösungen

$$y = \pm\sqrt{x^2(1-x^2)}, \quad |x| \le 1,$$
$$x = \pm\sqrt{\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - y^2}}, \quad |y| \le \frac{1}{2}.$$



Die Menge der Nullstellen von f wird also durch eine Lemniskate beschrieben. Ohne Zusatzforderung an φ oder ψ gibt es offenbar unendlich viele Möglichkeiten, Lösungen von $(*)$ zu einer Funktion zusammenzufügen. Wir fordern daher, daß φ oder ψ zumindest stetig sind. In einer hinreichend kleinen Umgebung einer Lösung (x_0,y_0) gibt es für alle x genau ein $y = \varphi(x)$ mit $f(x,\varphi(x)) = 0$ und für alle y genau ein $x = \psi(y)$ mit $f(\psi(y),y) = 0$, die Gleichung $(*)$ ist also nach x und nach y auflösbar. Wir bemerken: $f_x(x_0,y_0) \neq 0$ und $f_y(x_0,y_0) \neq 0$. Anders ist die Situation in $(0,0)$: in jeder (noch so kleinen) Umgebung hat die Gleichung $(*)$ für jedes $x \neq 0$, aber auch für jedes $y \neq 0$ mehrere Lösungen und kann daher weder nach y noch nach x aufgelöst werden. Eine einfache Rechnung zeigt $f'(0,0) = (0,0)$. In jeder Umgebung der Lösungen $(\pm 1, 0)$

kann $(*)$ nicht nach y aufgelöst werden, da es zu $x \neq \pm 1$ jeweils zwei unterschiedliche Lösungen für y gibt. Es gibt aber eine Auflösung nach x, z.B.

$$\psi(y) = \sqrt{\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - y^2}}, \quad |y| \leq \frac{1}{2}$$

in $(1,0)$, bzw. durch $-\psi$ in $(-1,0)$. An diesen Stellen gilt $f_x(\pm 1, 0) \neq 0$ und $f_y(\pm 1, 0) = 0$. In einer hinreichend kleinen Umgebung der Stellen $(\pm \frac{1}{\sqrt{2}}, \pm \frac{1}{2})$ gibt es nur eine Auflösung nach y. Man beachte $f_x(\pm \frac{1}{\sqrt{2}}, \pm \frac{1}{2}) = 0$ und $f_y(\pm \frac{1}{\sqrt{2}}, \pm \frac{1}{2}) \neq 0$.
Dies legt die Vermutung nahe, daß eine Gleichung $f(x,y) = 0$ in der Nähe einer Nullstelle (x_0, y_0) eine Auflösung $y = \varphi(x)$ bzw. $x = \psi(y)$ besitzt, wenn $f_y(x_0, y_0) \neq 0$ bzw. $f_x(x_0, y_0) \neq 0$ ist.
Allgemeiner betrachten wir die Lösbarkeit eines Systems von n nichtlinearen Gleichungen in m Unbekannten $m > n$. Der Umkehrsatz 14.5 behandelt den Fall $n = m$. Lösen des nichtlinearen Gleichungssystems bedeutet hier, daß wir n der Variablen, wir bezeichnen sie mit $\xi_1, \dots, \xi_n$, in eindeutiger Weise durch die übrigen Variablen, wir nennen sie $u_1, \dots, u_q$, $q = m - n$, ausdrücken wollen. Wir untersuchen also folgendes Gleichungssystem in den Unbekannten $(\xi_1, \dots, \xi_n, u_1, \dots, u_q)$:

$$\begin{array}{rcl} f_1(\xi_1, \dots, \xi_n, u_1, \dots, u_q) & = & 0 \\ & \vdots & \\ f_n(\xi_1, \dots, \xi_n, u_1, \dots, u_q) & = & 0 \end{array} .$$

Ziel ist es, n Funktionen φ_i, $i = 1, \dots, n$, so zu finden, daß

$$f_i(\varphi_1(u_1, \dots, u_q), \dots, \varphi_n(u_1, \dots, u_q), u_1, \dots, u_q) = 0, \quad i = 1, \dots, n,$$

auf einer offenen Teilmenge $U \subset \mathbb{R}^q$ erfüllt ist.
Wir verwenden folgende Bezeichnungen

$$\begin{aligned} & x = (\xi_1, \dots, \xi_n), && x_0 = (\xi_1^0, \dots, \xi_n^0), \\ & u = (u_1, \dots, u_q), && u_0 = (u_1^0, \dots, u_q^0), \\ & f\colon D \to \mathbb{R}^n, D \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^q, && f = (f_1, \dots, f_n). \end{aligned}$$

Es ist bequem, in diesem Zusammenhang den Begriff der partiellen Ableitung zu erweitern. Wir bezeichnen mit $\partial_x f(x_0, u_0) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, $\partial_u f(x_0, u_0) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^q, \mathbb{R}^n)$ die linearen Abbildungen

$$\begin{aligned} \partial_x f(x_0, u_0)h &:= f'(x_0, u_0)(h, 0), && (h, 0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^q, \\ \partial_u f(x_0, u_0)k &:= f'(x_0, u_0)(0, k), && (0, k) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^q. \end{aligned}$$

Man überzeuge sich davon, daß $\partial_x f(x_0, u_0)$ ($\partial_u f(x_0, u_0)$) die Ableitung im Sinne der Definition 1.1 der *partiellen* Funktion $x \mapsto f(x, u_0)$ ($u \mapsto f(x_0, u)$) ist. Mit dieser Bezeichnung gilt

$$f'(x_0, u_0)(h, k) = \partial_x f(x_0, u_0)h + \partial_u f(x_0, u_0)k.$$

Satz 14.10 (Satz über implizite Funktionen). *Es sei $D \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^q$ offen und $f\colon D \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar. An einer Stelle $(x_0, u_0) \in D$ gelte $f(x_0, u_0) = 0$ und es sei $\partial_x f(x_0, u_0)$ invertierbar. Dann gibt es eine Umgebung $U \in \mathcal{U}(u_0)$, eine Umgebung $V \in \mathcal{U}(x_0)$ und eine eindeutig bestimmte, stetig differenzierbare Abbildung $\varphi\colon U \to V$ mit*

$$\varphi(u_0) = x_0$$
$$\forall u \in U\colon f(\varphi(u), u) = 0.$$

Ferner gilt $\varphi'(u) = -(\partial_x f(\varphi(u), u))^{-1} \circ \partial_u f(\varphi(u), u)$. (Die Invertierbarkeit von $\partial_x f(x_0, u_0)$ ist gleichbedeutend mit

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial \xi_1}(x_0, u_0) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial \xi_n}(x_0, u_0) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial \xi_1}(x_0, u_0) & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial \xi_n}(x_0, u_0) \end{pmatrix} \neq 0).$$

Beweis. Um den Satz von der Umkehrfunktion anwenden zu können, definieren wir die Abbildung

$$F := \begin{cases} D \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^q \\ (x, u) \mapsto (f(x, u), u) \end{cases}.$$

Ihre Ableitung ist für $(x, u) \in D$ und $(h, k) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^q$ gegeben durch

$$F'(x, u)(h, k) = (\partial_x f(x, u)h + \partial_u f(x, u)k, k),$$

bzw. in Matrixschreibweise

$$(*) \qquad F'(x, u)(h, k) = \begin{pmatrix} \partial_x f(x, u) & \partial_u f(x, u) \\ 0 & id_{\mathbb{R}^q} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}.$$

Aus der Stetigkeit der Elemente der Jakobi Matrix folgt die stetige Differenzierbarkeit von F. Nach Voraussetzung ist $\partial_x f(x_0, u_0)$ regulär und daher auch $F'(x_0, u_0)$. F erfüllt also alle Voraussetzungen des Umkehrsatzes 14.5. Es gibt daher eine offene Umgebung $W \in \mathcal{U}((x_0, u_0))$ so, daß $F(W)$ offen und $F|_W$ ein C^1-Diffeomorphismus von W auf $F(W)$ ist. Es sei $G\colon F(W) \to W$, $G = (F|_W)^{-1}$. Dann gilt

$$(**) \qquad G'(F(x, u)) = (F'(x, u))^{-1}, \qquad (x, u) \in W.$$

G besitzt dieselbe Struktur wie F, d.h. es gibt eine stetig differenzierbare Funktion $g\colon F(W) \to \mathbb{R}^n$ mit

$$G(y, v) = (g(y, v), v), \qquad (y, v) \in F(W).$$

Für $(x, u) \in W$ gelten dann die Äquivalenzen

$$(\dagger) \qquad \begin{aligned} f(x, u) = 0 &\Leftrightarrow F(x, u) = (0, u) \Leftrightarrow G(0, u) = (x, u) \\ &\Leftrightarrow g(0, u) = x. \end{aligned}$$

Jedem Vektor $u \in \mathbb{R}^p$ mit $(0, u) \in F(W)$ wird somit in eindeutiger Weise der Vektor $x = g(0, u)$ zugeordnet. Insbesondere ist $g(0, u_0) = x_0$. Da W und $F(W)$ offen sind, gibt es Umgebungen $U \in \mathcal{U}(u_0)$ und $V \in \mathcal{U}(x_0)$ mit $V \times U \subset W$ und $\{0\} \times U \subset F(W)$.

Wegen der Stetigkeit von g kann man U so einrichten, daß $g(0,u) \in V$ für $u \in U$ gilt. Für $u \in U$ liegt dann $(g(0,u),u)$ genau dann in W, wenn $(0,u) \in F(W)$. Definieren wir nun die Abbildung

$$\varphi\colon U \to V, \quad \varphi(u) = g(0,u),$$

dann ist φ stetig differenzierbar auf U, es gilt $\varphi(u_0) = x_0$ und für alle $u \in U$ gilt wegen (†) die Äquivalenz

$$g(0,u) = \varphi(u) \Leftrightarrow f(\varphi(u),u) = 0.$$

Aus der Beziehung $(*)$ liest man ab, daß $F'(x,u)$ genau dann invertierbar ist, wenn $\partial_x f(x,u)$ invertierbar ist. Wegen $(**)$ existiert also $(\partial_x f(x,u))^{-1}$ auf W. Für die Berechnung der Ableitung von φ definieren wir die Abbildung $H\colon U \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^q$ durch

$$H(u) := (\varphi(u),u)(= (g(0,u),u) = G(0,u)) \in W.$$

Dann ist H auf U stetig differenzierbar mit

$$H'(u)k = (\varphi'(u)k, k), \quad k \in \mathbb{R}^q.$$

Ausgehend von der Identität $0 \equiv f(\varphi(u),u) = (f \circ H)(u)$ findet man mit Hilfe der Kettenregel

$$\begin{aligned} 0 &= ((f \circ H)'(u))k = (f'(H(u)) \circ H'(u))k = f'(\varphi(u),u)(\varphi'(u)k,k) \\ &= \partial_x f(\varphi(u),u)\varphi'(u)k + \partial_u f(\varphi(u),u)k. \end{aligned}$$

Wegen der Invertierbarkeit von $\partial_x f(x,u)$ für $(x,u) \in W$ erhält man schließlich

$$\varphi'(u)k = -(\partial_x f(\varphi(u),u))^{-1}\partial_u f(\varphi(u),u)k.$$

Schließlich zeigen wir noch die Eindeutigkeit der lösenden Funktion φ: Angenommen es gäbe eine weitere Funktion $\tilde{\varphi}\colon \tilde{U} \to V$, $\tilde{U} \in \mathcal{U}(u_0)$ mit $\tilde{\varphi}(u_0) = x_0$ und

$$f(\tilde{\varphi}(u),u) = 0, \qquad u \in \tilde{U}.$$

Da $(\tilde{\varphi}(u),u)$ die eindeutige Lösung der Gleichung $F(x,u) = 0$ in $U \times V$ ist, stimmt $\tilde{\varphi}(u)$ mit $\varphi(u)$ auf $U \cap \tilde{U} \in \mathcal{U}(u_0)$ überein. □

Speziell erhalten wir für eine Gleichung mit m Unbekannten:

Korollar 14.11. Es sei $f\colon U \to \mathbb{R}$, $U \subset \mathbb{R}^m$ offen, stetig differenzierbar und $x_0 = (\xi_1^0, \ldots, \xi_m^0)$ eine Lösung von $f(x) = 0$ mit $\frac{\partial f(x_0)}{\partial \xi_m} \neq 0$. Dann gibt es Umgebungen U von $x_0' = (\xi_1^0, \ldots, \xi_{m-1}^0)$, V von ξ_m^0 und eine stetig differenzierbare Funktion $\varphi\colon U \to V$ mit $f(x', \varphi(x')) = 0$, $x' \in U$ und

$$\varphi'(x') = -\frac{1}{f_{\xi_m}(x)}(f_{\xi_1}(x), \ldots, f_{\xi_{m-1}}(x)), \quad x = (x', \xi : m) \in U \times V.$$

Als Anwendung betrachten wir die Niveaumenge einer stetig differenzierbaren Funktion (der Einfachheit halber) in zwei Veränderlichenzum Wert c, also

$$N_f(c) = \{x \in \mathbb{R}^2 \colon f(x) = c\}.$$

Für alle $x \in N_f(c)$ sei $f'(x) \neq 0$. An einer Stelle $x_0 = (\xi_0, \eta_0) \in N_f(c)$ sei beispielsweise $f_\eta(x_0) \neq 0$. Dann gibt es Umgebungen $U \in \mathfrak{U}(\xi_0)$, $V \in \mathfrak{U}(\eta_0)$ und eine stetig differenzierbare Funktion $\varphi \colon U \to V$ mit

$$f(\xi, \varphi(\xi)) = 0, \qquad \xi \in U.$$

Differenziert man diese Identität, erhält man

$$(*) \qquad f_\xi(\xi, \varphi(\xi)) + f_\eta(\xi, \varphi(\xi))\varphi'(\xi) = 0, \qquad \xi \in U.$$

Setzt man $\gamma \colon U \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(x) = (x, \varphi(x))$, stellt γ eine stetig differenzierbare Parametrisierung von $N_f(c)$ in der Umgebung $U \times V$ von x_0 dar. Der Tangentialvektor an diese Kurve ist durch $\gamma'(\xi) = (1, \varphi'(\xi))$, $\xi \in U$, gegeben. In dieser Sprechweise ist $(*)$ äquivalent zu

$$\langle \operatorname{grad} f(\gamma(\xi)), \gamma'(\xi) \rangle = 0,$$

d.h. in jedem Punkt der Niveaumenge von f ist der Gradient von f orthogonal zum Tangentialvektor an die Niveaumenge in diesem Punkt. Dies stimmt mit dem früheren Befund überein, daß der Gradient von f stets in die Richtung des stärksten Anstiegs der Funktionswerte von f weist.

15. Extrema mit Nebenbedingungen

Bisher haben wir nur kritische Punkte aus dem *Inneren* des Definitionsbereiches von f zu untersucht (wir haben dies erzwungen, indem wir $\operatorname{def} f$ offen voraussetzten). Der Funktionswert $f(x_0)$ kann daher mit den Werten von f an jeder benachbarten Stelle aus einer *vollen* Umgebung von x_0 verglichen werden. Dies ermöglicht den effizienten Einsatz von Methoden der Differentialrechnung. Oft treten lokale Extrema jedoch am Rand von $\operatorname{def} f$ auf. Suchen wir etwa die lokalen Extrema von f auf $\bar{K}(0,1)$, beschränkt man sich vorerst auf das Innere $K(0,1)$ und kann die Methoden von Abschnitt 12 anwenden. Als nächstes ist zu untersuchen, ob auf dem Rand von $\bar{K}(0,1)$, d.h. im Falle $\operatorname{def} f \subset \mathbb{R}^2$ auf $S(0,1) = \{(\xi, \eta) \colon \xi^2 + \eta^2 = 1\}$, lokale Extrema liegen. Man sucht also in diesem Falle lokale Extrema von f unter der *Gleichungs*nebenbedingung $g(\xi, \eta) = \xi^2 + \eta^2 - 1 = 0$. Anschließend muß man prüfen, ob diese Stellen auch lokale Extrema bzgl. $\bar{K}(0,1)$ sind.

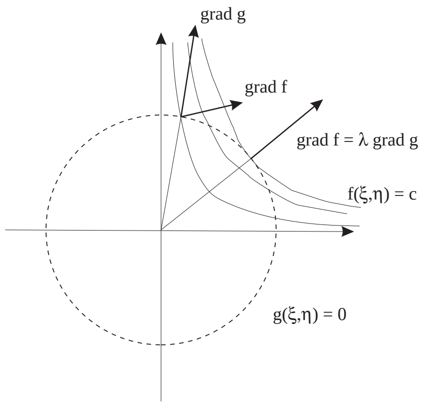
Beispiel 15.1. Wir untersuchen das Problem

$$\text{Maximiere: } f(\xi, \eta) = \xi\eta$$

unter der

$$\text{Nebenbedingung: } g(\xi, \eta) = \xi^2 + \eta^2 - 8 = 0.$$

In diesem Zusammenhang nennt man die zu minimierende (maximierende) Funktion f oft **Kostenfunktional**. Wir geben eine geometrische, heuristische Lösung an.



Dazu beachten wir, daß die Niveaulinien von f, d.h. die Kurven, auf denen f einen konstanten Wert annimmt, Hyperbeln sind. Weiters gilt

$$\begin{aligned} f'(\xi,\eta) &= (\eta \quad \xi), \\ Dg(\xi,\eta) &= (2\xi \quad 2\eta). \end{aligned}$$

Die Niveaulinie von f zum Wert $c = 1$ schneidet den Kreis (im 1. Quadranten) in zwei Punkten. Betrachtet man die Niveaulinien in Richtung des Gradienten von f, wird der zugehörige Funktionswert größer. Auch diese Niveaulinien schneiden den Kreis solange an zwei Stellen, bis die Niveaulinie den Kreis nur mehr berührt. Dies ist in $(2,2)$ der Fall. Da weitere Niveaulinien in Richtung des Gradienten den Kreis nicht mehr schneiden, ist $(2,2)$ jener Punkt des Kreises, in welchem f maximalen Wert hat.

Man erkennt also: die Lösung muß an einer Stelle auftreten, an der $\operatorname{grad} f$ und $\operatorname{grad} g$ linear abhängig sind. Dies führt auf das Gleichungssystem

$$\begin{cases} \operatorname{grad} f + \lambda \operatorname{grad} g = 0, \\ g(\xi,\eta) = 0, \end{cases}$$

mit den beiden Lösungen $(2,2)$ und $(-2,-2)$. Die lineare Abhängigkeit von f' und g' in Beispiel 15.1 ist kein Zufall, sondern problemimmanent.
In vielen Fällen ist es möglich, die Gleichungsnebenbedingung nach einer Variablen aufzulösen. Angenommen wir interessieren uns für die lokalen Extrema von $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ unter der Nebenbedingung $g(\xi,\eta,\zeta) = 0 = h(\xi,\eta) - \zeta$. Nehmen wir ferner an, h und f seien stetig differenzierbar. Das Problem

$$\text{Maximiere: } f(\xi,\eta,\zeta)$$

unter der

$$\text{Nebenbedingung: } g(\xi,\eta,\zeta) = 0$$

ist daher gleichwertig mit dem *nicht restringierten* Problem

$$\text{Maximiere } F(\xi,\eta) = f(\xi,\eta,h(\xi,\eta)).$$

Setzt man $H\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $(\xi,\eta) \mapsto (\xi,\eta,h(\xi,\eta))$, gilt $F = f \circ H$. Nach Satz **??** ergeben sich die kritischen Punkte von F aus $(x = (\xi,\eta))$

$$\begin{aligned}
0 = F'(x) &= f'(H(x)) \circ H'(x) \\
&= \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial \xi}(H(x)) & \frac{\partial f}{\partial \eta}(H(x)) & \frac{\partial f}{\partial \zeta}(H(x)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{\partial h}{\partial \xi}(x) & \frac{\partial h}{\partial \eta}(x) \end{pmatrix} \\
&= \left(\frac{\partial f}{\partial \xi}(H(x)) + \frac{\partial f}{\partial \zeta}(H(x))\frac{\partial h}{\partial \xi}(x), \quad \frac{\partial f}{\partial \eta}(H(x)) + \frac{\partial f}{\partial \zeta}(H(x))\frac{\partial h}{\partial \eta}(x) \right).
\end{aligned}$$

Dies kann mit $\partial_x = (\partial_\xi \quad \partial_\eta)$ kompakter in der Form

$$(*) \qquad \partial_x f(H(x)) + \frac{\partial f}{\partial \zeta}(H(x))\partial_x h(x) = 0$$

geschrieben werden. Berücksichtigen wir noch

$$Dg(\xi,\eta,\zeta) = (\partial_x h(\xi,\eta) \quad -1),$$

und ergänzen wir $(*)$ durch die triviale Gleichung

$$-\frac{\partial f}{\partial \zeta}(H(x)) = \frac{\partial g}{\partial \zeta}\frac{\partial f}{\partial \zeta}(H(x)),$$

also

$$\frac{\partial f}{\partial \zeta}(H(x)) + \frac{\partial f}{\partial \zeta}(H(x))\frac{\partial g}{\partial \zeta} = 0,$$

können wir $(*)$ in der Form

$$f'(H(x)) + \frac{\partial f}{\partial \zeta}(H(x))g'(x) = 0$$

schreiben. Setzen wir $\lambda = \frac{\partial f}{\partial \zeta}(H(x))$, erhalten wir die kritischen Punkte von F aus dem Gleichungssystem

$$\begin{aligned}
f'(H(x)) + \lambda g'(x) &= 0, \\
g(x) &= 0.
\end{aligned}$$

Diese Vorgangsweise ermöglicht es, ein Optimierungsproblem mit einer Gleichungsnebenbedingung auf ein nicht restringiertes Problem zurückzuführen. Allerdings tritt nun eine neue, zusätzliche Variable λ auf, die ebenfalls berechnet werden muß. Wir zeigen nun, daß dieses Verfahren unter bestimmten Voraussetzungen auch dann funktioniert, wenn es nicht möglich ist, die Gleichungsnebenbedingung explizit nach einer Variablen aufzulösen.

Satz 15.2 (Lagrangesche Multiplikatorregel). *Die Abbildungen $f\colon D \to \mathbb{R}$, $g\colon D \to \mathbb{R}^n$, $D \subset \mathbb{R}^m$, $n < m$, seien stetig differenzierbar. f besitze in x_0 ein lokales Extremum unter der Nebenbedingung $g(x) = 0$. Die Jacobimatrix von g an der Stelle x_0 habe*

Rang n (d.h. die Vektoren $\operatorname{grad} g_i(x_0)$*,* $i = 1, \dots, n$*, sind linear unabhängig). Dann existieren n Zahlen* $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ ***(Lagrange Multiplikatoren)*** *derart, daß*

$$f'(x_0) + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i g_i'(x_0) = 0,$$

also das Gleichungssystem

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\frac{\partial f(x_0)}{\partial \xi_1} & + & \lambda_1 \frac{\partial g_1(x_0)}{\partial \xi_1} & + & \lambda_2 \frac{\partial g_2(x_0)}{\partial \xi_1} & + & \dots & + & \lambda_n \frac{\partial g_n(x_0)}{\partial \xi_1} & = & 0 \\
 & & & & & & & & & \vdots & \\
\frac{\partial f(x_0)}{\partial \xi_m} & + & \lambda_1 \frac{\partial g_1(x_0)}{\partial \xi_m} & + & \lambda_2 \frac{\partial g_2(x_0)}{\partial \xi_m} & + & \dots & + & \lambda_n \frac{\partial g_n(x_0)}{\partial \xi_m} & = & 0
\end{array}$$

erfüllt ist.

Beweis. 1. Schritt: Elimination von n Variablen in g.
Die Voraussetzung Rang $g'(x_0) = n$ bedeutet, daß n Spalten von $g'(x_0)$ linear unabhängig sind. O.B.d.A. können wir annehmen, daß dies die ersten n Spalten sind. Wir setzen nun

$$\begin{aligned}
x &= (\xi_1, \dots, \xi_m), & x_0 &= (\xi_1^0, \dots, \xi_m^0), \\
y &= (\xi_1, \dots, \xi_n), & y_0 &= (\xi_1^0, \dots, \xi_n^0), \\
z &= (\xi_{n+1}, \dots, \xi_m), & z_0 &= (\xi_{n+1}^0, \dots, \xi_m^0).
\end{aligned}$$

An Stelle von $f(x)$, $g(x)$ schreiben wir $f(y, z)$, $g(y, z)$. Da f in $x_0 = (y_0, z_0)$ ein lokales Extremum unter der Nebenbedingung $g(x) = g(y, z) = 0$ besitzt, gilt

$$g(y_0, z_0) = 0.$$

Die ersten n Spalten von $g'(x_0)$ sind linear unabhängig, dies ist gleichwertig mit der Invertierbarkeit von $\partial_y g(y_0, z_0)$. Dem Satz über implizite Funktionen 14.10 entnehmen wir nun, daß $g(y, z)$ in einer Umgebung von z_0 stetig differenzierbar nach y aufgelöst werden kann, d.h. es gibt eine Umgebung $U \in \mathcal{U}(z_0)$, $U \subset \mathbb{R}^{m-n}$, und eine stetig differenzierbare Funktion $\varphi\colon U \to \mathbb{R}^n$ mit der Eigenschaft

$$\begin{aligned}
\forall z \in U\colon\ g(\varphi(z), z) &= 0, \\
\varphi(z_0) &= y_0.
\end{aligned}$$

Ferner gilt für alle $z \in U$

$$\varphi'(z) = -(\partial_y g(\varphi(z), z))^{-1} \partial_z g(\varphi(z), z).$$

2. Schritt: Ableitung des nicht restringierten Kostenfunktionals.
Für alle $z \in U$ gilt $(\varphi(z), z) \in D$. Daher können wir auch eine Abbildung F auf U definieren durch

$$F := \begin{cases} U \to \mathbb{R} \\ z \mapsto f(\varphi(z), z) \end{cases}.$$

Es ist klar, daß f an der Stelle $x_0 = (y_0, z_0)$ genau dann ein lokales Extremum unter der Nebenbedinung $g(y, z) = 0$ besitzt, wenn F an der Stelle z_0 ein lokales Extremum *ohne* Nebenbedinungen besitzt. Nach Satz 6.2 muß also

$$F'(z_0) = 0$$

gelten. Setzen wir

$$H : \begin{cases} U \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n} \\ z \mapsto (\varphi(z), z), \end{cases}$$

ist H stetig differenzierbar auf U und es gilt für $h \in \mathbb{R}^{m-n}$

$$H'(z)h = (\varphi'(z)h, h).$$

Wegen $F = f \circ H$ (beachte $H(U) \subset D$) erhalten wir mit Hilfe der Kettenregel für $h \in \mathbb{R}^{m-n}$

$$\begin{aligned} F'(z)h &= f'(H(z)) \circ H'(z)h \\ &= f'(H(z))(\varphi'(z)h, h) \\ &= f'(H(z))((\varphi'(z)h, 0) + (0, h)) \\ &= \partial_y f(H(z))\varphi'(z)h + \partial_z f(H(z))h, \end{aligned}$$

d.h. z_0 genügt der Gleichung

$$(*) \qquad \partial_y f(H(z_0))\varphi'(z_0) + \partial_z f(H(z_0)) = 0.$$

3. Schritt: Konstruktion des Lagrange Multiplikators.
Wir eliminieren $\varphi'(z_0)$ in $(*)$, indem wir

$$\varphi'(z_0) = -(\partial_y g(y_0, z_0))^{-1}\partial_z g(y_0, z_0)$$

einsetzen und erhalten mit $H(z_0) = (y_0, z_0)$

$$(**) \qquad -\partial_y f(y_0, z_0)(\partial_y g(y_0, z_0))^{-1}\partial_z g(y_0, z_0) + \partial_z f(y_0, z_0) = 0.$$

Beachten wir

$$\partial_y f(y_0, z_0)\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad (\partial_y g(y_0, z_0))^{-1}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n,$$

also

$$\Lambda := -\partial_y f(y_0, z_0)(\partial_y g(y_0, z_0))^{-1}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},$$

läßt sich $(**)$ mit Hilfe von Λ in der Form

$$\partial_z f(y_0, z_0) + \Lambda\partial_z g(y_0, z_0) = 0$$

schreiben. Aus der Definition von Λ ergibt sich weiters die Beziehung

$$\partial_y f(y_0, z_0) + \Lambda\partial_y g(y_0, z_0) = 0.$$

Die Matrixdarstellung von Λ ist eine $1 \times n$- Matrix $(\lambda_1 \dots \lambda_n)$. Die beiden letzten Gleichungen können kombiniert werden zu

$$f'(y_0, z_0) + \Lambda g'(y_0, z_0) = f'(x_0) + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i g_i'(x_0) = 0.$$

□

Bei der Lösung der Aufgabe, die Stellen lokaler Extrema von f unter der Nebenbedingung $g(x) = 0$ zu bestimmen, kann man routinemäßig so vorgehen, daß man zuerst die sogenannte **Lagrangefunktion** $\mathcal{L} \colon \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$,

$$\mathcal{L}(x, \lambda) = f(x) + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i g_i(x)$$

bildet und dann die kritischen Stellen von $\mathcal{L}$ berechnet,

$$\begin{aligned} \partial_x \mathcal{L}(x, \lambda) &= f'(x) + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i g_i'(x) = 0, \\ \partial_\lambda \mathcal{L}(x, \lambda) &= g(x) = 0. \end{aligned}$$

Jede Lösung (x_0, λ_0) dieses Gleichungssystems mit der Eigenschaft Rang $g'(x_0) = n$ kommt als Stelle eines lokalen Extremums von f unter der Nebenbedingung g in Frage. Ob dies tatsächlich der Fall ist, bedarf einer eigenen Untersuchung. Ebenso sind jene Stellen, welche von der Lagrangeschen Multiplikatorregel nicht erfaßt werden, also Stellen mit $g(x) = 0$ und Rang $g'(x) < n$, gesondert zu behandeln.

Bemerkung 15.3. Ist die Restriktionsmenge $R = \{x \in \mathbb{R}^m \colon g(x) = 0\}$ kompakt, so besitzt $f|_R$ ein globales Maximum und Minimum, mit anderen Worten, f hat unter der Nebenbedingung $g(x) = 0$ ein globales und damit auch lokales Maximum und Minimum. Der größte bzw. kleinste der Werte $f(x)$, die man mit Hilfe des vorhin beschriebenen Verfahrens gefunden hat, ist dann das gesuchte Maximum bzw. Minimum von f unter der Nebenbedingung $g(x) = 0$.

Beispiel 15.4.

$$\begin{aligned} \text{Maximiere: } & f(\xi, \eta, \zeta) = \xi + \eta + \zeta, \\ \text{Nebenbedingung: } & \zeta = 1 - 7\xi^2 - 3\eta^2. \end{aligned}$$

Eliminationsmethode:
Wir lösen das gleichwertige Problem, in dem die Nebenbedingung eliminiert wurde:

$$\text{Maximiere } F(\xi, \eta) = (\xi + \eta) + (1 - 7\xi^2 - 3\eta^2).$$

Die notwendige Optimialitätsbedingung lautet

$$F'(\xi, \eta) = 0 = (1 - 14\xi \quad 1 - 6\eta),$$

d.h.

$$(\xi^0, \eta^0) = (\frac{1}{14}, \frac{1}{6}).$$

Aus der Nebenbedingung erhalten wir $\zeta^0 = \frac{37}{42}$. Die Hesse Matrix von F

$$\mathcal{H}_F(\frac{1}{14}, \frac{1}{6}) = \begin{pmatrix} -14 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}$$

ist negativ definit, somit besitzt F an der Stelle $(\frac{1}{14}, \frac{1}{6})$ und damit f an der Stelle $(\frac{1}{14}, \frac{1}{6}, \frac{37}{42})$ ein lokales Maximum. Wegen $\lim_{\|(\xi,\eta)\|\to\infty} F(\xi, \eta) = -\infty$ wird an dieser Stelle sogar das globale Maximum angenommen.
Lagrangesche Multiplikatormethode:
Wir bilden die Lagrange Funktion $(g(\xi, \eta, \zeta) = 1 - 7\xi^2 - 3\eta^2 - \zeta)$

$$\mathcal{L}(\xi, \eta, \zeta, \lambda) = \xi + \eta + \zeta + \lambda(1 - 7\xi^2 - 3\eta^2 - \zeta)$$

und bestimmen die Nullstellen von $\mathcal{L}'$:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \xi} &= 1 - \lambda \cdot 14\xi = 0 \\
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta} &= 1 - \lambda \cdot 6\eta = 0 \\
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \zeta} &= 1 - \lambda = 0 \\
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} &= 1 - 7\xi^2 - 3\eta^2 - \zeta = 0.
\end{aligned}$$

Als Lösung ergibt sich $\lambda = 1$ und $(\xi, \eta, \zeta) = (\frac{1}{14}, \frac{1}{6}, \frac{37}{42})$. Wegen

$$g'(\xi, \eta, \zeta) = (-14\xi \quad -6\eta \quad -1) \neq 0$$

kommt nur die Stelle $(\frac{1}{14}, \frac{1}{6}, \frac{37}{42})$ für ein lokales Extremum in Frage. Da g' überall regulär ist, kommen alle lokalen Extrema unter den Nullstellen von $\mathcal{L}'$ vor. Es gibt allerdings nur eine Nullstelle von $\mathcal{L}'$, somit muß an dieser Stelle ein globales Extremum vorliegen. Durch Vergleich mit dem Funktionswert an einer beliebigen zulässigen Stelle erkennt man, daß in $(\frac{1}{14}, \frac{1}{6}, \frac{37}{42})$ das globale Maximum angenommen wird.

Beispiel 15.5.

$$\begin{aligned}
\text{Maximiere } & f(\xi, \eta, \zeta) = \zeta, \\
\text{Nebenbedingung: } & g_1(\xi, \eta, \zeta) = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 - 1 = 0, \\
& g_2(\xi, \eta, \zeta) = 3\xi\eta - 4\zeta = 0.
\end{aligned}$$

Wir bilden die Lagrange Funktion

$$\mathcal{L}(\xi, \eta, \zeta, \lambda_1, \lambda_2) = \zeta + \lambda_1(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 - 1) + \lambda_2(3\xi\eta - 4\zeta).$$

Die Nullstellen von $\mathfrak{L}'$ ergeben sich aus

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \xi} &= 2\lambda_1\xi + 3\lambda_2\eta = 0\\
\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \eta} &= 2\lambda_1\eta + 3\lambda_2\xi = 0\\
\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \zeta} &= 1 + 2\lambda_1\zeta - 4\lambda_2 = 0\\
\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \lambda_1} &= \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 - 1 = 0\\
\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \lambda_2} &= 3\xi\eta - 4\zeta = 0.
\end{aligned}$$

Wir überlegen zuerst, daß $\lambda_2 = 0$ nicht möglich ist. Die 3. Gleichung zeigt, daß beide Lagrangemultiplikatoren nicht gleichzeitig verschwinden können. Wäre nun $\lambda_2 = 0$, ergäbe sich aus den ersten beiden Gleichungen ($\lambda_1 \neq 0!$) $\xi = \eta = 0$ und aus der letzten Gleichung $\zeta = 0$. Dies widerspricht der vorletzten Gleichung. Auf ähnliche Weise folgt aus den ersten beiden Gleichungen $\xi \neq 0$, $\eta \neq 0$ und damit

$$\frac{2\lambda_1}{3\lambda_2} = -\frac{\eta}{\xi} = -\frac{\xi}{\eta},$$

also

$$\xi^2 = \eta^2,$$

bzw.

$$\xi = \pm\eta.$$

Aus der letzten Gleichung folgt

$$\zeta = \pm\frac{3}{4}\xi^2,$$

die vierte Gleichung ergibt

$$2\xi^2 + \frac{9}{16}\xi^4 - 1 = 0,$$

also $\xi^2 = \frac{4}{9}$ (bzw. $\xi^2 = -4$, dies führt auf keine reelle Lösung).
Wir erhalten also

$$\xi = \pm\frac{2}{3},$$

und damit die kritischen Stellen von $\mathfrak{L}$,

$$(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}), \quad (\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}), \quad (-\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}), \quad (-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}).$$

Die Restriktionsmenge R ist eine abgeschlossene Teilmenge von $S(0,1)$ und somit kompakt. f nimmt auf R das Maximum an. Dies hat den Wert $\frac{1}{3}$ und tritt an den Stellen $(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3})$ und $(-\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$ auf.

Ob an einer kritischen Stelle der Lagrangefunktion tatsächlich ein lokales Extremum vorliegt, kann man aus deren zweiter Ableitung ablesen. Wir nennen einen kritischen Punkt (x_0, λ_0) der Lagrangefunktion **nichtentartet** , wenn die sogenannte **geränderte Hessesche Matrix** $\mathcal{G}$ von $\mathcal{L}$ in (x_0, λ_0) regulär ist, d.h. wenn

$$\mathcal{G}(x_0, \lambda_0) = \begin{pmatrix} \mathcal{H}_{\mathcal{L}}(x_0) & g'(x_0)^T \\ g'(x_0) & 0 \end{pmatrix}$$

vollen Rang hat. Wir weisen darauf hin, daß im Folgenden die Lagrangefunktion stets für den festen Lagrange Multiplikator $\lambda = \lambda_0$ ausgewertet wird. Insbesondere bedeutet $\mathcal{H}_{\mathcal{L}}(x_0)$ die Hesse Matrix der Abbildung $x \to \mathcal{L}(x, \lambda_0)$ an der Stelle $x = x_0$.

Satz 15.6. *Die Abbildungen $f\colon D \to \mathbb{R}$ und $g\colon D \to \mathbb{R}^n$, $D \subset \mathbb{R}^m$ offen, $n < m$,seien stetig differenzierbar und (x_0, λ_0) sei ein nichtentarteter kritischer Punkt der Lagrangefunktion. Dann besitzt f in x_0 ein lokales Minimum unter der Nebenbedingung $g(x) = 0$ genau dann, wenn $h^T \mathcal{H}_{\mathcal{L}}(x_0) h \geq 0$ für alle $h \in \ker g'(x_0)$ gilt.*

Für den Beweis dieses Kriteriums verweisen wir auf die einschlägige Literatur Wir demonstrieren die Anwendung dieses Kriteriums an Hand der Beispiele 15.4 und 15.5. Es wurde allerdings bereits gezeigt, daß es gelegentlich einfachere Argumente gibt, um die kritischen Stellen der Lagrangefunktion zu untersuchen.

Beispiel 15.7 (Fortsetzung von Beipiel 15.4). Es wurde bereits gezeigt, daß die Lagrangefunktion

$$\mathcal{L}(\xi, \eta, \zeta, \lambda) = \xi + \eta + \zeta + \lambda(1 - 7\xi^2 - 3\eta^2 - \zeta)$$

nur in $(x_0, \lambda_0) = (\frac{1}{14}, \frac{1}{6}, \frac{37}{42}, 1)$ eine kritische Stelle hat. Wertet man die Jacobi Matrix von g in x_0 aus, erhält man

$$J_g(x_0) = (-1, -1, -1).$$

Wir benötigen noch die Hesse Matrix von $\mathcal{L}(x, 1)$ in $x = x_0$. Dazu berechnen wir

$$\begin{aligned}
&\mathcal{L}_\xi = 1 - 14\lambda\xi, && \mathcal{L}_{\xi\xi} = -14\lambda, && \mathcal{L}_{\xi\eta} = 0, && \mathcal{L}_{\xi\zeta} = 0, \\
&\mathcal{L}_\eta = 1 - 6\lambda\eta, && \mathcal{L}_{\eta\xi} = 0, && \mathcal{L}_{\eta\eta} = -6\lambda, && \mathcal{L}_{\eta\zeta} = 0, \\
&\mathcal{L}_\zeta = 1 - \lambda, && \mathcal{L}_{\zeta\xi} = 0, && \mathcal{L}_{\zeta\eta} = 0, && \mathcal{L}_{\zeta\zeta} = 0.
\end{aligned}$$

Als nächstes bauen wir die geränderte Hesse Matrix in $(x_0, \lambda_0) = (x_0, 1)$ auf:

$$\mathcal{G}(x_0, 1) = \begin{pmatrix} \mathcal{H}_{\mathcal{L}}(x_0) & J_g(x_0)^T \\ J_g(x_0) & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -14 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -6 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Man verifiziert leicht, daß die Matrix $\mathcal{G}(x_0, 1)$ regulär ist. Die Hesse Matrix $\mathcal{H}_{\mathcal{L}}(x_0)$ ist eine Diagonalmatrix mit den Eigenwerten $\{-14, -6, 0\}$ und daher negativ semidefinit. Nach Satz 15.6 nimmt f in x_0 ein lokales Maximum an. Es wurde bereits im Beispiel 15.4 gezeigt, daß in x_0 sogar das globale Maximum angenommen wird.

Beispiel 15.8 (Fortsetzung von Beipiel 15.5). Wir verifizieren mit Hilfe von Satz 15.6, daß an der Stelle $x_0 = (\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3})$ ein lokales Maximum angenommen wird. Eine einfache Rechnung ergibt die Werte der zugehörigen Lagrange Multiplikatoren

$$\lambda_1 = -\frac{3}{10}, \quad \lambda_2 = \frac{1}{5}.$$

Weiters ist

$$Dg(\xi, \eta, \zeta) = \begin{pmatrix} 2\xi & 2\eta & 2\zeta \\ 3\eta & 3\xi & -4 \end{pmatrix}$$

und somit

$$Dg(x_0) = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} & \frac{4}{3} & \frac{2}{3} \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix}.$$

Der Kern von $Dg(x_0)$ ist gegeben durch

$$\ker Dg(x_0) = \{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} t \colon t \in \mathbb{R} \}$$

Die Hesse Matrix von $(\xi, \eta, \zeta) \mapsto \mathcal{L}(\xi, \eta, \zeta, \lambda_1, \lambda_2)$ ist gegeben durch

$$\mathcal{H}_{\mathcal{L}}(x_0) = \begin{pmatrix} 2\lambda_1 & 3\lambda_2 & 0 \\ 3\lambda_2 & 2\lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & 2\lambda_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{3}{5} & 0 \\ \frac{3}{5} & -\frac{3}{5} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{5} \end{pmatrix},$$

die geränderte Hesse Matrix ist somit

$$\mathcal{G}(x_0, \lambda_1, \lambda_2) = \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{3}{5} & 0 & \frac{4}{3} & 2 \\ \frac{3}{5} & -\frac{3}{5} & 0 & \frac{4}{3} & 2 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{5} & \frac{2}{3} & -4 \\ \frac{4}{3} & \frac{4}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -4 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Man verifiziere, daß $\mathcal{G}(x_0, \lambda_1, \lambda_2)$ regulär ist. Da der Kern von $Dg(x_0)$ Dimension 1 hat, genügt es, $h^T \mathcal{H}_{\mathcal{L}}(x_0) h \geq 0$ für einen Basisvektor von $\ker Dg(x_0)$ zu zeigen, etwa für $h = (-1, 1, 0)^T$. Wegen

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{3}{5} & 0 \\ \frac{3}{5} & -\frac{3}{5} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -\frac{12}{5} < 0$$

liegt in x_0 ein lokales Maximum vor. Da $Dg(\xi, \eta, \zeta)$ für jede Wahl von (ξ, η, ζ) vollen Rang hat, kann es, abgesehen von $(-\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$, keine weiteren Stellen geben, an denen f ein lokales Maximum annimmt.

KAPITEL viii

Integralrechnung

Historisch wurzelt der Integralbegriff in der Ermittelung von Flächeninhalten. Aber auch physikalische Problemstellungen führen auf Probleme der Integralrechnung: Etwa die Berechnung des zurückgelegten Weges während einer Zeitspanne $[a,b]$, wenn man die Geschwindigkeit v als Funktion der Zeit kennt. Besonders einfach ist die Lösung dieses Problems, wenn die Geschwindigkeit auf jedem Intervall $[t_{i-1},t_i]$, $t_0 = a < t_1 < \cdots < t_{i-1} < t_i < \cdots < t_n = b$, einen konstanten Wert v_i, $i = 1,\dots,n$ annimmt. Da der bei konstanter Geschwindigkeit v_i während der Zeitspanne $t_i - t_{i-1}$ zurückgelegte Weg durch $v_i(t_i - t_{i-1})$ gegeben ist, ergibt sich für den gesamten Weg der Ausdruck $\sum_{i=1}^{n} v_i(t_i - t_{i-1})$. Dies ist ein Beispiel eines besonders einfachen Integrals. Selbstverständlich genügt es nicht, sich auf einen derart engen Integralbegriff zu beschränken. Wir zeigen im folgenden, wie man das Integral von stückweise konstanten Funktionen wie oben auf eine für die Praxis ausreichend reichhaltige Klasse von Funktionen systematisch ausdehnen kann.

Notation: In diesem Kapitel bezeichnet I stets das abgeschlossene, beschränkte Intervall $[a,b] \subset \mathbb{R}$. Diese Voraussetzung wird im Folgenden daher nicht mehr gesondert ausgewiesen. Wir erinnern an died Norm von $f \in \mathcal{B}(I,\mathbb{C})$

$$||f||\colon = \sup\{|f(x)|\colon x \in I\},$$

das ist die **Norm** von f. Die gleichmäßige Konvergenz einer Folge von Funktionen (f_n) gegen f werden wir durch $f_n \rightrightarrows f$ andeuten.

1. Treppenfunktionen, Regelfunktionen

Wir präzisieren vorerst die Klasse der stückweise konstanten Funktionen, welchen auf anschauliche Weise ein Integralwert zugeordnet werden kann.

Definition 1.1. *Es sei $f\colon I \to \mathbb{C}$ und $n \in \mathbb{N}$.*

i) $\mathcal{Z} = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ *heißt* ***Zerlegung*** *von I* $\underset{Def}{\Leftrightarrow}$ $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$.
   $|\mathcal{Z}| := \max\{x_i - x_{i-1} : x_i \in \mathcal{Z}, i = 1,\dots,n\}$ *heißt* ***Feinheitsmaß*** *der Zerlegung $\mathcal{Z}$.*
ii) *f heißt* ***Treppenfunktion*** $\underset{Def}{\Leftrightarrow}$ *es gibt eine Zerlegung* $\mathcal{Z} = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ *von I und Zahlen c_i, $i = 1,\dots,n$, derart, daß* $f|_{(x_{i-1},x_i)} = c_i$,
iii) $\mathcal{T}(I,\mathbb{C}) := \{f\colon I \to \mathbb{C}$ *ist eine Treppenfunktion*$\}$.

Da f auf I definiert ist, sind natürlich auch die Funktionswerte von $f(x_i)$, $i = 0, \ldots, n$, festgelegt. Sie sind aber im Folgenden ohne Bedeutung. Verschiedene Zerlegungen $\mathcal{Z}$ von I können zur gleichen Treppenfunktion f führen, z.B. wenn man noch weitere Teilpunkte in eine Zerlegung einfügt. Dies ist zweckmäßig etwa beim Nachweis, daß für $f, g \in \mathcal{T}(I, \mathbb{C})$ auch $f + g \in \mathcal{T}(I, \mathbb{C})$ gilt. Bezeichnet man mit $\mathcal{Z}_f$ bzw. $\mathcal{Z}_g$ den Treppenfunktionen f bzw. g zugrundeliegenden Zerlegungen von I, und mit $\mathcal{Z}$ jene Zerlegung, in der sämtliche Teilpunkte von $\mathcal{Z}_f$ und $\mathcal{Z}_g$ vorkommen, d.h. $\mathcal{Z}$ ist eine **Verfeinerung** von $\mathcal{Z}_f$ und $\mathcal{Z}_g$, dann sind sowohl f als auch g und damit auch $f + g$ (aber auch fg) auf den Teilintervallen von $\mathcal{Z}$ konstant. Da natürlich $\lambda f \in \mathcal{T}(I, \mathbb{C})$ für $f \in \mathcal{T}(I, \mathbb{C})$ und $\lambda \in \mathbb{C}$ gilt, ergibt sich, daß $\mathcal{T}(I, \mathbb{C})$ ein (komplexer) Vektorraum ist. Da eine Treppenfunktion nur endlich viele Werte annehmen kann, gilt trivialerweise

$$\mathcal{T}(I, \mathbb{C}) \subset \mathcal{B}(I, \mathbb{C}).$$

Im nächsten Abschnitt werden wir zeigen, daß man auf $\mathcal{T}(I, \mathbb{C})$ in naheliegender Weise einen Integralbegriff erklären kann. Um zu verstehen, auf welche Funktionen sich dieser Integralbegriff erweitern läßt, ist es notwendig zu untersuchen, welche Funktionen als *gleichmäßige* Grenzwerte von Treppenfunktionen darstellbar sind. Dies trifft beispielsweise für stetige Funktionen zu.

Satz 1.2. *Es sei $f \in C(I, \mathbb{C})$. Dann gibt es eine Folge $(t_n) \subset \mathcal{T}(I, \mathbb{C})$, die gleichmäßig gegen f konvergiert:* $\lim_{n\to\infty} \|f - t_n\| = 0$.

Beweis. Wegen der Kompaktheit von I ist f gleichmäßig stetig, d.h.

$$(*) \qquad \forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) \forall x, y \in I \colon |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Es sei $\varepsilon > 0$ und δ durch $(*)$ gegeben. Wir wählen eine Zerlegung $\mathcal{Z} = \{x_0, \ldots, x_n\}$ mit Feinheitsmaß $|\mathcal{Z}| \leq \delta$ und definieren eine Treppenfunktion t_ε, indem wir $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i)$ beliebig wählen und

$$t_\varepsilon(x) = \begin{cases} f(\xi_i), & x \in [x_{i-1}, x_i), \quad i = 1, \ldots, n, \\ f(b), & x = b \end{cases}$$

festsetzen. Da jedes $x \in I$ in genau einem der Intervalle $[x_{i-1}, x_i)$, $i = 1, \ldots, n$, liegt (oder $x = b$ gilt), folgt mit $|\xi_i - x| < \delta$ aus $(*)$ für $x \neq b$

$$|f(x) - t_\varepsilon(x)| = |f(x) - f(\xi_i)| < \varepsilon,$$

(für $x = b$ erhält man $|f(b) - t_\varepsilon(b)| = 0$) also

$$\|f - t_\varepsilon\| \leq \varepsilon.$$

Läßt man nun ε eine Nullfolge durchlaufen, etwa $(\frac{1}{n})$, erhält man eine Folge $(t_n) \subset \mathcal{T}(I, \mathbb{C})$ mit

$$\|f - t_n\| \leq \frac{1}{n},$$

d.h. (t_n) konvergiert gleichmäßig gegen f. $\square$

Auf die Kompaktheit von I kann nicht verzichtet werden: es ist nicht möglich, die stetige Funktion $x \mapsto \frac{1}{x}$ auf $(0,1)$ gleichmäßig durch eine Folge von Treppenfunktionen zu approximieren.
Der Beweis zeigt, wie man vorgehen muß, wenn man zu einer gegebenen *stetigen* Funktion f eine approximierende Folge von Treppenfunktionen (t_n) konstruieren soll. Aus der Definition 1.1 geht hervor, daß Treppenfunktionen alle sinnvollen links- und rechtsseitigen Grenzwerte besitzen. Diese Eigenschaft überträgt sich auch auf die gleichmäßigen Grenzwerte von Treppenfunktionen.

SATZ 1.3. *Die Abbildung $f\colon I \to \mathbb{C}$ werde gleichmäßig durch eine Folge $(t_n) \subset \mathcal{T}(I,\mathbb{C})$ approximiert. Dann besitzt f an jeder Stelle – wo dies möglich ist – sowohl den rechtsseitigen als auch den linksseitigen Grenzwert.*

BEWEIS. Zu zeigen ist

$$\forall x \in [a,b) \exists f(x^+) \text{ und } \forall x \in (a,b] \exists f(x^-).$$

Wir zeigen nur die Existenz von $f(x^+)$ und überlassen den entsprechenden Nachweis für $f(x^-)$ dem interessierten Leser. Zu $\varepsilon > 0$ wählen wir einen festen Index N_ε so , daß

$$|f(x) - t_{N_\varepsilon}(x)| \le ||f - t_{N_\varepsilon}|| < \varepsilon$$

für alle $x \in [a,b]$ gilt. Es sei $\xi \in I$. Die Treppenfunktion t_{N_ε} besitzt den rechtsseitigen Grenzwert in ξ, d.h. zu $\varepsilon > 0$ existiert $\delta = \delta(\xi,\varepsilon)$, sodaß für alle $x, y \in (\xi, \xi + \delta)$

$$|x - y| < \delta \Rightarrow |t_{N_\varepsilon}(x) - t_{N_\varepsilon}(y)| < \varepsilon.$$

zutrifft. Insgesamt ergibt sich für solche x, y

$$|f(x) - f(y)| \le |f(x) - t_{N_\varepsilon}(x)| + |t_{N_\varepsilon}(x) - t_{N_\varepsilon}(y)| + |t_{N_\varepsilon}(y) - f(y)| < 3\varepsilon.$$

Die Behauptung folgt nun aus einer einfachen Modifikation des Cauchy Kriteriums IV-3.8. ☐

DEFINITION 1.4. *Es sei $f\colon I \to \mathbb{C}$.*

i) *f heißt* ***Regelfunktion*** $\underset{Def}{\Leftrightarrow} \exists (t_n) \subset \mathcal{T}(I,\mathbb{C})\colon \lim_{n\to\infty} t_n = f$, *glm.*

ii) $\mathcal{R}(I,\mathbb{C}) := \{f\colon I \to \mathbb{C}, f$ *ist Regelfunktion* $\}$.

Satz 1.3 zeigt, daß eine Regelfunktion nur Unstetigkeiten 1. Art aufweisen kann. Diese für Regelfunktionen notwendige Bedingung ist auch hinreichend.

SATZ 1.5. *Besitzt $f\colon I \to \mathbb{C}$ überall den links- und rechtsseitigen Grenzwert (wo dies möglich ist), dann ist f eine Regelfunktion.*

BEWEIS. Es sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Für alle $\xi \in [a,b]$ gibt es nach Voraussetzung eine Umgebung $K(\xi,\delta_\xi)$, $\delta_\xi > 0$, mit folgender Eigenschaft:

$$(*) \qquad \forall x, y \in K(\xi,\delta_\xi) \cap I\colon (x - \xi)(y - \xi) > 0 \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

(Die Bedingung $(x - \xi)(y - \xi) > 0$ bedeutet, daß entweder $x, y < \xi$ oder $x, y > \xi$ zutrifft). Die Familie $\{K(\xi,\delta_\xi)\colon \xi \in I\}$ bildet eine offene Überdeckung von I. Da

I kompakt ist, genügen bereits endlich viele dieser Umgebungen, etwa $K(\xi_i, \delta_i)$, $i = 1, \dots, k$, um I zu überdecken. Die Punkte ξ_i und die Endpunkte der Intervalle $K(\xi_i, \delta_i)$ denken wir uns der Größe nach geordnet und erhalten dadurch eine Zerlegung $\mathcal{Z}$:

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b.$$

Aus jedem offenen Intervall (x_{i-1}, x_i) wählen wir einen Punkt z_i und definieren $t_\varepsilon \in \mathcal{T}(I, \mathbb{C})$ durch

$$t_\varepsilon(x) = \begin{cases} f(z_i), & x \in (x_{i-1}, x_i), \qquad i = 1, \dots, n, \\ f(x_i), & x = x_i \qquad\qquad\quad\ \ i = 0, \dots, n. \end{cases}$$

Für alle $x \in I$ gilt dann

$$|f(x) - t_\varepsilon(x)| < \varepsilon.$$

Dies ist trivialerweise richtig für $x = x_j$. Zu jedem anderen x gibt es genau einen Index j und mindestens einen Index $1 \leq \ell \leq k$ mit $x \in (x_{j-1}, x_j) \subset K(\xi_\ell, \delta_\ell)$. Da (x_{j-1}, x_j) entweder links oder rechts von ξ_ℓ liegt, folgt aus $(*)$

$$|f(x) - t_\varepsilon(x)| = |f(x) - f(z_j)| < \varepsilon.$$

Läßt man ε eine Nullfolge durchlaufen, erhält man eine Folge (t_n) mit $\lim_{n\to\infty} t_n = f$, glm. $\square$

Kombiniert man die Sätze 1.5 und 1.3, ergibt sich folgende Charakterisierung von Regelfunktionen.

Satz 1.6. *Es sei $f\colon I \to \mathbb{C}$. Äquivalent sind*

(1) *f ist eine Regelfunktion,*
(2) *f besitzt überall den links- und rechtsseitigen Grenzwert (wo dies möglich ist).*

Ist $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ monoton, dann existiert für alle $x \in (a, b]$ der rechtsseitige Grenzwert, für alle $x \in [a, b)$ der linksseitige Grenzwert und es gilt

$$f(x^+) = \inf_{s>x} f(s), \qquad \text{bzw. } f(x^-) = \sup_{s<x} f(s).$$

Monotone Funktionen sind also Regelfunktionen.
Sind f, g Regelfunktionen, folgt aus Satz 1.6, daß auch $f + g$ bzw. λf für $\lambda \in \mathbb{C}$ Regelfunktionen sind. $\mathcal{R}(I, \mathbb{C})$ ist somit ein Vektorraum. Es gilt

$$\mathcal{R}(I, \mathbb{C}) \subset \mathcal{B}(I, \mathbb{C}).$$

Abschließend zeigen wir, daß $\mathcal{R}(I, \mathbb{C})$ gegenüber der Bildung gleichmäßiger Grenzwerte abgeschlossen ist:

Satz 1.7. *Es sei $(f_n)_{n\geq 1} \subset \mathcal{R}(I, \mathbb{C})$ und $f_n \rightrightarrows f$. Dann ist f eine Regelfunktion.*

BEWEIS. Es sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Zu jedem f_n existiert $t_n \in \mathfrak{T}(I, \mathbb{C})$ mit

$$\|f_n - t_n\| < \varepsilon.$$

Zu $\varepsilon > 0$ gibt es nach Voraussetzung einen Index $N(\varepsilon)$ mit $\|f - f_n\| < \varepsilon$ für alle $n \geq N(\varepsilon)$. Somit folgt für alle $n \geq N(\varepsilon)$

$$\|f - t_n\| \leq \|f - f_n\| + \|f_n - t_n\| < 2\varepsilon.$$

Somit kann auch f durch eine Folge von Treppenfunktionen gleichmäßig approximiert werden und ist daher selbst eine Regelfunktion. $\square$

2. Das Cauchy Integral

Es sei $t \in \mathfrak{T}(I, \mathbb{C})$ und $\mathcal{Z} = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ eine zu t passende Zerlegung von I. Ferner bezeichnen wir mit c_i den Wert von t auf (x_{i-1}, x_i), $i = 1, \dots, n$. Wir definieren die Abbildung $\mathfrak{I}\colon \mathfrak{T}(I, \mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ durch

$$\mathfrak{I}(t) = \sum_{k=1}^{n} c_k(x_k - x_{k-1}).$$

Der Wert von $\mathfrak{I}(t)$ könnte möglicherweise nicht nur von t, sondern auch von der jeweiligen Zerlegung $\mathcal{Z}$ abhängen. Tatsächlich ist dies aber nicht der Fall: Man überzeugt sich davon, indem man sich vorerst überlegt, daß sich $\mathfrak{I}(t)$ nicht ändert, wenn man einen Teilpunkt in $\mathcal{Z}$ einfügt, oder einen (redundanten) Teilpunkt von $\mathcal{Z}$, in dem t stetig ist, wegläßt. Es seien nun t eine Treppenfunktion und $\mathcal{Z}_i$, $i = 1, 2$, zwei nach Definition 1.1 zugeordnete Zerlegungen von I. Wir bilden die Zerlegung $\mathcal{Z}_{12}$, in welcher sämtliche Teilpunkte von $\mathcal{Z}_1$ und $\mathcal{Z}_2$ nach der Größe geordnet auftreten. Ferner sei $\mathfrak{I}_i(t)$ der Wert der Summe, wenn man der Berechnung die Zerlegung $\mathcal{Z}_i$ zugrundelegt, $i = 1, 2, 12$. Man kann nun der Zerlegung $\mathcal{Z}_1$ bzw. $\mathcal{Z}_2$ schrittweise einen Teilpunkt hinzufügen, ohne daß sich der Wert von $\mathfrak{I}_i(t)$, $i = 1, 2$ verändert. Nach endlich vielen Schritten ist man schließlich bei der Zerlegung $\mathcal{Z}_{12}$ angelangt und erhält

$$\mathfrak{I}_1(t) = \mathfrak{I}_{12}(t) = \mathfrak{I}_2(t).$$

Somit ist folgende Definition sinnvoll:

DEFINITION 2.1. *Es sei $t \in \mathfrak{T}(I, \mathbb{C})$ und $\mathcal{Z} = \{x_0, \dots, x_n\}$ eine Zerlegung von I. Ferner seien $c_i \in \mathbb{C}$, $i = 1, \dots, n$, die Werte von t auf (x_{i-1}, x_i).*

$$\mathfrak{I}(t) := \sum_{k=1}^{n} c_k(x_k - x_{k-1})$$

heißt ***(bestimmtes) Integral*** *von t. Man schreibt auch*

$$\mathfrak{I}(t) = \int_a^b t = \int_a^b t(x)dx$$

und nennt t ***Integrand****, a die* **untere** *und b die* **obere** ***Integrationsgrenze****.*

Beispiel 2.2. Wir betrachten die Abbildung (für festes $n \in \mathbb{N}$)

$$t(x) = \frac{1}{n}[nx], \quad x \in [0,1].$$

(vgl. Beispiel V-8.2). t nimmt auf $[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n})$ den Wert $c_k = \frac{k}{n}$ an, $k = 0, \dots, n-1$. Eine zu t passende Zerlegung von $[0,1]$ ist die äquidistante Einteilung

$$0 < \frac{1}{n} < \cdots < \frac{k}{n} < \cdots < \frac{n-1}{n} < 1,$$

d.h. $x_i = \frac{i}{n}$, $i = 0, \dots, n$, und $c_i = \frac{i-1}{n}$, $i = 1, \dots, n$. Somit folgt

$$\mathcal{I}(t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{i-1}{n} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} (i-1) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=0}^{n-1} i = \frac{n(n-1)}{n^2 \cdot 2} = \frac{1}{2}\frac{n-1}{n}.$$

Wir zeigen nun, daß $\mathcal{I} \colon \mathcal{T}(I, \mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ eine lineare Abbildung ist:

Satz 2.3. *Für alle $f, g \in \mathcal{T}(I, \mathbb{C})$, $I = [a,b]$, und für alle $\lambda \in \mathbb{C}$ gilt*

(1) $\mathcal{I}(f+g) = \mathcal{I}(f) + \mathcal{I}(g)$,
(2) $\mathcal{I}(\lambda f) = \lambda \mathcal{I}(f)$.

Beweis. Für den Beweis von (1) bildet man die Zerlegung $\mathcal{Z}$, in der alle Teilpunkte der zu f und zu g gehörenden Zerlegungen auftreten. Dann sind sowohl f als auch g konstant auf den Teilintervallen von $\mathcal{Z}$. Die Behauptung (1) ist nun evident. Die Behauptung (2) folgt unmittelbar aus der Definition von $\mathcal{I}$. $\square$

Satz 2.4. *1. Es sei $f \in \mathcal{T}(I, \mathbb{R})$ und $f(x) \geq 0$ für alle $x \in I$. Dann ist $\mathcal{I}(f) \geq 0$ (d.h. $\mathcal{I}$ ist eine **positive** lineare Abbildung).*
*2. Es seien $f, g \in \mathcal{T}(I, \mathbb{R})$ und $f(x) \geq g(x)$ für alle $x \in I$. Dann ist $\mathcal{I}(f) \geq \mathcal{I}(g)$ (d.h. $\mathcal{I}$ ist eine **monotone** lineare Abbildung).*
3. Für alle $f \in \mathcal{T}(I, \mathbb{C})$ gilt

$$|\mathcal{I}(f)| \leq \mathcal{I}(|f|)| \qquad \text{und} \qquad |\mathcal{I}(f)| \leq \|f\|(b-a).$$

Somit folgt $\mathcal{I} \in \mathcal{L}(\mathcal{T}(I, \mathbb{C}), \mathbb{C})$.

Beweis. Die Aussage 1. liest man unmittelbar aus der Definition ab und 2. folgt aus 1.
ad 3. Es sei $\mathcal{Z} = \{x_0, \dots, x_n\}$ eine zu f gehörige Zerlegung von I und c_i der Wert von f auf (x_{i-1}, x_i). Aus

$$|c_i| \leq \sup\{|f(x)| \colon x \in I\} = \|f\|, \quad i = 1, \dots, n,$$

folgt

$$|\mathcal{I}(f)| \leq \sum_{i=1}^{n} |c_i|(x_i - x_{i-1}) \leq \|f\|(b-a).$$

$\square$

Neben der Additivität bezüglich des Integranden hat das Integral auch eine Additivitätseigenschaft bezüglich des Integrationsintervalls: Dazu bemerken wir, daß die Einschränkung einer Treppenfunktion $f \in \mathcal{T}(I,\mathbb{C})$ auf ein beliebiges Teilintervall $J \subset I$ wieder eine Treppenfunktion ist, die wir der Einfachheit halber wieder mit f bezeichnen:

Satz 2.5. *Es sei $f \in \mathcal{T}(I,\mathbb{C})$ und $c \in I$. Dann gilt*

$$\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx.$$

Beweis. Die Behauptung ergibt sich unmittelbar indem man den Punkt c in die Zerlegung aufnimmt, welche für die Berechnung von $\int_a^b f(x)dx$ verwendet wird. □

Die Beschränktheit von $\mathcal{I}$ ermöglicht es, die Definition des Integrals von $\mathcal{T}(I,\mathbb{C})$ auf $\mathcal{R}(I,\mathbb{C})$ zu erweitern: Dazu betrachten wir eine Regelfunktion f und eine Folge von Treppenfunktionen (t_n), welche gleichmäßig gegen f konvergiert. Es folgt

$$|\mathcal{I}(t_n) - \mathcal{I}(t_m)| \le (b-a)\|t_n - t_m\|.$$

Wegen der Gleichmäßigkeit der Konvergenz von (t_n) ist für alle $x \in I$ die Folge $(t_n(x))$ eine (gleichmäßige) Cauchy Folge, d.h. es existiert ein $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ derart, daß für alle $n, m \ge N(\varepsilon)$

$$\|t_n - t_m\| < \frac{\varepsilon}{b-a}$$

zutrifft. Dies zeigt für $n, m \ge N(\varepsilon)$

$$|\mathcal{I}(t_n) - \mathcal{I}(t_m)| < \varepsilon,$$

d.h. $(\mathcal{I}(t_n))_{n\ge 1}$ ist eine Cauchy Folge in $\mathbb{C}$ und somit konvergent. Es liegt nahe

$$\mathcal{I}(f) := \lim_{n\to\infty} \mathcal{I}(t_n)$$

zu setzen. Diese Definition ist sinnvoll, soferne gezeigt werden kann, daß $\lim_{n\to\infty} \mathcal{I}(t_n)$ unabhängig ist von der jeweiligen Folge (t_n), welche gegen f konvergiert: Es gelte also für zwei Folgen von Treppenfunktionen $t_n \rightrightarrows f$ und $s_n \rightrightarrows f$. Zu zeigen ist: $\lim_{n\to\infty} \mathcal{I}(t_n) = \lim_{n\to\infty} \mathcal{I}(s_n)$ bzw. $\lim_{n\to\infty} \mathcal{I}(t_n - s_n) = 0$. Letzteres ist aber eine unmittelbare Folge der Beschränktheit von $\mathcal{I}$

$$|\mathcal{I}(t_n - s_n)| \le (b-a)\|t_n - s_n\|$$

und des Faktums $\lim_{n\to\infty} \|t_n - s_n\| \le \lim_{n\to\infty} \|t_n - f\| + \lim_{n\to\infty} \|f - s_n\| = 0$.
Es ist daher sinnvoll, folgende Definition zu vereinbaren:

Definition 2.6. *Es sei $f \in \mathcal{R}(I,\mathbb{C})$ und $(t_n) \subset \mathcal{T}(I,\mathbb{C})$ mit $t_n \rightrightarrows h$.*

$$\mathcal{I}(f) := \lim_{n\to\infty} \mathcal{I}(t_n) \text{ *heißt* } \textbf{\textit{Integral der Regelfunktion}}\ f.$$

Für das Integral $\mathcal{I}(f)$ *schreibt man auch*

$$\mathcal{I}(f) = \int_a^b f = \int_a^b f(x)dx.$$

Wegen $\mathcal{T}(I, \mathbb{C}) \subset \mathcal{R}(I, \mathbb{C})$ kann man für $f \in \mathcal{T}(I, \mathbb{C})$ die konstante Folge $t_n = f$, $n \in \mathbb{N}$, zur Approximation verwenden. Da der Grenzwert $\mathcal{I}(f)$ unabhängig von der approximierenden Folge von Treppenfunktionen ist, ergibt sich, daß das Integral gemäß Definition 2.6 auf $\mathcal{T}(I, \mathbb{C})$ mit dem Integral gemäß Definition 2.1 übereinstimmt. Durch Definition 2.6 wird also der Integralbegriff aus Definition 2.1 von $\mathcal{T}(I, \mathbb{C})$ auf $\mathcal{R}(I, \mathbb{C})$ fortgesetzt. Satz 1.6 kann nun als notwendige *und* hinreichende Integrabilitätsbedingung betrachtet werden: Die Klasse der **integrierbaren Funktionen** ist der Vektorraum der Funktionen, für welche überall (soferne sinnvoll) rechts- und linksseitige Grenzwerte existieren.
Wir veranschaulichen die Handhabung der Definition an einigen Beispielen:

Beispiel 2.7. 1) Wir betrachten $f(x) = x$, $x \in [0, 1]$. Da f stetig ist, ist f eine Regelfunktion. Als approximierende Folge von Treppenfunktionen können wir $t_n(x) = \frac{1}{n}[nx]$, $n \in \mathbb{N}$, verwenden (vgl. V-8.2). Nach Beispiel 2.2 gilt

$$\mathcal{I}(t_n) = \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{n}),$$

und daher

$$\mathcal{I}(f) = \int_0^1 f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \mathcal{I}(t_n) = \frac{1}{2}.$$

2) Für $f(x) = e^x$, $x \in [a, b]$, zeigen wir nun

$$\mathcal{I}(f) = \int_a^b f(x)dx = e^b - e^a.$$

Auch in diesem Falle können wir eine äquidistante Zerlegung $\mathcal{Z}_n$ von I verwenden:

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b, \quad x_i = \frac{b-a}{n} i + a, \quad i = 0, \dots, n.$$

Wir setzen

$$t_n(x) = \begin{cases} e^{x_{i-1}}, & x \in [x_{i-1}, x_i), \quad i = 1, \dots, n, \\ e^b, & x = b. \end{cases}$$

Auf Grund des Beweises von Satz 1.2 wissen wir zwar bereits, daß wegen $\lim_{n\to\infty} |\mathcal{Z}_n| = 0$ auch $t_n \rightrightarrows f$ gelten muß. Wir wollen uns von der gleichmäßigen Konvergenz der Folge (t_n) jedoch direkt überzeugen: Jedes $x \neq b$ liegt in einem eindeutig bestimmten Intervall $[x_{i-1}, x_i)$. Es folgt also mit Hilfe des Mittelwertsatzes die Existenz von $\xi_i \in (x_{i-1}, x_i)$ mit

$$|f(x) - t_n(x)| = |e^x - e^{x_{i-1}}| \le e^{\xi_i}|x - x_{i-1}| \le e^b|x - x_{i-1}| \le e^b|\mathcal{Z}_n|.$$

Für $x = b$ ist diese Abschätzung trivialerweise efüllt. Daraus folgt

$$\|f - t_n\| \le e^b |\mathcal{Z}_n|.$$

Als nächstes berechnen wir $\mathcal{I}(t_n)$:

$$\begin{aligned}\mathcal{I}(t_n) &= \sum_{k=1}^{n} \exp(a + \frac{k-1}{n}(b-a))\frac{b-a}{n} \\ &= \frac{b-a}{n} e^a \sum_{k=1}^{n} \exp(\frac{k-1}{n}(b-a)) = \frac{b-a}{n} e^a \sum_{k=1}^{n} (\exp(\frac{b-a}{n}))^{k-1} \\ &= \frac{b-a}{n} e^a \frac{\exp(b-a) - 1}{\exp \frac{b-a}{n} - 1} = \frac{\frac{b-a}{n}}{\exp \frac{b-a}{n} - 1}(e^b - e^a) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} e^b - e^a,\end{aligned}$$

wobei $\lim_{z\to 0} \frac{z}{e^z - 1} = 1$ verwendet wurde.

Satz 2.8. *Für alle $f, g \in \mathcal{R}(I, \mathbb{C})$ und alle $\lambda \in \mathbb{C}$ gilt*
(1) *$\mathcal{I}(f + g) = \mathcal{I}(f) + \mathcal{I}(g)$,*
(2) *$\mathcal{I}(\lambda f) = \lambda \mathcal{I}(f)$.*

Beweis. Es seien $(t_n), (s_n) \subset \mathcal{T}(I, \mathbb{C})$ mit

$$t_n \rightrightarrows f, \qquad s_n \rightrightarrows g.$$

Dann gilt $t_n + s_n \in \mathcal{T}(I, \mathbb{C})$ und

$$t_n + s_n) \rightrightarrows f + g.$$

Auf $\mathcal{T}(I, \mathbb{C})$ ist $\mathcal{I}$ linear, also gilt

$$\mathcal{I}(t_n + s_n) = \mathcal{I}(t_n) + \mathcal{I}(s_n).$$

Durch Grenzübergang erhält man

$$\mathcal{I}(f + g) = \lim_{n\to\infty} \mathcal{I}(t_n + s_n) = \lim_{n\to\infty} \mathcal{I}(t_n) + \lim_{n\to\infty} \mathcal{I}(s_n) = \mathcal{I}(f) + \mathcal{I}(g).$$

Analog ergibt sich (2). □

Satz 2.9. *Für alle $f \in \mathcal{R}(I, \mathbb{C})$ gilt*

$$|\mathcal{I}(f)| \le \mathcal{I}(|f|) \qquad \textit{und} \qquad |\mathcal{I}(f)| \le (b-a)\|f\|.$$

Beweis. Bezeichnet man mit (t_n) eine Folge von Treppenfunktionen, welche gleichmäßig gegen f konvergiert, folgt die Behauptung aus der Abschätzung

$$|\mathcal{I}(t_n)| \le (b-a)||t_n|| \le (b-a)(||t_n - f|| + ||f||).$$

□

Die Sätze 2.8, 2.9 zeigen, daß die Erweiterung von $\mathcal{I}$ eine *lineare* und *stetige* Abbildung $\mathcal{R}(I, \mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ darstellt. Wir weisen nun nach, daß auch die Positivität erhalten bleibt.

Satz 2.10. *1) Es sei $f \in \mathcal{R}(I, \mathbb{R})$ und $f(x) \geq 0$ für alle $x \in I$. Dann gilt $\mathcal{I}(f) \geq 0$.*
2) Es sei $f \in C(I, \mathbb{R})$ und $f(x) \geq 0$ für alle $x \in I$. Ist $f(x_0) > 0$ für ein $x_0 \in I$, dann ist $\mathcal{I}(f) > 0$.

Beweis. 1) Es sei $(t_n) \in \mathcal{T}(I, \mathbb{R})$ eine f approximierende Folge von Treppenfunktionen, d.h. $\lim_{n\to\infty} \|f - t_n\| = 0$, und $\varepsilon > 0$. Es gibt also ein $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, sodaß für alle $n \geq N(\varepsilon)$ und für alle $x \in I$

$$t_n(x) \geq f(x) - \varepsilon \geq -\varepsilon$$

zutrifft. Nach Satz 2.4-2) gilt

$$\mathcal{I}(t_n) \geq -\varepsilon(b - a)$$

und daher auch $\mathcal{I}(f) = \lim_{n\to\infty} \mathcal{I}(t_n) \geq -\varepsilon(b-a)$. Da $\varepsilon > 0$ beliebig gewählt war, gilt die Behauptung.
2) O.B.d.A können wir $x_0 \in (a, b)$ annehmen. Es sei $\delta > 0$ so gewählt, daß für alle $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset I$,

$$f(x) > \frac{1}{2} f(x_0) > 0.$$

Wir definieren nun die Treppenfunktion

$$t(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} f(x_0), & x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta), \\ 0, & \text{sonst}, \end{cases}$$

sodaß $f(x) \geq t(x)$ für alle $x \in I$ gilt. Wegen 1) folgt

$$\mathcal{I}(f) \geq \mathcal{I}(t) = \frac{1}{2} f(x_0) 2\delta > 0.$$

□

Eine unmittelbar Folge der Linearität und Positivität ist wieder die Monotonie:

Korollar 2.11. Es seien $f, g \in \mathcal{R}(I, \mathbb{R})$ und $f(x) \geq g(x)$ für alle $x \in I$. Dann gilt

$$\mathcal{I}(f) \geq \mathcal{I}(g).$$

Sind darüber hinaus f und g stetig und gilt an mindestens einer Stelle $x_0 \in I$ $f(x_0) > g(x_0)$, dann gilt

$$\mathcal{I}(f) > \mathcal{I}(g).$$

Bemerkung 2.12. Geht man den beschriebenen Fortsetzungsprozeß von $\mathcal{I}$ und den Beweis der Sätze 2.8 und 2.10 noch einmal durch, erkennt man, daß weder die spezielle Bedeutung von $\mathcal{I}$ – das Integral von Treppenfunktionen – noch spezielle Eigenschaften von $\mathbb{C}$ verwendet wurden. Die Beweise beruhen lediglich auf den *strukturellen* Eigenschaften Linearität und Beschränkheit (also Stetigkeit) und der Vollständigkeit $\mathbb{C}$. Die Konstruktion des Cauchy Integrals kann daher auf Funktionen $f \colon I \to X$, X ein Banachraum übertragen werden.

Satz 2.13. *Es sei $f \in \mathcal{R}(I, \mathbb{C})$ und $c \in I$. Dann gilt*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Beweis. Zunächst überlegen wir, daß die Restriktion einer Regelfunktion auf ein Teilintervall von I wieder eine Regelfunktion ist. Dies folgt unmittelbar aus der Charakterisierung in Satz 1.6. Es sei nun $(t_n) \subset \mathcal{T}(I, \mathbb{C})$ eine approximierende Folge von Treppenfunktionen. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt nach Satz 2.5

$$\int_a^b t_n(x)dx = \int_a^c t_n(x)dx + \int_c^b t_n(x)dx.$$

Da natürlich $(t_n|_{[a,c]})$ gleichmäßig gegen $f|_{[a,c]}$ konvergiert (und analog für $[c, b]$), ergibt sich die Behauptung aus der Definition des Integrals. □

Es ist zweckmäßig, auf die Voraussetzung $a \leq b$ zu verzichten und für $a > b$ zu definieren

$$\int_a^b f(x)dx := -\int_b^a f(x)dx.$$

Mit dieser erweiterten Integraldefinition gilt, wie man leicht zeigen kann, für je 3 Punkte $\{u, v, w\} \in \operatorname{def} f$ die Gleichung

$$\int_u^v f(x)\,dx + \int_v^w f(x)\,dx = \int_u^w f(x)\,dx.$$

Satz 2.14. *[2. Mittelwertsatz der Integralrechnung] Es sei $f \in C(I, \mathbb{R})$, $g \in \mathcal{R}(I, \mathbb{R})$ und $g(x) \geq 0$ für alle $x \in I$. Dann gibt es eine Zwischenstelle $\xi \in I$ mit*

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi) \int_a^b g(x)dx.$$

Beweis. Wegen der Kompaktheit von I nimmt f nach Korollar V-5.3 Maximum und Minimum an, d.h. es existieren

$$m = \min\{f(x) \colon x \in I\} \text{ und } M = \max\{f(x) \colon x \in I\}.$$

Somit gilt für alle $x \in I$

$$mg(x) \leq f(x)g(x) \leq Mg(x),$$

und wegen der Monotonie und Linearität des Integrals auch

$$m \int_a^b g(x)\,dx \leq \int_a^b f(x)g(x)\,dx \leq M \int_a^b g(x)\,dx,$$

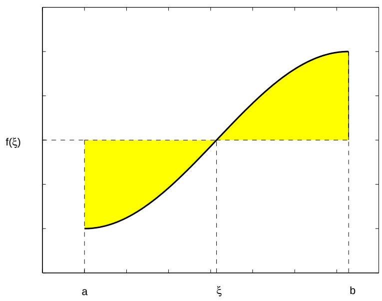
d.h. $\int\limits_a^b f(x)g(x)dx = \kappa \int\limits_a^b g(x)dx$ mit $\kappa \in [m, M]$. Aus dem Zwischenwertsatz V-4.3 folgt nun die Existenz einer Zwischenstelle $\xi \in I$ mit $\kappa = f(\xi)$. □

Eine eingehende Analyse würde zeigen, daß ξ sogar in (a, b) gewählt werden kann. Für $g \equiv 1$ ergibt sich als Spezialfall:

KOROLLAR 2.15 (1. Mittelwertsatz der Integralrechnung). Es sei $f \in C(I, \mathbb{R})$. Dann gibt es ein $\xi \in I$ mit

$$\int\limits_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a).$$

Deutet man $\int\limits_a^b f(x)dx$ (mit $f \geq 0$ auf I) als die Fläche zwischen dem Graph von f und der x-Achse, dann ist nach dem 1. Mittelwertsatz diese gleich dem Flächeninhalt eines Rechteckes mit den Seitenlängen $b-a$ und $f(\xi)$:



3. Stammfunktion

Viele Probleme in Naturwissenschaft und Technik führen auf die Aufgabe, den Differentiationsprozeß umzukehren, d.h. zu einer gegebenen Funktion $f\colon I \to \mathbb{C}$ eine Funktion $F\colon I \to \mathbb{C}$ so zu bestimmen, daß $F' = f$ gilt.

DEFINITION 3.1. *Es sei $f\colon I \to \mathbb{C}$. $F\colon I \to \mathbb{C}$ heißt **Stammfunktion** von f* $\underset{Def}{\Leftrightarrow}$

(1) *F ist stetig.*
(2) *Es gibt eine höchstens abzählbare Teilmenge $A \subset I$ so, daß F auf $I \setminus A$ differenzierbar ist mit*

$$F'(x) = f(x), \quad x \in I \setminus A.$$

BEISPIEL 3.2. Zu jeder Ableitung gibt es eine Stammfunktion (wir lassen in der folgenden Tabelle die jeweiligen Definitionsbereiche weg):

Funktion f	Stammfunktion F	Funktion f	Stammfunktion F
$f(x)$	$F(x)$	$f(x)$	$F(x)$
$x^c \quad (c \neq -1)$	$\frac{1}{c+1} x^{c+1}$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x$
$\frac{1}{x}$	$\ln x$	$\frac{1}{\sin^2 x}$	$-\cot x$
$a^x \quad (a \neq 1)$	$\frac{1}{\ln a} a^x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x$
$\exp ax \quad (a \neq 0)$	$\frac{1}{a} \cdot \exp ax$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan x$
$\exp ix$	$-i \cdot \exp ix$	$\frac{f'(x)}{f(x)}$	$\ln \lvert f(x) \rvert$
$\cos x$	$\sin x$	$\frac{f'(x)}{1+(f(x))^2}$	$\arctan f(x)$
$\sin x$	$-\cos x$	$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$	$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k+1} x^{k+1}$

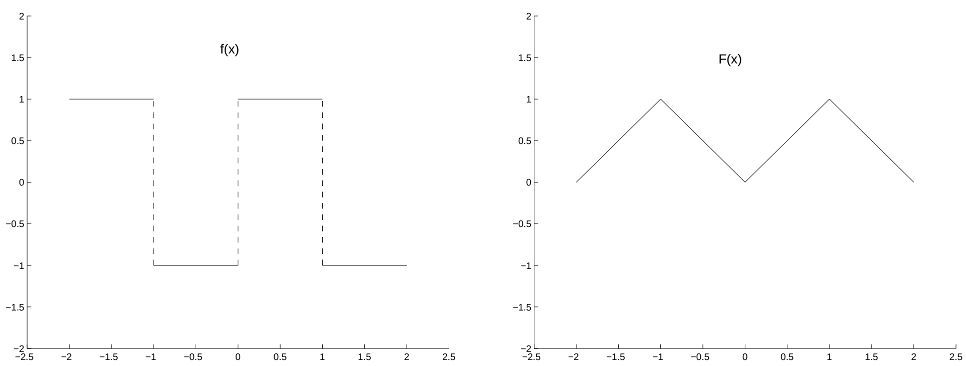
Die meisten Lehrbücher verlangen für eine Stammfunktion F die Differenzierbarkeit und Identität $F' = f$ auf *ganz* I. Bereits einfache Anwendungen in der Technik erfordern aber einen allgemeineren und flexibleren Begriff der Stammfunktion.

Beispiel 3.3. Es sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 2n \leq x < 2n+1, \quad n \in \mathbb{Z}, \\ -1 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Eine Stammfunktion von f ist gegeben durch

$$F(x) = \begin{cases} x - 2n, & 2n \leq x < 2n+1, \\ -x + 2n + 2 & 2n+1 \leq x < 2n+2 \end{cases} \quad n \in \mathbb{Z}.$$



Wegen der Linearität der Differentiation ist klar, daß mit zwei Stammfunktionen F und G für f bzw.g auch $\alpha F+\beta G$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, Stammfunktionen von $\alpha f+\beta g$ sind (dabei wird auch verwendet, daß die Vereinigung von zwei abzählbaren Mengen abzählbar ist, vgl. Satz III-2.13). Trivialerweise ist mit F natürlich auch $F+\alpha$, $\alpha \in \mathbb{C}$, eine Stammfunktion von f. Wir zeigen nun, daß sich umgekehrt je zwei Stammfunktionen von f höchstens um eine additive Konstante unterscheiden können. Dieses Resultat ist eine unmittelbare Konsequenz von Korallar VI-7.3 falls $A=\emptyset$. Der allgemeinere Fall folgt aus

Satz 3.4. *Es sei $f \in C(I, \mathbb{C})$. Ferner gebe es eine abzählbare Teilmenge $A \subset I$ und eine Konstante $L>0$ derart, daß gilt*

(1) *f ist rechtsseitig differenzierbar auf $I \setminus A$,*
(2) *$\forall x \in I \setminus A$: $|f'_+(x)| \leq L$.*

Für alle $x, y \in I$ gilt dann

$$|f(x)-f(y)| \leq L|x-y|,$$

d.h. f ist Lipschitz-stetig.

Beweis. Es sei $x<y$. Für beliebiges $\varepsilon>0$ definieren wir $F_\varepsilon\colon [x, y] \rightarrow \mathbb{R}$,

$$F_\varepsilon(\xi):=|f(\xi)-f(x)|-(L+\varepsilon)(\xi-x), \quad \xi \in[x, y],$$

und zeigen $F_\varepsilon(y) \leq 0$. Daraus folgt für $\varepsilon \rightarrow 0$ die Behauptung. Angenommen es wäre $F_\varepsilon(y)>0$. Da $F_\varepsilon(A)$ abzählbar, $[0, F_\varepsilon(y)]$ aber überabzählbar ist, muß es ein $\gamma \in \mathbb{R}$ geben mit

$$0=F_\varepsilon(x)<\gamma<F_\varepsilon(y) \text{ und } \gamma \notin F_\varepsilon(A).$$

Nach dem Zwischenwertsatz V-4.3 gibt es eine Zwischenstelle $\xi^* \in(x, y)$ mit $F_\varepsilon(\xi^*)=\gamma$. Dies läßt sich so einrichten (vgl. den Beweis zu V-4.2), daß für alle $\xi \in(\xi^*, y)$

$$F_\varepsilon(\xi)>\gamma$$

zutrifft. Dann gilt einerseits

$$(*) \qquad \varphi(\xi):=\frac{F_\varepsilon(\xi)-F_\varepsilon(\xi^*)}{\xi-\xi^*}>0 \text{ für alle } \xi \in(\xi^*, y],$$

andererseits wegen der Definition von F_ε

$$\begin{aligned}
\varphi(\xi) & =(\xi-\xi^*)^{-1}\left[|f(\xi)-f(x)|-|f(\xi^*)-f(x)|-(L+\varepsilon)(\xi-x-(\xi^*-x))\right] \\
& =(\xi-\xi^*)^{-1}(|f(\xi)-f(x)|-|f(\xi^*)-f(x)|)-(L+\varepsilon) \\
& \leq \frac{|f(\xi)-f(\xi^*)|}{\xi-\xi^*}-L-\varepsilon .
\end{aligned}$$

Nun ist $\xi^* \notin A$, da $\gamma \notin F_\varepsilon(A)$. f besitzt also in ξ^* eine rechtsseitige Ableitung. Wegen $|f'_+(\xi^*)| \leq L$ gibt es also eine rechtsseitige Umgebung $(\xi^*, \xi^*+\delta)$, $\delta>0$, so, daß

$$\frac{|f(\xi)-f(\xi^*)|}{\xi-\xi^*} \leq L+\varepsilon / 2 \quad \text{für alle } \xi \in(\xi^*, \xi^*+\delta)$$

zutrifft. Dies hat jedoch

$$\varphi(\xi) \leq -\frac{\varepsilon}{2} < 0$$

für alle $\xi \in (\xi^*, \xi^* + \delta)$ zur Folge, ein Widerspruch zu $(*)$. $\square$

KOROLLAR 3.5. Es sei $f \in C(I, \mathbb{C})$, und $A \subset I$ abzählbar. Auf $I \setminus A$ sei f rechtsseitig differenzierbar mit $f'_+(x) = 0$, $x \in I \setminus A$. Dann ist f konstant.

BEWEIS. Setze $L = 0$ in Satz 3.4. $\square$

Für Stammfunktionen bedeutet Korollar 3.5:

SATZ 3.6. *Es seien $f \colon I \to \mathbb{C}$ und $F, G \in C(I, \mathbb{C})$ Stammfunktionen von f. Dann ist $F - G$ konstant.*

4. Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

In diesem Abschnitt zeigen wir, daß die Integration in gewisser Weise die Umkehroperation zur Differentiation ist. Wir beginnen mit einer Eigenschaft von Regelfunktionen:

SATZ 4.1. *Jede Regelfunktion $f \colon I = [a, b] \to \mathbb{C}$ besitzt höchstens abzählbar viele Unstetigkeiten.*

BEWEIS. Es sei $(t_n) \subset \mathcal{T}(I, \mathbb{C})$ eine approximierende Folge von Treppenfunktionen, d.h. es gilt $f = \lim_{n\to\infty} t_n$ glm. auf I. Jede Treppenfunktion t_n ist stetig, ausgenommen auf einer höchstens endlichen Menge $A_n \subset I$. Nach Satz III-2.13 ist $A := \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ abzählbar. Da jede Treppenfunktion t_n auf $I \setminus A$ stetig ist, folgt aus Satz V-8.5, daß auch f auf $I \setminus A$ stetig ist. $\square$

SATZ 4.2. *Es sei $f \in \mathcal{R}(I, \mathbb{C})$ und $F \colon I \to \mathbb{C}$ die Abbildung*

$$x \to F(x) = \int_a^x f(t)dt, \quad x \in I.$$

Dann folgt:

(1) *F ist Lipschitz stetig auf I,*
(2) *F ist auf $[a, b)$ rechtsseitig differenzierbar und auf $(a, b]$ linksseitig differenzierbar und es gilt*

$$\forall x \in [a, b) \colon F'_+(x) = f(x^+),$$
$$\forall x \in (a, b] \colon F'_-(x) = f(x^-).$$

Beweis. 1) Da $f|_{[a,x]}$ eine Regelfunktion ist, ist F sinnvoll definiert. Aus Satz 2.13 ergibt sich für $x, y \in I$, $x < y$, die Abschätzung

$$|F(x) - F(y)| = |\int_a^x f(t)dt - \int_a^y f(t)dt| = |\int_a^x f(t)dt - \int_a^x f(t)dt - \int_x^y f(t)dt|$$
$$= |\int_x^y f(t)dt| \le \|f\| \cdot |y - x|.$$

2) Wir führen den Beweis nur für die rechtsseitige Ableitung an $x \in [a, b)$. Für $h > 0$ (h so klein, daß $x + h \in I$) ergibt sich für den rechtsseitigen Differenzenquotienten von F

$$\frac{1}{h}\big(F(x+h) - F(x)\big) = \frac{1}{h}\big(\int_a^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)\,dt\big) = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt.$$

Zu $\varepsilon > 0$ wählen wir nun $\delta > 0$ so, daß $|f(t) - f(x^+)| < \varepsilon$ für alle $t \in (x, x+\delta)$ zutrifft. Damit folgt für $0 < h < \delta$ mit Satz 2.9

$$\Big|\frac{1}{h}\big(F(x+h) - F(x)\big) - f(x^+)\Big| = \Big|\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt - f(x^+)\Big| = \frac{1}{h}\Big|\int_x^{x+h} \big(f(t) - f(x^+)\big)\,dt\Big|$$
$$\le \frac{1}{h}\int_x^{x+h} |f(t) - f(x^+)|dt \le \frac{1}{h}\int_x^{x+h} \sup_{t\in(x,x+h)} |f(t) - f(x^+)|dt < \varepsilon.$$

□

Satz 4.3 (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung).
1) Für jedes $f \in \mathcal{R}(I, \mathbb{C})$, $I = [a, b]$, ist die Abbildung $f\colon I \to \mathbb{C}$,

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt, \quad x \in I,$$

eine Stammfunktion von f. Insbesondere ist F in den Stetigkeitsstellen von f differenzierbar und es gilt dort

$$F'(x) = f(x).$$

2) Mit einer beliebigen Stammfunktion Φ von f gilt

$$\int_a^b f(t)\,dt = \Phi(b) - \Phi(a).$$

Für die Differenz $\Phi(b) - \Phi(a)$ schreibt man auch $\Phi|_a^b$.

Beweis. 1) Nach Satz 4.2 ist F auf I stetig und in allen Stetigkeitsstellen von f gilt

$$F'_+(x) = f(x^+) = f(x) = f(x^-) = F'_-(x),$$

also

$$F'(x) = f(x),$$

d.h. F ist dort differenzierbar (in den Randpunkten von I natürlich nur rechts- bzw. linksseitig). Da nach Satz 4.1 f nur abzählbar viele Unstetigkeitsstellen besitzt, ist F eine Stammfunktion von f im Sinne von Definition 3.1.
2) Die Behauptung ist trivial für F. Für jede weitere Stammfunktion gilt nach Satz 3.6 $F(x) - \Phi(x) = c$, $x \in I$, für ein geeignetes $c \in \mathbb{C}$. Es folgt somit

$$\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a) = (\Phi(b) + c) - (\Phi(a) + c) = \Phi(b) - \Phi(a).$$

□

Korollar 4.4. Für jedes $F \in C^1(I, \mathbb{C})$, gilt für alle $x \in I$

$$\int_a^x F'(t)\,dt = F(x) - F(a).$$

Bemerkung 4.5. 1) Der Hauptsatz beinhaltet die theoretisch sehr zufriedenstellende Erkenntnis, daß zumindest jede integrierbare Funktion (Regelfunktion) eine Stammfunktion besitzt. Diese ist in der Form eines Integrals mit fester unterer und variabler oberer Grenze gegeben. Dieser Zusammenhang zwischen Integration und Differentiation ist umso bemerkenswerter, wenn man sich die höchst unterschiedlichen Ausgangspositionen für den Begriff der Stammfunktion und des Integrals vor Augen hält.
2) Für die Menge aller Stammfunktionen einer Regelfunktion f,

$$\{x \mapsto \Phi(x) = \int_a^x f(t)\,dt + c \colon c \in \mathbb{C}\}$$

ist auch das Symbol

$$\int f(x)\,dx \text{ oder } \int f\,dx \text{ oder } \int f$$

gebräuchlich, welches man **unbestimmtes Integral** von f nennt. Der Einfachheit halber wird dasselbe Symbol auch zur Bezeichnung irgendeiner Stammfunktion benützt, wie etwa in

$$\int \sin x\,dx = -\cos x, \qquad \int e^{\alpha x}\,dx = \frac{1}{\alpha}e^{\alpha x}, \quad \alpha \neq 0.$$

Diese Bezeichnung führt zu keinen Mißverständnissen, wenn man berücksichtigt, daß mit $\int f(x)\,dx = F$ auch $\int f(x)\,dx = F + c$, $c \in \mathbb{C}$, gilt. Hat man auf einem Intervall

I die Beziehungen $\int f\,dx = F$ und $\int f\,dx = G$ gefunden, so ist es nicht zulässig, auf $F = G$ zu schließen. Vielmehr gilt dann $F - G = c$ für ein $c \in \mathbb{C}$.
3) Die Ableitung einer differenzierbaren Funktion $F\colon I \to \mathbb{C}$ muß keine Regelfunktion sein. Als Beispiel betrachte man $F\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$, gegeben durch

$$F(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

F ist überall differenzierbar, aber in $x = 0$ besitzt F' weder einen rechts-, noch eine linksseitigen Grenzwert. F' ist also keine Regelfunktion auf I. Insbesondere kann daher eine Stammfunktion von F' *nicht* durch eine Integration (nach Cauchy) gefunden werden.
4) Mit dem Hauptsatz läßt sich die oft mühsame Berechnung eines unbestimmten Integrals über die Definition zurückführen auf das Auffinden einer Stammfunktion. Der Hauptsatz ermöglicht es auch, die Produktregel und die Kettenregel aus der Differentialrechnung in häufig benutzte Integrationsregeln umzusetzen. Um die Beziehung $\int u'\,dx = u$ zu haben, formulieren wir diese Regeln für *stetig* differenzierbare Funktionen:

4.1. Partielle Integration.

Satz 4.6. *Es sei $f \in C(I,\mathbb{C})$, $g \in C^1(I,\mathbb{C})$ und F eine Stammfunktion von f. Dann gilt*

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = F(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b F(x)g'(x)\,dx \qquad \textit{(partielle Integration).}$$

Beweis. Es gilt $F \in C^1(I,\mathbb{C})$ und somit $Fg \in C^1(I,\mathbb{C})$. Nach der Produktregel gilt

$$(Fg)' = F'g + Fg' = fg + Fg'.$$

Somit ist Fg eine Stammfunktion von $fg + Fg'$ und es folgt

$$(Fg)(b) - (Fg)(a) = \int_a^b f(x)g(x)\,dx + \int_a^b F(x)g'(x)\,dx.$$

Dies ist äquivalent zur Behauptung. □

Häufig wird die Regel für die partielle Integration in der einprägsameren Form

$$\int_a^b u'v\,dx = uv\big|_a^b - \int_a^b uv'\,dx$$

bzw. als unbestimmtes Integral

$$\int u'v\,dx = uv - \int uv'\,dx$$

formuliert.

Beispiel 4.7. 1) $\int x^\alpha \ln x \, dx = \frac{x^{\alpha+1}}{(\alpha+1)^2}((\alpha+1)\ln x - 1)$, $\alpha \neq -1$.
Wir definieren

$$f(x) = x^\alpha \qquad g(x) = \ln x$$

(bzw. $u'(x) = x^\alpha$, $v = \ln x$, für $x > 0$). Eine Stammfunktion von f ist gegeben durch $F(x) = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$. Wir erhalten somit

$$\begin{aligned} \int x^\alpha \ln x \, dx &= \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} \ln x - \int \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} \cdot \frac{1}{x} \, dx \\ &= \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} \ln x - \frac{x^{\alpha+1}}{(\alpha+1)^2}. \end{aligned}$$

2) $\int \sqrt{1-x^2} \, dx = \frac{1}{2}(x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x)$, $x \in [-1,1]$.
Für $|x| \leq 1 - \varepsilon$, $0 < \varepsilon 1$ setzen wir

$$f(x) = 1, \qquad g(x) = \sqrt{1-x^2}$$

(bzw. $u'(x) = 1$, $v(x) = \sqrt{1-x^2}$), und erhalten

$$\begin{aligned} \int 1 \cdot \sqrt{1-x^2} \, dx &= x\sqrt{1-x^2} - \int x \cdot \frac{(-x)}{\sqrt{1-x^2}} \, dx \\ &= x\sqrt{1-x^2} - \int \frac{1-x^2-1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx \\ &= x\sqrt{1-x^2} + \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} - \int \sqrt{1-x^2} \, dx, \end{aligned}$$

d.h.

$$2\int \sqrt{1-x^2} \, dx = x\sqrt{1-x^2} + \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Nach Beispiel 3.2 ist $\arcsin x$ eine Stammfunktion von $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ auf $(-1,1)$. Daraus folgt die behauptete Formel zunächst auf $(-1,1)$. Da $f\colon x \mapsto \sqrt{1-x^2}$ stetig auf $[-1,1]$ ist, besitzt f eine Stammfunktion auf I. Die Abbildung $x \mapsto \frac{1}{2}(x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x)$ ist auf $[-1,1]$ stetig und stellt daher auch auf $[-1,1]$ eine Stammfunktion dar.

Als Anwendung der partiellen Integration beweisen wir folgende nützliche Variante des Satzes von Taylor:

Satz 4.8. *Es sei $f \in C^{n+1}(I,\mathbb{C})$ und $x_0 \in I$. Dann gilt für alle $x \in I$*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \int\limits_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) \, dt.$$

Beweis. Wir führen den Beweis mit vollständiger Induktion. Für $f \in C^1(I,\mathbb{C})$ ergibt der Hauptsatz 4.3 die Identität

$$f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^{x} f'(t)\,dt, \quad x \in I.$$

Dies ist gerade die Behauptung für $n = 0$. Die Behauptung gelte nun für alle C^n-Funktionen und es sei $f \in C^{n+1}(I,\mathbb{C})$. Insbesondere gilt also $f \in C^n(I,\mathbb{C})$ und daher auch

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \int_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(t)\,dt, \quad x \in I.$$

$f^{(n)} \in C^1(I,\mathbb{C})$, somit können wir partiell integrieren und erhalten

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k - \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n)}(t)\Big|_{x_0}^{x} + \int_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,dt \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \int_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,dt. \end{aligned}$$

□

4.2. Integration durch Substitution. Die Kettenregel der Differentialrechnung ermöglicht die Integration durch Substitution. Diese Technik kann in zwei unterschiedlichen Situationen eingesetzt werden:

Fall 1: Der Integrand besitzt die Form $f(g(t))g'(t)$: Als Beispiel betrachte man den Integranden

$$h(t) = (\sin^3 t + e^{\sin t})\cos t,$$

welcher offensichtlich die Ableitung von

$$H(t) = \frac{1}{4}\sin^4 t + e^{\sin t}$$

ist. H ist also Stammfunktion von h. Der folgende Satz beschreibt die allgemeine Situation.

Satz 4.9 (1. Substitutionsregel). *Es sei $f \in C(I,\mathbb{C})$, $g \in C^1(J,\mathbb{R})$, $I = [a,b]$, $J = [\alpha,\beta]$ und $g(J) \subset I$. Dann gilt für alle $x, y \in J$*

$$\int_{x}^{y} f(g(t))g'(t)\,dt = \int_{g(x)}^{g(y)} f(u)du$$

und

$$\int f(g(t))g'(t)\,dt = \int f(u)du\Big|_{u=g(t)}.$$

Dabei bedeutet $\int f(u)du\big|_{u=g(t)}$ *die Auswertung einer Stammfunktion von* f *an der Stelle* $g(t)$.

Beweis. Da f stetig ist, besitzt f eine Stammfunktion $F \in C^1(I,\mathbb{C})$. Wegen $g(J) \subset \operatorname{def} F$ ist die Komposition $F \circ g$ möglich. Wir zeigen, daß $F \circ g$ eine Stammfunktion von $(f \circ g)g'$ ist: Nach der Kettenregel VI-**??** gilt für alle $t \in J$

$$(F \circ g)'(t) = F'(g(t))g'(t) = f(g(t))g'(t)$$

(die letzte Gleichheit gilt überall, weil F eine Stammfunktion von f ist und f stetig ist). Damit folgt

$$\int_\alpha^\beta f(g(t))g'(t)\,dt = (F \circ g)(\beta) - (F \circ g)(\alpha) \ = F(g(\beta)) - F(g(\alpha)) \overset{\text{S.4.3}}{=} \int_{g(\alpha)}^{g(\beta)} f(u)du.$$

$\square$

Beispiel 4.10. 1) $\mathcal{I} = \int(\cos t + \cos^3 t)\,dt$.
Um den Satz anwenden zu können, schreiben wir das Integral in der Form

$$\mathcal{I}_t = \int (1+\cos^2 t)\cos t\,dt = \int (2-\sin^2 t)\cos t\,dt.$$

1. Schritt: *formale* Substitution: $g(t) = u$, $g'(t)\,dt = du$,
hier: $g(t) = \sin t = u$, $\cos t\,dt = du$,

$$\mathcal{I}_u = \int (2-u^2)du.$$

2. Schritt: unbestimmte Integration nach u:

$$\mathcal{I}_u = 2u - \frac{1}{3}u^3.$$

3. Schritt: Rücksubstitution $u = g(t)$:

$$\mathcal{I}_t = 2\sin t - \frac{1}{3}\sin^3 t.$$

Diese formale Vorgangsweise spiegelt die Anwendung der Substitutionsregel folgendermaßen wieder: Es ist $f(g(t))g'(t) = (2-\sin^2 t)\cos t$ mit $g(t) = \sin t$ und $f(u) = 2-u^2$. Gemäß der Substitutionsregel hat man die Stammfunktion von f an der Stelle $u = \sin t$ auszuwerten.
2)

$$\mathcal{I} = \int_0^2 e^{t^2} t\,dt = \frac{1}{2}\int_0^2 e^{t^2} 2t\,dt.$$

1. Schritt: *formale* Substitution $t^2 = u$, $2t\,dt = du$.
2. Schritt: Transformation der Grenzen: $t = 0 \Rightarrow u = 0$, $t = 2 \Rightarrow u = 4$.

3. Schritt: Integration: $\mathcal{I} = \int\limits_0^4 e^u du = e^4 - e^0 = e^4 - 1.$

Fall 2: Einsetzen einer beliebigen Substitutionsfunktion g. Dies ist der eigentliche Anwendungsbereich der Substitutionsregel. Man führt ein Integral $\int f(x)\,dx$ durch geschickte Wahl einer Substitutionsfunktion g in die Form

$$\int f(g(t))g'(t)\,dt,$$

über, in der Hoffnung, daß letzteres Integral einfacher als das Ausgangsintegral ist.

Satz 4.11 (2. Substitutionsregel). *Es sei $f \in C(I, \mathbb{C})$, $g \in C^1(J, \mathbb{R})$, $J = [\alpha, \beta]$ und $g(J) \subset I$. Ferner sei g injektiv. Dann gilt für alle $u, v \in g(J)$*

$$\int\limits_u^v f(x)\,dx = \int\limits_{g^{-1}(u)}^{g^{-1}(v)} f(g(t))g'(t)\,dt$$

bzw.

$$\int f(x)\,dx = \int f(g(t))g'(t)\,dt\Big|_{t=g^{-1}(x)}.$$

Beweis. Wie im Beweis von Satz 4.9 sieht man, daß $F \circ g$ eine Stammfunktion von $(f \circ g)g'$ ist, falls F eine Stammfunktion von f ist. Für die linke Seite erhält man daher

$$\int\limits_u^v f(x)\,dx = F(v) - F(u),$$

für die rechte

$$\int\limits_{g^{-1}(u)}^{g^{-1}(v)} f(g(t))g'(t)\,dt = (F \circ g)(g^{-1}(v)) - (F \circ g)(g^{-1}(u)) = F(v) - F(u).$$

□

Beispiel 4.12. 1) $\int \frac{dx}{\sin x} = \ln|\tan\frac{x}{2}|$.
Ist der Integrand eine rationale Funktion in sin und cos, $R(\sin x, \cos x)$, kann man immer – soferne sich nicht andere, einfachere Methoden anbieten – folgende Substitution ansetzen:

$$x = g(u) = 2\arctan u \quad \text{bzw} \quad u = \tan\frac{x}{2}.$$

Ersetzt man in den Identitäten

$$\cos 2z = \frac{1 - \tan^2 z}{1 + \tan^2 z}, \quad \sin 2z = \frac{2\tan z}{1 + \tan^2 z}$$

z durch $\arctan u$, erhält man

$$\cos(g(u)) = \frac{1 - u^2}{1 + u^2}, \quad \sin(g(u)) = \frac{2u}{1 + u^2}.$$

Wegen Satz 4.11 gilt die Identität

$$\int R(\sin x, \cos x)\,dx = \int R(\sin(g(u)), \cos g(u))g'(u)du\big|_{u=g^{-1}(x)}$$
$$= \int R(\frac{2u}{1+u^2}, \frac{1-u^2}{1+u^2})\frac{2}{1+u^2}du\big|_{u=\tan\frac{x}{2}}.$$

Umgelegt auf das konkrete Beispiel bedeutet dies

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{1+u^2}{2u}\frac{2}{1+u^2}du = \int \frac{du}{u} = \ln|u|\big|_{u=\tan\frac{x}{2}} = \ln|\tan\frac{x}{2}|.$$

2) $\mathcal{I} = \int\limits_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}$.
Dieses Integral stellt somit eine erste Verbindung zwischen der Zahl π und dem Einheitskreis her: Interpretiert man das Integral als Flächeninhalt, ergibt sich, daß $\frac{\pi}{2}$ – die kleinste positive Nullstelle des Kosinus – den Flächeninhalt eines Halbkreises mit Radius 1 angibt.
1. Schritt: Wahl der Substitutionsfunktion. Zu $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ kann man, um die Wurzel zu eliminieren, als Substitutionsfunktion g wählen:

$$g(t) = \cos t, \quad t \in [0,\pi].$$

Man beachte, daß g auf $[0,\pi]$ streng monoton ist und $g([0,\pi]) = [-1,1]$ gilt. Natürlich ist g stetig differenzierbar.
2. Schritt: formale Substitution: Auf $[0,\pi]$ gilt

$$f(g(t)) = \sqrt{1-\cos^2 t} = \sin t, \quad g'(t) = -\sin t.$$

Wir erhalten also das unbestimmte Integral

$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx = -\int \sin^2 t\,dt.$$

3. Schritt: Transformation der Grenzen: $x = -1 \Rightarrow t = \arccos(-1) = \pi$, $x = 1 \Rightarrow t = \arccos 1 = 0$
4. Schritt: Integration durch Auswertung der Stammfunktion von $f(g(t))g'(t)$ in $t = 0$ und $t = \pi$.
Zur Bestimmung der Stammfunktion $F \circ g$ von $t \mapsto -\sin^2 t$ verwenden wir die Umformung

$$\sin^2 t = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2t,$$

und erhalten somit unmittelbar

$$(F \circ g)(t) = -\frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\sin 2t.$$

Nach Satz 4.12 erhalten wir

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,dx = (F \circ g)(t)\big|_{t=\pi}^{t=0} = \frac{1}{2}(-t\big|_{\pi}^{0} + \frac{1}{2}\sin 2t\big|_{\pi}^{0}) = \frac{\pi}{2}.$$

4.3. Partialbruchzerlegung. Eine unmittelbare Folge von Lemma V-2.16 und dem Fundamentalsatz der Algebra, den wir erst in der Funktionentheorie beweisen werden, ergibt folgende **kanonische Produktdarstellung** für Polynome.

SATZ 4.13. *Jedes Polynom p mit $\operatorname{grad} p = n \geq 1$ läßt sich mit Hilfe seiner paarweise verschiedenen Nullstellen $z_i \in \mathbb{C}$, $i = 1, \ldots, m$, in der Form*

$$p(z) = a_n \prod_{i=1}^{m} (z - z_i)^{\nu_i}$$

darstellen, wobei $a_n \in \mathbb{C}$, $a_n \neq 0$. Die Zahlen $\nu_i \in \mathbb{N}$, $i = 1, \ldots, m$, sind eindeutig bestimmt und erfüllen

$$\sum_{i=1}^{m} \nu_i = n.$$

*Man nennt ν_i die **Vielfachheit (Multiplizität)** der Nullstelle z_i.*

BEWEIS. Übung. □

Sind alle Koeffizienten des Polynoms $p(z) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k z^k$ reell und ist $p(\xi) = 0$, so gilt wegen $a_k = \bar{a}_k$, $k = 1, \ldots, n$,

$$p(\bar{\xi}) = \sum_{k=0}^{n} a_k (\bar{\xi})^k = \sum_{k=0}^{n} a_k \overline{\xi^k} = \sum_{k=0}^{n} \overline{a_k \xi^k} = \overline{\sum_{k=0}^{n} a_k \xi^k} = \overline{p(\xi)} = 0.$$

Mit $\xi \in \mathbb{C}$ ist also auch $\bar{\xi} \in \mathbb{C}$ eine Nullstelle von p. Besitzt ξ die Vielfachheit μ, d.h. gilt

$$p(z) = (z - \xi)^{\mu} q(z), \quad q(\xi) \neq 0, \quad z \in \mathbb{C},$$

dann folgt mit einer ähnlichen Rechnung wie vorhin

$$p(\bar{z}) = \overline{p(z)} = (\bar{z} - \bar{\xi})^{\mu} q(\bar{z}), \quad \bar{z} \in \mathbb{C}.$$

Schreibt man für $\bar{z}$ wieder z, erhält man

$$p(z) = (z - \bar{\xi})^{\mu} q(z),$$

also ist $\bar{\xi}$ eine Nullstelle von p (dies wissen wir bereits) mit der Vielfachheit $\mu' \geq \mu$. Die erste Überlegung zeigt auch $q(\bar{\xi}) = \overline{q(\xi)} \neq 0$. Somit gilt $\mu = \mu'$ und die Vielfachheiten der Nullstellen ξ und $\bar{\xi}$ stimmen also überein.

Wir betrachten nun den Fall $\xi = \alpha + i\beta$, $\beta \neq 0$. Für jedes *reelle* x gilt dann

$$\begin{aligned}(x - \xi)(x - \bar{\xi}) &= (x - (\alpha + i\beta))(x - (\alpha - i\beta)) = (x - \alpha)^2 + \beta^2 \\ &= x^2 + Ax + B,\end{aligned}$$

mit

$$A = -2\alpha, \quad B = \alpha^2 + \beta^2.$$

Das quadratische Polynom $x^2 + Ax + B$ besitzt also keine *reellen* Nullstellen. Zusammen mit Satz 4.13 erhalten wir die *reelle kanonische Produktdarstellung* von p:

SATZ 4.14. *Es sei* $p(z) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k z^k$ *ein Polynom mit* reellen *Koeffizienten* a_k, $k = 0, \ldots, n$. *Dann gilt*

(1) *Komplexe Nullstellen* ξ *mit* $\operatorname{Im} \xi \neq 0$ *treten in konjugierten Paaren auf: Mit* ξ *ist auch* $\bar{\xi}$ *eine Nullstelle gleicher Multiplizität wie* ξ.
(2) *Sind* $x_1, \ldots, x_r$ *alle verschiedenen reellen Nullstellen von* p *mit der Multiplizität* ρ_i, $i = 1, \ldots, r$, *gilt die Darstellung*

$$p(x) = a_n \prod_{i=1}^{r} (x - x_i)^{\rho_i} \prod_{j=1}^{s} (x^2 + A_j x + B_j)^{\sigma_j}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Die Polynome $x^2 + A_j x + B_j$, $A_j, B_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, \ldots, s$, *sind paarweise verschieden und besitzen keine reellen Nullstellen. Die natürlichen Zahlen* ρ_i, $i = 1, \ldots, r$, *und* σ_j, $j = 1, \ldots, s$, *erfüllen*

$$\sum_{i=1}^{r} \rho_i + 2 \sum_{j=1}^{s} \sigma_j = n.$$

SATZ 4.15 (Partialbruchzerlegung). *Es sei* $r = \frac{p}{q}$ *eine rationale Funktion mit* $\operatorname{grad} p < \operatorname{grad} q = n$. *Das Nennerpolynom habe die kanonische Produktdarstellung*

$$q(z) = a_n \prod_{j=1}^{m} (z - z_j)^{\nu_j}, \quad z \in \mathbb{C},$$

mit $z_j \neq z_k$ *für* $j \neq k$. *Dann besitzt* r *eine eindeutig bestimmte Summendarstellung (**Partialbruchzerlegung**) der Form*

$$r(z) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{\nu_i} \frac{a_{ij}}{(z - z_i)^j}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{z_1, \ldots, z_m\},$$

mit komplexen Zahlen a_{ij}.

BEWEIS. 1. Existenz: Wir führen den Beweis durch Induktion nach $\operatorname{grad} q = n$. Im Fall $n = 1$ gilt $\operatorname{grad} p < 1$, d.h. p ist eine Konstante $c \in \mathbb{C}$. Es gilt also

$$r(z) = \frac{c}{a_1(z - z_1)} = \frac{a_{11}}{z - z_1} \quad \text{mit} \quad a_{11} := \frac{c}{a_1}.$$

Induktionsschritt: Es sei $n > 1$. Wir nehmen an, der Satz sei für alle rationalen Funktionen $\frac{P}{Q}$ mit $\operatorname{grad} P < \operatorname{grad} Q \leq n - 1$ bewiesen. Wir schreiben q in der Form

$$q(z) = (z - z_1)^{\nu_1} s(z) \quad \text{mit} \quad s(z) = a_n \prod_{j=2}^{m} (z - z_j)^{\nu_j}.$$

Wegen $z_1 \neq z_i$, $i = 2, \ldots, n$, ist $s(z_1) \neq 0$. Für $a \in \mathbb{C}$ berechnen wir

$$r(z) = \frac{p(z)}{q(z)} - \frac{a}{(z-z_1)^{\nu_1}} = \frac{p(z) - as(z)}{(z-z_1)^{\nu_1} s(z)}.$$

Wählt man speziell $a = \frac{p(z_1)}{s(z_1)}$, gilt $p(z_1) - as(z_1) = 0$. Gilt sogar

$$p(z) - as(z) = 0 \quad \text{für } \textit{alle } z \in \mathbb{C},$$

folgt

$$r(z) = \frac{a}{(z-z_1)^{\nu_1}}$$

und wir sind fertig. Ist jedoch $p - as$ nicht das Nullpolynom, kann man nach Lemma V-2.15 den Linearfaktor $z - z_1$ abspalten, d.h. es gibt ein Polynom P mit

$$\begin{aligned} &p(z) - as(z) = (z - z_1)P(z) \\ &\operatorname{grad} P \leq \max\{\operatorname{grad} p, \operatorname{grad} s\} - 1 \leq n - 2. \end{aligned}$$

Somit folgt

$$r(z) = \frac{a}{(z-z_1)^{\nu_1}} + \frac{P(z)}{Q(z)},$$

mit

$$Q(z) = (z-z_1)^{\nu_1 - 1} s(z) = (z-z_1)^{\nu_1-1} a_n \prod_{j=2}^{m} (z-z_j)^{\nu_j},$$

also

$$\operatorname{grad} Q = n - 1.$$

Nach Induktionsvoraussetzung besitzt $\frac{P}{Q}$ eine Partialbruchzerlegung

$$\frac{P(z)}{Q(z)} = \sum_{j=1}^{\nu_1 - 1} \frac{a_{1j}}{(z-z_1)^j} + \sum_{i=2}^{m} \sum_{j=1}^{\nu_i} \frac{a_{ij}}{(z-z_i)^j},$$

und daher mit $a_{1\nu_1} = a$

$$r(z) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{\nu_i} \frac{a_{ij}}{(z-z_i)^j}.$$

2. Eindeutigkeit. Es genügt zu zeigen, daß sämtliche Koeffizienten der Zerlegung von $r_0(z) \equiv 0$ verschwinden. Angenommen es ist

$$(*) \qquad r_0(z) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{\nu_i} \frac{a_{ij}}{(z-z_i)^j} = 0, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{z_1, \ldots, z_m\}.$$

Wir betrachten eine feste Nullstelle z_{i_0} und wählen $1 \leq j_0 \leq \nu_{i_0}$ so, daß $a_{i_0 j} = 0$ für $j > j_0$ zutrifft. Multipliziert man $(*)$ mit $(z - z_{i_0})^{j_0}$, erhält man

$$0 = \Bigg(\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq i_0}}^{\nu_i} \sum_{j=1}^{\nu_i} \frac{a_{ij}}{(z-z_i)^j} \Bigg) (z - z_{i_0})^{j_0} + \sum_{j=1}^{j_0} (z - z_{i_0})^{j_0 - j} a_{i_0 j}.$$

Durch Grenzübergang $z \to z_{i_0}$ erhält man $a_{i_0 j_0} = 0$. Schrittweise ergibt sich auf diese Weise für sämtliche Koeffizienten $a_{ij} = 0$. $\square$

Für die praktische Berechnung der Partialbruchzerlegung gibt es mehrere Möglichkeiten:
1. **Koeffizientenvergleich:** Multipliziert man die Darstellung von $r = \frac{p}{q}$ mit q, erhält man

$$\begin{aligned} p(z) &= \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{\nu_i} \frac{a_{ij}}{(z-z_i)^j} \right) a_n \prod_{k=1}^{m} (z-z_k)^{\nu_k} \\ &= a_n \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{\nu_i} a_{ij} (z-z_i)^{\nu_i - j} \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{m} (z-z_k)^{\nu_k}, \quad z \in \mathbb{C}. \end{aligned}$$

Der Identitätssatz V-2.17 ist nun die Grundlage für den Koeffizientenvergleich, bei dem man die Koeffizienten gleicher Potenzen von z^k in p und im Polynom auf der rechten Seite gleichsetzt. Dies führt auf ein lineares Gleichungssystem für die Unbekannten a_{ij}, welches wegen der Existenz- und Eindeutigkeitsaussage in Satz 4.15 genau eine Lösung besitzen *muß*.

2. **Substitutionsmethode:** Ein anderes lineares Gleichungssystem für a_{ij} läßt sich gewinnen, wenn man für z nacheinander n verschiedene und möglichst zweckmäßig gewählte Werte $\xi_1, \dots, \xi_n$ einsetzt.

3. **Grenzwertmethode:** Die „höchsten“ Koeffizienten $a_{i\nu_i}$ erhält man besonders einfach, indem man die Darstellung für $r(z)$ mit $(z-z_i)^{\nu_i}$ multipliziert und den Grenzwert $z \to z_i$ betrachtet (in der Praxis bedeutet dies natürlich, daß man nach der Multiplikation den gekürzten Ausdruck in $z = z_i$ auswertet). Hat man $a_{i\nu_i}$ berechnet, kann man den Term $\frac{a_{i\nu_i}}{(z-z_i)^{\nu_i}}$ auf die linke Seite bringen und das Verfahren mit dem nächstniedrigeren Koeffizienten $a_{i\nu_i - 1}$ wiederholen.

BEISPIEL 4.16. 1) $r(z) = \frac{z+1}{z(z-1)(z-i)(z+i)}$.
Da sämtliche Nullstellen des Nennerpolynoms Vielfachheit 1 haben, führt folgender Ansatz zum Ziel ($a_{11} = A$, $a_{21} = B$, $a_{31} = C$, $a_{41} = D$):

$$(*) \qquad r(z) = \frac{A}{z} + \frac{B}{z-1} + \frac{C}{z-i} + \frac{D}{z+i}.$$

a) Koeffizientenvergleich:
Wir multiplizieren $(*)$ mit $z(z-1)(z-i)(z+i)$ und erhalten die Identität

$$\begin{aligned} z+1 &= A(z-1)(z^2+1) + Bz(z^2+1) + Cz(z-1)(z+i) + Dz(z-1)(z-i) \\ &= A(z^3 - z^2 + z - 1) + B(z^3 + z) + C(z^3 + (i-1)z^2 - iz) \\ &\quad + D(z^3 - (1+i)z^2 + iz) \\ &= (A+B+C+D)z^3 + (-A + (i-1)C - (1+i)D)z^2 \\ &\quad + (A + B - iC + iD)z - A. \end{aligned}$$

Vergleicht man die Koeffizienten gleicher Potenzen, erhält man das Gleichungssystem

$$\begin{array}{rrrrcl} A & +B & +C & +D & = & 0 \\ -A & & +(i-1)C & -(1+i)D & = & 0 \\ A & +B & -iC & +iD & = & 1 \\ -A & & & & = & 1\ . \end{array}$$

b) Substitutionsmethode:
Setzt man nacheinander in $(*)$ etwa $z = -1, -2, 2, 3$ ein, erhält man das Gleichungssystem

$$\begin{array}{rrrcrrrr} z = & -1\colon & 0 & = & -A & -\frac{1}{2}B & -\frac{1}{1+i}C & +\frac{1}{-1+i}D \\ z = & -2\colon & \frac{-1}{30} & = & -\frac{1}{2}A & -\frac{1}{3}B & -\frac{1}{2+i}C & +\frac{1}{-2+i}D \\ z = & 2\colon & \frac{3}{10} & = & \frac{1}{2}A & +B & +\frac{1}{2-i}C & +\frac{1}{2+i}D \\ z = & 3\colon & \frac{4}{60} & = & \frac{1}{3}A & +\frac{1}{2}B & +\frac{1}{3-i}C & +\frac{1}{3+i}D\ . \end{array}$$

c) Grenzwertmethode:
Wir multiplizieren $(*)$ mit z. Dies ergibt

$$\frac{z+1}{(z-1)(z-i)(z+i)} = A + z\left(\frac{B}{z-1} + \frac{C}{z-i} + \frac{D}{z+i}\right).$$

Für $z = 0$ erhält man $A = -1$. Multipliziert man mit $z - 1$, folgt

$$\frac{z+1}{z(z-i)(z+i)} = B + (z-1)\left(-\frac{1}{z} + \frac{C}{z-i} + \frac{D}{z+i}\right),$$

für $z = 1$ ergibt sich $B = 1$. Ganz entsprechend findet man $C = \frac{i}{2}$, $D = -\frac{i}{2}$ und damit die Partialbruchzerlegung

$$\frac{z+1}{z(z-1)(z-i)(z+i)} = -\frac{1}{z} + \frac{1}{z-1} + \frac{1}{2}\frac{i}{z-i} - \frac{1}{2}\frac{i}{z+i}.$$

2) $r(z) = \frac{z^2+1}{z(z-1)^2}$.
1 ist eine zweifache Nullstelle des Nennerpolynoms, somit ist ($a_{11} = A$, $a_{21} = B$, $a_{22} = C$)

$$r(z) = \frac{A}{z} + \frac{B}{z-1} + \frac{C}{(z-1)^2}$$

anzusetzen. Multipliziert man mit z und wertet in $z = 0$ aus, erhält man $A = 1$. Multiplikation mit $(z-1)^2$ liefert

$$\frac{z^2+1}{z} = \frac{(z-1)^2}{z} + B(z-1) + C.$$

Für $z = 1$ erhält man also $C = 2$. Setzt man nun in

$$r(z) = \frac{z^2+1}{z(z-1)^2} = \frac{1}{z} + \frac{B}{z-1} + \frac{2}{(z-1)^2}$$

$z = 2$ ein, erhält man

$$\frac{5}{2} = \frac{1}{2} + B + 2,$$

also $B = 0$. Die gesuchte Partialbruchzerlegung lautet somit

$$r(z) = \frac{1}{z} + \frac{2}{(z-1)^2}.$$

Das Beispiel zeigt, daß es vorteilhaft sein kann, verschiedene Methoden zur Berechnung der Partialbruchzerlegungen zu kombinieren.

Ist die rationale Funktion reell, d.h. sind alle Koeffizienten der Polynome p und q reell, ist es z.B. für Anwendungen in der Integralrechnung oft zweckmäßig, eine *reelle* Partialbruchzerlegung zur Verfügung zu haben.

SATZ 4.17. *Es sei $r = \frac{p}{q}$ eine rationale Funktion mit* $\operatorname{grad} p < \operatorname{grad} q = n$. *Sämtliche Koeffizienten der Polynome p und q seien reell. Das Nennerpolynom besitze die reelle kanonische Produktdarstellung*

$$q(x) = a_n \prod_{i=1}^{r} (x - x_i)^{\rho_i} \prod_{j=1}^{s} (x^2 + A_j x + B_j)^{\sigma_j}$$

(vgl. Satz 4.14). Dann besitzt r eine eindeutig bestimmte Partialbruchzerlegung der Form

$$r(x) = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{\rho_i} \frac{a_{ij}}{(x - x_i)^j} + \sum_{i=1}^{s} \sum_{j=1}^{\sigma_i} \frac{\alpha_{ij} x + \beta_{ij}}{(x^2 + A_i x + B_i)^j},$$

wobei die Koeffizienten a_{ij}, α_{ij}, β_{ij} reelle Zahlen sind.

BEISPIEL 4.18. $r(x) = \frac{x+1}{x(x-1)(x^2+x+1)}, x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$.
Die einzigen reellen Nullstellen von $q(x) = x(x-1)(x^2 + x + 1)$, $x = 0$ und $x = 1$, besitzen Multiplizität 1. Somit lautet der Ansatz für die reelle Partialbruchzerlegung

$$r(x) = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{Cx + D}{x^2 + x + 1}.$$

Die Koeffizienten A und B erhält man leicht mit Hilfe der Grenzwertmethode. Man findet

$$A = -1, \quad B = \frac{2}{3}.$$

Es ist also

$$\frac{x+1}{x(x-1)(x^2+x+1)} = -\frac{1}{x} + \frac{2}{3}\frac{1}{x-1} + \frac{Cx + D}{x^2 + x + 1}.$$

Setzt man die Werte $x = -1$ und $x = 2$ ein, erhält man das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 0 &= 1 - \frac{1}{3} - C + D \\ \frac{3}{14} &= -\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{2}{7}C + \frac{1}{7}D, \end{aligned}$$

woraus $C = \frac{1}{3}$ und $D = -\frac{1}{3}$ folgt. Insgesamt gilt also die Darstellung

$$f(x) = -\frac{1}{x} + \frac{2}{3}\frac{1}{x-1} + \frac{1}{3}\frac{x-1}{x^2+x+1}.$$

Die reelle bzw. komplexe Partialbruchzerlegung ermöglicht die systematische, geschlossene Integration rationaler Funktionen $r(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$. Im Falle $\operatorname{grad} p \geq \operatorname{grad} q$ ist vorerst der polynomiale Anteil in r durch Division von p durch q abzuspalten. Wir demonstrieren die Methode an einigen einfachen Beispielen:

Beispiel 4.19. 1) Mit Hilfe von Beispiel 4.16-1) finden wir

$$\begin{aligned}
&\int \frac{(x+1)\,dx}{x(x-1)(x^2+1)} = -\int \frac{dx}{x} + \int \frac{dx}{x-1} + \frac{i}{2}\int \left(\frac{1}{x-i} - \frac{1}{x+i}\right) dx \\
&= -\ln|x| + \ln|x-1| + \frac{i}{2}\int \frac{2i}{x^2+1}\,dx \\
&= -\ln|x| + \ln|x-1| - \arctan x.
\end{aligned}$$

(Wir haben $\frac{1}{x-i} - \frac{1}{x+i}$ durch $\frac{2i}{x^2+1}$ ersetzt, da wir den natürlichen Logarithmus vorerst nur für *reelle* Argumente definiert haben).
2) Aus Beispiel 4.16-2) folgt

$$\int \frac{x^2+1}{x(x-1)^2}\,dx = \int \frac{dx}{x} + 2\int \frac{dx}{(x-1)^2} = \ln|x| - \frac{2}{x-1}.$$

3) Wir benützen Beispiel 4.18 in

$$\int \frac{x+1}{x(x-1)(x^2+x+1)}\,dx = -\int \frac{dx}{x} + \frac{2}{3}\int \frac{dx}{x-1} + \frac{1}{3}\int \frac{x-1}{x^2+x+1}\,dx.$$

Lediglich das letzte Integral erfordert etwas Aufwand:

$$\begin{aligned}
\int \frac{x-1}{x^2+x+1}\,dx &= \frac{1}{2}\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}\,dx - \frac{3}{2}\int \frac{dx}{x^2+x+1} \\
&= \frac{1}{2}\ln(x^2+x+1) - \frac{3}{2}\int \frac{dx}{x^2+x+1}
\end{aligned}$$

(man beachte $x^2+x+1 > 0$ für $x \in \mathbb{R}$). Den Integranden im letzten Integral formt man um zu

$$x^2+x+1 = (x+\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4} = \frac{3}{4}\big((\frac{2}{\sqrt{3}}(x+\frac{1}{2}))^2 + 1\big).$$

Substituiert man $g(x) = \frac{2}{\sqrt{3}}(x+\frac{1}{2})$, erhält man

$$\int \frac{dx}{x^2+x+1} = \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan(\frac{2}{\sqrt{3}}(x+\frac{1}{2})).$$

Insgesamt ergibt sich also

$$\begin{aligned}\int \frac{x+1}{x(x-1)(x^2+x+1)}\,dx = &-\ln|x| + \frac{2}{3}\ln|x-1| + \frac{1}{6}\ln(x^2+x+1)\\ &-\sqrt{3}\arctan(\frac{2}{\sqrt{3}}(x+\frac{1}{2})).\end{aligned}$$

Bemerkung 4.20. Im Prinzip ist es nicht notwendig, für die Integration einer *reellen* rationalen Funktion, die *reelle* Partialbruchzerlegung aus Satz 4.17 zu verwenden. Man kann natürlich auch die komplexe Partialbruchzerlegung zur Integration heranziehen und erhält

$$\begin{aligned}\int r(x)\,dx &= \sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{\nu_k}\int \frac{a_{kj}}{(x-z_k)^j}\,dx\\ &= \sum_{k=1}^{m}\left[\int \frac{a_{k1}}{x-z_k}\,dx - \sum_{j=2}^{\nu_k}\frac{a_{kj}}{j-1}(x-z_k)^{-j+1}\right].\end{aligned}$$

Problematisch ist nur die Berechnung der Stammfunktion von $(x-z_k)^{-1}$ für $z_k \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$, da die Logarithmen nur für reelle Argumente definiert wurden. Es sei $z_k = \alpha_k + i\beta_k$, $\beta_k \neq 0$. Mit der Umformung

$$\frac{1}{x-z_k} = \frac{x-\alpha_k+i\beta_k}{(x-\alpha_k)^2+\beta_k^2}$$

erhalten wir

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{x-z_k} &= \int \frac{x-\alpha_k}{(x-\alpha_k)^2+\beta_k^2}\,dx + i\beta_k\int \frac{dx}{(x-\alpha_k)^2+\beta_k^2}\\ &= \frac{1}{2}\int \frac{2(x-\alpha_k)}{(x-\alpha_k)^2+\beta_k^2}\,dx + i\beta_k\int \frac{dx}{(x-\alpha_k)^2+\beta_k^2}\\ &= \frac{1}{2}\ln((x-\alpha_k)^2+\beta_k^2) + i\arctan\frac{x-\alpha_k}{\beta_k}.\end{aligned}$$

Der gesamte Ausdruck für $\int r(x)\,dx$ ist natürlich wieder reell. Allgemein sind jedoch die *reellen* Gleichungssysteme, auf welche die reelle Partialbruchzerlegung führt, händisch leichter zu lösen, als Gleichungssysteme mit komplexen Koeffizienten.

5. Integration und Grenzübergang

In diesem Abschnitt untersuchen wir die Vertauschbarkeit von Limes und Integral. Diese ist im allgemeinen *nicht* gegeben:

Beispiel 5.1. $f_n(x) = \begin{cases} n & x \in [\frac{1}{2n}, \frac{1}{n}] \\ 0 & x \in [0,1] \setminus [\frac{1}{2n}, \frac{1}{n}] \end{cases}.$

Es gilt $\lim f_n(x) = f(x) = 0$ für alle $x \in [0,1]$ und $\int_0^1 f_n(x)\,dx = \frac{1}{2}$, $n \in \mathbb{N}$, und $\int_0^1 f(x)\,dx = 0$. Man beachte, daß in diesem Beispiel die Folge (f_n) nur punktweise gegen f konvergiert und darüber hinaus $\{\|f_n\| : n \in \mathbb{N}\}$ unbeschränkt ist.

In Hinblick auf die Definition des Cauchy Integrals ist es jedoch nicht weiter überraschend, daß die Integrale einer gleichmäßig konvergenten Folge von Regelfunktionen gegen das Integral der Grenzfunktion konvergieren (diese Eigenschaft ist gewissermaßen von Haus aus in das Integral eingebaut):

Satz 5.2. *Es sei $(f_n)_{n\geq 1} \subset \mathcal{R}(I,\mathbb{C})$, $f\colon I \to \mathbb{C}$, und $f_n \rightrightarrows f$. Dann ist f eine Regelfunktion, die Folge der Integrale $(\mathcal{I}(f_n))$ ist konvergent und es gilt*

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Beweis. Wegen Satz 1.7 gilt $f \in \mathcal{R}(I,\mathbb{C})$. Aus der Beschränktheit des Integrals Satz 2.9 folgt

$$|\mathcal{I}(f_n) - \mathcal{I}(f)| = |\mathcal{I}(f_n - f)| \leq (b-a)\|f_n - f\|.$$

□

Korollar 5.3. Es sei $(f_n) \subset \mathcal{R}(I,\mathbb{C})$ und die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ gleichmäßig konvergent. Dann gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)\,dx.$$

Dieses Ergebnis eröffnet eine weitere Möglichkeit, Potenzreihenentwicklungen zu berechnen:

Beispiel 5.4. Aus der Binomialreihe (Beispiel VI-10.13) ergibt sich für $|t| < 1$ die Reihenentwicklung

$$(1-t^2)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{-\frac{1}{2}}{k} t^{2k}.$$

Auf kompakten Teilintervallen von $(-1,1)$ ist die Potenzreihe gleichmäßig konvergent. Auf $[0,x]$ bzw. $[x,0]$, $|x| < 1$, kann nach Korollar 5.3 die Reihe gliedweise integriert werden: Es gilt somit

$$\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{-\frac{1}{2}}{k} \int_0^x t^{2k}\,dt = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{-\frac{1}{2}}{k} \frac{x^{2k+1}}{2k+1}.$$

Die Stammfunktion auf der linken Seite ist $\arcsin x$. Die rechte Seite ergibt mit $(k \geq 1)$

$$\binom{-\frac{1}{2}}{k} = \frac{1}{k!} \prod_{j=0}^{k-1} \left(-\frac{1}{2} - j\right) = \frac{1}{k!} (-1)^k \frac{1}{2^k} \prod_{j=0}^{k-1} (1+2j)$$

die Reihenentwicklung

$$\arcsin x = x + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \frac{1}{2^k} \frac{1}{2k+1} \prod_{j=0}^{k-1} (1+2j) x^{2k+1},$$

die zumindest für $|x| < 1$ konvergiert. Tatsächlich läßt sich zeigen, daß diese Darstellung sogar für $|x| \leq 1$ gültig ist.

Unser nächstes Ziel ist es, Satz 5.2 erheblich zu verallgemeinern. Dazu benötigen wir zwei technische Resultate. Im folgenden wollen wir unter einer **Elementarmenge** eine endliche Vereinigung von disjunkten, beschränkten Intervallen verstehen. Ist $E \subset \mathbb{R}$ eine Elementarmenge, d.h. ist

$$E = \bigcup_{i=1}^{n} J_i,$$

$J_i \subset \mathbb{R}$ beschränktes Intervall, $i = 1, \ldots, n$, und bezeichnet $\lambda(J)$ die Länge eines Intervalls J, dann nennen wir

$$\lambda(E) = \sum_{i=1}^{n} \lambda(J_i)$$

Länge von E. Wir übergehen hier den Nachweis, daß $\lambda(E)$ unabhängig ist von der speziellen Darstellung $\bigcup_{i=1}^{n} J_i$ von E. Ohne Beweis zitieren wir folgendes Resultat:

LEMMA 5.5. *Es sei $(E_n)_{n \geq 1}$ eine Folge von Elementarmengen mit $E_n \subset I = [a, b]$, $n \in \mathbb{N}$, und es existiere $c > 0$ so, daß*

$$\forall n \in \mathbb{N} \colon \lambda(E_n) \geq c > 0.$$

Dann gibt es ein Element $x_0 \in I$, das zu unendlich vielen Elementarmengen gehört.

LEMMA 5.6. *Es sei $t \in \mathcal{T}(I, \mathbb{C})$, $I = [a, b]$. Gilt für ein $\varepsilon > 0$*

$$\left| \int_a^b t(x)\, dx \right| \geq \varepsilon,$$

dann ist die Menge

$$E = \{x \in I \colon |t(x)| \geq \frac{\varepsilon}{2(b-a)}\}$$

eine Elementarmenge, für deren Länge die Abschätzung

$$\lambda(E) \geq \frac{\varepsilon}{2\|t\|}$$

zutrifft.

Beweis. Es sei $\mathcal{Z}\colon a = x_0 < \dots < x_i < \dots < x_n = b$ eine zu t gehörende Zerlegung von I und es sei c_i der Wert von t auf $J_i = (x_{i-1}, x_i)$. Dann ist klar, daß E eine endliche Vereinigung von disjunkten Intervallen ist (es können nur Intervalle des Typs J_i oder $[x_i, x_i]$ auftreten). Es gilt

$$\int_a^b t(x)\,dx = \sum_{i=1}^n c_i(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^n c_i\lambda(J_i).$$

Wir spalten nun die Summe folgendermaßen auf:

$$\sum_{i=1}^n c_i\lambda(J_i) = \sum_{|c_i|\geq\frac{\varepsilon}{2(b-a)}} c_i\lambda(J_i) + \sum_{|c_i|<\frac{\varepsilon}{2(b-a)}} c_i\lambda(J_i).$$

Dies ergibt die Abschätzung

$$\begin{aligned}\varepsilon \leq \Big|\int_a^b t(x)\,dx\Big| &\leq \sum_{|c_i|\geq\frac{\varepsilon}{2(b-a)}} |c_i|\lambda(J_i) + \sum_{|c_i|<\frac{\varepsilon}{2(b-a)}} |c_i|\lambda(J_i)\\ &\leq \|t\|\cdot\lambda(E) + \frac{\varepsilon}{2(b-a)}\cdot(b-a)\end{aligned}$$

und somit (man beachte $t \neq 0$ und daher auch $\|t\| > 0$)

$$\lambda(E) \geq \frac{\varepsilon}{2\|t\|}.$$

□

Satz 5.7. *Es sei* $(t_n)_{n\geq1} \subset \mathcal{T}(I,\mathbb{C})$ *mit*

i) $\lim_{n\to\infty} t_n(x) = 0$ *für alle* $x \in I$ *(*t_n *konvergiert punktweise gegen* 0*),*
ii) $\exists c > 0\,\forall n \in \mathbb{N}\colon \|t_n\| \leq c$ *(*(t_n) *ist beschränkt).*

Dann gilt

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b t_n(x)\,dx = 0.$$

Beweis. Angenommen, die Folge $(\mathcal{I}(t_n))$ wäre keine Nullfolge, dann gäbe es ein $\varepsilon_0 > 0$ und eine Teilfolge $(\mathcal{I}(t_{\varphi(n)}))$ mit $|\mathcal{I}(t_{\varphi(n)})| \geq \varepsilon_0$, $n \in \mathbb{N}$. Wir bezeichnen der Einfachheit halber nun diese Teilfolge wieder mit $\mathcal{I}(t_n)$ und gehen daher von der Annahme aus:

$$\forall n \in \mathbb{N}\colon |\mathcal{I}(t_n)| \geq \varepsilon_0.$$

Nach Lemma 5.6 besitzt für jedes t_n die Elementarmenge

$$E_n = \{x \in I\colon |t_n(x)| \geq \frac{\varepsilon_0}{2(b-a)}\},$$

die Länge

$$\lambda(E_n) \geq \frac{\varepsilon_0}{2\|t_n\|}.$$

Wegen $\|t_n\| \leq c$, $n \in \mathbb{N}$, gilt daher

$$\lambda(E_n) \geq \frac{\varepsilon_0}{2c}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Nach Lemma 5.5 gibt es daher eine Stelle $x_0 \in I$, welche in unendlich vielen Elementarmengen E_n liegt. Für unendlich viele $n \in \mathbb{N}$ gilt also

$$|t_n(x_0)| \geq \frac{\varepsilon_0}{2(b-a)},$$

im Widerspruch zur Voraussetzung $\lim_{n\to\infty} t_n(x_0) = 0$. □

Satz 5.8 (Arzela-Osgood). *Die Folge $(f_n) \subset \mathcal{R}(I,\mathbb{C})$ konvergiere punktweise gegen die Regelfunktion f. Ferner sei $\{\|f_n\| : n \in \mathbb{N}\}$ beschränkt. Dann gilt*

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx.$$

Wir bemerken, daß aus der *punktweisen* Konvergenz von f_n gegen eine Funktion f nicht gefolgert werden kann, daß f eine Regelfunktion ist. Es ist daher notwendig, $f \in \mathcal{R}(I,\mathbb{C})$ vorauszusetzen.

Beweis. Da f nach Voraussetzung eine Regelfunktion ist, gilt auch $f_n - f \in \mathcal{R}(I,\mathbb{C})$. Da $(f - f_n)$ eine Nullfolge und $(\|f - f_n\|)$ beschränkt ist, genügt es wegen der Linearität des Integrals den Satz für den Spezialfall

$$(*) \qquad \lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0, \quad x \in I,$$

zu beweisen. Zu jeder Regelfunktion f_n wählen wir – wie im Beweis von Satz 1.7 – eine Treppenfunktion $t_n \in \mathcal{T}(I,\mathbb{C})$ mit

$$\|t_n - f_n\| < \frac{1}{n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Für alle $n \in \mathbb{N}$ und für alle $x \in I$ gilt also

$$|f_n(x)| - \frac{1}{n} < |t_n(x)| < |f_n(x)| + \frac{1}{n}.$$

Wegen $(*)$ gilt dann auch

$$\lim_{n\to\infty} t_n(x) = 0 \text{ punktweise auf } I.$$

Aus der Abschätzung

$$\|t_n\| \leq \|f_n\| + \|f_n - t_n\| < \|f_n\| + \frac{1}{n}$$

lesen wir die Beschränktheit von $(\|t_n\|)$ ab. Aus Satz 5.7 folgt daher

$$\lim_{n\to\infty} \mathcal{I}(t_n) = 0.$$

Zusammen mit der Beschränktheit des Integrals ergibt sich daraus die Behauptung

$$\begin{aligned}|\mathfrak{I}(f_n)| &\leq |\mathfrak{I}(t_n)| + |\mathfrak{I}(t_n - f_n)| \leq |\mathfrak{I}(t_n)| + (b-a)\|t_n - f_n\| \\ &< |\mathfrak{I}(t_n)| + \frac{1}{n}(b-a).\end{aligned}$$

□

Wir formulieren den Satz von Arzela-Osgood auch für Funktionenreihen:

KOROLLAR 5.9. Es sei $(f_n) \subset \mathcal{R}(I, \mathbb{C})$. Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ konvergiere punktweise gegen eine Regelfunktion. Ferner sei die Folge der Partialsummen gleichmäßig beschränkt, d.h.

$$\exists c \geq 0 \, \forall x \in I \, \forall n \in \mathbb{N} \colon |\sum_{k=1}^{n} f_k(x)| \leq c.$$

Dann gilt

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\int_a^b f_k(x)\, dx \right) = \int_a^b \left(\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x) \right) dx.$$

6. Parameterabhängige Integrale

Wir gehen von einer Funktion $f \colon I \times D \to \mathbb{C}$, $D \subset \mathbb{R}$, mit folgender Eigenschaft aus:

$$\forall t \in D \colon x \mapsto f(x,t) \text{ ist eine Regelfunktion.}$$

(Die Abbildung $x \mapsto f(x,t)$ bezeichnen wir mit $f(\cdot, t)$). Man bezeichnet t in diesem Zusammenhang oft als **Parameter**. Definiert man

$$F: \begin{cases} D \to \mathbb{C} \\ t \mapsto \int_a^b f(x,t)\, dx, \end{cases}$$

sagt man, F sei durch ein **parameterabhängiges Integral** gegeben. Wir untersuchen nun die Eigenschaften von F.

SATZ 6.1. $f \in \mathcal{B}(I \times D, \mathbb{C})$, $D \subset \mathbb{R}$, *habe folgende Eigenschaften:*

i) $\forall t \in D \colon f(\cdot, t) \in \mathcal{R}(I, \mathbb{C})$,
ii) $\forall x \in I \colon f(x, \cdot) \in C(D, \mathbb{C})$.

Dann ist die Abbildung $F \colon D \to \mathbb{C}$,

$$F(t) = \int_a^b f(x,t)\, dx$$

stetig auf D.

BEWEIS. Es sei $t_0 \in D$ ein Häufungspunkt von D und $(t_n) \subset D$ konvergiere gegen t_0. Wir betrachten nun die Folge von Regelfunktionen (g_n),

$$g_n(x) = f(x, t_n), \quad x \in I, n \in \mathbb{N}.$$

Aus ii) folgt für alle $x \in I$

$$\lim_{n\to\infty} g_n(x) = \lim_{n\to\infty} f(x, t_n) = f(x, t_0).$$

Es gilt $f(\cdot, t_0) \in \mathcal{R}(I, \mathbb{C})$ und wegen $f \in \mathcal{B}(I \times D, \mathbb{C})$ ist die Folge $(\|g_n\|)$, d.h. $(\|f(\cdot, t_n)\|)$ beschränkt. Nach dem Satz von Arzela-Osgood 5.8 folgt daher

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} F(t_n) &= \lim_{n\to\infty} \int_a^b f(x, t_n)\, dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b g_n(x)\, dx = \int_a^b \lim_{n\to\infty} g_n(x)\, dx \\ &= \int_a^b f(x, t_0)\, dx = F(t_0).\end{aligned}$$

□

Der Beweis zeigt, daß die Forderung der globalen Beschränktheit von f abgeschwächt werden kann zu

$$\forall t \in D\, \exists U \in \mathcal{U}(t)\colon f \text{ ist beschränkt auf } I \times (U \cap D).$$

BEISPIEL 6.2. 1) Es sei $I = [a, b]$, $0 < a < b$, $D = \mathbb{R}$, und $f(x, t) = x^t$. Aus dem Satz folgt, daß

$$F(t) = \begin{cases} \frac{b^{t+1} - a^{t+1}}{t+1}, & t \neq -1, \\ \ln \frac{b}{a}, & t = -1, \end{cases}$$

auf beliebigen kompakten Intervallen von $\mathbb{R}$ und damit auf $\mathbb{R}$ selbst stetig ist. Insbesondere folgt

$$\lim_{t\to-1} \frac{b^{t+1} - a^{t+1}}{t+1} = F(-1) = \ln \frac{b}{a}.$$

2) Es sei $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$, $D = (0, \infty)$ und $f(x, t) = t^x$. Mit Hilfe von Satz 6.1 schließen wir auf die Stetigkeit von

$$F(t) = \begin{cases} \frac{1}{\ln t}(t^b - t^a), & t \in (0, \infty) \setminus \{1\}, \\ b - a, & t = 1, \end{cases}$$

und insbesondere $F(1) = \int_a^b 1\, dx = b - a = \lim_{t\to1} \frac{1}{\ln t}(t^b - t^a)$.

SATZ 6.3 (Vertauschung von Integration und Differentiation). *Es sei $f\colon I \times D \to \mathbb{C}$, und $D \subset \mathbb{R}$ ein Intervall. f besitze folgende Eigenschaften:*

i) $\forall t \in D\colon f(\cdot, t) \in \mathcal{R}(I, \mathbb{C})$,
ii) $\forall x \in I\colon$ *existiere die partielle Ableitung* $\frac{\partial f}{\partial t}\colon I \times D \to \mathbb{C}$,

iii) $\forall t \in D\colon \frac{\partial f}{\partial t}(\cdot, t) \in \mathcal{R}(I, \mathbb{C})$,
iv) $\frac{\partial f}{\partial t} \in \mathcal{B}(I \times D, \mathbb{C})$, *d.h.* $\exists c \geq 0\, \forall (x,t) \in I \times D\colon \left|\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\right| \leq c$.

Dann ist die Abbildung $F\colon D \to \mathbb{C}$, *definiert durch*

$$F(t) = \int\limits_a^b f(x,t)\,dx,$$

auf D *differenzierbar und es gilt*

$$F'(t) = \int\limits_a^b \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\,dx.$$

Beweis. Es sei $t \in D$ und $(t_n) \subset D$ mit $\lim_{n\to\infty} t_n = t$ und $t_n \neq t$, $n \in \mathbb{N}$. Wir betrachten den Differenzenquotient von F:

$$\frac{F(t_n) - F(t)}{t_n - t} = \int\limits_a^b \frac{f(x,t_n) - f(x,t)}{t_n - t}\,dx =: \int\limits_a^b g_n(x)\,dx, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Wegen i) gilt $(g_n) \subset \mathcal{R}(I, \mathbb{C})$ und aus ii) folgt für alle $x \in I$

$$\lim_{n\to\infty} g_n(x) = \frac{\partial f}{\partial t}(x,t).$$

Nach iii) ist $\frac{\partial f}{\partial t}$, also der punktweise Grenzwert der Folge (g_n), eine Regelfunktion. Wir zeigen nun die Beschränktheit von $(\|g_n\|)$: Der Mittelwertsatz VI-6.7 zeigt

$$g_n(x) = \frac{f(x,t_n) - f(x,t)}{t_n - t} = \frac{\partial f}{\partial t}(x, t^*(x)), \quad t^*(x) \in (\min\{t, t_n\}, \max\{t, t_n\})$$

und iv) ergibt

$$\forall x \in I\, \forall n \in \mathbb{N}\colon |g_n(x)| \leq c.$$

Aus dem Satz von Arzela-Osgood 5.8 folgt somit

$$\begin{aligned} F'(t) &= \lim_{n\to\infty} \frac{F(t_n) - F(t)}{t_n - t} = \lim_{n\to\infty} \int\limits_a^b g_n(x)\,dx \\ &= \int\limits_a^b \lim_{n\to\infty} g_n(x)\,dx = \int\limits_a^b \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\,dx. \end{aligned}$$

□

Man beachte, daß in Satz 6.3 nicht die Beschränktheit von f, sondern jene von $\frac{\partial f}{\partial t}$ gefordert wird.

Beispiel 6.4 (Gaußsches Fehlerintegral). Wir betrachten das parameterabhängige Integral

$$F(t) = \int_0^1 \frac{e^{-(1+x^2)t^2}}{1+x^2}\,dx$$

für $t \in \mathbb{R}$. Wir setzen also $I = [0,1]$ und

$$f := \begin{cases} [0,1] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \\ (x,t) \mapsto \frac{e^{-(1+x^2)t^2}}{1+x^2}. \end{cases}$$

Wir verifizieren die Voraussetzungen von Satz 6.3: Für jedes $t \in \mathbb{R}$ ist die Abbildung $x \mapsto f(x,t)$ stetig, also eine Regelfunktion und für jedes $x \in [0,1]$ ist $t \mapsto f(x,t)$ differenzierbar. Es gilt

$$\frac{\partial f}{\partial t}(x,t) = -2te^{-(1+x^2)t^2},$$

somit ist $\frac{\partial f}{\partial t}(\cdot,t) \in \mathcal{R}(I,\mathbb{R})$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Ferner gilt für alle $(x,t) \in I \times \mathbb{R}$

$$\big|\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\big| = 2|t|e^{-(1+x^2)t^2} \le \begin{cases} 2|t| \le 2 & |t| \le 1, x \in I, \\ \frac{2|t|}{(1+x^2)t^2} \le \frac{2}{|t|} \le 2 & |t| \ge 1, x \in I, \end{cases}$$

also ist $\frac{\partial f}{\partial t} \in \mathcal{B}(I \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$. Nach Satz 6.3 ist F auf $\mathbb{R}$ differenzierbar und es gilt

$$F'(t) = -2e^{-t^2} \int_0^1 e^{-x^2t^2}t\,dx.$$

Substituiert man für festes t im Integral $g(x) = xt$, also $g(0) = 0$ und $g(1) = t$, erhält man mit Hilfe von Satz 4.9

$$F'(t) = -2e^{-t^2} \int_0^t e^{-u^2}du.$$

Beschränken wir uns vorübergehend auf ein kompaktes t-Intervall, folgt wegen der Stetigkeit von $u \mapsto e^{-u^2}$ aus dem Hauptsatz 4.3 die Beziehung

$$\frac{d}{dt}(\int_0^t e^{-u^2}du)^2 = 2\int_0^t e^{-u^2}du \cdot e^{-t^2}.$$

Wir erhalten also

$$F'(t) = -\frac{d}{dt}\Big(\int_0^t e^{-u^2}du\Big)^2,$$

d.h.

$$F(t) = -\Big(\int_0^t e^{-u^2} du\Big)^2 + c, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Die Konstante c ist festgelegt durch

$$c = F(0) = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x\Big|_0^1 = \frac{\pi}{4}.$$

Wir erhalten daraus für alle $t \in \mathbb{R}$

$$\left(\int_0^t e^{-u^2} du\right)^2 = \frac{\pi}{4} - F(t).$$

Wir betrachten nun eine beliebige Folge (t_n) mit $\lim_{n\to\infty} t_n = \infty$. Für alle $n \in \mathbb{N}$ und $x \in I$ gilt dann

$$\lim_{n\to\infty} f(x, t_n) = 0$$

und

$$|f(x, t_n)| \leq 1.$$

Aus dem Satz von Arzela-Osgood folgt daher

$$\lim_{n\to\infty} F(t_n) = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 f(x, t_n)\, dx = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f(x, t_n)\, dx = 0,$$

und folglich

$$\lim_{t\to\infty} \int_0^t e^{-u^2} du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Vorausgreifend bemerken wir, daß man den Grenzwert auf der linken Seite mit dem Symbol $\int_0^\infty e^{-u^2} du$ bezeichnet. Somit wurde gezeigt

$$\int_0^\infty e^{-u^2} du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Schließlich betrachten wir noch die Integration einer durch ein parameterabhängiges Integral definierten Funktion F. Unter den Voraussetzungen von Satz 6.1 ist F stetig und somit auf kompakten Teilintervallen von D integrierbar. Es sei etwa $[\alpha, \beta] \subset D$, dann gilt

$$\int_\alpha^\beta F(t)\, dt = \int_\alpha^\beta \Big[\int_a^b f(x, t)\, dx\Big]\, dt.$$

Die Frage liegt nahe, ob die Gleichung

$$\int_\alpha^\beta \Big[\int_a^b f(x,t)\,dx\Big]\,dt = \int_a^b \Big[\int_\alpha^\beta f(x,t)\,dt\Big]\,dx$$

gilt, d.h. ob es zulässig ist, die Integrationsreihenfolge zu vertauschen. Da die Variablen x und t bei dieser Problemstellung gleichberechtigt auftreten, fordern wir, daß $f(\cdot,t) \in C(I,\mathbb{C})$ für alle $t \in D$ ist.

Satz 6.5 (Vertauschung der Integrationsreihenfolge). *Es sei $f \in \mathcal{B}([a,b]\times[\alpha,\beta],\mathbb{C})$ und es gelte*

i) $\forall x \in [a,b]\colon f(x,\cdot) \in C([\alpha,\beta],\mathbb{C})$,
ii) $\forall t \in [\alpha,\beta]\colon f(\cdot,t) \in C([a,b],\mathbb{C})$.

Dann gilt

$$\int_\alpha^\beta \Big[\int_a^b f(x,t)\,dx\Big]\,dt = \int_a^b \Big[\int_\alpha^\beta f(x,t)\,dt\Big]\,dx.$$

Es ist klar, daß $f \in C([a,b]\times[\alpha,\beta],\mathbb{C})$ eine hinreichende Bedingung für i) und ii) darstellt.

Beweis. Nach Satz 6.1 ist die Abbildung $F\colon [\alpha,\beta] \to \mathbb{C}$

$$F(t) = \int_a^b f(x,t)\,dx$$

stetig auf $[\alpha,\beta]$ und somit integrierbar. Wir definieren die Abbildung $H\colon [\alpha,\beta] \to \mathbb{C}$ durch

$$H(y) = \int_\alpha^y F(t)\,dt, \quad y \in [\alpha,\beta].$$

Nach dem Hauptsatz 4.3 gilt für alle $y \in [\alpha,\beta]$

$$H'(y) = F(y) = \int_a^b f(x,y)\,dx.$$

Wir untersuchen nun die Abbildung $g\colon [a,b]\times[\alpha,\beta] \to \mathbb{C}$, welche gegeben ist durch

$$g(x,y) = \int_\alpha^y f(x,t)\,dt,$$

und verifizieren die Voraussetzungen von Satz 6.3. Für jedes $y \in [\alpha,\beta]$ ist $g(\cdot,y) \in C([a,b],\mathbb{C})$ nach Satz 6.1 (mit y als Parameter). Für jedes $x \in [a,b]$ ist $g(x,\cdot)$ nach dem Hauptsatz 4.3 wegen der Stetigkeit von $f(x,\cdot)$ stetig differenzierbar auf $[\alpha,\beta]$ und es gilt für alle $y \in [\alpha,\beta]$, $x \in [a,b]$

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = f(x,y).$$

Es ist also auch $\frac{\partial g}{\partial y}(\cdot,y) \in C([a,b],\mathbb{C})$ und $\frac{\partial g}{\partial y} \in \mathcal{B}([a,b]\times[\alpha,\beta],\mathbb{C})$. Nach Satz 6.3 ist die Abbildung $G\colon [\alpha,\beta] \to \mathbb{C}$, definiert durch

$$G(y) = \int\limits_a^b g(x,y)\,dx,$$

auf $[\alpha,\beta]$ differenzierbar mit

$$G'(y) = \int\limits_a^b \frac{\partial g}{\partial y}(x,y)\,dx = \int\limits_a^b f(x,y)\,dx.$$

Somit folgt für alle $y \in [\alpha,\beta]$

$$H'(y) = G'(y).$$

Es gibt daher eine Konstante $c \in \mathbb{C}$ mit

$$H(y) = G(y) + c, \quad y \in [\alpha,\beta].$$

Wegen $H(\alpha) = G(\alpha) = 0$ ($g(x,\alpha) = 0$ für alle $x \in [a,b]$) folgt sogar $H = G$, d.h. es ist

$$\int\limits_\alpha^y \Big[\int\limits_a^b f(x,t)\,dx\Big]\,dt = \int\limits_a^b \Big[\int\limits_\alpha^y f(x,t)\,dt\Big]\,dx, \quad y \in [\alpha,\beta].$$

Für $y = \beta$ ergibt sich die Behauptung. □

7. Uneigentliche Integrale

Die bisher entwickelte Integrationstheorie bezog sich auf Funktionen, deren Definitionsbereich ein *kompaktes* Intervall in $\mathbb{R}$ ist. Dies hat zwei starke Einschränkungen der Anwendbarkeit der Theorie zur Folge: Einerseits muß der Integrationsbereich beschränkt sein, andererseits sind integrierbare Funktionen notwendigerweise beschränkt. Wir zeigen nun, wie man Funktionen, die diesen Anforderungen nicht genügen, unter bestimmten Umständen einen sinnvollen Wert des Integrals zuordnen kann.

Definition 7.1. *Es sei $I = [a,b] \subset \bar{\mathbb{R}}$, $-\infty \le a < b \le \infty$ und $f\colon I \cap \mathbb{R} \to \mathbb{C}$. Wir definieren folgende* ***uneigentliche Integrale*** $\int\limits_a^b f(x)\,dx$:

(1) *Es sei $a \in \mathbb{R}$ und $f|_{[a,\beta]} \in \mathcal{R}([a,\beta],\mathbb{C})$ für alle $\beta \in [a,b)$. Existiert $\lim\limits_{\beta\uparrow b} \int\limits_a^\beta f(x)\,dx$, so definiert man*

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx := \lim_{\beta\uparrow b} \int\limits_a^\beta f(x)\,dx.$$

(2) *Eine analoge Definition gilt, falls $b \in \mathbb{R}$ für $\alpha \downarrow a$.*

(3) *Es sei $-\infty \leq a < b \leq \infty$. Existieren für ein $c \in (a,b)$ die uneigentlichen Integrale $\int\limits_a^c f(x)\,dx$ und $\int\limits_c^b f(x)\,dx$, definieren wir*

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx := \int\limits_a^c f(x)\,dx + \int\limits_c^b f(x)\,dx.$$

(4) *Das uneigentliche Integral $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ heißt* ***divergent****, wenn der entsprechende Grenzwert nicht existiert.*

Die Unabhängigkeit des uneigentlichen Integrals in (3) von der Wahl der Zwischenstelle wird später behandelt. Ist $I = [a,b] \subset \mathbb{R}$ und $f \in \mathcal{R}(I,\mathbb{C})$, so stimmt das uneigentliche Integral mit dem Integral gemäß Definition 2.1 überein. Wegen der stetigen Abhängigkeit etwa von der oberen Grenze gilt nämlich

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim_{\beta\uparrow b} \int\limits_a^\beta f(x)\,dx.$$

(Beweis: Übung).
Diese Definition erfaßt die für die Praxis relevanten Typen von uneigentlichen Integralen:

Beispiel 7.2. 1) $\int\limits_1^\infty x^{-s}\,dx$.
(Typ 1: $a \in \mathbb{R}$, $b = \infty$, unbeschränkter Integrationsbereich). Der Integrand ist stetig auf $[1,\beta]$ für $\beta \in [1,\infty)$. Man erhält

$$\int\limits_1^\beta x^{-s}\,dx = \begin{cases} \frac{1}{s-1}(1-\beta^{1-s}), & s \neq 1, \\ \ln\beta, & s = 1. \end{cases}$$

Somit existiert $\lim_{\beta\to\infty} \int\limits_1^\beta x^{-s}\,dx$ genau dann, wenn $s > 1$ gilt. Sein Wert ist

$$\int\limits_1^\infty x^{-s}dx = \lim_{\beta\to\infty} \int\limits_1^\beta x^{-s}ds = \frac{1}{s-1}.$$

2) $\int\limits_0^1 x^{-s}dx.$

(Typ 2: a, $b \in \mathbb{R}$, Integrand unbeschränkt am Rand des Integrationsbereiches). Der Integrand ist stetig auf $[\alpha, 1]$ für alle $\alpha \in (0, 1]$. Man erhält

$$\int\limits_\alpha^1 x^{-s}dx = \begin{cases} \frac{1}{1-s}(1-\alpha^{1-s}), & s \neq 1, \\ -\ln\alpha, & s = 1. \end{cases}$$

Das uneigentliche Integral $\int_0^1 x^{-s}dx$ existiert also genau für $s < 1$. Es hat den Wert

$$\int\limits_0^1 x^{-s}dx = \lim_{\alpha\downarrow 0} \int\limits_\alpha^1 x^{-s}dx = \frac{1}{1-s}.$$

3) $\int\limits_{-\infty}^\infty \frac{dx}{1+x^2} = \pi.$

(Typ 3: $a = -\infty, b = \infty, c = 0$). Wie vorhin untersuchen wir die beiden uneigentlichen Integrale

$$\int\limits_0^\infty \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{\beta\to\infty} \int\limits_0^\beta \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{\beta\to\infty} \arctan\beta = \frac{\pi}{2}$$

$$\int\limits_{-\infty}^0 \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{\alpha\to-\infty} \int\limits_\alpha^0 \frac{dx}{1+x^2} = -\lim_{\alpha\to-\infty} \arctan\alpha = \frac{\pi}{2}.$$

Beide zusammen ergeben die Behauptung. Aus Symmetriegründen könnte man sich in diesem Beispiel die Berechnung von $\int\limits_{-\infty}^0 \frac{dx}{1+x^2}$ ersparen.

4) $\int\limits_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{|x|}} = 4.$

(Typ 4: a, $b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $c = 0$, Integrand unbeschränkt im Inneren des Integrationsbereiches). Nach Beispiel 2) existieren die beiden uneigentlichen Integrale

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \int\limits_{-1}^0 \frac{dx}{\sqrt{|x|}} = 2.$$

Daraus folgt die Behauptung.

Wir weisen darauf hin, daß bei uneigentlichen Integralen vom Typ 3) und 4) die Grenzwerte in den beiden uneigentlichen Integralen $\int\limits_a^c f(x)\,dx$ und $\int\limits_c^b f(x)\,dx$ voneinander *unabhängig* durchzuführen sind. Durch eine geeignete Koppelung der beiden Grenzwerte kann man manchmal die Existenz des Grenzwertes erzwingen: Als Beispiel betrachte man das uneigentliche Integral

$$\int\limits_a^b \frac{1}{x}\,dx, \quad a < 0 < b.$$

Dieses existiert nicht, da die beiden uneigentlichen Integrale $\int_a^0 \frac{1}{x}\,dx$ und $\int_0^b \frac{1}{x}\,dx$ nicht existieren. Koppelt man jedoch die beiden Grenzwerte $\lim_{\beta\uparrow 0} \int\limits_a^\beta \frac{1}{x}\,dx$ und $\lim_{\alpha\downarrow 0} \int\limits_\alpha^b \frac{1}{x}\,dx$ in der Form

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\left(\int\limits_a^{-\varepsilon} \frac{1}{x}\,dx + \int\limits_\varepsilon^b \frac{1}{x}\,dx\right) = \lim_{\varepsilon\downarrow 0}(\ln|-\varepsilon| - \ln|a| + \ln b - \ln\varepsilon) = \ln\frac{b}{|a|},$$

existiert der Grenzwert. Man nennt diesen *speziellen* Grenzwert **Cauchyscher Hauptwert** des divergenten uneigentlichen Integrals und schreibt

$$(C)\int\limits_a^b \frac{1}{x}\,dx = \ln\frac{b}{|a|}.$$

Existiert das uneigentliche Integral $\int\limits_a^\infty f(x)\,dx$ für ein $a \in \mathbb{R}$, dann existiert auch das uneigentliche Integral $\int_\alpha^\infty f(x)\,dx$ für alle $\alpha \geq a$ und sein Wert ist

$$\int\limits_\alpha^\infty f(x)\,dx = \int\limits_a^\infty f(x)\,dx - \int\limits_a^\alpha f(x)\,dx.$$

So selbstverständlich dies erscheinen mag, bedarf es trotzdem einer Rechtfertigung. Die Existenz von $\int_a^\infty f(x)\,dx$ bedeutet

$$(*) \qquad \forall\varepsilon > 0\,\exists\xi \geq a\,\forall\beta \geq \xi\colon \Big|\int\limits_a^\infty f(x)\,dx - \int\limits_a^\beta f(x)\,dx\Big| < \varepsilon.$$

Es sei nun $\alpha \geq a$ und $\varepsilon > 0$ beliebig und ξ entsprechend $(*)$ gewählt (O.B.d.A. können wir $\xi \geq \alpha$ annehmen). Für $\beta \geq \alpha$ gilt dann

$$\Big|\Big(\int_a^\infty f(x)\,dx - \int_a^\alpha f(x)\,dx\Big) - \int_\alpha^\beta f(x)\,dx\Big| = \Big|\int_a^\infty f(x)\,dx - \int_a^\beta f(x)\,dx\Big| < \varepsilon,$$

d.h.

$$\lim_{\beta\to\infty} \int_\alpha^\beta f(x)\,dx = \int_a^\infty f(x)\,dx - \int_a^\alpha f(x)\,dx.$$

Auch uneigentliche Integrale sind also additiv in Bezug auf das Integrationsintervall und verhalten sich in dieser Hinsicht wie das Cauchy Integral. Insbesondere gilt auch für alle $\alpha \leq \beta$

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx = \int_\alpha^\infty f(x)\,dx - \int_\beta^\infty f(x)\,dx$$

soferne die uneigentlichen Integrale existieren. Tatsächlich gilt diese Formel für alle $\alpha, \beta \geq a$.

Ähnlich der Situation bei Reihen ist es meist nicht möglich, uneigentliche Integrale zu berechnen, sodaß man sich mit der bloßen Existenz (man sagt auch Konvergenz) der uneigentlichen Integrale bescheiden muß. Hiefür gibt es verschiedene Kriterien, welche wir nur für den Typ $\int_a^\infty f(x)\,dx$ formulieren. Die Modifikation für die anderen Möglichkeiten sind evident. Universell einsetzbar ist das Cauchy-Kriterium:

Satz 7.3 (Cauchy-Kriterium). *Es sei $f\colon [a,\infty) \to \mathbb{C}$ und $f|_{[a,\beta]} \in \mathcal{R}([a,\beta],\mathbb{C})$ für alle $\beta \geq a$. Das uneigentliche Integral $\int_a^\infty f(x)\,dx$ existiert genau dann, wenn gilt:*

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists \xi \geq a\, \forall \alpha, \beta \geq \xi \colon \Big|\int_\alpha^\beta f(x)\,dx\Big| < \varepsilon.$$

Beweis. Man betrachte $\lim_{\beta\to\infty} F(\beta)$ für $F(\beta) = \int_a^\beta f(x)\,dx$, $\beta \geq a$. □

Beispiel 7.4. $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$.
Wir definieren die Funktion $f\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x = 0, \\ \frac{\sin x}{x}, & x > 0, \end{cases}$$

und bemerken, daß f auf $[0,\infty)$ stetig ist. Insbesondere ist f integrierbar auf $[0,a]$ und auf $[a,\beta]$ für beliebige $0<a<\beta<\infty$. Spalten wir daher $\int_0^\beta f(x)\,dx$ auf in

$$\int_0^\beta f(x)\,dx = \int_0^a f(x)\,dx + \int_a^\beta f(x)\,dx,$$

genügt es, die Existenz von $\lim_{\beta\to\infty} \int_a^\beta f(x)\,dx$ nachzuweisen. Dazu formen wir vorerst das Integral mit partieller Integration um:

$$\int_a^\beta \frac{1}{x}\sin x\,dx = -\frac{1}{x}\cos x\Big|_a^\beta - \int_a^\beta \frac{1}{x^2}\cos x\,dx.$$

Der erste Term auf der rechten Seite besitzt einen Grenzwert für $\beta\to\infty$. Auf das Integral wenden wir das Cauchy-Kriterium an und erhalten für $a\le u<v$

$$\Big|\int_u^v \frac{\cos x}{x^2}\,dx\Big| \le \int_u^v \frac{dx}{x^2} = \frac{1}{u}-\frac{1}{v} < \frac{1}{u}.$$

Wählt man $\varepsilon>0$ und setzt $\xi(\varepsilon)=\frac{1}{\varepsilon}$, erhält man für $\xi(\varepsilon)<u<v$

$$\Big|\int_u^v \frac{\cos x}{x^2}\,dx\Big| < \varepsilon,$$

und damit die Konvergenz von $\int_a^\infty \frac{\cos x}{x^2}\,dx$. Somit existiert auch $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$.

Definition 7.5. *Es sei $f\colon [a,\infty)\to\mathbb{C}$ und $f|_{[a,\beta]}\in\mathcal{R}([a,\beta],\mathbb{C})$ für alle $\beta\in[a,\infty)$. Das uneigentliche Integral $\int_a^\infty f(x)\,dx$ heißt* ***absolut konvergent****, wenn $\int_a^\infty |f(x)|\,dx$ existiert.*

Aus der absoluten Konvergenz eines uneigentlichen Integrals folgt dessen Konvergenz (Existenz). Dies ergibt sich mit Hilfe des Cauchy-Kriteriums aus der Ungleichung $(u<v)$

$$\Big|\int_u^v f(x)\,dx\Big| \le \int_u^v |f(x)|\,dx.$$

Die Umkehrung ist – wie bei Reihen – nicht richtig: Aus der bloßen Existenz eines uneigentlichen Integrals folgt nicht dessen absolute Konvergenz. Als Beispiel betrachten wir das konvergente Integral $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$. Die Abbildung $F\colon[0,\infty)\to\mathbb{R}$ sei gegeben durch

$$F(\beta)=\int_0^\beta \Big|\frac{\sin x}{x}\Big|\,dx.$$

Für $\beta = n\pi$ erhalten wir

$$F(n\pi) = \int\limits_0^{n\pi} \Big|\frac{\sin x}{x}\Big|\, dx = \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{(i-1)\pi}^{i\pi} |\sin x| \frac{1}{x}\, dx \geq \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i\pi} \int\limits_{(i-1)\pi}^{i\pi} |\sin x|\, dx = \frac{2}{\pi} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}.$$

Wegen der Divergenz der harmonischen Reihe kann also $\lim_{\beta\to\infty} F(\beta)$ nicht existieren.

Satz 7.6 (Vergleichskriterium). *Es sei $f\colon [a,\infty) \to \mathbb{R}$, $g\colon ([a,\infty) \to \mathbb{R}_+)$ und $f|_{[a,\beta]} \in \mathcal{R}([a,\beta],\mathbb{R})$, $g|_{[a,\beta]} \in \mathcal{R}([a,\beta],\mathbb{R}_+)$ für alle $\beta \geq a$. Gilt $|f(t)| \leq g(t)$ für alle $t \in [a,\infty)$ und existiert $\int_a^\infty g(t)\, dt$, dann ist $\int_a^\infty f(t)\, dt$ absolut konvergent.*
Umgekehrt: Gilt $f(t) \geq g(t) \geq 0$ für alle t (notwendigerweise ist bild $f \subset \mathbb{R}$*) und ist $\int_a^\infty g(t)\, dt$ divergent, dann divergiert auch das uneigentliche Integral $\int_a^\infty f(t)\, dt$.*

Beweis. Die erste Behauptung ergibt sich aus der Abschätzung

$$\Big|\int\limits_u^v f(x)\, dx\Big| \leq \int\limits_u^v |f(x)|\, dx \leq \int\limits_u^v g(x)\, dx$$

für $a \leq u < v$ und dem Cauchy-Kriterium 7.3. Die zweite Behauptung folgt aus

$$\int\limits_a^\beta g(x)\, dx \leq \int\limits_a^\beta f(x)\, dx$$

für $\beta \in [a,\infty)$ und der Unbeschränktheit von $\{\int\limits_a^\beta g(x)\, dx \colon \beta \in [a,\infty)\}$. □

Korollar 7.7. Es sei $f\colon [a,\infty) \to \mathbb{R}$, $a > 0$, und $f|_{[a,\beta]} \in \mathcal{R}([a,\beta],\mathbb{R})$ für alle $\beta \in [a,\infty)$. Gilt

$$|f(x)| \leq \frac{1}{x^s}, \quad \text{für ein } s > 1$$

für alle $x \geq x_0 \geq a$, dann ist $\int_a^\infty f(x)\, dx$ absolut konvergent. Ist bild $f \subset \mathbb{R}$ und gilt

$$0 < \frac{1}{x^s} \leq f(x), \quad \text{für ein } s \leq 1$$

für alle $x \geq x_0 \geq a$, dann ist $\int_a^\infty f(x)\, dx$ divergent.

Die manchmal recht mühsamen Abschätzungen bei der Anwendung des Vergleichskriteriums kann man u.U. auch umgehen:

Satz 7.8 (Grenzwertkriterium). *Es seien $f, g\colon [a,\infty), \mathbb{R}$ und $f|_{[a,\beta]}, g|_{[a,\beta]} \in \mathcal{R}([a,\beta]), \mathbb{R})$ für alle $\beta \geq a$. Darüber hinaus gelte $f(x) \geq 0$ und $g(x) > 0$ für alle $x \in [a,\infty)$. Es existiere*

$$\rho := \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} \in \bar{\mathbb{R}}.$$

i) *Gilt* $\rho \in (0, \infty)$, *dann sind* $\int_a^\infty f(x)\,dx$ *und* $\int_a^\infty g(x)\,dx$ *beide konvergent oder beide divergent.*
ii) *Gilt* $\rho = 0$ *und existiert* $\int_a^\infty g(x)\,dx$, *dann existiert auch* $\int_a^\infty f(x)\,dx$.
ii) *Gilt* $\rho = \infty$ *und divergiert* $\int_a^\infty g(x)\,dx$, *dann divergiert auch* $\int_a^\infty f(x)\,dx$.

Beweis. i) Es gibt ein $\xi \geq a$ so, daß für alle $x \geq \xi$ die Abschätzung

$$\frac{\rho}{2} g(x) \leq f(x) \leq \frac{3\rho}{2} g(x)$$

gilt. Die Behauptung folgt nun aus dem Vergleichskriterium.
ii) Es gibt ein $\xi \geq a$ so, daß für alle $x \geq \xi$ die Abschätzung

$$0 \leq f(x) \leq g(x)$$

zutrifft.
iii) In diesem Falle gilt für alle hinreichend großen x die Abschätzung

$$1 \leq g(x) \leq f(x).$$

□

Ersetzt man im Grenzwertkriterium f durch $|f|$, erhält man natürlich ein Kriterium für die absolute Konvergenz des uneigentlichen Integrals. Wir betonen noch einmal, daß analoge Kriterien auch für die übrigen Typen von uneigentlichen Integralen gelten.

Beispiel 7.9 (Eulersches Γ-Integral).

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty x^{s-1} e^{-x}\,dx, \quad s > 0.$$

Da beide Grenzen kritisch sind, spalten wir das Integral auf in

$$\Gamma(s) = \int_0^1 x^{s-1} e^{-x}\,dx + \int_1^\infty x^{s-1} e^{-x}\,dx.$$

Für das erste Integral verwenden wir die Vergleichsfunktion $g(x) = x^{s-1}$. Nach Beispiel 7.2 existiert $\int_0^1 x^{s-1}\,dx$ genau für $s > 0$. Mit $f(x) = x^{s-1}e^{-x}$ ergibt sich

$$\rho = \lim_{x \downarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \downarrow 0} e^{-x} = 1.$$

Nach dem Grenzwertkriterium existiert $\int_0^1 x^{s-1}e^{-x}\,dx$ genau für $s > 0$. Für das zweite Integral verwenden wir die Vergleichsfunktion $g(x) = e^{-\frac{x}{2}}$ (um das mögliche Anwachsen von $x \mapsto x^{s-1}$ zu kompensieren). Wir erhalten nun

$$\rho = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^{s-1}e^{-x}}{e^{-x/2}} = \lim_{x \to \infty} x^{s-1} e^{-\frac{x}{2}} = 0.$$

Aus der Konvergenz von $\int_1^\infty e^{-\frac{x}{2}}\,dx$ folgt daher mit Satz 7.8 die Existenz von $\int_1^\infty x^{s-1}e^{-x}\,dx$ (sogar für alle $s \in \mathbb{R}$). Somit existiert $\Gamma(s)$ genau für $s > 0$. Als Übung beweise man

$$\forall n \in \mathbb{N}\colon \Gamma(n) = \int\limits_0^\infty x^{n-1}e^{-x}\,dx = (n-1)!.$$

Mit Hilfe uneigentlicher Integrale läßt sich in manchen Fällen bequem die Konvergenz unendlicher Reihen nachweisen:

Satz 7.10 (Integralkriterium). *Es sei $f\colon [1,\infty) \to \mathbb{R}$ monoton fallend und $f(x) \geq 0$ für alle $x \in [1,\infty)$. Die unendliche Reihe*

$$\sum_{n=1}^\infty f(n)$$

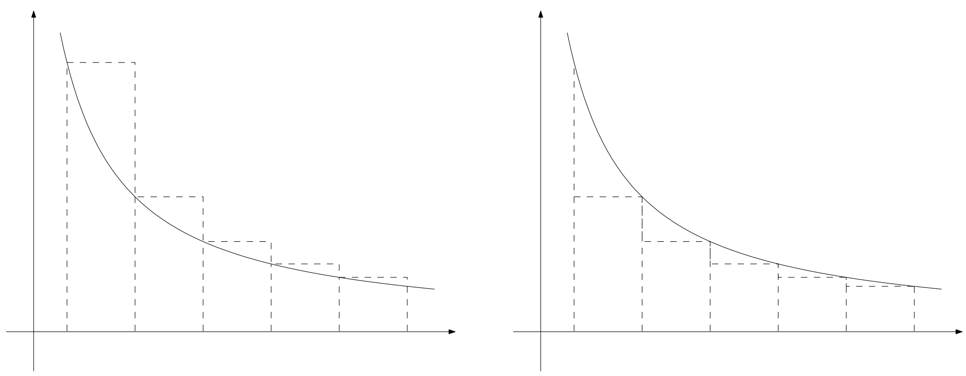
konvergiert genau dann, wenn das uneigentliche Integral

$$\int\limits_1^\infty f(x)\,dx$$

existiert.

Beweis. Da f monoton fällt, ist $f|_{[1,\beta]} \in \mathcal{R}([1,\beta],\mathbb{R})$ für alle $\beta \geq 1$. Ferner gilt für alle $k \in \mathbb{N}$ die Abschätzung

$$f(k+1) \leq \int\limits_k^{k+1} f(x)\,dx \leq f(k).$$



Durch Addition folgt

$$\sum_{k=2}^n f(k) \leq \int\limits_1^n f(x)\,dx \leq \sum_{k=1}^{n-1} f(k), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Bezeichnet S_n die n-te Partialsumme der Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$ erhält man

$$\begin{aligned} S_n - f(1) &\leq \int_1^n f(x)\,dx \leq S_{n-1}, \\ S_n &\leq S_{n+1}, \quad n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Existiert $\int_1^\infty f(x)\,dx$, ergibt sich aus

$$S_n \leq f(1) + \int_1^n f(x)\,dx \leq f(1) + \int_1^\infty f(x)\,dx$$

die Konvergenz der Folge (S_n) aus dem Monotoniekriterium. Divergiert hingegen $\int_1^\infty f(x)\,dx$, ist wegen

$$\int_1^n f(x)\,dx \leq S_{n-1}$$

auch die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$ divergent. □

Beispiel 7.11. $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^s}$ konvergiert für $s > 1$ und divergiert für $s \leq 1$.
Wir betrachten die Abbildung $f(x) = \frac{1}{x}(\ln x)^{-s}$ für $x \geq 3$. Auf $x \geq 3 > e$ ist $\ln x > 0$ und somit $f(x) \geq 0$. Man verifiziere $f'(x) < 0$ für $x \geq 3$. Die Voraussetzungen des Integralkriteriums sind also erfüllt. Substitutiert man $g(x) = \ln x$, erhält man

$$\int_s^n \frac{dx}{x(\ln x)^s} = \int_{\ln 3}^{\ln n} \frac{dt}{t^s} = \frac{1}{1-s}[(\ln n)^{1-s} - (\ln 3)^{1-s}], \quad s \neq 1.$$

Für $s > 1$ folgt die Existenz des uneigentlichen Integrals

$$\int_3^\infty \frac{dx}{x(lnx)^s},$$

für $s < 1$ dessen Divergenz. Für $s = 1$ ergibt sich wegen

$$\int_3^n \frac{dx}{x \ln x} = \int_{\ln 3}^{\ln n} \frac{dt}{t} = \ln(\ln n) - \ln(\ln 3)$$

ebenfalls die Divergenz des uneigentlichen Integrals. Dies zeigt die Behauptung.

Da uneigentliche Integrale durch einen Grenzübergang definiert sind, bleiben Linearität, Positivität und Monotonie erhalten. Der Betrag des Integrals kann aber nicht mehr gegen die Intervallänge und $\|f\|$ abgeschätzt werden. Dies wurde jedoch wesentlich im Beweis des Satzes von Arzela-Osgood verwendet. Wir zeigen nun, daß dieser Satz für uneigentliche Integrale nicht mehr gilt:

Beispiel 7.12. Es sei $(f_n) \subset C(\mathbb{R})$ gegeben durch

$$f_n(x) = \frac{n}{n^2 + x^2}, \quad x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}.$$

Es gilt $\lim_{n\to\infty} f_n = 0$ gleichmäßig auf $\mathbb{R}$. Für jedes f_n existiert das uneigentliche Integral

$$\int_0^\infty \frac{n}{n^2 + x^2}\, dx = \int_0^\infty \frac{dt}{1 + t^2} = \frac{\pi}{2}.$$

Es gilt also *nicht* $\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty f_n(x)\, dx = \int_0^\infty \lim_{n\to\infty} f_n(x)\, dx$.

8. Parameterabhängige uneigentliche Integrale

Wie bei Funktionenreihen spielt bei parameterabhängigen uneigentlichen Integralen die Gleichmäßigkeit der Konvergenz eine wesentliche Rolle:

Definition 8.1. *Es sei $f\colon I \times D \to \mathbb{C}$, $I = [a, \infty)$, $D \subset \mathbb{R}$. Für alle $\beta \in [a, \infty)$ und für alle $t \in D$ sei $f|_{[a,\beta]}(\cdot, t) \in \mathcal{R}([a, \beta], \mathbb{C})$.*

$\int_a^\infty f(x, t)\, dx$ *heißt* ***gleichmäßig konvergent*** *(auf D)* $\underset{Def}{\Leftrightarrow}$

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists \xi \in [a, \infty)\, \forall \alpha, \beta \geq \xi\, \forall t \in D\colon |\int_\alpha^\beta f(x, t)\, dx| < \varepsilon.$$

Eine offensichtlich hinreichende Bedingung für gleichmäßige Konvergenz des uneigentlichen Integrals ist die Existenz einer bezüglich t gleichmäßigen Majorante $g\colon [a, \infty) \to \mathbb{R}$. Gilt also für alle $x \in [a, \infty)$ und für alle $t \in D$

$$|f(x, t)| \leq g(x),$$

und existiert $\int_a^\infty g(x)\, dx$, dann ist $\int_a^\infty f(x, t)\, dx$ gleichmäßig konvergent. Dies folgt unmittelbar aus der Abschätzung ($\alpha \leq \beta$)

$$|\int_\alpha^\beta f(x, t)\, dx| \leq \int_\alpha^\beta g(x)\, dx.$$

Beispiel 8.2. $\int_a^\infty \frac{1}{x} \exp((-t + i)x)\, dx$, $a > 0$, $t \geq 0$. Für $t \geq c > 0$ ergibt sich aus $|\frac{1}{x} \exp((-t + i)x)| \leq \frac{1}{c}\frac{1}{x^2}$ die gleichmäßige Konvergenz auf $[c, \infty)$. Wir dehnen nun die Gleichmäßigkeit der Konvergenz auf $t \geq 0$ aus. Durch partielle Integration erhält man für $a \leq u \leq v$

$$\int_u^v \frac{1}{x} e^{(-t+i)x}\, dx = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{-t + i} e^{(-t+i)x}\Big|_u^v + \int_u^v \frac{1}{x^2} \frac{1}{-t + i} e^{(-t+i)x}\, dx.$$

Wegen $|\frac{1}{-t+i}| \leq 1$ und $|e^{(-t+i)x}| = e^{-tx} \leq 1$ für $t \geq 0$, ergibt sich die Abschätzung

$$|\int_u^v \frac{1}{x} e^{(-t+i)x}\, dx| \leq \frac{1}{u} + \frac{1}{v} + \int_u^v \frac{1}{x^2}\, dx = \frac{2}{u}$$

und damit die gleichmäßige Konvergenz für $t \geq 0$. Durch Zerlegung in Real- und Imaginärteil folgt dann die gleichmäßige Konvergenz der reellen Integrale

$$\int_a^\infty \frac{\cos x}{x} e^{-tx}\, dx \quad \text{und} \quad \int_a^\infty \frac{\sin x}{x} e^{-tx}\, dx, \quad a > 0,$$

auf $t \geq 0$. Da $x \mapsto \frac{\sin x}{x}$ stetig nach 0 fortgesetzt werden kann, ist sogar

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} e^{-tx}\, dx$$

gleichmäßig konvergent auf $[0, \infty)$.

Satz 8.3. *Für $f \in \mathcal{B}(I \times D, \mathbb{C})$, $I = [a, \infty)$, $D = [c, d] \subset \mathbb{R}$, gelte*

i) *$\int_a^\infty f(x,t)\, dx$ sei gleichmäßig konvergent auf D,*
ii) *$\forall x \in I\colon f(x, \cdot) \in C(D, \mathbb{C})$.*

Dann ist die Abbildung $F\colon D \to \mathbb{C}$, definiert durch

$$F(t) = \int_a^\infty f(x,t)\, dx,$$

stetig auf D.

Beweis. Es sei $t_0 \in D$. Für $\alpha \in [a, \infty)$ betrachten wir

$$\begin{aligned} |F(t) - F(t_0)| &= |\int_a^\infty f(x,t)\, dx - \int_a^\infty f(x,t_0)\, dx| \\ &\leq |\int_a^\alpha f(x,t)\, dx - \int_a^\alpha f(x,t_0)\, dx| + |\int_\alpha^\infty f(x,t)\, dx| + |\int_\alpha^\infty f(x,t_0)\, dx|. \end{aligned}$$

Wegen der gleichmäßigen Konvergenz von $\int_a^\infty f(x,t)\, dx$ für $t \in D$ gibt es zu $\varepsilon > 0$ ein $\xi \geq a$ derart, daß für alle $\xi \leq \alpha < \infty$ und für alle $t \in D$

$$|\int_\alpha^\infty f(x,t)\, dx| < \varepsilon.$$

Wir fixieren nun ein derartiges α. Auf $[a, \alpha]$ erfüllt f die Voraussetzungen von Satz 6.1. Also gibt es ein $\delta > 0$ so, daß $|t - t_0| < \delta$ und $t \in D$

$$|\int_a^\alpha f(x,t)\,dx - \int_a^\alpha f(x,t_0)\,dx| < \varepsilon$$

nach sich zieht. Insgesamt erhält man daher für $|t - t_0| < \delta$ und $t \in D$

$$|F(t) - F(t_0)| < 3\varepsilon.$$

$\square$

Satz 8.4. *Für $f \in \mathcal{B}(I \times D, \mathbb{C})$, $I = [a, \infty)$, $D = [\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}$, gelte*

i) $\int_a^\infty f(x,t)\,dx$ *sei gleichmäßig konvergent auf D,*
ii) $\forall t \in D\colon f(\cdot, t) \in C(I, \mathbb{C})$,
iii) $\forall x \in I\colon f(x, \cdot) \in C(D, \mathbb{C})$.

Dann konvergiert das uneigentliche Integral $\int_a^\infty [\int_\alpha^\beta f(x,t)\,dt]\,dx$ *und es gilt*

$$\int_\alpha^\beta [\int_a^\infty f(x,t)\,dx]\,dt = \int_a^\infty [\int_\alpha^\beta f(x,t)\,dt]\,dx.$$

Beweis. Nach Satz 8.3 ist $t \mapsto \int_a^\infty f(x,t)\,dx$ stetig auf D. Somit existiert das iterierte Integral $\int_\alpha^\beta [\int_a^\infty f(x,t)\,dx]\,dt$. Es sei $\varepsilon > 0$ beliebig gewählt. Wegen der gleichmäßigen Konvergenz von $\int_a^\infty f(x,t)\,dx$ gibt es ein $\xi \geq a$, so daß für alle $u \geq \xi$ und $t \in D$ die Abschätzung

$$\Big|\int_a^\infty f(x,t)\,dx - \int_a^u f(x,t)\,dx\Big| < \varepsilon$$

zutrifft. Damit ergibt sich die Ungleichung

$$\begin{aligned}
&\Big|\int_\alpha^\beta [\int_a^\infty f(x,t)\,dx]\,dt - \int_\alpha^\beta [\int_a^u f(x,t)\,dx]\,dt\Big| \\
&\leq \int_\alpha^\beta \Big|\int_a^\infty f(x,t)\,dx - \int_a^u f(x,t)\,dx\Big|\,dt \leq \varepsilon(\beta - \alpha).
\end{aligned}$$

Auf Grund der Voraussetzungen an f kann man in $\int_\alpha^\beta [\int_a^u f(x,t)\,dx]\,dt$ nach Satz 6.5 die Integrationsreihenfolge vertauschen und erhält für alle $u \geq \xi$

$$\Big|\int_\alpha^\beta [\int_a^\infty f(x,t)\,dx]\,dt - \int_a^u [\int_\alpha^\beta f(x,t)\,dt]\,dx\Big| \leq \varepsilon(\beta-\alpha).$$

Daraus folgt die Behauptung. ☐

Satz 8.5. *Für $f\colon I \times D \to \mathbb{C}$, $I = [a,\infty)$, $D = [\alpha,\beta] \subset \mathbb{R}$, gelte:*

i) *Es existiere $\int_a^\infty f(x,\alpha)\,dx$,*
ii) *Es existiere $\frac{\partial f}{\partial t}\colon I \times D \to \mathbb{C}$,*
iii) $\frac{\partial f}{\partial t} \in \mathcal{B}(I \times D, \mathbb{C})$,
iv) $\forall t \in D\colon \frac{\partial f}{\partial t}(\cdot,t) \in C(I,\mathbb{C})$,
v) $\forall x \in I\colon \frac{\partial f}{\partial t}(x,\cdot) \in C(D,\mathbb{C})$,
vi) $\int_a^\infty \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\,dx$ *sei gleichmäßig konvergent auf D.*

Dann konvergiert

$$F(t) := \int_a^\infty f(x,t)\,dx$$

für alle $t \in D$, F ist differenzierbar auf D und es gilt

$$F'(t) = \int_a^\infty \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\,dx.$$

Beweis. $\frac{\partial f}{\partial t}$ erfüllt die Voraussetzungen von Satz 8.4 auf $I \times [\alpha, y]$ für alle $y \in D$. Somit konvergiert für alle $y \in D$ das uneigentliche Integral $\int_a^\infty [\int_\alpha^y \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\,dt]\,dx$ und es gilt

$$(*) \qquad \int_\alpha^y \Big[\int_a^\infty \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\,dx\Big]\,dt = \int_a^\infty \Big[\int_\alpha^y \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\,dt\Big]\,dx.$$

Für festes $x \in I$ ist $\frac{\partial f}{\partial t}(x,\cdot) \in C(D,\mathbb{C})$. Nach dem Hauptsatz 4.3 folgt daher für alle $y \in D$

$$\int_\alpha^y \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\,dt = f(x,y) - f(x,\alpha).$$

Wegen der Konvergenz von $\int_a^\infty f(x,\alpha)\,dx$ ergibt sich damit aus $(*)$ die Konvergenz von $\int_a^\infty f(x,y)\,dx$ und

$$F(y) := \int_a^\infty f(x,y)\,dx = \int_a^\infty f(x,\alpha)\,dx + \int_\alpha^y \Big[\int_a^\infty \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\,dx\Big]\,dt, \quad y \in D.$$

$\frac{\partial f}{\partial t}$ erfüllt auch die Voraussetzungen von Satz 8.3. Also ist $t \mapsto \int\limits_a^\infty \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\,dx$ stetig auf D. Der Hauptsatz 4.3 sichert daher die Differenzierbarkeit von F auf D und

$$F'(t) = \int\limits_a^\infty \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\,dx.$$

□

Beispiel 8.6. 1) Wir betrachten das komplexe uneigentliche Integral

$$\int\limits_0^\infty e^{(-1+it)x}\,dx = -\frac{1}{-1+it}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Dies folgt aus

$$\int\limits_0^\beta e^{(-1+it)x}\,dx = \frac{e^{-\beta}e^{it\beta}}{-1+it} - \frac{1}{-1+it}.$$

Durch Aufspalten in Real- und Imaginärteil ergibt sich

$$\int\limits_0^\infty e^{(-1+it)x}\,dx = \int\limits_0^\infty e^{-x}\cos tx\;dx + i\int\limits_0^\infty e^{-x}\sin tx\;dx = \frac{1+it}{1+t^2},$$

und damit die reellen uneigentlichen Integrale

$$(*) \qquad \left.\begin{aligned} \int\limits_0^\infty e^{-x}\cos tx\;dx &= \frac{1}{1+t^2} \\ \int\limits_0^\infty e^{-x}\sin tx\;dx &= \frac{t}{1+t^2} \end{aligned}\right., \quad t \in \mathbb{R}.$$

Aus $|e^{(-1+it)x}| \le e^{-x}$, $(t,x) \in [0,\infty) \times \mathbb{R}$, folgt die gleichmäßige Konvergenz der uneigentlichen Integrale. Wir schränken nun t auf $D = [0,1]$ ein. Die Abbildung $f\colon [0,\infty) \times D \to \mathbb{R}$, $f(x,t) = e^{-x}\cos tx$, erfüllt die Voraussetzungen von Satz 8.4. Somit existiert $\int_0^\infty [\int_0^1 e^{-x}\cos tx\,dt]\,dx$ und es gilt

$$\int\limits_0^1 \Big[\int\limits_0^\infty e^{-x}\cos tx\;dx\Big]\,dt = \int\limits_0^\infty \Big[\int\limits_0^1 e^{-x}\cos tx\;dt\Big]\,dx.$$

Auf der linken Seite erhält man mit $(*)$

$$\int\limits_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = \arctan 1 - \arctan 0 = \frac{\pi}{4},$$

auf der rechten Seite kann man das innere Integral ausführen:

$$\int_0^\infty \Big[\int_0^1 e^{-x} \cos tx \, dt\Big] \, dx = \int_0^\infty e^{-x} \frac{\sin x}{x} \, dx.$$

(Man beachte, daß der Integrand stetig nach $x = 0$ fortgesetzt werden kann). Insgesamt wurde also gezeigt

$$\int_0^\infty e^{-x} \frac{\sin x}{x} \, dx = \frac{\pi}{4}.$$

2) Für $t \geq 0$ definieren wir die Abbildung F durch

$$F(t) = \int_0^\infty e^{-tx} \frac{\sin x}{x} \, dx.$$

Die Existenz von $F(0)$ wurde in Beispiel 7.4 nachgewiesen, für $t > 0$ kann man wie in Beispiel 1) argumentieren. Dort wurde auch

$$F(1) = \frac{\pi}{4}$$

gezeigt. Wir setzen $f\colon [0, \infty) \times [0, 1] \to \mathbb{R}$ fest durch

$$f(x, t) = e^{-tx} \frac{\sin x}{x},$$

und erhalten

$$\frac{\partial f}{\partial t}(x, t) = -e^{-tx} \sin x.$$

Für jedes $t > 0$ ergibt eine einfache Rechnung wie in 1)(∗) das uneigentliche Integral

$$\int_0^\infty \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) \, dx = -\int_0^\infty e^{-tx} \sin x \, dx = \frac{-1}{1 + t^2},$$

welches gleichmäßig für $t \in [\alpha, 1]$, $\alpha \in (0, 1]$ konvergiert. Somit erfüllt f sämtliche Voraussetzungen von Satz 8.5 auf $[0, \infty) \times [\alpha, \beta]$ für alle $\alpha \in (0, 1]$. Daher ist F auf $(0, 1]$ differenzierbar und es gilt

$$F'(t) = -\int_0^\infty e^{-tx} \sin x \, dx = -\frac{1}{1 + t^2}.$$

Folglich ist mit einer Konstanten $c \in \mathbb{R}$

$$F(t) = -\arctan t + c.$$

Der Wert von c ergibt sich aus

$$F(1) = \frac{\pi}{4} = -\arctan 1 + c$$

zu

$$c = \frac{\pi}{2}.$$

Für alle $t \in (0,1]$ gilt daher

$$F(t) = \frac{\pi}{2} - \arctan t.$$

Nach Satz 8.3 ist F stetig auf $[0,1]$, soferne $\int_0^\infty f(x,t)\,dx$ gleichmäßig auf $[0,1]$ konvergiert. Nehmen wir dies vorerst an, kann man auf $F(0) = \frac{\pi}{2}$ schließen. Also gilt

$$\int\limits_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}.$$

Für den Nachweis der gleichmäßigen Konvergenz von $\int_0^\infty f(x,t)\,dx$ für $t \in [0,1]$ bemerken wir, daß es genügt, die uneigentlichen Integrale $\int_1^\infty f(x,t)\,dx$ zu betrachten. Integrieren wir partiell und beachten

$$\int e^{-tx}\sin x\,dx = -\frac{1}{1+t^2}[t\sin x + \cos x]e^{-tx},$$

erhalten wir

$$\begin{aligned}
\int\limits_1^\beta e^{-tx}\frac{\sin x}{x}\,dx &= -\frac{1}{x}\frac{e^{-tx}}{1+t^2}[t\sin x + \cos x]\Big|_1^\beta - \frac{1}{1+t^2}\int\limits_1^\beta \frac{1}{x^2}e^{-tx}[t\sin x + \cos x]\,dx \\
&= -\frac{1}{\beta}\frac{e^{-t\beta}}{1+t^2}[t\sin\beta + \cos\beta] + \frac{e^{-t}}{1+t^2}[t\sin 1 + \cos 1] \\
&\quad - \frac{1}{1+t^2}\int\limits_1^\beta \frac{1}{x^2}e^{-tx}[t\sin x + \cos x]\,dx.
\end{aligned}$$

Der erste Term auf der rechten Seite kann gleichmäßig in $t \in [0,1]$ durch $\frac{2}{\beta}$ abgeschätzt werden. Ebenso kann das Integral durch $2\int\limits_1^\beta \frac{1}{x^2}\,dx$ beschränkt werden. Daraus folgt die gleichmäßige Konvergenz von $\int_1^\infty e^{-tx}\frac{\sin x}{x}\,dx$ für $t \in [0,1]$.

KAPITEL ix

Integralrechnung im $\mathbb{R}^n$

Notation: Im Folgenden bezeichnen wir mit $f_n \rightrightarrows f$ die gleichmäßige Konvergenz der Funktionen f_n gegen die Grenzfunktion f.

1. Halbstetige Funktionen

DEFINITION 1.1. (1) *Eine Abbildung* $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}\cup\{\infty\}$ *heißt im Punkt* $x_0 \in \mathbb{R}^n$ ***von unten halbstetig**, wenn zu jedem* $c \in \mathbb{R}$ *mit* $c < f(x_0)$ *eine Umgebung* $U \in \mathcal{U}(x_0)$ *mit* $f(U) \subset (c, \infty]$ *existiert.*

(2) *Eine Abbildung* $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}\cup\{-\infty\}$ *heißt im Punkt* $x_0 \in \mathbb{R}^n$ ***von oben halbstetig**, wenn zu jedem* $c \in \mathbb{R}$ *mit* $c > f(x_0)$ *eine Umgebung* $U \in \mathcal{U}(x_0)$ *mit* $f(U) \subset [-\infty, c)$ *existiert.*

Die Abbildung f *heißt* ***von unten (oben) halbstetig**, wenn sie an jeder Stelle* $x_0 \in \mathbb{R}^n$ *von unten (oben) halbstetig ist.*

Der Einfachheit halber betrachten wir nur Funktionen, welche auf $\mathbb{R}^n$ definiert sind. Die Erweiterung dieses Konzeptes auf Funktionen $f\colon D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$, sei dem Leser überlassen. Offenbar ist eine Abbildung f in x_0 von oben halbstetig genau dann, wenn $-f$ in x_0 von unten halbstetig ist.
Schreibt man c in der Form $f(x_0) - \varepsilon$, dann ist die Halbstetigkeit von unten von f in x_0 gleichwertig mit

$$(*) \qquad \forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0\, \forall x \in \mathbb{R}^n\colon \|x - x_0\| < \delta \Rightarrow f(x_0) - f(x) < \varepsilon.$$

Wäre f stetig in x_0, dann wäre in $(*)$ die Folgerung $f(x_0) - \varepsilon < f(x) < f(x_0) + \varepsilon$. Halbstetige Funktionen nützen also nur eine der beiden Ungleichungen. Somit ist eine Funktion in x_0 genau dann stetig, wenn sie in x_0 von unten und von oben halbstetig ist.

LEMMA 1.2. *1.) Eine Abbildung* $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}\cup\{\infty\}$ *ist von unten halbstetig genau dann, wenn* $f^{-1}((c,\infty])$ *für alle* $c \in \mathbb{R}$ *offen ist.*
2.)Eine Abbildung $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}\cup\{-\infty\}$ *ist von oben halbstetig genau dann, wenn* $f^{-1}([-\infty, c))$ *für alle* $c \in \mathbb{R}$ *offen ist.*

BEWEIS. Es genügt die erste Behauptung zu zeigen: “$\Rightarrow$” Es sei $c \in \mathbb{R}$ und $x \in f^{-1}((c,\infty])$, also $c < f(x)$. Da f in x von unten halbstetig ist, gibt es eine Umgebung $U \in \mathcal{U}(x)$ mit $f(U) \subset (c,\infty]$, also $U \subset f^{-1}((c,\infty])$. Somit ist x ein innerer Punkt von $f^{-1}((c,\infty])$.

"$\Leftarrow$"Es sei $x \in \mathbb{R}^n$ und $c < f(x)$, also $x \in f^{-1}((c,\infty])$. Da $f^{-1}((c,\infty])$ offen ist, existiert eine Umgebung $U \in \mathcal{U}(x)$ mit $U \subset f^{-1}((c,\infty])$, also $f(U) \subset (c,\infty]$. $\square$

Beispiel 1.3. 1) Die **charakteristische Funktion** χ_A einer Teilmenge $A \subset \mathbb{R}^n$ ist gegeben durch

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A, \\ 0, & x \in \mathbb{R}^n \setminus A. \end{cases}$$

Es gilt: A ist offen genau dann, wenn χ_A von unten halbstetig ist. Dies folgt aus

$$\chi_A^{-1}((c,\infty]) = \begin{cases} \mathbb{R}^n, & c < 0, \\ A, & 0 \le c < 1, \\ \emptyset, & c \ge 1. \end{cases}$$

2) Ersetzt man A durch $\complement A$ und berücksichtigt $\chi_{\complement A} = 1 - \chi_A$ findet man: A ist abgeschlossen genau dann, wenn χ_A von oben halbstetig ist.
3) Die Abbildung $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = 0$ für $x \le 0$ und $f(x) = 1$ für $x > 0$ ist in $x = 0$ von unten halbstetig. Für $c < 0 = f(0)$ erfüllt nämlich sogar jede Umgebung U von $x = 0$ die Bedingung $f(U) \subset (c,\infty]$. Ein anderer Beweis ergibt sich aus der Beobachtung $f = \chi_{(0,\infty)}$.

Auch die Halbstetigkeit einer Funktion kann man mittels Folgen charakterisieren:

Lemma 1.4. *Eine Funktion $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ ist in $x_0 \in \mathbb{R}^n$ von unten halbstetig genau dann, wenn*

$$\liminf_{k\to\infty} f(x_k) \ge f(x_0)$$

für jede nach x_0 konvergierende Folge (x_k) gilt.

Beweis. "$\Rightarrow$" Es sei f in x_0 halbstetig von unten, also $f^{-1}((c,\infty])$ offen in $\mathbb{R}^n$ für alle $c \in \mathbb{R}$ mit $c < f(x_0)$, und (x_k) eine Folge mit Grenzwert x_0. Wählt man $c = f(x_0) - \varepsilon$, $\varepsilon > 0$ beliebig, gibt es somit eine Kugel $K(x_0, \delta(\epsilon))$, welche in $f^{-1}((c,\infty])$ enthalten ist. Wegen der Konvergenz der Folge (x_k) gilt ferner $x_k \in K(x_0, \delta(\epsilon))$ für $k \ge N(\delta(\epsilon))$ mit einem geeigneten $N(\delta(\epsilon))$. Somit folgt $f(x_k) > c = f(x_0) - \varepsilon$, $k \ge N(\delta(\epsilon))$, d.h.

$$\liminf_{k\to\infty} f(x_k) \ge f(x_0) - \varepsilon.$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig gewählt war, ergibt sich die Behauptung.
"$\Leftarrow$" Umgekehrt sei f in $x_0 \in \mathbb{R}^n$ nicht von unten halbstetig. Dann gibt es ein $c < f(x_0)$ derart, daß jede Umgebung $U \in \mathcal{U}(x_0)$ einen Punkt x_U enthält mit $f(x_U) \le c$. Also existiert eine Folge (x_k) so, daß $\lim_{k\to\infty} = x_0$ und $f(x_k) \le c$, $k \in \mathbb{N}$. Dies hat $\liminf_{k\to\infty} f(x_k) \le c < f(x_0)$ zur Folge. $\square$

Lemma 1.5. *Eine von unten halbstetige Funktion nimmt auf einer kompakten Menge das Minimum an.*

Beweis. Es sei f von unten halbstetig, $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt und $(x_k) \subset K$ eine Folge mit $\lim_{k\to\infty} f(x_k) = \inf_{x\in K} f \in \bar{\mathbb{R}}$. Wegen der Kompaktheit von K gibt es $x_0 \in K$ und eine Teilfolge $(x_{\varphi_k}) \subset (x_k)$ mit $\lim_{k\to\infty} x_{\varphi_k} = x_0$. Mit Lemma 1.4 folgt $\inf_{x\in K} f(x) = \lim_{k\to\infty} f(x_{\varphi_k}) \geq f(x_0) > -\infty$. Dies zeigt $f(x_0) = \min_{x\in K} f(x)$ und $\min_{x\in K} f(x) > -\infty$. $\square$

Definition 1.6. *Es sei $f_\alpha\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, $\alpha \in I$, I eine nichtleere Indexmenge, eine Familie von Funktionen. Man nennt*

$$f = \sup_{\alpha\in I} f_\alpha\colon \begin{cases} \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{\infty\} \\ x \mapsto \sup_{\alpha\in I} f_\alpha(x) \end{cases}$$

*die **obere Einhüllende (Enveloppe)** der Familie $(f_\alpha)_{\alpha\in I}$. .*

Analog definiert man für $f_\alpha\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ die untere Einhüllende durch $f = \inf_{\alpha\in I}$.

Lemma 1.7. *Es sei $f_\alpha\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, $\alpha \in I$, eine Familie von in x_0 von unten halbstetigen Funktionen. Dann ist auch die obere Einhüllende von unten halbstetig in x_0.*

Beweis. Es sei $f = \sup_{\alpha\in I} f_\alpha$ und $c < f(x_0)$. Dann gibt es einen Index $\alpha \in I$ mit $c < f_\alpha(x_0) \leq f(x_0)$. Da f_α in x_0 halbstetig von unten ist, existiert eine Umgebung $U \in \mathcal{U}(x_0)$ mit $f_\alpha(x) > c$, somit auch $f(x) > c$, für alle $x \in U$. $\square$

Beispiel 1.8. Es sei $f_n\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, definiert durch

$$f_n(x) = \begin{cases} nx, & x \in [0, \frac{1}{n}], \\ 1, & x \in (\frac{1}{n}, 1]. \end{cases}$$

Die obere Einhüllende f ist gegeben durch

$$f_n(x) = \begin{cases} 0, & x = 0, \\ 1, & x \in (0, 1]. \end{cases}$$

Sie ist nicht stetig, nach Lemma 1.7 aber zumindest halbstetig von unten. Außerdem gilt $f_n \leq f_{n+1}$ und $f = \lim_{n\to\infty} f_n$.

Definition 1.9. *Es sei $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Man nennt*

$$\operatorname{supp} f = \overline{\{x \in \mathbb{R}^n\colon f(x) \neq 0\}}$$

*den **Träger (Support)** von f. Weiters definieren wir*

$$C_c(\mathbb{R}^n) := \{f \in C(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})\colon \operatorname{supp} f \text{ ist kompakt }\}.$$

Man nimmt den Abschluß in der Definition des Trägers einer Funktion f, um sicherzustellen, daß es zu jedem $x \notin \operatorname{supp} f$ eine Kugel $K(x,\varepsilon)$ mit $K(x,\varepsilon) \subset \complement \operatorname{supp} f$ gibt. Somit gilt dann $f \equiv 0$ auf $K(x,\varepsilon)$. Isolierte Nullstellen und Häufungspunkte von

Nullstellen einer Funktion liegen in ihrem Träger. Bei der Analyse der qualitativen Eigenschaften einer Funktion kann man sich also ohne Beschränkung der Allgemeinheit auf deren Träger beschränken.

Einen wesentlichen Baustein bei der Entwicklung eines mehrdimensionalen Integrals bilden jene Funktionen, welche durch monotone Grenzwerte stetiger Funktionen mit kompaktem Träger darstellbar sind:

Definition 1.10. *Für eine Folge $(f_k) \subset C_c(\mathbb{R}^n)$ vereinbaren wir die Schreibweise*

$$f_k \uparrow f \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}^n \,\forall k \in \mathbb{N} f_k(x) \leq f_{k+1}(x) \wedge \lim_{k\to\infty} f_k(x) = f(x),$$
$$f_k \downarrow f \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}^n \,\forall k \in \mathbb{N} f_{k+1}(x) \leq f_k(x) \wedge \lim_{k\to\infty} f_k(x) = f(x).$$

Wir definieren ferner

$$\mathcal{H}_U(\mathbb{R}^n) = \{f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{\infty\} | \exists (f_k) \subset C_c(\mathbb{R}^n), f_k \uparrow f\},$$
$$\mathcal{H}_O(\mathbb{R}^n) = \{f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\} | \exists (f_k) \subset C_c(\mathbb{R}^n), f_k \downarrow f\}.$$

Wenn keine Verwechslung möglich ist, verwenden wir die einfachere Schreibweise $\mathcal{H}_U$, bzw. $\mathcal{H}_O$. Die Funktionen in $\mathcal{H}_U$ sind die obere Einhüllende einer Folge stetiger Funktionen und daher von unten halbstetig, jene in $\mathcal{H}_O$ von oben halbstetig. Die Mengen $\mathcal{H}_U$ und $\mathcal{H}_O$ sind jedoch keine Teilräume. Eine alternative Charakterisierung ist folgende.

Satz 1.11. *Eine Funktion $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ gehört genau dann zu $\mathcal{H}_U$, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:*

(1) *f ist halbstetig von unten.*
(2) *Es gibt eine kompakte Teilmenge $K \subset \mathbb{R}^n$ mit*

$$f(x) \geq 0, \quad x \in \mathbb{R}^n \setminus K.$$

Beweis. "⇒" Es sei $f \in \mathcal{H}_U$ und $(f_k) \subset C_c(\mathbb{R}^n)$, $f_k \uparrow f$. Wähle $K = \operatorname{supp} f_1$.
"⇐" Die Abbildung f besitze die Eigenschaften (1) und (2). Nach Lemma 1.5 nimmt f auf K das Minimum an. Somit existiert $M \in \mathbb{Q}$, $M \geq 0$, mit

$$\forall x \in \mathbb{R}^n\colon f(x) \geq -M.$$

Wir betrachten nun die Menge

$$\mathcal{J} = \{(a, \varepsilon, c) \in \mathbb{Q}^n \times \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}\colon \varepsilon > 0, c \geq -M, \forall x \in K(a,\varepsilon)\colon f(x) > c\}.$$

Offensichtlich ist $\mathcal{J}$ abzählbar. Für $j \in \mathcal{J}$ sei $g_j \in C_c(\mathbb{R}^n)$ eine Funktion mit folgenden Eigenschaften:

(1) $g_j(x) = c, \qquad x \in K(a, \varepsilon/2)$,
(2) $g_j(x) \leq c, \qquad x \in K(a, \varepsilon)$,
(3) $g_j(x) = -M, \qquad x \in K \setminus K(a, \varepsilon)$,
(4) $g_j(x) \leq 0, \qquad x \in \mathbb{R}^n \setminus (K \cup K(a, \varepsilon))$.

Es folgt $g_j \leq f$, $j \in \mathcal{J}$ und somit $\sup_{j\in\mathcal{J}} g_j \leq f$. Wir zeigen $\sup_{j\in\mathcal{J}} g_j = f$: Angenommen es gäbe $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $c_0 \in \mathbb{Q}$, $c_0 \geq -M$ mit $\sup_{j\in\mathcal{J}} g_j(x_0) < c_0 < f(x_0)$. Da f in x_0 von unten halbstetig ist, gibt es eine Umgebung $K(x_0, r_0)$ derart, daß

$$(*) \qquad f(y) > c_0, \qquad y \in K(x_0, r_0).$$

Da $\mathbb{Q}^n$ in $\mathbb{R}^n$ dicht liegt (Beweis: übung), existiert eine Kugel $K(a_0, \varepsilon_0) \subset K(x_0, r_0)$ und $x_0 \in K(a_0, \varepsilon_0/2)$. Natürlich gilt $(*)$ auch auf $K(a_0, \varepsilon_0)$. Zu $j_0 = (a_0, \varepsilon_0, c_0)$ kann man eine Funktion g_{j_0} mit den Eigenschaften (1) - (4) konstruieren. Daraus ergibt sich der Widerspruch $g_{j_0}(x_0) = c_0 > \sup_{j\in\mathcal{J}} g_j(x_0)$.
Es sei nun $j_1, j_2, \ldots$ eine Aufzählung von $\mathcal{J}$. Setzt man $f_k = \max\{g_{j_1}, \ldots, g_{j_k}\} \in C_c(\mathbb{R}^n)$, gilt $f_k \leq f_{k+1}$ und $\lim_{k\to\infty} f_k = f$, d.h. $f \in \mathcal{H}_U$. $\square$

Als Konsequenz dieses Satzes halten wir fest

$$\mathcal{H}_U \cap \mathcal{H}_O = C_c(\mathbb{R}^n).$$

Bemerkung 1.12. Es sei $f \in \mathcal{H}_U$ und $f \geq 0$. Dann gibt es eine Folge $(f_k) \subset C_c(\mathbb{R}^n)$ mit $f_k \uparrow f$ und $f_k \geq 0$, $k \in \mathbb{N}$ (man ersetze nötigenfalls f_k durch $\max(0, f_k)$). Setzt man $\varphi_k = f_k - f_{k-1}$, $k \geq 2$, $\varphi_1 = f_1$, dann ist $\varphi_k \geq 0$ und $\varphi_k \in C_c(\mathbb{R}^n)$, $k \in \mathbb{N}$ und es gilt $f = \sum_{k=1}^\infty \varphi_k$.

2. Das Integral für halbstetige Funktionen

Unter einem achsenparallelen Quader versteht man die Menge $Q = X_{i=1}^n [a_i, b_i]$, $-\infty < a_i \leq b_i < \infty$, $i = 1, \ldots, n$. Gilt $a_i = a$ und $b_i = b$, $i = 1, \ldots, n$ spricht man von einem Würfel. Durch Translation und Rotation eines achsenparallelen Quaders erhält man einen Quader in allgemeiner Lage. Setzt man $V(Q) = \prod_{i=1}^n (b_i - a_i)$, stimmt $V(Q)$ für $n = 2$ und $n = 3$ mit der Fläche eines Rechtecks bzw. mit dem üblichen Volumen eines Quaders im $\mathbb{R}^3$ überein. Es ist daher sinnvoll, die Größe $V(Q)$ als Volumen des Quaders Q zu bezeichnen. Wir werden später sehen, daß sich diese Vereinbarung aus der allgemeinen Definition des Volumens kompakter Körper zwanglos ergibt.

Definition 2.1. *Es sei $Q \subset \mathbb{R}^n$ ein Quader.*

(1) *Eine Menge von Quadern $\{Q_1, \ldots, Q_k\}$ heißt **Zerlegung (Partition)** von Q genau dann, wenn*
   (a) $Q_i \subset Q$, $\quad i = 1, \ldots, k$.
   (b) $\bigcup_{i=1}^k Q_i = Q$, $\quad Q_i^\circ \cap Q_j^\circ = \emptyset$, $\quad i \neq j$
(2) *Eine Abbildung $t\colon Q \to \mathbb{R}$ heißt **Treppenfunktion** wenn es eine Zerlegung $\{Q_1, \ldots, Q_k\}$ von Q gibt, so daß $f|_{Q_i^\circ}$ jeweils konstant ist, $i = 1, \ldots, k$.*
(3) $\mathcal{T}(Q, \mathbb{R}) := \{t\colon Q \to \mathbb{R}, t$ *ist eine Treppenfunktion*$\}$.

Eine Zerlegung in Teilwürfel entspricht einer äquidistanten Partition in Definition VII-1.1. Die Verfeinerung einer Zerlegung kann wie im Fall $n = 1$ erklärt werden. Der Leser überzeuge sich davon, daß $\mathcal{T}(Q, \mathbb{R})$ versehen mit den natürlichen algebraischen Operationen ein Vektorraum ist.

Definition 2.2. *Es sei $t \in \mathcal{T}(Q,\mathbb{R})$ und $\{Q_1,\dots,Q_k\}$ eine passende Zerlegung des (nicht notwendig achsenparallelen) Quaders Q in Teilquader Q_i mit Volumen $V(Q_i)$ und $f|_{Q_i^\circ} = c_i$, $i = 1,\dots,k$. Das Integral von t ist definiert durch*

$$\int_Q t(x)\,dx = \sum_{i=1}^k c_i V(Q_i).$$

Wie im 1-dimensionalen Fall kann man sich davon überzeugen, daß das Integral einer Treppenfunktion unabhängig ist von der Zerlegung, welche für die Darstellung der Treppenfunktion verwendet wird.
Folgende Eigenschaften des Integrals ergeben sich unmittelbar aus der Definition.

Lemma 2.3. *Es seien f, $g \in \mathcal{T}(Q,\mathbb{R})$ und α, $\beta \in \mathbb{R}$ und $V(Q)$ das Volumen des Quaders Q. Ferner sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine orthogonale Matrix, $b \in \mathbb{R}^n$ und $\varphi\colon \tilde{Q} \to Q$ die lineare Abbildung $\varphi(x) = Ax + b$, $x \in \mathbb{R}^n$ des Quaders $\tilde{Q} = \varphi^{-1}(Q)$ auf Q. Dann gilt:*

1) $\alpha \int_Q f(x)\,dx + \beta \int_Q g(x)\,dx = \int_Q (\alpha f + \beta g)(x)\,dx,$ *Linearität*

2) $f \ge g \Rightarrow \int_Q f(x)\,dx \ge \int_Q g(x)\,dx,$ *Monotonie*

3) $|\int_Q f(x)\,dx| \le \|f\|_\infty V(Q)$ *Beschränktheit*

4) $\int_{\tilde{Q}} (f\circ\varphi)(x)\,dx = \int_Q f(y)\,dy$ *Bewegungsinvarianz.*

Der Nachweis der Bewegungsinvarianz des Integrals ergibt sich aus der Beobachtung, daß φ und somit φ^{-1} eine Translation, gefolgt von einer Rotation beschreiben. Somit ist $\tilde{Q}$ ein zu Q kongruenter Quader. Eine Zerlegung $\{Q_1,\dots,Q_m\}$ von Q in Teilquader wird daher abgebildet auf eine Zerlegung des Quaders $\tilde{Q}$ in Teilquader $\{\varphi(Q_1),\dots,\varphi(Q_m)\}$ mit $V(\varphi(Q_i)) = V(Q_i)$, $i = 1,\dots,m$. Einer Treppenfunktion f auf Q entspricht daher die Treppenfunktion $f\circ\varphi$ auf $\tilde{Q}$.
Wir erweitern nun das Integral auf stetige Funktionen mit kompaktem Träger. Dazu benötigen wir folgendes Approximationsresultat, vgl. Satz VII-1.2.

Satz 2.4. *Es sei $f \in C_c(\mathbb{R}^n)$. Dann gibt es eine Folge von Treppenfunktionen (t_k), welche gleichmäßig gegen f konvergiert.*

Beweis. Der Träger von f sei in einem Quader Q enthalten. Es genügt, folgende Behauptung zu beweisen:

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists t_\varepsilon \in \mathcal{T}(Q,\mathbb{R})\colon \|f - t_\varepsilon\|_\infty < \varepsilon.$$

Nach Satz VIII-5.6 ist f auf Q gleichmäßig stetig. Es sei $\varepsilon > 0$ beliebig gewählt. Dann gibt es ein $\delta > 0$, so daß

$$\forall x, y \in W\colon \|x - y\| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Ferner sei $\{Q_1, \ldots, Q_k\}$ eine Zerlegung von Q in Teilquader derart, daß $\operatorname{diam} Q_i < \delta$, $i = 1, \ldots, k$. In jedem Teilquader Q_i wählen wir einen Punkt ξ_i und definieren die Treppenfunktion t_ε durch

$$t_\varepsilon(x) = \begin{cases} f(\xi_i), & x \in Q_i^\circ, \quad i = 1, \ldots, k, \\ f(\xi_{j^*}), & x \in Q_j \cap Q_l \text{ und } j^* \leq j < l, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Der Index j^* ist z.B. charakerisiert durch die Bedingung

$$j^* = \min\{1 \leq j \leq n \colon \exists (l \in \{1, \ldots, n\})(j < l \wedge x \in Q_j \cap Q_l)\}$$

Diese Konstruktion stellt sicher, daß $|f(x) - t_\varepsilon(x)| < \varepsilon$ für alle $x \in Q$ gilt. □

Es sei nun $f \in C_c(\mathbb{R}^n)$ und (t_k) eine Folge von Treppenfunktionen, welche nach Satz 2.4 gleichmäßig gegen f konvergiert. Die Linearität und Beschränktheit des Integrals ergibt

$$|\int_Q t_k(x)\,dx - \int_Q t_l(x)\,dx| = |\int_Q (t_k - t_l)(x)\,dx| \leq \|t_k - t_l\|_\infty V(Q).$$

Somit ist $(\int_Q t_k(x)\,dx)_{k\geq 1}$ eine Cauchy Folge in $\mathbb{R}$ und daher konvergent. Wir zeigen, daß ihr Grenzwert von der Folge (t_k), welche zur Approximation von f verwendet wird, nicht abhängt. Es sei also (s_k) eine weitere Folge von Treppenfunktionen mit $s_k \rightrightarrows f$. Die Beschränktheit des Integrals ergibt wie vorhin

$$|\int_Q (s_k(x) - t_k(x))\,dx| \leq \|s_k - t_k\|_\infty V(Q),$$

also $\lim_{k\to\infty} \int_Q (s_k(x) - t_k(x))\,dx = 0$. Daraus folgt

$$\lim_{k\to\infty} \int_Q s_k(x)\,dx = \lim_{k\to\infty} \int_Q t_k(x)\,dx,$$

(die Existenz der Limiten wurde ja bereits nachgewiesen). Somit ist folgende Definition sinnvoll.

Definition 2.5. *Es sei $f \in C_c(\mathbb{R}^n)$, $\operatorname{supp} f \subset Q \bigvee$, und (t_k) eine Folge von Treppenfunktionen, welche gleichmäßig gegen f konvergiert. Das Integral von f ist definiert durch*

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx = \lim_{k\to\infty} \int_Q t_k(x)\,dx.$$

Für $n = 1$ stimmt dieses Integral mit dem Cauchy Integral überein. Die Eigenschaften des Integrals für Treppenfunktionen bleiben bei der Bildung des Grenzwertes erhalten.

Lemma 2.6. *Es seien f, $g \in C_c(\mathbb{R}^n)$ und α, $\beta \in \mathbb{R}$ und $\operatorname{supp} f \subset Q$. Ferner sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ orthogonal, $b \in \mathbb{R}^n$ und $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ definiert durch $\varphi(x) = Ax + b$. Dann gilt:*

1) $\alpha \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx + \beta \int_{\mathbb{R}^n} g(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} (\alpha f + \beta g)(x)\,dx,$ *Linearität*
2) $f \geq g \Rightarrow \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx \geq \int_{\mathbb{R}^n} g(x)\,dx,$ *Monotonie*
3) $|\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|\,dx \leq \|f\|_\infty V(Q)$ *Beschränktheit*
4) $\int_{\mathbb{R}^n} (f \circ \varphi)(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\,dy$ *Bewegungsinvarianz.*

Beweis. Wir zeigen nur die Bewegungsinvarianz. Es sei $\tilde{Q} = \varphi^{-1}(Q)$. Dann ist $f \circ \varphi \in C_c(\mathbb{R}^n)$ und $\operatorname{supp} f \circ \varphi \subset \tilde{Q}$. Für eine Folge $(t_k) \subset \mathcal{T}(Q, \mathbb{R})$ mit $t_k \rightrightarrows f$ ergibt sich somit $t_k \circ \varphi \in \mathcal{T}(\tilde{Q}, \mathbb{R})$ und $t_k \circ \varphi \rightrightarrows f \circ \varphi$. Aus der Definition des Integrals und Lemma 2.3 folgt daher

$$\int_{\mathbb{R}^n} (f \circ \varphi)(x)\,dx = \lim_{k\to\infty} \int_{\tilde{Q}} (t_k \circ \varphi)(x)\,dx = \lim_{k\to\infty} \int_Q t_k(y)\,dy = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\,dy.$$

□

Als nächstes erweitern wir das Integral auf die Familien $\mathcal{H}_{\mathcal{U}}$ und $\mathcal{H}_{\mathcal{O}}$ halbstetiger Funktionen.

Definition 2.7. *Es sei $f \in \mathcal{H}_U$ und $(f_k) \subset C_c(\mathbb{R}^n)$ eine Funktionenfolge mit $f_k \uparrow f$. Das Integral von f ist definiert durch*

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx = \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_k(x)\,dx \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}.$$

Für $f \in \mathcal{H}_O$ setzen wir

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx = -\int_{\mathbb{R}^n} (-f)(x)\,dx \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}.$$

Da die Folge $(\int_{\mathbb{R}^n} f_k(x)\,dx)$ monoton wächst, vgl. Lemma 2.6-2), existiert der Grenzwert in $\bar{\mathbb{R}}$. Wir zeigen nun, daß dieser Grenzwert unabhängig ist von der speziellen Folge $(f_k) \subset C_c(\mathbb{R}^n)$, die zur Approximation von f verwendet wird.

Lemma 2.8. *Es seien $f \in \mathcal{H}_U$ und (f_k), $(g_k) \subset C_c(\mathbb{R}^n)$ Folgen mit $f_k \uparrow f$ und $g_k \uparrow f$. Dann gilt*

$$\lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_k(x)\,dx = \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} g_k(x)\,dx.$$

Beweis. Wir zeigen: Für festes $k \in \mathbb{N}$ gilt

$$\int_{\mathbb{R}^n} f_k(x)\,dx \leq \lim_{l\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} g_l(x)\,dx.$$

Aus Symmetriegründen ergibt sich daraus die Behauptung. Wir betrachten die Funktionen $h_l = \min(f_k, g_l)$. Wegen $f_k \leq f$ und $g_l \uparrow f$ folgt $h_l \uparrow f_k$. Die Funktionen h_l sind stetig und haben kompakten Träger

$$\operatorname{supp} h_l \subset \operatorname{supp} h_1 \cup \operatorname{supp} f_k, \quad l \in \mathbb{N}.$$

Dies sieht man folgendermaßen ein: Wählt man $x \in \complement \operatorname{supp} h_1 \cap \complement \operatorname{supp} f_k$, existiert eine Umgebung $U \in \mathcal{U}(x)$ mit $f_k = h_1 \equiv 0$ auf U. Wegen $h_1 \leq h_l \leq f_k$ folgt daraus $h_l \equiv 0$ auf U und somit $x \notin \operatorname{supp} h_l$. Nach dem Satz von Dini 5.7 ist die Konvergenz daher gleichmäßig. Es sei nun Q ein Quader mit $\operatorname{supp} h_l \subset Q$. Mit Hilfe von Lemma 2.6 erhält man

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} (f_k(x) - h_l(x))\, dx \right| \leq \|f_k - h_l\|_\infty V(Q),$$

also

$$\int_{\mathbb{R}^n} f_k(x)\, dx = \lim_{l\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} h_l(x)\, dx \leq \lim_{l\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} g_l(x)\, dx,$$

wobei wir $h_l \leq g_l$ und wiederum Lemma 2.6 verwendet haben. □

Dieses Lemma zeigt, daß die Definition des Integrals für Funktionen in $\mathcal{H}_U$ sinnvoll ist. Setzt man insbesondere eine Funktion $f \in C_c(\mathbb{R}^n)$ ein, kann man $f_k = f$ wählen, so daß die Integrale gemäß Definition 2.5 und Definition 2.7 übereinstimmen. Da die Funktionen in $\mathcal{H}_U$ nicht beschränkt sein müssen, ihr Träger nicht unbedingt kompakt ist, macht die Beschränktheit des Integrals keinen Sinn mehr. Die übrigen Eigenschaften des Integrals können jedoch übertragen werden.

Lemma 2.9. *Es seien f, $g \in \mathcal{H}_U$ und α, $\beta \geq 0$. Ferner sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ orthogonal, $b \in \mathbb{R}^n$ und $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ definiert durch $\varphi(x) = Ax + b$. Dann gehören auch die Funktionen $\alpha f + \beta g$, sowie $f \circ \varphi$ zu $\mathcal{H}_U$ und es gilt*

1) $\alpha \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, dx + \beta \int_{\mathbb{R}^n} g(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}^n} (\alpha f + \beta g)(x)\, dx,$

2) $f \geq g \Rightarrow \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, dx \geq \int_{\mathbb{R}^n} g(x)\, dx,$ *Monotonie*

3) $\int_{\mathbb{R}^n} (f \circ \varphi)(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\, dy$ *Bewegungsinvarianz.*

Beweis. Es seien (f_k), $(g_k) \subset C_c(\mathbb{R}^n)$ Funktionenfolgen mit $f_k \uparrow f$ und $g_k \uparrow g$. Dann gilt auch $\alpha f_k + \beta g_k \uparrow \alpha f + \beta g$ für α, $\beta \geq 0$ und somit $\alpha f + \beta g \in \mathcal{H}_U$. Aus der Definition des Integrals in $\mathcal{H}_U$ folgt dann

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} (\alpha f + \beta g)(x)\, dx &= \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} (\alpha f_k + \beta g_k)(x)\, dx \\ &= \alpha \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_k(x)\, dx + \beta \int_{\mathbb{R}^n} g_k(x)\, dx = \alpha \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, dx + \beta \int_{\mathbb{R}^n} g(x)\, dx.\end{aligned}$$

Die restlichen Aussagen beweist man analog. □

Bemerkung 2.10. Das Integral in $\mathcal{H}_U$ ist *nicht* linear, da $\mathcal{H}_U$ kein Vektorraum ist und daher 1) nur für α, $\beta \geq 0$ gilt. Allerdings gilt für $\alpha \in \mathbb{R}$ und $f \in \mathcal{H}_U$

$$\alpha \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} (\alpha f)(x)\,dx.$$

Für $\alpha < 0$ folgt nämlich $\alpha f \in \mathcal{H}_O$ und

$$\int_{\mathbb{R}^n} (\alpha f)(x)\,dx = -\int_{\mathbb{R}^n} -(\alpha f)(x)\,dx = -\int_{\mathbb{R}^n} (-\alpha) f(x)\,dx = -(-\alpha)\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx.$$

Die erste Gleichheit ergibt sich aus der Definition des Integrals in $\mathcal{H}_O$, die letzte folgt aus 1).

Lemma 2.11. *Es sei* $(f_k) \subset \mathcal{H}_U$ *und* $f_k \geq 0$, $k \in \mathbb{N}_0$, *und* $f = \sum_{k=0}^{\infty} f_k$. *Dann ist* $f \in \mathcal{H}_U$ *und es gilt*

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_k(x)\,dx.$$

Beweis. Wegen Bemerkung 1.12 gibt es Funktionen $\varphi_{kl} \in C_c(\mathbb{R}^n)$, $\varphi_{kl} \geq 0$, k, $l \in \mathbb{N}_0$ mit $f_k = \sum_{l=0}^{\infty} \varphi_{kl}$. Somit gilt $f = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \varphi_{kl}$. Für jedes $x \in \mathbb{R}^n$ ist die iterierte Reihe (und somit auch die entsprechende Doppelreihe) (absolut) konvergent oder divergent. Dann ist jede Anordnung der Doppelreihe in eine einfache Reihe konvergent (mit gleichem Grenzwert) oder divergent. Somit gilt insbesondere

$$f = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{k} \varphi_{l,k-l} = \sum_{k=0}^{\infty} h_k$$

mit

$$h_k = \sum_{l=0}^{k} \varphi_{l,k-l} \in C_c(\mathbb{R}^n), \quad h_k \geq 0, k \in \mathbb{N}_0.$$

Für die Partialsummen $s_m = \sum_{k=0}^{m} h_k$ folgt dann $s_m \in C_c(\mathbb{R}^n)$, $s_m \uparrow f$, $m \in \mathbb{N}_0$, und somit $f \in \mathcal{H}_U$. Aus der Abschätzung

$$s_m = \sum_{k=0}^{m} h_k \leq \sum_{k=0}^{m} f_k,$$

der Definition des Integrals in $\mathcal{H}_U$ und Lemma 2.9 ergibt sich daher

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx &= \lim_{m\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} s_m(x)\,dx \leq \lim_{m\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{k=0}^{m} f_k(x)\,dx \\ &= \lim_{m\to\infty} \sum_{k=0}^{m} \int_{\mathbb{R}^n} f_k(x)\,dx = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_k(x)\,dx\end{aligned}$$

also

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx \leq \sum_{k=0}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_k(x)\,dx.$$

Die Abschätzung

$$\sum_{k=0}^{m} f_k \leq f, \quad m \in \mathbb{N}_0$$

ergibt wieder mit Lemma 2.9

$$\sum_{k=0}^{m} \int_{\mathbb{R}^n} f_k(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{k=0}^{m} f_k(x)\,dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx$$

also auch

$$\sum_{k=0}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_k(x)\,dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx$$

□

Wir kommen nun zu einem zentralen Satz der Integrationstheorie.

Satz 2.12 (Fubini). *Es seien $f \in \mathcal{H}_U$, $(i_1, \ldots, i_n)$ eine Permutation von $(1, \ldots, n)$ und $1 \leq k < n$. Für $x = (x_1, \ldots, x_n)$ setzen wir $\xi = (x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}) \in \mathbb{R}^k$, $\eta = (x_{i_{k+1}}, \ldots, x_{i_n}) \in \mathbb{R}^{n-k}$ und*

$$\tilde{f}(\xi, \eta) = \tilde{f}(x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}, x_{i_{k+1}}, \ldots, x_{i_n}) = f(x_1, \ldots, x_n).$$

Dann gilt: Für jedes feste $\eta \in \mathbb{R}^{n-k}$ gehört die Funktion

$$\xi \mapsto \tilde{f}(\xi, \eta)$$

zu $\mathcal{H}_U(\mathbb{R}^k)$. Es existiert das Integral

$$F(\eta) := \int_{\mathbb{R}^k} \tilde{f}(\xi, \eta)\,d\xi = \int_{\mathbb{R}^k} f(x_1, \ldots, x_n)\,dx_{i_1} \ldots dx_{i_k},$$

es ist $F \in \mathcal{H}_U(\mathbb{R}^{n-k})$ und es gilt

$$(\dagger) \qquad \int_{\mathbb{R}^{n-k}} F(\eta)\,d\eta = \int_{\mathbb{R}^{n-k}} [\int_{\mathbb{R}^k} \tilde{f}(\xi, \eta)\,d\xi]\,d\eta = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx.$$

Beweis. Wir führen den Beweis in mehreren Schritten. Die orthogonale Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ entstehe aus der Einheitsmatrix durch der Permutation $(i_1, \ldots, i_n)$ entsprechende Vertauschungen der Spalten. Dann ist $(\xi, \eta) = Ax$ und $\tilde{f} = f \circ A^{-1}$. Somit ist $\tilde{f} \in \mathcal{H}_U$ und wegen der Bewegungsinvarianz des Integrals in $\mathcal{H}_U$ können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit von $\xi = (x_1, \ldots, x_k)$ und $\eta = (x_{k+1}, \ldots, x_n)$ ausgehen und

$$(\ddagger) \qquad \int_{\mathbb{R}^{n-k}} F(\eta)\,d\eta = \int_{\mathbb{R}^{n-k}} [\int_{\mathbb{R}^k} f(\xi, \eta)\,d\xi]\,d\eta = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx$$

statt (†) beweisen.
Schritt 1: Es sei χ_Q die charakteristische Funktion eines achsenparallelen Quaders $Q = \prod_{i=1}^m (a_i, b_i)$. Zerlegt man Q in $Q = \prod_{i=1}^k (a_i, b_i) \times \prod_{j=k+1}^m (a_j, b_j) \equiv Q' \times Q''$ folgt $\chi_Q(\xi, \eta) = \chi_{Q'}(\xi)\chi_{Q''}(\eta)$. Somit folgt

$$\int_{\mathbb{R}^{n-k}} [\int_{\mathbb{R}^k} \chi_Q(\xi, \eta)\, d\xi]\, d\eta = \int_{\mathbb{R}^{n-k}} \chi_{Q''}(\eta)[\int_{\mathbb{R}^k} \chi_{Q'}(\xi)\, d\xi]\, d\eta$$
$$= V_k(Q')V_{n-k}(Q'') = V_n(Q) = \int_{\mathbb{R}^n} \chi_Q(x)\, dx.$$

Jede Treppenfunktion $t \in \mathcal{T}(Q, \mathbb{R})$ läßt sich mit einer geeigneten Zerlegung von Q in Quader $\{Q_1, \ldots, Q_l\}$ darstellen in der Form

$$t = \sum_{i=1}^{l} c_i \chi_{Q_i},$$

wobei $c_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, l$.
Wegen der Linearität des Integrals ergibt sich daher

$$(*) \qquad \int_{\mathbb{R}^{n-k}} [\int_{\mathbb{R}^k} t(\xi, \eta)\, d\xi]\, d\eta = \int_{\mathbb{R}^n} t(x)\, dx,$$

für alle $t \in \mathcal{T}(Q, \mathbb{R})$.
Schritt 2: Wir zeigen nun die Gültigkeit des Satzes für $f \in C_c(\mathbb{R}^n)$. Wir schließen den Träger von f in einen achsenparallelen Quader Q ein und konstruieren nach Satz 2.4 zu einer Folge von Zerlegungen $\{Q_{1l}, \ldots, Q_{m_l l}\}$ von Q, $l \in \mathbb{N}$, Treppenfunktionen $t_l = \sum_{i=1}^{m_l} c_{il}\chi_{Q_{il}}$ mit $t_l \rightrightarrows f$. Wie vorhin setzen wir $Q = Q' \times Q'' \subset \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$ und $Q_{il} = Q'_{il} \times Q''_{il} \subset Q' \times Q''$. Für $\eta \in \mathbb{R}^{n-k}$ betrachten wir die Funktionen t_l^η, $f^\eta \colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$

$$t_l^\eta(\xi) = t_l(\xi, \eta) \qquad \text{und} \qquad f^\eta(\xi) = f(\xi, \eta), \quad \xi \in Q'.$$

Auch die Funktionen $t_l^\eta = \sum_{i=1}^{m_l} c_{il}\chi_{Q''_{il}}(\eta)\chi_{Q'_{il}}$, $l \in \mathbb{N}$, sind Treppenfunktionen auf Q' und es gilt $t_l^\eta \rightrightarrows f^\eta \in C_c(\mathbb{R}^k)$ gleichmäßig in $\eta \in Q''$. Dann sind auch die Funktionen

$$T_l(\eta) = \int_{\mathbb{R}^k} t_l^\eta(\xi)\, d\xi = \sum_{i=1}^{m_l} c_{il} V(Q'_{il})\chi_{Q''_{il}}(\eta) = \int_{\mathbb{R}^k} t_l(\xi, \eta)\, d\xi$$

Treppenfunktionen auf Q'', welche gleichmäßig gegen

$$F(\eta) = \int_{\mathbb{R}^k} f^\eta(\xi)\, d\xi = \int_{\mathbb{R}^k} f(\xi, \eta)\, d\xi$$

konvergieren, $T_l \rightrightarrows F$. Dies ist eine Folge der Abschätzung

$$|T_l(\eta) - F(\eta)| = |\int_{\mathbb{R}^k} (t_l^\eta(\xi) - f^\eta(\xi))\, d\xi| \leq \|t_l^\eta - f^\eta\|_\infty V(Q').$$

Aus der analogen Abschätzung

$$|F(\eta) - F(\tilde{\eta})| = |\int_{\mathbb{R}^k} (f^\eta(\xi) - f^{\tilde{\eta}}(\xi))\, d\xi| \le \max_{\xi \in \mathbb{R}^k} |f(\xi,\eta) - f(\xi,\tilde{\eta})| V(Q')$$

erkennt man wegen der gleichmäßigen Stetigkeit von f, daß auch F gleichmäßig stetig ist. Somit liegt F in $C(\mathbb{R}^{n-k})$ und wegen $\operatorname{supp} F \subset Q''$ auch in $C_c(\mathbb{R}^{n-k})$. Wegen der Definition des Integrals für stetige Funktionen mit kompaktem Träger erhält man daher

$$(**) \qquad \begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^{n-k}} F(\eta)\, d\eta &= \lim_{l\to\infty} \int_{\mathbb{R}^{n-k}} T_l(\eta)\, d\eta = \lim_{l\to\infty} \int_{\mathbb{R}^{n-k}} [\int_{\mathbb{R}^k} t_l(\xi,\eta)\, d\xi]\, d\eta \\ &\overset{(*)}{=} \lim_{l\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} t_l(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, dx. \end{aligned}$$

Die mit "$(*)$" markierte Gleichheit folgt aus Schritt 1.
Schritt 3: Es sei nun $f \in \mathcal{H}_U$ und $(f_l) \subset C_c(\mathbb{R}^n)$ eine Folge von Funktionen mit $f_l \uparrow f$. Definiert man für festes $\eta \in \mathbb{R}^{n-k}$ wie vorhin die Funktionen f_l^η und f^η, ergibt sich $f_l^\eta \in C_c(\mathbb{R}^k, \mathbb{R})$ und $f_l^\eta \uparrow f^\eta$. Somit gilt $f^\eta \in \mathcal{H}_U(\mathbb{R}^k)$ und es existiert das Integral

$$F(\eta) = \int_{\mathbb{R}^k} f^\eta(\xi)\, d\xi = \int_{\mathbb{R}^k} f(\xi,\eta)\, d\xi.$$

Setzt man wie in Schritt 2

$$F_l(\eta) = \int_{\mathbb{R}^k} f_l^\eta(\xi)\, d\xi = \int_{\mathbb{R}^k} f_l(\xi,\eta)\, d\xi,$$

folgt aus der Definition des Integrals in $\mathcal{H}_U(\mathbb{R}^k)$

$$F(\eta) = \lim_{l\to\infty} \int_{\mathbb{R}^k} f_l^\eta(\xi)\, d\xi = \lim_{l\to\infty} F_l(\eta).$$

Es sei nun Q_l ein achsenparalleler Quader mit $\operatorname{supp} f_l \subset Q_l = Q_l' \times Q_l''$. Dann folgert man aus der Abschätzung

$$|F_l(\eta) - F_l(\tilde{\eta})| = |\int_{\mathbb{R}^k} (f_l^\eta(\xi) - f_l^{\tilde{\eta}}(\xi))\, d\xi| \le \max_{\xi \in \mathbb{R}^k} |f_l(\xi,\eta) - f_l(\xi,\tilde{\eta})| V(Q_l')$$

wie vorhin $F_l \in C_c(\mathbb{R}^{n-k})$. Da aber auch $F_l \le F_{l+1}$ gilt, folgt $F \in \mathcal{H}_U(\mathbb{R}^{n-k})$. Eine zweifache Anwendung der Definition des Integrals in $\mathcal{H}_U$ ergibt nun

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^{n-k}} F(\eta)\, d\eta &= \lim_{l\to\infty} \int_{\mathbb{R}^{n-k}} F_l(\eta)\, d\eta = \lim_{l\to\infty} \int_{\mathbb{R}^{n-k}} [\int_{\mathbb{R}^k} f_l(\xi,\eta)\, d\xi]\, d\eta \\ &\overset{(**)}{=} \lim_{l\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_l(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, dx. \end{aligned}$$

Die mit "$(**)$" markierte Gleichheit wurde in Schritt 2 bewiesen. □

Der Satz von Fubini beinhaltet zwei Aussagen: zum einen zeigt er auf, daß man ein n-dimensionales Integral zurückführen kann auf **iterierte Integrale** kleinerer Dimension. Eine wiederholte Anwendung dieses Argumentes reduziert die Berechnung eines

n-dimensionalen Integrales auf die Auswertung von n eindimensionalen Integralen, nämlich

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} \dots [\int_{\mathbb{R}} f(x_1,\dots,x_n)\,dx_1]\dots dx_n.$$

Zum anderen besagt der Satz, daß die Gruppierung der Integrationsvariablen und somit die Reihenfolge der iterierten Integrale belanglos ist. Im Fall $n = 2$ ergibt die spezielle Wahl der Permutationen $(i_1, i_2) = (1, 2)$ bzw. $(i_1, i_2) = (2, 1)$

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(\xi,\eta)\,d\xi d\eta = \int_{\mathbb{R}} [\int_{\mathbb{R}} f(\xi,\eta)\,d\xi] d\eta = \int_{\mathbb{R}} [\int_{\mathbb{R}} f(\xi,\eta)\,d\eta] d\xi.$$

Korollar 2.13. Es seien $\varphi \in \mathcal{H}_U(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}_+)$ und $\psi \in \mathcal{H}_U(\mathbb{R}^{n-k}, \mathbb{R}_+)$. Dann liegt die Abbildung $f\colon (\xi,\eta) \to f(\xi,\eta) = \varphi(\xi)\psi(\eta)$ in $\mathcal{H}_U(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}_+)$ und es gilt mit $x = (\xi, \eta)$

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^k} \varphi(\xi)\,d\xi \int_{\mathbb{R}^{n-k}} \psi(\eta)\,d\eta.$$

Ein weiteres nützliches Werkzeug in der Integrationstheorie ist die Variablentransformation. Wir betrachten vorerst einen einfachen Spezialfall.

Satz 2.14. *Es seien $f \in \mathcal{H}_U$, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ regulär und $b \in \mathbb{R}^n$. Dann liegt die Abbildung $x \mapsto f(Ax + b)$ in $\mathcal{H}_U$ und es gilt*

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(Ax+b)\,dx = \frac{1}{|\det A|} \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx.$$

Der Beweis dieses Satzes stützt sich auf die Singulärwertzerlegung einer Matrix.

Satz 2.15. *Zu jeder Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$ mit Rang $r \le \min(m, n)$ gibt es orthogonale Matrizen $U \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $V \in \mathbb{R}^{m\times m}$ und eine Diagonalmatrix $D \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $D = diag\,(\sigma_1, \dots, \sigma_r, 0, \dots, 0)$, $\sigma_i > 0$, $i = 1, \dots, r$, so daß*

$$A = UDV.$$

Beweis des Satzes 2.14. Es sei $(f_k) \subset C_c(\mathbb{R}^n)$ eine Folge von Funktionen mit $f_k \uparrow f$. Da der Träger von $x \mapsto f_k(Ax+b)$ kompakt ist und $f_k(Ax+b) \uparrow f(Ax+b)$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ gilt, folgt $x \mapsto f(Ax+b) \in \mathcal{H}_U$. Es sei $A = UDV$ die Singulärwertzerlegung von A mit einer Diagonalmatrix $D = \text{diag}\,(\sigma_1, \dots, \sigma_n)$, $\sigma_i > 0$, $i = 1, \dots, n$. Wegen der Invarianz des Integrals unter Translationen und orthogonalen Transformationen folgt

$$\int_{\mathbb{R}^n} f_k(Ax+b)\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(UDVx)\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} f_k(UDx)\,dx.$$

Mit Hilfe des Satzes von Fubini schreiben wir das letzte Integral als n-fach iteriertes Integral und substituieren in jedem der eindimensionalen (Cauchy-)Integrale $y_i =$

$\sigma_i x_i$, $i = 1, \dots, n$. Auf diese Weise erhalten wir

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} f_k(UDx)\,dx &= \int_{\mathbb{R}} \dots [\int_{\mathbb{R}} f_k(U(\sigma_1 x_1, \dots, \sigma_n x_n)^T) dx_1] \dots dx_n \\ &= \frac{1}{\sigma_1 \cdot \dots \cdot \sigma_n} \int_{\mathbb{R}} \dots [\int_{\mathbb{R}} f_k(U(y_1, \dots, y_n)^T) dy_1] \dots dy_n \\ &= \frac{1}{\det D} \int_{\mathbb{R}^n} f_k(Uy)\,dy = \frac{1}{\det D} \int_{\mathbb{R}^n} f_k(y)\,dy.\end{aligned}$$

In den letzten beiden Schritten wurde der Satz von Fubini und anschließend wieder Lemma 2.6 verwendet. Da der Betrag der Determinante einer orthogonalen Matrix gleich 1 ist, folgt

$$|\det A| = |\det U||\det D||\det V| = \det D > 0.$$

Eine neuerliche Anwendung des Satzes von Fubini und der Grenzübergang $k \to \infty$ beenden den Beweis. $\square$

In vielen Anwendungen will man eine Funktion f nicht über $\mathbb{R}^n$, sondern über eine kompakte Teilmenge K integrieren. Dies kann man in die bisher entwickelte Theorie einbauen, wenn man zusätzlich $f\chi_K \in \mathcal{H}_O$ fordert (wir erinnern daran, daß die charakteristische Funktion einer kompakten Teilmenge in $\mathcal{H}_O$ liegt, vgl. Satz 1.11 und Beispiel 1.3). Wir vereinbaren folgende Schreibweise.

Definition 2.16. *Es sei $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt und $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ derart, daß $f\chi_K \in \mathcal{H}_O$. Wir setzen*

$$\int_K f(x)\,dx := \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\chi_K(x)\,dx.$$

Ist K das Intervall $[a, b]$ in $\mathbb{R}$, schreiben wir auch

$$\int_K f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx.$$

3. Berechnung elementarer Volumina

In diesem Abschnitt wenden wir die Integralrechnung auf die Berechnung der Volumina von elementaren geometrischen Körpern an.

Definition 3.1. *Das* ***Volumen*** *$V(K)$ einer kompakten Teilmenge K in $\mathbb{R}^n$ ist definiert durch*

$$V(K) = \int_{\mathbb{R}^n} \chi_K(x)\,dx.$$

Im Fall $n = 2$ nennt man $V(K)$ ***Flächeninhalt*** *von K, im Fall $n = 1$ ergibt $V(K)$ die* ***Länge*** *von K.*

Da es zu einer kompakte Menge K stets einen Würfel $W = [-M, M]^n$ mit $K \subset W$ gibt, folgt aus $\chi_K \leq \chi_W$, daß eine kompakte Menge endliches Volumen besitzt. Gelegentlich verwenden wir die Schreibweise $V_n(K)$, um anzudeuten, daß das Volumen von K in $\mathbb{R}^n$ gemeint ist. Wir ziehen zuerst eine Folgerung aus dem Satz von Fubini.

SATZ 3.2. *Es sei $1 \leq k < n$ und $K_1 \subset \mathbb{R}^k$, $K_2 \subset \mathbb{R}^{n-k}$ seien kompakte Teilmengen. Dann gilt*

$$V_n(K_1 \times K_2) = V_k(K_1)V_{n-k}(K_2).$$

BEWEIS. Schreibt man $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $\xi = (x_1, \ldots, x_k)$ und $\eta = (x_{k+1}, \ldots, x_n)$, gilt

$$\chi_{K_1 \times K_2}(\xi, \eta) = \chi_{K_1}(\xi)\chi_{K_2}(\eta).$$

Die Behauptung folgt nun aus Korollar 2.13. □

BEISPIEL 3.3. 1) Intervall, $K = [a, b]$, $V(K) = \int_a^b dx = b - a$.
2) Parallelepiped $K = X_{i=1}^n [a_i, b_i]$, $V(K) = \prod_{i=1}^n (b_i - a_i)$.
3) gerader Zylinder mit Basis B und Höhe h, $K = B \times [0, h]$, $V(K) = V(B)h$.

SATZ 3.4. *Es sei $\varphi \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ die affine Abbildung $x \mapsto Ax + b$ mit $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und $b \in \mathbb{R}^n$. Dann gilt für jede kompakte Teilmenge $K \subset \mathbb{R}^n$*

$$V(\varphi(K)) = |\det A| V(K).$$

Insbesondere ist das Volumen unter längentreuen Abbildungen invariant (diese werden durch orthogonale Matrizen beschrieben).

BEWEIS. Ist $\det A \neq 0$, folgt die Behauptung aus

$$\chi_{\varphi(K)} = \chi_K \circ \varphi^{-1}$$

und Satz 2.14

$$\begin{aligned} V(\varphi(K)) &= \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{\varphi(K)}(y)\, dy = \int_{\mathbb{R}^n} \chi_K(A^{-1}y - A^{-1}b)\, dy \\ &= \left|\frac{1}{\det(A^{-1})}\right| \int_{\mathbb{R}^n} \chi_K(x)\, dx = |\det A| V(K). \end{aligned}$$

Falls aber $\det A = 0$, ist $\varphi(K)$ in einer Hyperebene enthalten, die man nach einer orthogonalen Koordinatentransformation als $\{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \colon x_n = 0\}$ annehmen darf. Somit ist $\varphi(K)$ ein Zylinder mit der Höhe Null und hat somit nach dem vorigen Beispiel das Volumen null. □

SATZ 3.5. *Es sei $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt, $r \geq 0$ und $rK = \{rx \colon x \in K\}$. Dann gilt*

$$V(rK) = r^n V(K).$$

BEWEIS. Für $r = 0$ ist die Behauptung klar. Für $r > 0$ überzeuge man sich von der Gültigkeit der Beziehung

$$\chi_{rK}(x) = \chi_K(\frac{1}{r}x), \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Mit Satz 2.14 folgt

$$V(rK) = \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{rK}(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} \chi_K(\frac{x}{r})\,dx = r^n \int_{\mathbb{R}^n} \chi_K(x)\,dx = r^n V(K).$$

□

Das Volumen von Körpern, die in einer Koordinatenrichtung durch den Graph einer Funktion begrenzt werden, erhält man wie im eindimensionalen Fall.

SATZ 3.6. *Es sei $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt, $f \in C_c(\mathbb{R}^n)$ und $f \geq 0$ auf K. Das Volumen des Körpers*

$$K_f = \{(x,t)\colon x \in K, 0 \leq t \leq f(x)\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$$

ist gegeben durch

$$V_{n+1}(K_f) = \int_K f(x)\,dx.$$

BEWEIS. Mit Hilfe des Satzes von Fubini findet man wegen $\chi_{K_f}(x,t) = \chi_{[0,f(x)]}(t)\chi_K(x)$ mit $z = (x,t) \in \mathbb{R}^{n+1}$

$$\begin{aligned} V_{n+1}(K_f) &= \int_{\mathbb{R}^{n+1}} \chi_{K_f}(z)\,dz = \int_{\mathbb{R}^n} [\int_{\mathbb{R}} \chi_{[0,f(x)]}(t)\chi_K(x)\,dt]\,dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} [\int_0^{f(x)} 1\,dt]\chi_K(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\chi_K(x)\,dx = \int_K f(x)\,dx. \end{aligned}$$

□

SATZ 3.7 (Cavalierisches Prinzip). *Es sei $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt. Für $t \in \mathbb{R}$ bezeichne K_t die $(n-1)$-dimensionale Schnittmenge*

$$K_t = \{x' \in \mathbb{R}^{n-1}\colon (x',t) \in K\},$$

(K_t kann auch leer sein). Dann gilt

$$V_n(K) = \int_{\mathbb{R}} V_{n-1}(K_t)\,dt.$$

BEWEIS. Die charakteristische Funktion von K_t erfüllt für $x' \in \mathbb{R}^{n-1}$

$$\chi_{K_t}(x') = \chi_K(x',t),$$

und somit

$$V_{n-1}(K_t) = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \chi_K(x',t)\,dx'.$$

Die Behauptung ergibt sich nun aus dem Satz von Fubini

$$V_n(K) = \int_{\mathbb{R}^n} \chi_K(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} [\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \chi_K(x',t)\,dx']\,dt = \int_{\mathbb{R}} V_{n-1}(K_t)\,dt.$$

□

Das klassische Prinzip von Cavalieri ist nun eine einfache Folgerung.

Korollar 3.8. Es seien K, $L \subset \mathbb{R}^n$ kompakt. Gilt $V_{n-1}(K_t) = V_{n-1}(L_t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$, dann haben K und L gleiches Volumen.

Beispiel 3.9. Es sei $B \subset \mathbb{R}^{n-1}$ kompakt und $h > 0$. Wir definieren einen Kegel $K_h(B)$ mit Basis B und Höhe h durch

$$K_h(B) := \{((1-\lambda)\xi, \lambda h) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R} \colon \xi \in B, 0 \le \lambda \le 1\}.$$

Für die Schnittmengen

$$K_h(B)_t = \{x' \in \mathbb{R}^{n-1} \colon (x', t) \in K_h(B)\},$$

$t \in \mathbb{R}$, gilt

$$K_h(B)_t = \begin{cases} (1 - \frac{t}{h})B, & t \in [0, h], \\ \emptyset, & \text{sonst.} \end{cases}.$$

Mit den Sätzen 3.7 und 3.5 folgt

$$\begin{aligned} V_n(K_h(B)) &= \int_0^h V_{n-1}(K_h(B)_t)\, dt = \int_0^h V_{n-1}((1 - \frac{t}{h})B)\, dt \\ &= V_{n-1}(B) \int_0^h (1 - \frac{t}{h})^{n-1}\, dt = \frac{h}{n} V_{n-1}(B). \end{aligned}$$

Beispiel 3.10. Es seien $a_1, \ldots, a_n$ Vektoren im $\mathbb{R}^n$. Das Volumen des von diesen Vektoren aufgespannten Simplex

$$S(a_1, \ldots, a_n) := \{x = \sum_{i=1}^n \lambda_i a_i \colon \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1, \lambda_i \ge 0, i = 1, \ldots, n\}$$

ist gegeben durch

$$V(S(a_1, \ldots, a_n)) = \frac{1}{n!} |\det(a_1, \ldots, a_n)|.$$

Wir betrachten zuerst den Einheitssimplex $S(e_1, \ldots, e_n)$, der von den Vektoren e_j der kanonischen Basis aufgespannt wird. Mittels vollständiger Induktion zeigen wir

$$V(S(e_1, \ldots, e_n)) = \frac{1}{n!}.$$

Für $n = 1$ ist $S(e_1) = [0, 1]$, also $V(S(e_1)) = 1$. Allgemein ist $S(e_1, \ldots, e_n)$ ein Kegel mit der Höhe 1 über der Basis $S(e_1, \ldots, e_{n-1})$. Nach Induktionsvoraussetzung gilt

$$V_{n-1}(S(e_1, \ldots, e_{n-1})) = \frac{1}{(n-1)!}.$$

Der Induktionsschritt folgt nun aus Beispiel 3.9

$$V_n(K_1(S(e_1, \ldots, e_{n-1}))) = \frac{1}{n} V_{n-1}(S(e_1, \ldots, e_{n-1})) = \frac{1}{n!}.$$

Da $x \in S(a_1, \ldots, a_n)$ genau dann gilt, wenn

$$x = \sum_{i=1}^n \lambda_i a_i = \sum_{i=1}^n \lambda_i (a_1, \ldots, a_n) e_i = A \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i$$

also

$$S(a_1,\dots,a_n) = AS(e_1,\dots,e_n),$$

mit $A = (a_1 \dots a_n)$, ergibt Satz 2.14 die Behauptung.

BEISPIEL 3.11. Das Volumen der n-dimensionalen Kugel $\bar{K}(0,r) = \{x \in \mathbb{R}^n \colon \|x\|_2 \leq r\}$.
Nach Satz 3.5 gilt

$$V_n(\bar{K}(0,r)) = r^n V_n(\bar{K}(0,1)).$$

Gebräuchlich ist auch die Bezeichnung $\omega_n = V_n(\bar{K}(0,1))$. Für $n = 1$ ist $K(0,1) = [-1,1]$, also $\omega_1 = 2$. Für $n > 1$ führen wir die Berechnung von ω_n mit dem Cavalierischen Prinzip auf ω_{n-1} zurück. Für die Schnittmengen gilt

$$\bar{K}_n(0,1)_t = \begin{cases} \bar{K}_{n-1}(0,\sqrt{1-t^2}), & |t| \leq 1, \\ \emptyset, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Daraus folgt mit Satz 3.5

$$(*) \qquad \omega_n = \int_{-1}^{1} V_{n-1}(\bar{K}_{n-1}(0,\sqrt{1-t^2}))\,dt = w_{n-1}\int_{-1}^{1}(1-t^2)^{\frac{n-1}{2}}\,dt.$$

Substituiert man im letzten Integral $t = \cos x$, erhält man

$$c_n := \int_{-1}^{1}(1-t^2)^{\frac{n-1}{2}}\,dt = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx.$$

Setzt man $\omega_0 = 1$, gilt $(*)$ für alle $n \geq 1$. Mit partieller Integration und Induktion nach n zeigt man für $k \geq 1$

$$c_{2k} = \pi \prod_{i=1}^{k} \frac{2i-1}{2i}, \qquad c_{2k+1} = 2\prod_{i=1}^{k}\frac{2i}{2i+1}.$$

Insbesondere gilt

$$c_k c_{k-1} = \frac{2\pi}{k}, \qquad k \in \mathbb{N},$$

und somit wegen $(*)$

$$\omega_n = \omega_{n-1}c_n = \omega_{n-2}c_n c_{n-1} = \frac{2\pi}{n}\omega_{n-2}.$$

Eine einfache Induktion ergibt schließlich für $k \geq 1$

$$\omega_{2k} = \frac{\pi^k}{k!}, \qquad \text{und } \omega_{2k+1} = \frac{2^{k+1}}{1\cdot 3\cdot \ldots \cdot (2k+1)}\pi^k.$$

BEMERKUNG 3.12. Der Flächeninhalt des Einheitskreises beträgt demnach π. Hier zeigt sich zum ersten Mal die enge Beziehung zwischen der Zahl π und gewissen Kenngrößen des Kreises. Wir erinnern daran, daß π als kleinste, positive Nullstelle des Kosinus eingeführt wurde.

Beispiel 3.13. Volumen eines Rotationskörpers.
Es sei $[a, b] \subset \mathbb{R}$, $f \in C([a, b], \mathbb{R})$, $f \geq 0$ und

$$K = \{(x, y, t) \in \mathbb{R}^2 \times [a, b] \colon x^2 + y^2 \leq f(t)^2\}$$

Dann gilt

$$V(K) = \pi \int_a^b f(t)^2 \, dt.$$

Die Schnittmengen K_t sind nämlich gegeben durch

$$K_t = \begin{cases} \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 \leq f(t)^2\}, & t \in [a, b], \\ \emptyset, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Nach dem vorangehenden Beispiel gilt $V_2(K_t) = \pi f(t)^2$. Das Volumen des Rotationskörpers ergibt sich nun aus dem Cavalierischen Prinzip.

4. Das Lebesgue Integral

Wir führen nun die letzte Erweiterung des Integrals durch. Dazu benötigen wir den Begriff des Ober- und des Unterintegrals.

Definition 4.1. *Für eine beliebige Funktion $f \colon \mathbb{R}^n \to \bar{\mathbb{R}}$ definieren wir das* ***Oberintegral*** *durch*

$$\int^* f(x) \, dx = \inf\{\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) \, dx \colon \varphi \in \mathcal{H}_U, \varphi \geq f\} \in \bar{\mathbb{R}},$$

und das ***Unterintegral*** *durch*

$$\int_* f(x) \, dx = \sup\{\int_{\mathbb{R}^n} \psi(x) \, dx \colon \psi \in \mathcal{H}_O, \psi \leq f\} \in \bar{\mathbb{R}},$$

Die Funktion $\varphi \equiv \infty$ gehört zu $\mathcal{H}_U$, die Funktion $\psi \equiv -\infty$ gehört zu $\mathcal{H}_O$. Daher sind die Mengen, über welche das Supremum bzw. das Infimum gebildet wird, nicht leer. Wir betonen, daß das Oberintegral bzw. das Unterintegral für beliebige Funktionen gebildet werden kann. Eine unmittelbare Folgerung aus der Definition ist die Beziehung

$$\int_* f(x) \, dx = -\int^* (-f)(x) \, dx.$$

Wir können uns im Folgenden also ohne Beschränkung der Allgemeinheit auf die Diskussion des Oberintegrals beschränken.

Lemma 4.2. *1) Für jedes $f \colon \mathbb{R}^n \to \bar{\mathbb{R}}$ gilt*

$$\int_* f(x) \, dx \leq \int^* f(x) \, dx.$$

2)Für jedes $f \in \mathcal{H}_U$ oder $f \in \mathcal{H}_O$ gilt

$$\int_* f(x) \, dx = \int^* f(x) \, dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \, dx.$$

Beweis. 1) Es seien $\varphi \in \mathcal{H}_U$ und $\psi \in \mathcal{H}_O$ Funktionen mit $\psi \leq f \leq \varphi$. Daraus folgt $\varphi - \psi \geq 0$ und $\varphi - \psi \in \mathcal{H}_U$, da $-\psi \in \mathcal{H}_U$. Mit Lemma 2.9 schließt man

$$\int_{\mathbb{R}^n} (\varphi - \psi)(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\, dx + \int_{\mathbb{R}^n} (-\psi)(x)\, dx \geq 0,$$

also

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\, dx \geq -\int_{\mathbb{R}^n} (-\psi)(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}^n} \psi(x)\, dx.$$

Man achte auf die unterschiedliche Definition der Integrale für φ und ψ.
2) Es sei $f \in \mathcal{H}_U$. Die Gleichheit der Integrale

$$\int^* f(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, dx$$

ergibt sich aus der Definition. Um die Gleichheit

$$\int_* f(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, dx$$

einzusehen, wähle man eine Folge $(\psi_k) \subset C_c(\mathbb{R}^n)$ mit $\psi_k \uparrow f$. Aus der Definition 2.7 des Integrals von f folgt

$$(*) \qquad \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, dx = \sup_k \int_{\mathbb{R}^n} \psi_k(x)\, dx.$$

Da die Funktionen ψ_k auch in $\mathcal{H}_O$ liegen, erhält man aus der Definition 4.1 andererseits

$$\sup_k \int_{\mathbb{R}^n} \psi_k(x)\, dx \leq \int_* f(x)\, dx \leq \int^* f(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, dx.$$

Zusammen mit $(*)$ ergibt dies die Behauptung. $\square$

Lemma 4.3. *1) Für $f,\, g\colon \mathbb{R}^n \to \bar{\mathbb{R}}$ mit $f \leq g$ gilt*

$$\int^* f(x)\, dx \leq \int^* g(x)\, dx, \qquad \int_* f(x)\, dx \leq \int_* g(x)\, dx$$

2) Für $f\colon \mathbb{R}^n \to \bar{\mathbb{R}}$ und $\lambda \geq 0$ gilt

$$\int^* (\lambda f)(x)\, dx = \lambda \int^* f(x)\, dx, \qquad \int_* (\lambda f)(x)\, dx = \lambda \int_* f(x)\, dx.$$

3) Für $f,\, g\colon \mathbb{R}^n \to \bar{\mathbb{R}}$ gilt

$$\int^* (f(x) + g(x))\, dx \leq \int^* f(x)\, dx + \int^* g(x)\, dx,$$
$$\int_* (f(x) + g(x))\, dx \geq \int_* f(x)\, dx + \int_* g(x)\, dx,$$

(wir nehmen an, daß f und g nicht gleichzeitig die Werte ∞ und $-\infty$ annehmen).

Beweis. 1) Übung.
2) Für $\lambda = 0$ ist die Aussage trivial (wir treffen die Vereinbarung $0 \cdot \infty = 0$). Es sei also $\lambda > 0$. Zu beliebig gewähltem $\varepsilon > 0$ gibt es nach der Definition des Infimums eine Abbildung $\varphi \in \mathcal{H}_U$ mit $\varphi \geq f$ und

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\,dx < \int^* f(x)\,dx + \frac{\varepsilon}{\lambda}.$$

Wegen $\lambda\varphi \in \mathcal{H}_U$ und $\lambda\varphi \geq \lambda f$ folgt aus der Definition des Oberintegrals

$$\int^* (\lambda f)(x)\,dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} (\lambda\varphi)(x)\,dx = \lambda \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\,dx < \lambda \int^* f(x)\,dx + \varepsilon,$$

also

$$(*) \qquad \int^* (\lambda f)(x)\,dx \leq \lambda \int^* f(x)\,dx.$$

Ersetzt man f in $(*)$ durch λf und gleichzeitig λ durch $\frac{1}{\lambda}$, erhält man

$$\int^* f(x)\,dx \leq \frac{1}{\lambda} \int^* (\lambda f)(x)\,dx.$$

Zusammen mit $(*)$ ergibt dies die Behauptung.
3) Zu beliebigem $\varepsilon > 0$ gibt es Funktionen φ, $\psi \in \mathcal{H}_U$ mit $\varphi \geq f$, $\psi \geq g$ und

$$\int^* f(x)\,dx + \frac{\varepsilon}{2} > \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\,dx, \qquad \int^* g(x)\,dx + \frac{\varepsilon}{2} > \int_{\mathbb{R}^n} \psi(x)\,dx.$$

Wegen $\varphi + \psi \in \mathcal{H}_U$ und $\varphi + \psi \geq f + g$ folgt

$$\int^* f(x)\,dx + \int^* g(x)\,dx + \varepsilon > \int_{\mathbb{R}^n} (\varphi(x) + \psi(x))\,dx \geq \int^* (f(x) + g(x))\,dx$$

Dies zeigt die Subadditivität des Oberintegrals. Die Ungleichung für das Unterintegral ist nun eine einfache Konsequenz:

$$\begin{aligned}\int_* (f(x) + g(x))\,dx &= -\int^* (-f(x) - g(x))\,dx \geq -\int^* (-f)(x)\,dx - \int^* (-g)(x)\,dx \\ &= \int_* f(x)\,dx + \int_* g(x)\,dx\end{aligned}$$

□

Satz 4.4. *Für beliebige Funktionen* $f_k\colon \mathbb{R}^n \to [0,\infty]$, $k \in \mathbb{N}$, *gilt*

$$\int^* \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)\,dx \leq \sum_{k=1}^{\infty} \int^* f_k(x)\,dx.$$

Beweis. Zu $\varepsilon > 0$ gibt es für jedes $k \in \mathbb{N}$ eine Funktion $\varphi_k \in \mathcal{H}_U$ mit $0 \leq f_k \leq \varphi_k$ und

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi_k(x)\,dx < \int^* f_k(x)\,dx + \frac{\varepsilon}{2^k}.$$

Nach Lemma 2.11 gilt $\varphi = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k \in \mathcal{H}_U$ und

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\,dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_k(x)\,dx \leq \sum_{k=1}^{\infty} \int^* f_k(x)\,dx + \varepsilon.$$

Wegen

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k \leq \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k = \varphi$$

folgt aus der Definition des Oberintegrals

$$\int^* \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)\,dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\,dx$$

also

$$\int^* \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)\,dx \leq \sum_{k=1}^{\infty} \int^* f_k(x)\,dx + \varepsilon.$$

Dies ist gleichwertig mit der Behauptung, da $\varepsilon > 0$ beliebig klein gewählt werden kann. $\square$

Definition 4.5. *Eine Abbildung $f\colon \mathbb{R}^n \to \bar{\mathbb{R}}$ mit*

$$-\infty < \int_* f(x)\,dx = \int^* f(x)\,dx < \infty.$$

*heißt **Lebesgue-integrierbar**. Den gemeinsamen Wert des Ober- und Unterintegrals nennt man **Lebesgue-Integral** von f, $\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx$. Die Menge der Lebesgue-integrierbaren Funktionen $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ bezeichnen wir mit $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$.*

Die Funktionen in $\mathcal{H}_U$ sind nach Lemma 4.2 somit genau dann Lebesgue-integrierbar, wenn ihr Integral gemäß Definition 2.7 endlich ist. Insbesondere sind somit stetige Funktionen mit kompaktem Träger Lebesgue-integrierbar. Lemma 4.2 zeigt auch auf, daß der Wert des Lebesgue-Integrals dieser Funktionen mit dem früheren Integral übereinstimmt. Aus diesem Grunde werden wir im Folgenden Lebesgue-integrierbare Funktionen kurz integrierbar bezeichnen.
Als nächstes leiten wir eine äquivalente Charakterisierung der Integrierbarkeit her.

Satz 4.6. *1) Eine Abbildung $f\colon \mathbb{R}^n \to \bar{\mathbb{R}}$ ist integrierbar genau dann, wenn*

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists g \in C_c(\mathbb{R}^n)\colon \int^* |f(x) - g(x)|\,dx < \varepsilon.$$

2) Es sei $(\varphi_k) \subset C_c(\mathbb{R}^n)$ und $f\colon \mathbb{R}^n \to \bar{\mathbb{R}}$ derart, daß

$$\lim_{k\to\infty} \int^* |f(x) - \varphi_k(x)|\,dx = 0.$$

Dann ist f integrierbar und es gilt

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx = \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_k(x)\,dx.$$

Beweis. 1) Es sei f integrierbar, also $\int^* f(x)\,dx = \int_* f(x)\,dx \in \mathbb{R}$. Zu beliebig gewähltem $\varepsilon > 0$ gibt es daher Funktionen $\varphi \in \mathcal{H}_U$ und $\psi \in \mathcal{H}_O$ mit $\psi \le f \le \varphi$, so daß

$$-\infty < \int_{\mathbb{R}^n} \psi(x)\,dx \le \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx \le \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\,dx < \infty$$

und

$$\int_{\mathbb{R}^n} (\varphi - \psi)(x)\,dx < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Bei der Herleitung der letzten Ungleichung verwendet man $-\psi \in \mathcal{H}_U$, somit $\varphi - \psi \in \mathcal{H}_U$ und $-\int_{\mathbb{R}^n} \psi(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} (-\psi)(x)\,dx$ (man achte darauf, daß auf der linken Seite das Integral in $\mathcal{H}_O$, auf der rechten Seite das Integral in $\mathcal{H}_U$ zur Anwendung kommt). Aus der Ungleichung

$$\varphi - f \le \varphi - \psi$$

folgert man

$$\int^* |\varphi(x) - f(x)|\,dx = \int^* (\varphi(x) - f(x))\,dx < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Weiters existiert nach der Definition des Integrals für Funktionen in $\mathcal{H}_U$ eine Abbildung $g \in C_c(\mathbb{R}^n)$ mit $g \le \varphi$ und

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\varphi(x) - g(x)|\,dx < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Insgesamt erhält man

$$\int^* |f(x) - g(x)|\,dx \le \int^* |f(x) - \varphi(x)|\,dx + \int^* |\varphi(x) - g(x)|\,dx < \varepsilon.$$

Umgekehrt existiere zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Funktion $g \in C_c(\mathbb{R}^n)$ mit $\int^* |f(x) - g(x)|\,dx < \varepsilon$. Nach der Definition des Oberintegrals existiert $h \in \mathcal{H}_U$ mit

$$|f - g| \le h \qquad \text{und} \qquad \int_{\mathbb{R}^n} h(x)\,dx < \varepsilon.$$

Es folgt

$$g - h \le f \le g + h$$

(wegen der Beschränktheit von g sind die Funktionen $g \pm h\colon \mathbb{R}^n \to \bar{\mathbb{R}}$ definiert), $g - h \in \mathcal{H}_O$, $g + h \in \mathcal{H}_U$ und somit

$$\int_{\mathbb{R}^n} (g + h)(x)\,dx - \int_{\mathbb{R}^n} (g - h)(x)\,dx = 2 \int_{\mathbb{R}^n} h(x)\,dx < 2\varepsilon.$$

Dies zeigt die Integrierbarkeit von f.
2) Die Integrierbarkeit von f ist eine Folge von 1). Es sei nun $\varepsilon > 0$ und $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ so groß, daß $\int^* |f(x) - \varphi_k(x)|\,dx < \varepsilon$ für $k \ge N(\varepsilon)$ gilt. Wie im Beweis des ersten Teiles schließt man auf die Existenz von $h_k \in \mathcal{H}_U$ mit

$$|f - \varphi_k| \le h_k \qquad \text{und} \qquad \int_{\mathbb{R}^n} h_k(x)\,dx < \varepsilon.$$

Aus $\varphi_k - h_k \leq f \leq \varphi_k + h_k$ folgt

$$\int_{\mathbb{R}^n} (\varphi_k - h_k)(x)\, dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} (\varphi_k + h_k)(x)\, dx,$$

und daraus wegen Lemma 2.9

$$\Big|\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, dx - \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_k(x)\, dx\Big| \leq \int_{\mathbb{R}^n} h_k(x)\, dx < \varepsilon$$

für $k \geq N(\varepsilon)$. □

Für das nächste Resultat ist folgende Notation zweckmäßig. Es sei $f\colon \mathbb{R}^n \to \bar{\mathbb{R}}$. Wir vereinbaren

$$f_+(x) := \max\{f(x), 0\}, \qquad f_-(x) := -\min\{f(x), 0\}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Offensichtlich gelten die Beziehungen

$$f = f_+ - f_- \qquad \text{und} \qquad |f| = f_+ + f_-.$$

Satz 4.7. *Ist $f\colon \mathbb{R}^n \to \bar{\mathbb{R}}$ integrierbar, dann sind auch $|f|$, f_+ und f_- integrierbar und es gilt*

$$(*) \qquad \Big|\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, dx\Big| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|\, dx.$$

Sind umgekehrt f_+ und f_- integrierbar, dann ist auch f integrierbar.

Beweis. Ist f integrierbar, dann gibt es nach Satz 4.6 zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Funktion $\varphi \in C_c(\mathbb{R}^n)$ mit $\int^* |f(x) - \varphi(x)|\, dx < \varepsilon$. Die Funktionen φ_+, φ_- und $|\varphi|$ liegen ebenfalls in $C_c(\mathbb{R}^n)$. Unter Berücksichtigung von

$$f_+(x) - \varphi_+(x) = \begin{cases} f(x) - \varphi(x), & f(x) \geq 0, \varphi(x) \geq 0, \\ f(x), & f(x) \geq 0, \varphi(x) < 0, \\ 0, & f(x) < 0, \varphi(x) < 0, \\ -\varphi(x), & f(x) < 0, \varphi(x) \geq 0, \end{cases}$$

(analoge für $f_-(x) - \varphi_-(x)$) findet man

$$|f_\pm - \varphi_\pm| \leq |f - \varphi| \qquad \text{und} \qquad \big||f| - |\varphi|\big| \leq |f - \varphi|.$$

Mit Lemma 4.3 folgt

$$\int^* |f_\pm(x) - \varphi_\pm(x)|\, dx < \varepsilon \qquad \text{und} \qquad \int^* \big||f(x)| - |\varphi(x)|\big|\, dx < \varepsilon,$$

was gleichwertig mit der Integrierbarkeit von $f_\pm$ und $|f|$ ist. Die Ungleichung $(*)$ ist eine Konsequenz der Monotonie des Ober- und des Unterintegrals und der Ungleichungen $-|f| \leq f \leq |f|$.

Sind umgekehrt die Funktionen f_+ und f_- integrierbar, dann gibt es nach Satz 4.6 Funktionen φ und $\psi \in C_c(\mathbb{R}^n)$ mit

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f_+(x) - \varphi(x)|\, dx < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{und} \qquad \int_{\mathbb{R}^n} |f_-(x) - \psi(x)|\, dx < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Dies hat

$$\int^* |f(x) - \varphi(x) + \psi(x)|\,dx \le \int^* |f_+(x) - \varphi(x)|\,dx + \int^* |f_-(x) - \psi(x)|\,dx < \varepsilon$$

zur Folge. Wegen $\varphi - \psi \in C_c(\mathbb{R}^n)$ bedeutet dies die Integrierbarkeit von f. □

Wir können nun zeigen, daß $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ ein Vektorraum ist. Die Addition von Funktionen in $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ ist definiert, da wir die Funktionswerte $\pm\infty$ für Elemente von $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ ausgeschlossen haben.

Satz 4.8. *Es seien f, $g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ und $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann sind auch $f + g$, $\lambda f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ und es gilt*

(1) $\int_{\mathbb{R}^n} (f+g)(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx + \int_{\mathbb{R}^n} g(x)\,dx$,
(2) $\int_{\mathbb{R}^n} (\lambda f)(x)\,dx = \lambda \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx$,
(3) *aus* $f \le g$ *folgt* $\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx \le \int_{\mathbb{R}^n} g(x)\,dx$.

Beweis. Wegen der Integrierbarkeit von f und g gibt es nach Satz 4.6-1) Folgen (φ_k), $(\psi_k) \subset C_c(\mathbb{R}^n)$ mit

$$\int^* |f(x) - \varphi_k(x)|\,dx \underset{k\to\infty}{\to} 0 \quad \text{und} \quad \int^* |g(x) - \psi_k(x)|\,dx \underset{k\to\infty}{\to} 0.$$

Mit Lemma 4.3 folgt dann

$$\int^* |\lambda f(x) - \lambda\varphi_k(x)|\,dx = \int^* |\lambda||f(x) - \varphi_k(x)|\,dx = |\lambda| \int^* |f(x) - \varphi_k(x)|\,dx \underset{k\to\infty}{\to} 0,$$

und

$$\int^* |(f+g)(x) - (\varphi_k + \psi_k)(x)|\,dx \le \int^* |f(x) - \varphi_k(x)|\,dx + \int^* |g(x) - \psi_k(x)|\,dx \underset{k\to\infty}{\to} 0.$$

Nach Satz 4.6-2) sind daher die Funktionen λf und $f + g$ integrierbar. Die Gültigkeit der Regeln (1) und (2) ergibt sich aus deren Gültigkeit in $C_c(\mathbb{R}^n)$. Die Aussage (3) ist ein Spezialfall von Lemma 4.3-1). □

Satz 4.9. *Es seien f, $g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$. Ist g beschränkt, dann gilt $fg \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$*

Beweis. Da g beschränkt ist, existiert eine Konstante $M > 0$ mit $|g(x)| \le M$, $x \in \mathbb{R}^n$. Nach Satz 4.6-1) gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ Funktionen φ, $\psi \in C_c(\mathbb{R}^n)$ mit

$$\int^* |f(x) - \varphi(x)|\,dx < \frac{\varepsilon}{2M} \quad \text{und} \quad \int^* |g(x) - \psi(x)|\,dx < \frac{\varepsilon}{2(\|\varphi\|_\infty + 1)}.$$

Aus der Ungleichung

$$|fg - \varphi\psi| \le |f - \varphi||g| + |\varphi||g - \psi| \le |f - \varphi|M + \|\varphi\|_\infty |g - \psi|$$

folgt mit Lemma 4.3

$$\int^* |(fg)(x) - (\varphi\psi)(x)|\,dx \le M \int^* |f(x) - \varphi(x)|\,dx + \|\varphi\|_\infty \int^* |g(x) - \psi(x)|\,dx < \varepsilon.$$

Gemäß Satz 4.6 ist fg integrierbar. Da die Werte von fg in $\mathbb{R}$ liegen, gilt $fg \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$. $\square$

Definition 4.10. *1) Eine Teilmenge $M \subset \mathbb{R}^n$ heißt* ***integrierbar****, wenn ihre charakteristische Funktion χ_M integrierbar ist.*
2) Ist $M \subset \mathbb{R}^n$ integrierbar, nennt man

$$\lambda(M) := \int_{\mathbb{R}^n} \chi_M(x)\,dx$$

Lebesgue Maß *(oder* ***Volumen****) von M.*

Da die charakteristische Funktion einer kompakten Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ in $\mathcal{H}_O$ liegt, sind nach Lemma 4.2-2 kompakte Mengen integrierbar und das Lebesgue Maß $\lambda(M)$ gemäß Definition 4.10 und das Volumen $V(M)$ gemäß Definition 3.1 stimmen überein.

Satz 4.11. *Eine offene oder abgeschlossene Teilmenge $M \subset \mathbb{R}^n$ ist integrierbar genau dann, wenn $\int^* \chi_M(x)\,dx < \infty$.*

Beweis. Die charakteristischen Funktionen offener bzw. abgeschlossener Mengen liegen in $\mathcal{H}_U$ bzw. $\mathcal{H}_O$. Die Behauptung folgt nun aus Lemma 4.2 und Definition 4.10. $\square$

Satz 4.12. *Es seien A, $B \subset \mathbb{R}^n$ integrierbare Mengen. Dann sind auch die Mengen $A \cap B$, $A \cup B$ und $A \setminus B$ integrierbar und es gilt*

$$\lambda(A \cup B) = \lambda(A) + \lambda(B) - \lambda(A \cap B),$$
$$\lambda(A \setminus B) = \lambda(A) - \lambda(A \cap B).$$

Beweis. Für charakteristische Funktionen gelten die Beziehungen

$$\chi_{A\cap B} = \chi_A \chi_B,$$
$$\chi_{A\cup B} = \chi_A + \chi_B - \chi_{A\cap B},$$
$$\chi_{A\setminus B} = \chi_A - \chi_{A\cap B}.$$

Da χ_A und χ_B integrierbar sind, folgt mit Satz 4.9 die Integrierbarkeit von $\chi_{A\cap B}$. Die Integrierbarkeit von $\chi_{A\cup B}$ und $\chi_{A\setminus B}$ ist dann eine Folge von Satz 4.8. $\square$

Wir wollen uns nun von der Einschränkung befreien, daß integrierbare Funktionen a priori auf $\mathbb{R}^n$ definiert sind.

Definition 4.13. *Es sei $M \subset \mathbb{R}^n$ eine* beliebige *Teilmenge. Eine Funktion $f\colon M \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ heißt* ***integrierbar über*** *M, falls die trivial fortgesetzte Funktion $\tilde{f}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$*

$$\tilde{f}(x) := \begin{cases} f(x), & x \in M, \\ 0, & \textit{sonst}, \end{cases}$$

integrierbar ist. Wir setzen dann

$$\int_M f(x)\,dx := \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{f}(x)\,dx.$$

Beispiel 4.14. 1) Es sei $f\colon K \to \mathbb{R}$ stetig und $K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt. Dann ist f über K integrierbar.

Beweis. Es sei $\tilde{f}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ die trivial fortgesetzte Funktion. Ist $f \geq 0$, dann ist $\tilde{f}$ von oben halbstetig. Sie gehört somit zu $\mathcal{H}_O$ und ist daher integrierbar. Im allgemeinen Fall schreiben wir

$$\tilde{f} = (\tilde{f} + c\chi_K) - c\chi_K,$$

$c \in \mathbb{R}_+$ so groß, daß $f + c\chi_K \geq 0$ gilt. Wegen $\tilde{f} + c\chi_K = \widetilde{f + c}$ ist $\tilde{f} + c\chi_K$ integrierbar. Die Integrierbarkeit von $\tilde{f}$ ergibt sich nun aus der Integrierbarkeit von χ_K. □

2) Es sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine beschränkte, offene Menge. Dann ist jede beschränkte, stetige Funktion $f\colon U \to \mathbb{R}$ integrierbar über U.
3) Es sei $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ und $M \subset \mathbb{R}^n$ integrierbar. Dann ist $f|_M$ integrierbar über M. Dies folgt aus der Beobachtung $\widetilde{f|_M} = f\chi_M$ und Satz 4.9.

5. Nullmengen

Definition 5.1. *1) Eine Teilmenge $M \subset \mathbb{R}^n$ heißt **Nullmenge**, wenn sie integrierbar ist und Lebesgue Maß null hat.*
*2) Ein Prädikat $E(x)$ gilt **fast überall**, wenn*

$$\{x \in \mathbb{R}^n \colon \neg E(x)\}$$

eine Nullmenge ist.

Wegen

$$0 \leq \int_* \chi_M(x)\,dx \leq \int^* \chi_M(x)\,dx$$

ist $M \subset \mathbb{R}^n$ eine Nullmenge genau dann, wenn

$$\int^* \chi_M(x)\,dx = 0.$$

Beispiel 5.2. Jede einelementige Menge $M = \{x_0\} \subset \mathbb{R}^n$ ist eine Nullmenge, da M in einen Würfel W_ε beliebig kleiner Seitenlänge $\varepsilon > 0$ eingeschlossen werden kann. Aus $\chi_M \leq \chi_{W_\varepsilon}$ folgt

$$\int^* \chi_M(x)\,dx \leq \int^* \chi_{W_\varepsilon}(x)\,dx = \varepsilon^n.$$

Satz 5.3. *1) Jede Teilmenge einer Nullmenge ist eine Nullmenge.*
2) Eine abzählbare Vereinigung von Nullmengen ergibt wieder eine Nullmenge.

Beweis. Der Beweis der Aussage 1) ist trivial, der Beweis von 2) ergibt sich aus der Beobachtung

$$\chi_M \leq \sum_{k=1}^{\infty} \chi_{M_k}$$

für $M = \cup_{=1}^{\infty} M_k$. Gilt $\lambda(M_k) = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$, ergibt Satz 4.4

$$\int^* \chi_M(x)\,dx \le \int^* \sum_{k=1}^{\infty} \chi_{M_k}(x)\,dx \le \sum_{k=1}^{\infty} \int^* \chi_{M_k}(x)\,dx = 0.$$

□

Korollar 5.4. Das Intervall $[0,1]$ ist überabzählbar.

Beweis. Wäre $[0,1]$ abzählbar, dann wäre $[0,1]$ eine Nullmenge im Widerspruch zu $V([0,1]) = 1$. □

Beispiel 5.5. Es sei $K \subset \mathbb{R}^{n-1}$ kompakt und $f\colon K \to \mathbb{R}$ stetig. Dann ist der Graph $G(f)$ von f eine Nullmenge in $\mathbb{R}^n$.
Um dies einzusehen, beachte man, daß der Graph von f wegen der Kompaktheit von K und der Stetigkeit von f kompakt ist. Somit ist $\chi_{G(f)}$ integrierbar. Wegen

$$G(f) = \{(x', t) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R} \colon x' \in K, t = f(x')\}.$$

gilt $\chi_{G(f)}(x', t) = \chi_K(x')\chi_{\{f(x')\}}(t)$. Die Behauptung ergibt sich nun aus dem Satz von Fubini und Beispiel 5.2

$$\begin{aligned}\int^* \chi_{G(f)}(x', t)\,dx'dt &= \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{G(f)}(x', t)\,dx'dt \\ &= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} [\int_{\mathbb{R}} \chi_{\{f(x')\}}(t)\,dt]\chi_K(x')\,dx' = 0.\end{aligned}$$

Als Folgerung halten wir fest, daß beispielsweise der Rand eines Kreises oder der Rand einer Kugel Nullmengen im $\mathbb{R}^2$ bzw. $\mathbb{R}^3$ sind.

Beispiel 5.6. Jede Hyperebene $H \subset \mathbb{R}^n$ ist eine Nullmenge. Man kann nämlich H auffassen als abzählbare Vereinigung kompakter Quader, von denen eine Seite die Länge null hat (Details Übung).

Nullmengen haben folgende bemerkenswerte Eigenschaft.

Lemma 5.7. *Es sei $N \subset \mathbb{R}^n$ eine Nullmenge und $u_N\colon \mathbb{R}^n \to [0, \infty]$ gegeben durch*

$$u_N(x) = \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{R}^n \setminus N, \\ \infty, & x \in N. \end{cases}$$

Dann ist u_N integrierbar und es gilt

$$\int_{\mathbb{R}^n} u_N(x)\,dx = 0.$$

Beweis. Man überzeuge sich von der Gültigkeit von $u_N = \sum_{k=1}^{\infty} \chi_N$. Aus Satz 4.4 folgt daher

$$\int^* u_N\,dx \le \sum_{k=1}^{\infty} \int^* \chi_N\,dx = 0.$$

Andererseits gilt $0 \le \int_* u_N\,dx \le \int^* u_N\,dx \le 0$. Dies zeigt die Behauptung. □

Mit Hilfe dieses Resultates können wir eine fundamentale Eigenschaft integrierbarer Funktionen zeigen.

SATZ 5.8. *Stimmen zwei Funktionen f, $g\colon \mathbb{R}^n \to \bar{\mathbb{R}}$ fast überall überein und ist f integrierbar, dann ist auch g integrierbar und es gilt*

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} g(x)\,dx.$$

BEWEIS. Es sei $(\varphi_k) \subset C_c(\mathbb{R}^n)$ eine Folge von Funktionen mit

$$\lim_{k\to\infty} \int^* |f(x) - \varphi_k(x)|\,dx = 0,$$

vgl. Satz 4.6. Ferner seien

$$N = \{x \in \mathbb{R}^n \colon f(x) \neq g(x)\}$$

und u_N wie in Lemma 5.7. Dann gilt

$$|g - \varphi_k| \leq |f - \varphi_k| + u_N.$$

Da N eine Nullmenge ist, ergibt sich

$$\begin{aligned}\int^* |g(x) - \varphi_k(x)|\,dx &\leq \int^* |f(x) - \varphi_k(x)|\,dx + \int^* u_N(x)\,dx \\ &= \int^* |f(x) - \varphi_k(x)|\,dx \underset{k\to\infty}{\to} 0.\end{aligned}$$

Bezieht man sich wieder auf Satz 4.6, folgt die Integrierbarkeit von g und

$$\int_{\mathbb{R}^n} g(x)\,dx = \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_k(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx.$$

□

Satz 5.8 zeigt, daß man die Werte einer integrierbaren Funktion auf einer Nullmenge abändern kann, ohne den Wert des Integrals zu verändern. Wir zeigen nun, daß eine integrierbare Funktion die Werte $\pm\infty$ höchstens auf einer Nullmenge annehmen kann.

SATZ 5.9. *Es sei $f\colon \mathbb{R}^n \to \bar{\mathbb{R}}$ und es gelte*

$$M := \int^* |f(x)|\,dx < \infty.$$

Dann ist die Menge

$$N = \{x \in \mathbb{R}^n \colon |f(x)| = \infty\}$$

eine Nullmenge.

BEWEIS. Für alle $\varepsilon > 0$ gilt

$$\chi_N \leq \varepsilon |f|$$

und somit

$$\int^* \chi_N(x)\,dx \leq \varepsilon \int^* |f(x)|\,dx \leq \varepsilon M.$$

Dies ist nur möglich, falls $\int^* \chi_N(x)\,dx = 0$, also N eine Nullmenge ist. □

Als Konsequenz aus den letzten beiden Sätzen erkennen wir, daß man jede integrierbare Funktion durch eine fast überall gleiche Funktion, die allerdings nur endliche Werte annimmt, ersetzen kann, ohne den Wert des Integrals zu verändern. Die Beschränkung auf endliche Funktionswerte für Funktionen in $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ stellt demnach keine Beschränkung der Allgemeinheit dar.

Satz 5.10. *Für $f\colon \mathbb{R}^n \to \bar{\mathbb{R}}$ gilt*

$$\int^* |f(x)|\,dx = 0$$

genau dann, wenn $f = 0$ fast überall gilt.

Beweis. Sei $A = \{x \in \mathbb{R}^n\colon f(x) \neq 0\}$. Ist A eine Nullmenge und u_A definiert wie in Lemma 5.7, dann folgt aus

$$|f| \le u_A$$

mit Lemma 4.3 und Lemma 5.7

$$\int^* |f(x)|\,dx \le \int^* u_A(x)\,dx = 0$$

Es sei nun umgekehrt $\int^* |f(x)| = 0$. Für $F(x) = \sum_{k=1}^\infty |f(x)|$, $x \in \mathbb{R}^n$, gilt $F = u_A$ und somit $\chi_A \le u_A$. Mit Satz 4.4 erhält man

$$\int^* \chi_A\,dx \le \int^* u_A\,dx = \int^* \sum_{k=1}^\infty |f(x)|\,dx \le \sum_{k=1}^\infty \int^* |f(x)|\,dx = 0$$

Somit ist $\chi(A)$ integrierbar und es gilt $\lambda(A) = 0$. □

Für $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ setzen wir

$$\|f\|_1 := \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|\,dx.$$

Die Abbildung $\|\cdot\|_1\colon \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ besitzt folgende Eigenschaften. Es seien f, $g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ und $\lambda \in \mathbb{R}$, dann gelten

1. $\|f\|_1 \ge 0$,
2. $\|\lambda f\|_1 = |\lambda|\;\|f\|_1$,
3. $\|f+g\|_1 \le \|f\|_1 + \|g\|_1$.

Der Satz 5.10 zeigt allerdings, daß aus $\|f\|_1 = 0$ nicht $f = 0$ gefolgert werden kann. Somit definiert $\|\cdot\|_1$ keine Norm in $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$, sehr wohl aber z.B. in $C_c(\mathbb{R}^n)$.
Der weitere Ausbau der Integralrechnung bleibt der Spezialvorlesung “Maß- und Integrationstheorie vorbehalten. Wir beschränken uns hier auf die Formulierung der zentralen Sätze und einige Anwendungen.

6. Die zentralen Sätze der Integralrechnung

6.1. Der Satz von Fubini.

SATZ 6.1 (Fubini). *Es sei* $f\colon \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ *integrierbar. Dann gibt es eine Nullmenge* $N \subset \mathbb{R}^m$*, so daß für jedes feste* $\eta \in \mathbb{R}^m \setminus N$ *die Funktion*

$$\begin{aligned}\mathbb{R}^k &\to \mathbb{R}\\ \xi &\mapsto f(\xi,\eta)\end{aligned}$$

integrierbar ist. Setzt man

$$F(\eta) = \begin{cases} \int_{\mathbb{R}^k} f(\xi,\eta)\,d\xi, & \eta \in \mathbb{R}^m \setminus N,\\ 0, & \eta \in N,\end{cases}$$

dann ist die Funktion $F\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ *integrierbar und es gilt mit* $x = (\xi,\eta)$

$$\int_{\mathbb{R}^{k+m}} f(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^m} F(\eta)\,d\eta = \int_{\mathbb{R}^m} [\int_{\mathbb{R}^k} f(\xi,\eta)\,d\xi]\,d\eta.$$

BEMERKUNG 6.2. Da die Vertauschung der Variablen $(\xi,\eta) \to (\eta,\xi)$ ein Automorphismus des $\mathbb{R}^{k+m}$ mit Determinante ± 1 ist, folgt mit Satz 2.14, der offenbar auch für integrierbare Funktionen gilt,

$$\int_{\mathbb{R}^m} [\int_{\mathbb{R}^k} f(\xi,\eta)\,d\xi]\,d\eta = \int_{\mathbb{R}^k} [\int_{\mathbb{R}^m} f(\xi,\eta)\,d\eta]\,d\xi.$$

In vielen Anwendungen ist eine stetige Funktion über eine kompakte Teilmenge $K \subset \mathbb{R}^n$ zu integrieren. Wir zeigen nun, wie man mit Hilfe des Satzes von Fubini dieses Problem auf die Berechnung von n iterierten Ingeralen in einer Veränderlichen zurückführen kann. Es sei also $f \in C(K,\mathbb{R})$. Nach Definition 4.13 gilt

$$\int_K f(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{f}(x)\chi_K(x)\,dx,$$

wobei $\tilde{f}$ die triviale Fortsetzung von f durch Null bezeichnet. Nach Beispiel 4.14 und Satz 4.9 ist $\tilde{f}\chi_K$ integrierbar. Partitionieren wir $x \in \mathbb{R}^n$ in der Form $x = (x',t)$, $x' \in \mathbb{R}^{n-1}$, $t \in \mathbb{R}$, folgt aus dem Satz von Fubini (wir können sogar die schwächere Version Satz 2.12 verwenden) die Integrierbarkeit von $t \mapsto \tilde{f}(x',t)\chi_K(x',t)$ für alle $x' \in \mathbb{R}^{n-1}$. Für jedes $x' \in \mathbb{R}^{n-1}$ betrachten wir die Schnittmengen

$$K_{x'} = \{t \in \mathbb{R}\colon (x',t) \in K\}.$$

Die Abbildung $t \mapsto \chi_K(x',t)$ stimmt also mit $\chi_{K_{x'}}$ überein. Nach dem Satz von Fubini gilt ferner

$$(*)\qquad \begin{aligned}\int_K f(x)\,dx &= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} [\int_{\mathbb{R}} \tilde{f}(x',t)\chi_K(x',t)\,dt]\,dx'\\ &= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} [\int_{K_{x'}} \tilde{f}(x',t)\,dt]\,dx'.\end{aligned}$$

Setzt man

$$B' = \{x' \in \mathbb{R}^{n-1} \colon K_{x'} \neq \emptyset\},$$

läßt sich $(*)$ schreiben in der suggestiven Form

$$(\dagger) \qquad \int_K f(x)\,dx = \int_{B'} [\int_{K_{x'}} f(x',t)\,dt]\,dx'.$$

Beispiel 6.3. Wir berechnen das Volumen des Körpers

$$K = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x+y+z \leq \sqrt{2}, x^2+y^2 \leq 1\}.$$

Wir setzen im ersten Reduktionsschritt

$$B' = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x \geq 0, y \geq 0, x^2+y^2 \leq 1\}$$

und für $(x,y) \in B'$

$$K_{(x,y)} = [0, \sqrt{2} - x - y].$$

Wir erhalten mit $(\dagger)$

$$V(K) = \int_{\mathbb{R}^3} \chi_K(x,y,z)\,dxdydz = \int_{B'} [\int_0^{\sqrt{2}-x-y} dz]\,dxdy = \int_{B'} (\sqrt{2}-x-y)\,dxdy.$$

Auf das letzte Integral wenden wir wieder $(\dagger)$ an und setzen im zweiten Reduktionsschritt

$$\begin{aligned} B'' &= [0,1], \\ K_x &= [0, \sqrt{1-x^2}], \quad x \in B''. \end{aligned}$$

Dies ergibt

$$\begin{aligned} V(K) &= \int_{B'} (\sqrt{2}-x-y)\,dxdy = \int_{x=0}^1 [\int_{y=0}^{\sqrt{1-x^2}} (\sqrt{2}-x-y)\,dy]\,dx \\ &= \int_{x=0}^1 [\sqrt{2}y - xy - \frac{1}{2}y^2]|_{y=0}^{\sqrt{1-x^2}} dx = \int_0^1 [(\sqrt{2}-x)\sqrt{1-x^2} - \frac{1}{2}(1-x^2)]\,dx \\ &= \frac{\pi}{2\sqrt{2}} - \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Die tragende Voraussetzung des Satzes von Fubini ist die Integrierbarkeit der Abbildung $f \colon \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, welche manchmal nicht leicht zu verifizieren ist. In solchen Fällen kann der Satz von Tonelli hilfreich sein.

Satz 6.4 (Tonelli). *Es sei $f \colon \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$. Ist für fast alle $\eta \in \mathbb{R}^m$ die Abbildung*

$$\xi \mapsto |f(\xi,\eta)|$$

integrierbar und existiert das iterierte Integral

$$\int_{\mathbb{R}^m} [\int_{\mathbb{R}^k} |f(\xi,\eta)|\,d\xi]\,d\eta < \infty,$$

dann ist $f \colon \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ integrierbar.

6.2. Konvergenzsätze. Die guten Konvergenzeigenschaften des Lebesgueintegrales gehören zu den wichtigsten Gründen für dessen weite Verbreitung. Wir zitieren zwei zentrale Ergebnisse.

SATZ 6.5 (B.Levi, monotone Konvergenz). *Es sei $f_k\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$, eine Folge integrierbarer Funktionen mit $f_k \leq f_{k+1}$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Gilt*

$$M := \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_k(x)\,dx < M,$$

dann ist $f = \lim_{k\to\infty} f_k$ integrierbar und es ist

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx = \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_k(x)\,dx.$$

SATZ 6.6 (H.Lebesgue, majorisierte Konvergenz). *Es sei $f_k\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$, eine Folge integrierbarer Funktionen, welche fast überall punktweise gegen eine Funktion $f\colon \mathbb{R}^n \to \bar{\mathbb{R}}$ konvergiert. Gibt es eine integrierbare Funktion $F\colon \mathbb{R}^n \to [0,\infty]$ mit*

$$\forall k \in \mathbb{N}\colon |f_k(x)| \leq F(x),$$

fast überall auf $\mathbb{R}^n$, dann ist f integrierbar und es gilt

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx = \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} f_k(x)\,dx.$$

Wir können nun mühelos zeigen, daß Regelfunktionen Lebesgue-integrierbar sind und ihr Lebesgue Integral mit dem Cauchy Integral übereinstimmt. Es sei also $f \in \mathcal{R}(I,\mathbb{R})$, $I = [a,b]$, eine Regelfunktion. Dann gibt es eine Folge von Treppenfunktionen $(t_k) \subset \mathcal{T}(I,\mathbb{R})$ derart, daß $t_k \rightrightarrows f$. Da f beschränkt ist, folgt aus der gleichmäßigen Konvergenz der Folge (t_k) die Existenz einer positiven Konstanten M mit

$$\forall k \in \mathbb{N} \forall x \in I\colon |t_k(x)| \leq M.$$

Da I kompakt ist, ist die Funktion $F(x) = M$, $x \in I$, und $F(x) = 0$, $x \in \mathbb{R} \setminus I$, integrierbar. Nach dem Satz von Lebesgue ist daher $\tilde{f}$ integrierbar, also f integrierbar über I und es gilt

$$\int_I f(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{f}(x)\,dx = \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{t}_k(x)\,dx = \lim_{k\to\infty} \int_I t_k(x)\,dx.$$

Auf der rechten Seite steht das Lebesgue Integral von f, die linke Seite definiert gerade das Cauchy Integral von f.
Als weitere Anwendung des Satzes von der majorisierten Konvergenz betrachten wir parameterabhängige Integrale.

SATZ 6.7. *Es sei $f\colon \mathbb{R}^n \times D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^k$ und $t_0 \in D$. Es gelte*

(1) $\forall t \in D\colon f(\cdot,t) \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$.,
(2) *für fast alle $x \in \mathbb{R}^n$ sei $t \mapsto f(x,t)$ stetig in t_0,*

(3) *es existiert eine integrierbare Funktion* $F\colon \mathbb{R}^n \to [0,\infty]$, *so daß für alle* $t \in D$

$$|f(x,t)| \leq F(x)$$

für fast alle $x \in \mathbb{R}^n$ *gilt.*

Dann ist die Abbildung

$$g\colon \begin{cases} I \to \mathbb{R}, \\ t \mapsto \int_{\mathbb{R}^n} f(x,t)\,dx \end{cases}$$

stetig in $t = t_0$.

Beweis. Vgl. Satz VII-6.1. □

Satz 6.8. *Es sei* $I \subset \mathbb{R}$ *ein offenes Intervall und* $f\colon \mathbb{R}^n \times I \to \mathbb{R}$. *Ferner gelte*

(1) $\forall t \in I\colon f(\cdot,t) \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$,
(2) *für fast alle* $x \in \mathbb{R}^n$ *ist* $t \mapsto f(x,t)$ *differenzierbar auf I,*
(3) *es gibt eine integrierbare Funktion* $F\colon \mathbb{R}^n \to [0,\infty)$, *so daß für alle* $t \in I$

$$|\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)| \leq F(x)$$

für fast alle $x \in \mathbb{R}^n$ *gilt.*

Dann ist die Abbildung

$$g\colon \begin{cases} D \to \mathbb{R}, \\ t \mapsto \int_{\mathbb{R}^n} f(x,t)\,dx \end{cases}$$

differenzierbar auf I *und es gilt*

$$g'(t) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\,dx.$$

Beweis. Vgl. Satz VII-6.3. □

7. Die Transformationsformel

Definition 7.1. *Es seien* $U, V \subset \mathbb{R}^n$ *offene Mengen. Ein Homöomorphismus* $\phi\colon U \to V$ *heißt* ***Diffeomorphismus*** , *wenn* ϕ *und* ϕ^{-1} *stetig differenzierbar sind.*

Satz 7.2 (Transformationssatz). *Es seien* $U, V \subset \mathbb{R}^n$ *offene Mengen und* $\phi\colon U \to V$ *ein Diffeomorphismus. Eine Abbildung* $f\colon V \to \mathbb{R}$ *ist genau dann integrierbar, wenn* $(f \circ \phi)|det\, D\phi|$ *über* U *integrierbar ist. Es gilt dann*

$$\int_{\phi(U)} f(y)\,dy = \int_U f(\phi(x))|det\, D\phi(x)|\,dx.$$

Korollar 7.3 (Ebene Polarkoordinaten). Es sei

$$\phi\colon \begin{cases} [0,\infty) \times [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2 \\ (r,\varphi) \to (r\cos\varphi, r\sin\varphi). \end{cases}$$

Eine Abbildung $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ist integrierbar genau dann, wenn die Abbildung

$$(r, \varphi) \to r f(\phi(r, \varphi))$$

über $[0, \infty) \times [0, 2\pi]$ integrierbar ist. Es gilt dann

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x, y)\, dxdy = \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) r\, drd\varphi.$$

Beweis. Wir setzen in Satz 7.2

$$U = \{(r, \varphi)\colon r > 0, 0 < \varphi < 2\pi\}$$

und

$$V = \phi(U) = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0)\colon x \geq 0\}.$$

Dann ist ϕ ein Diffeomorphismus von U auf V. Wegen $|\det D\phi(r, \varphi)| = r$ folgt die Behauptung aus dem Transformationssatz, da ∂U und ∂V Nullmengen sind. □

Beispiel 7.4. Wir demonstrieren eine elegante Berechnung des Gauß'schen Integrals $\int_0^\infty e^{-x^2}\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

Beweis. Wir zeigen zuerst die Existenz des Integrals. Wir gehen aus von den Treppenfunktionen

$$t_n(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0, 2), \\ \frac{1}{k^2}, & x \in [k, k+1), \quad 2 \leq k \leq n-1, \\ \frac{1}{n^2}, & x \in [n, n+1] \end{cases}$$

$n \geq 2$. Treppenfunktionen sind integrierbar und es gilt für alle $n \geq 2$

$$\int_0^\infty t_n(x) = 1 + \sum_{i=1}^n \frac{1}{i^2} \leq 1 + \sum_{i=1}^\infty \frac{1}{i^2}.$$

Wir definieren nun für $n \geq 2$ die Funktionen

$$f_n(x) = \begin{cases} e^{-x^2}, & x \in [0, n+1], \\ 0, & x > n+1. \end{cases}$$

Diese Funktionen sind integrierbar, vgl. Beispiel 4.14, es gilt $f_n \leq t_n$ und somit

$$\int_0^{n+1} f_n(x)\, dx \leq \int_0^{n+1} t_n(x)\, dx \leq 1 + \sum_{i=1}^\infty \frac{1}{i^2}$$

für alle $n \geq 2$. Berücksichtigt man noch $f_n \uparrow f$ mit $f(x) = e^{-x^2}$, $x \geq 0$, folgt aus dem Satz von B. Levi die Integrierbarkeit von f, d.h

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\, dx < \infty.$$

Dann existiert aber auch das iterierte Integral

$$\int_0^\infty [\int_0^\infty e^{-x^2-y^2}\, dx]\, dy = (\int_0^\infty e^{-x^2}\, dx)^2.$$

Nach dem Satz 6.4 von Tonelli ist die Abbildung $h\colon [0,\infty) \times [0,\infty) \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto e^{-x^2+-y^2}$ integrierbar. Kombiniert man daher den Satz von Fubini und das Korollar 7.3, ergibt sich

$$\begin{aligned}(\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx)^2 &= \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-x^2-y^2}\,dxdy = \int_0^\infty \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-r^2} r\,drd\varphi \\ &= \int_0^\infty e^{-r^2} r\,dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi = \frac{1}{2}\frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

$\square$

Index