Chaos, Zufall und Wahrscheinlichkeit

Chaos

https://www.wandtattoo.de/images/product_images/original_images/4748_4-wandtattoo-hier-herrscht-das-chaos.png (09.03.2021)

Hesiod (ca. 700 v. Chr.): Theogonie

[griechischer Mythos von der Entstehung der Götter und der Welt]

Zuallererst wahrlich entstand das Chaos, 116
aber dann die breitbeinige Gaia [...] 117
und der dämmrige Tartaros* im Inneren der breitstraßigen Erde 119
und der Eros, der schönste unter den unsterblichen Göttern, der gliederlösende. [...] 120
Aus dem Chaos entstand der Erebos** und die dunkle Nacht [...] 123

** Höhle, Unterwelt, Pendant zur Hölle in der griechischen Mythologie | ** (personifizierte) Finsternis*
Hesiod: Theogonie. Hrsg. Von Karl Albert. Sankt Augustin 1990 (4. Aufl. | Academia Verlag Richarz) S. 53

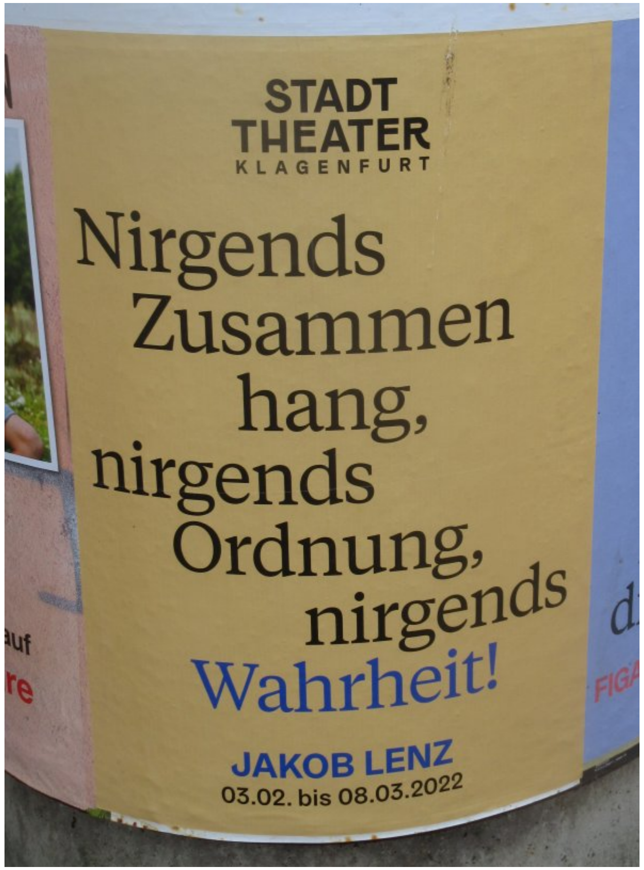
Chaos:

- keine Ordnung, keine Regeln *(im Gegensatz zum **Kosmos**)*
- wohl aber schöpferisches Potential

Thema der Mathematik?
Chaostheorie meint **deterministisches Chaos**:

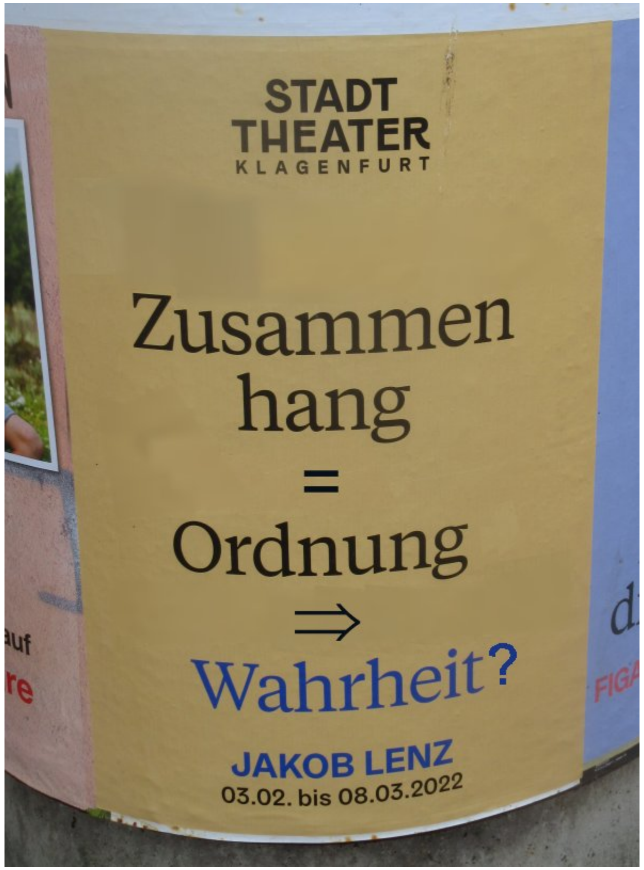
- Bezeichnung für die praktische Unvorhersagbarkeit von Prozessen – trotz bekannter Regeln (z.B. bei Wetterphänomenen, Bahnen von Himmelskörpern, ...)
- **Schmetterlingseffekt** nach dem Titel eines Vortrags 1972 von Edward Lorenz (1917 – 2008): „Kann der Flügelschlag eines Schmetterlings in Brasilien einen Tornado in Texas auslösen?"
- **Schneeballeffekt**: kleine Effekte können sich in einer Kettenreaktion bis zur (Lawinen)Katastrophe selbst verstärken

Chaos – Ordnung



Eigenes Foto | Klagenfurt 02.02.2022

Chaos – Ordnung



Eigenes Foto | subjektive LeseART

Chaos – Ordnung

oder:

Das Genie beherrscht **sein** Chaos,

Der Kluge **erkennt** Ordnung!

https://images-na.ssl-images-amazon.com/images/I/71Vt5VY80WL._AC_SL1500_.jpg (03.03.2020)
https://www.picclickimg.com/00/s/MTYwMFgxNjAw/z/HzwAAOSwTxJcMLCQ/$/Wandtattoo-Spruch-kluge-Ordnung-Genie-Chaos-Sticker-_1.jpg (09.03.2021)

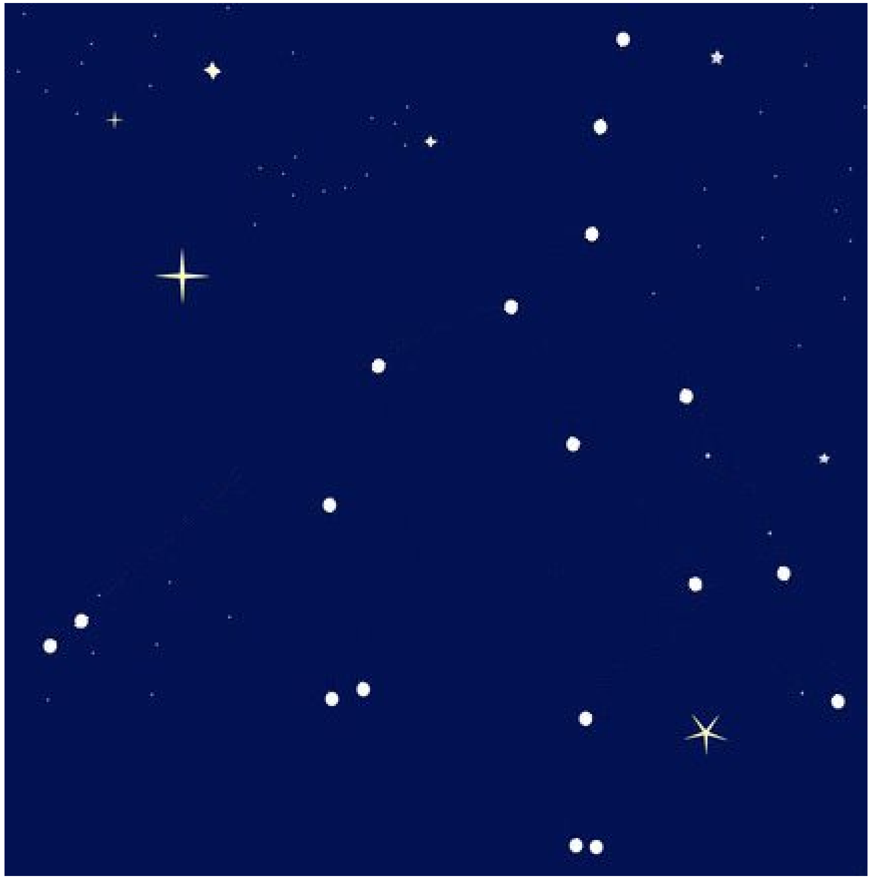
Erkennen wir Ordnung?

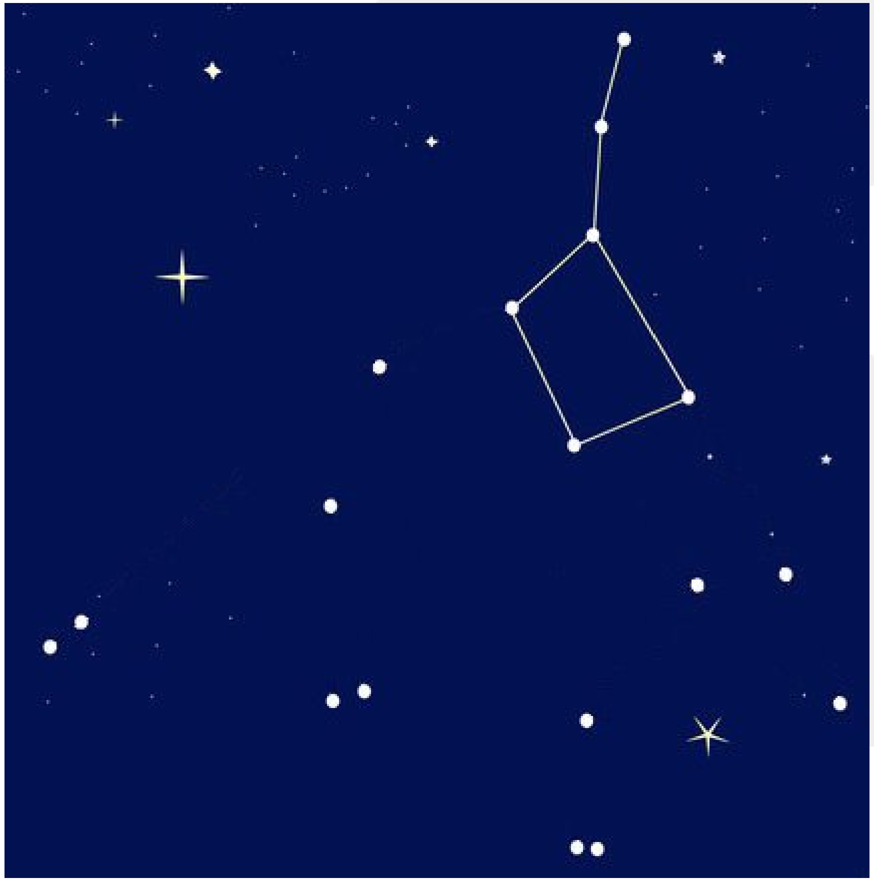
… oder schaffen wir Ordnung?

Gibt es Ordnung in der Realität oder (nur) in unserer Vorstellung?

Erkennen wir Ordnung?

Bsp. 1 von 3



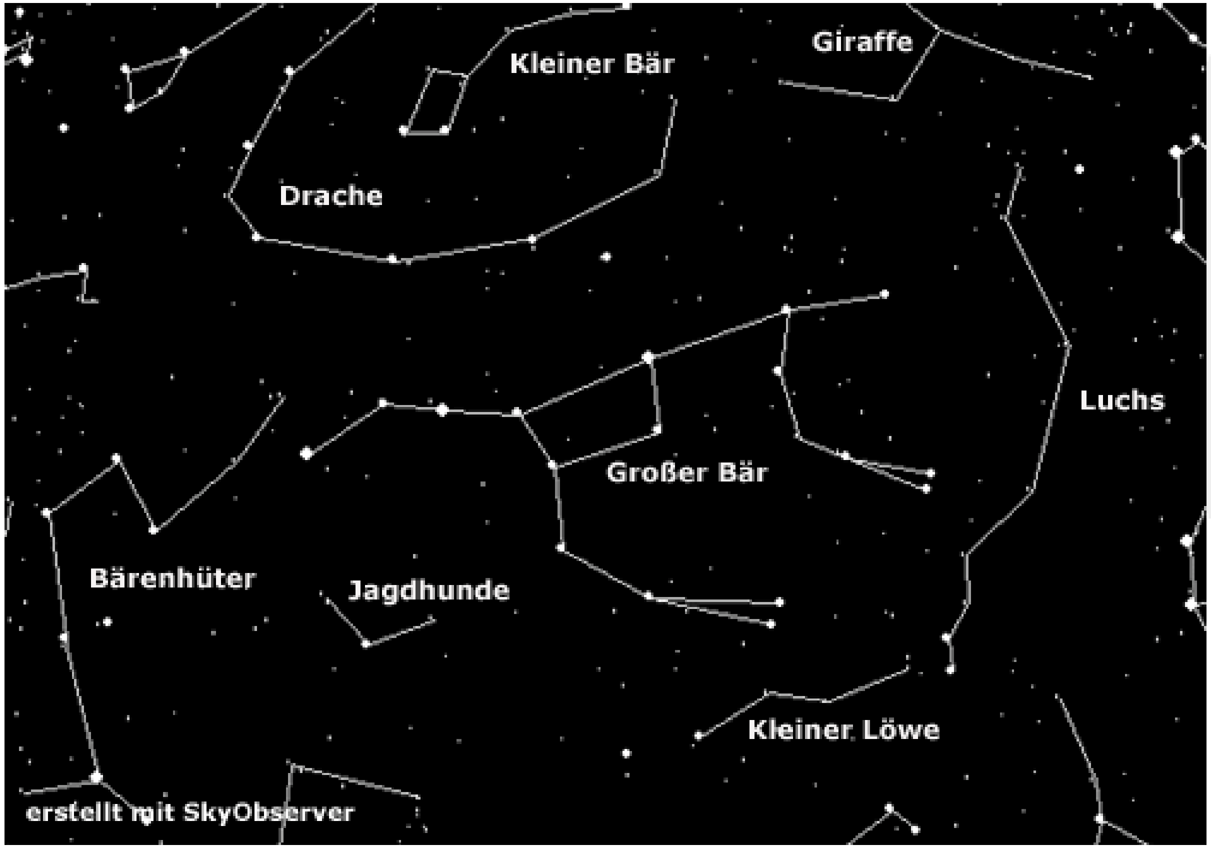


Erkennen wir Ordnung?

Bsp. 1 von 3

Erkennen wir Ordnung?

Bsp. 1 von 3



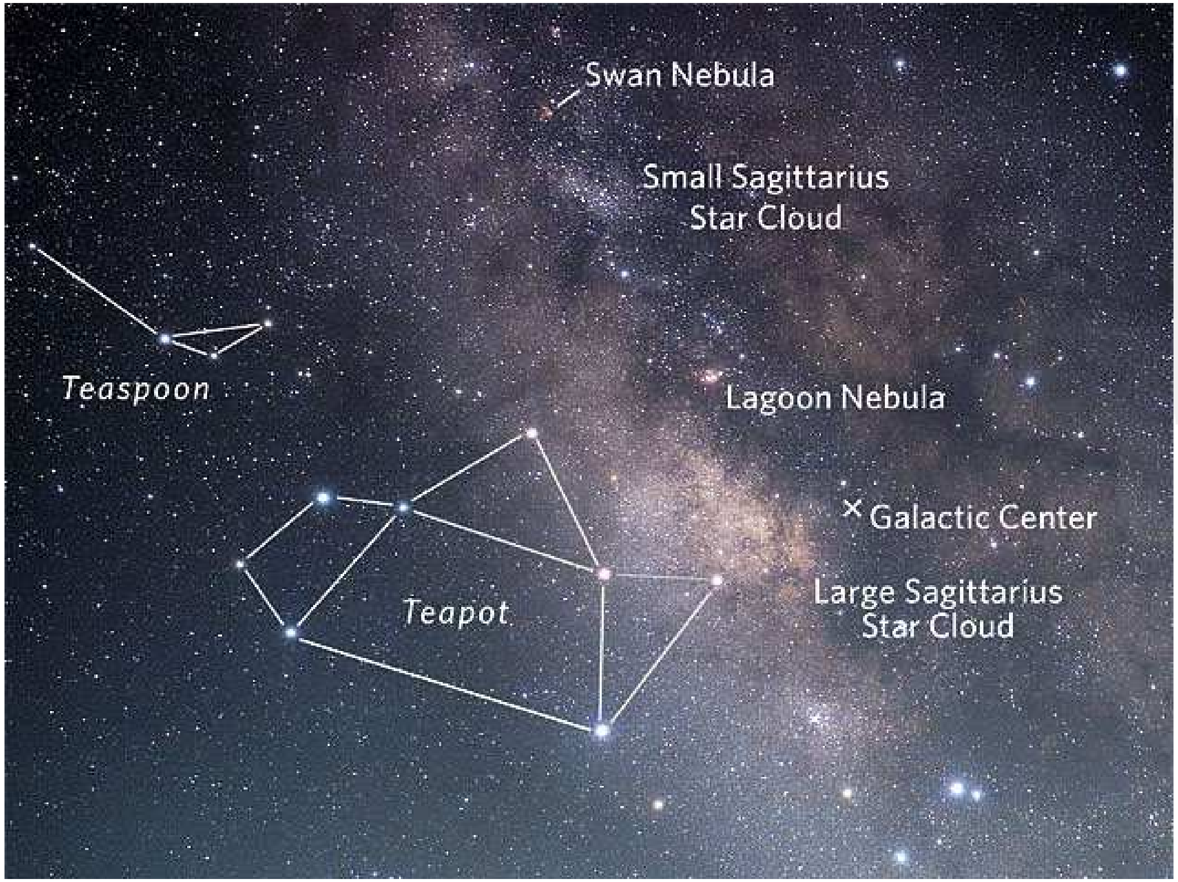
http://www.br-online.de/wissen-bildung/spacenight/sterngucker/foto/grosser-wagen-umg.gif (19.07.2017)

Eigentlich ist es eine große Bärin, die übers Firmament trabt: In der griechischen Mythologie war sie einst die Nymphe Kallisto.
Göttervater Zeus zeugte mit ihr einen Sohn, Arkas.
Zeus' Gattin Hera verwandelte Kallisto aus Eifersucht in eine Bärin, die fortan durch die Wälder streifte. Damit der Sohn die Mutter nicht bei der Jagd tötete, verwandelte Zeus Arkas in den Kleinen Bären.
Er packte beide an ihren Schwänzen und schleuderte sie ans Himmelszelt – daher die unnatürlich langen Schwänze der beiden Bären.

http://www.br.de/sternenhimmel/sterne-sternbilder-sternenhimmel-sternzeichen-november-100.html (17.07.2017)

Erkennen wir Ordnung?

Bsp. 1 von 3



http://www.skyandtelescope.com/wp-content/uploads/Sagittarius-Teapot-Messiers_L.jpg (19.07.2017)

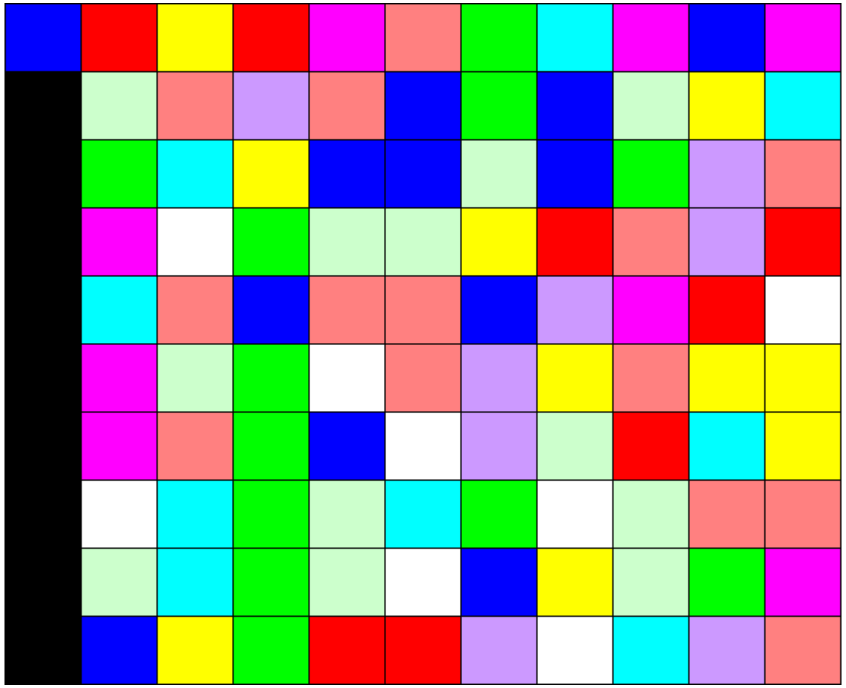
Erkennen wir Ordnung?

Exkurs

http://farm5.static.flickr.com/4113/5036255798_8f7cdbb1c1_b.jpg (19.07.2017)

Erkennen wir Ordnung?

Bsp. 2 von 3



3	1	4	1	5	9	2	6	5	3	5
	8	9	7	9	3	2	3	8	4	6
	2	6	4	3	3	8	3	2	7	9
	5	0	2	8	8	4	1	9	7	1
	6	9	3	9	9	3	7	5	1	0
	5	8	2	0	9	7	4	9	4	4
	5	9	2	3	0	7	8	1	6	4
	0	6	2	8	6	2	0	8	9	9
	8	6	2	8	0	3	4	8	2	5
	3	4	2	1	1	7	0	6	7	9

$\pi = 3{,}14159265358979323846264338327950288419716939937510582097494459230781640628 6\ldots$

Erkennen wir Ordnung?

Bsp. 2 von 3

*Wien | Passage Karlsplatz – Secession | Ken **Lum** | 478 + 10 Dezimalstellen von π und mehr…*

Erkennen wir Ordnung?

Bsp. 3 von 3

0	1	2	3	4	5	6	7	?	?

8	3	1	5	9	0	6	7	?	?

Erkennen wir Ordnung?

Bsp. 3 von 3

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

8	3	1	5	9	0	6	7	?	?
acht	drei	eins	fünf	neun	null	sechs	sieben	?	?

Erkennen wir Ordnung?

Bsp. 3 von 3

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

8	3	1	5	9	0	6	7	4	2
acht	drei	eins	fünf	neun	null	sechs	sieben	vier	zwei

Zufall

https://cdn.pixabay.com/photo/2017/01/14/16/01/cube-1979772__340.jpg (09.03.2021)

Ein Ereignis (das Ergebnis eines Experiments), das nicht vorhersagbar ist, weil

- es keine Ursache(n) hat
- seine Ursache(n) unbekannt sind
- seine Ursache(n) sehr komplex und somit unüberschaubar sind

Typisches Beispiel: Glücksspiele (Münzwurf, Würfeln, Roulette, Lotto, …)

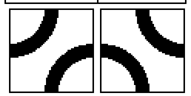
Erkennen wir Zufall?

Bsp. 1 von 3

0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
1	0	1	0	1	0	1	0	1	0
0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
1	0	1	0	1	0	1	0	1	0
0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
1	0	1	0	1	0	1	0	1	0
0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
1	0	1	0	1	0	1	0	1	0
0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
1	0	1	0	1	0	1	0	1	0

0	0	0	1	1	0	1	1	0	1
0	1	0	0	1	1	0	0	1	0
1	1	1	0	0	1	1	0	1	0
0	0	1	0	1	1	0	0	1	1
0	0	1	0	0	1	1	0	1	1
0	0	0	0	1	0	1	1	1	1
1	0	1	1	0	0	0	0	1	1
1	1	1	0	0	0	1	1	1	1
0	0	1	0	1	0	0	0	0	1
1	1	1	0	1	1	0	1	0	0

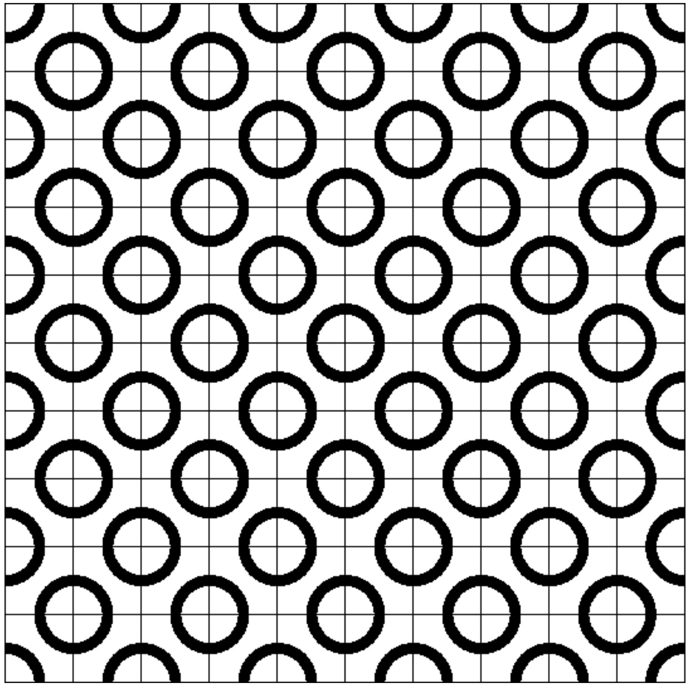
0	1

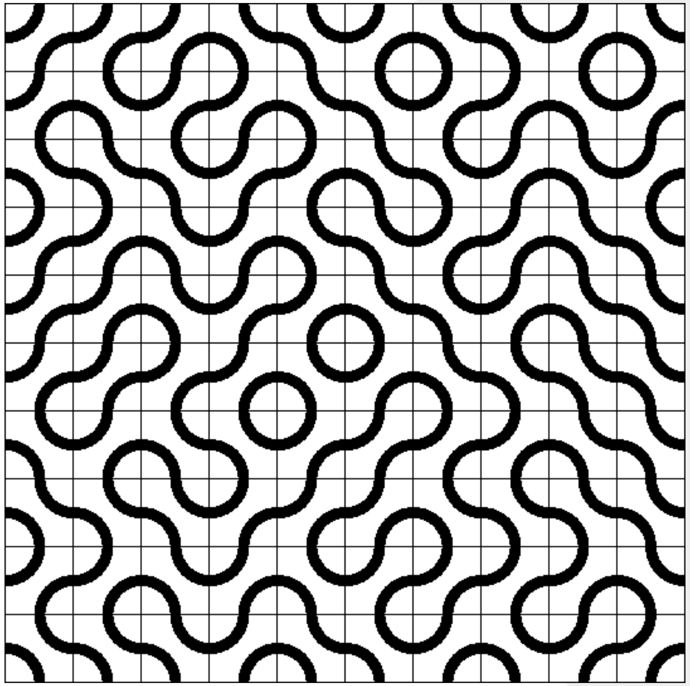


Père Sébastian **Truchet** (1657-1729):

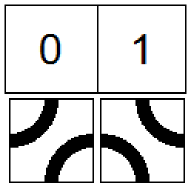
Erkennen wir Zufall?

Bsp. 1 von 3





Père Sébastian **Truchet** (1657-1729):



Erkennen wir Zufall?

Bsp. 1 von 3

Wien Mitte | The Mall | Drehort für 6 Folgen der Serie „Am Anschlag – Die Macht der Kränkung“ (D/Ö 2021)

Erkennen wir Zufall?

Bsp. 2 von 3

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

7	5	2	3	10	4	6	9	8	1

Erkennen wir Zufall?

Bsp. 2 von 3

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
7^n	7	49	243	2401	16807	117649	823543	5764801	40353607	282475249
7^n mod 11	7	5	2	3	10	4	6	9	8	1

Erkennen wir Zufall?

Bsp. 2 von 3

n

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	…						

7^n mod 11

7	5	2	3	10	4	6	9	8	1
7	5	2	3	10	4	6	9	8	1
7	5	2	…						

Als **Pseudozufall** wird bezeichnet, was zufällig erscheint, in Wirklichkeit jedoch berechenbar ist.

Erkennen wir Zufall?

Bsp. 3 von 3

1	2	3	4	5	6

Lottozahlen „6 aus 45“ vom 30.01.2022

11	14	34	37	39	40

Beide Zahlenfolgen haben dieselbe **Wahrscheinlichkeit**.

Zufall liegt weniger im Erscheinungsbild, sondern eher im Prozess der Erzeugung, d.h. im Experiment.

Wahrscheinlichkeit

Chaos und **Ordnung** (Regelmäßigkeit) sind/scheinen Gegensätze.

Zufall und **Ordnung** (Regelmäßigkeit) sind/scheinen Gegensätze.

Ist also **Zufall** = **Chaos**?

Nein!

Es zeigt sich: Zufallsereignisse gehorchen Gesetzen,
und zwar den Gesetzen der Wahrscheinlichkeit.

Wahrscheinlichkeit

http://www.siebern.de/ZufalloderWahrscheinlichkeit1.jpg (19.07.2017)

Platon (428/427 v. Chr. – 348/347 v. Chr.): **Philebos**

*[Fiktives Gespräch von **Sokrates** mit den jungen Athenern **Philebos** und **Protarchos** über Vernunft und Einsicht und **Stochastik**]*

SOKRATES: Nun geht aber doch, glaube ich, das Wissen und die verschiedenen Lehrgebiete zum Teil auf die schöpferische Tätigkeit aus, zum anderen aber auf die Erziehung und die Bildung; oder wie?

PROTARCHOS: Ja, so ist es.

[…]

SOKRATES: Von beiden Arten des Wissens müssen wir nun doch diejenigen aussondern, die eine maßgebende Rolle spielen.

PROTARCHOS: Welche denn und wie?

SOKRATES: Wenn man zum Beispiel von allen Künsten die Rechenkunst und die Messkunst und die Statik absonderte, so wäre doch das, was von jeder noch übrig bleibt, sozusagen bedeutungslos.

PROTARCHOS: Jawohl, ganz bedeutungslos.

SOKRATES: Wenigstens blieben uns danach nur noch Schätzungen übrig und die Übung unserer Wahrnehmungen mit Hilfe der Erfahrung und einer gewissen Routine, wobei wir dazu noch die Kräfte des Vermutens anwendeten, die viele als Künste bezeichnen [**στοχαστικὴ τέχνη**], die aber nur nach mühevoller Übung ihre Wirkung ausüben können.

PROTARCHOS: Ja, das ist unbedingt so, wie du sagst.

https://www.neueakropolis.at/philo-ecke/philosophie-wissen/werke-platons/platon-philebos.pdf (19.07.2017) S. 75-76

Jakob I. Bernoulli (1654–1705): Ars conjectandi

[1713 posthum von seinem Neffen Nikolaus I. Bernoulli (1687–1759) veröffentlicht]

Pars quarta. Cap. II.
De Scientia & Conjectura. De Arte Conjectandi. De Argumentis Conjecturarum.
Axiomata quaedam generalia huc pertinentia.

Ea quae certa sunt & indubia, dicimur scire vel intelligere: caetera omnia conjicere tantum vel opinari.

Conjicere rem aliquam est metiri illius probabilitatem: ideoque **Ars Conjectandi sive Stochastice** nobis definitur ars metiendi quam fieri potest exactissime probabilitates rerum, eo fine, ut in judiciis & actionibus nostris semper eligere vel sequi possimus id, quod melius, fatius, tutius aut consultius fuerit deprehensum; in quo solo omnis Philosophi sapientia & Politici prudentia versatur.

https://books.google.at/books?id=kD4PAAAAQAAJ&printsec=frontcover&hl=de&source=gbs_ge_summary_r&cad=0#v=onepage&q&f=false (19.07.2017) S. 213

Vierter Theil. Kapitel II.
Wissen und Vermuthen. Vermuthungskunst. Beweisgründe für Vermuthungen.
Einige allgemeine hierhergehörige Grundsätze.

Wir sagen von dem, was gewiss und unzweifelhaft ist, dass wir es wissen oder kennen, von allem andern aber, dass wir es nur vermuthen oder annehmen.

Irgend ein Ding vermuthen heisst soviel als seine Wahrscheinlichkeit messen. Deshalb bezeichnen wir als Vermuthungs- oder Muthmaassungskunst **[Ars Conjectandi sive Stochastice]** die Kunst, so genau [wie] möglich die Wahrscheinlichkeiten der Dinge zu messen und zwar zu dem Zwecke, dass wir bei unseren Urtheilen und Handlungen stets das auswählen und befolgen können, was uns besser, trefflicher, sicherer oder rathsamer erscheint. Darin allein beruht die ganze Weisheit des Philosophen und die ganze Klugheit des Staatsmannes.

https://ia601408.us.archive.org/20/items/wahrscheinlichke03bernuoft/wahrscheinlichke03bernuoft.pdf (19.07.2017) S. 75

Wahrscheinlichkeit

Wahrscheinlichkeit	ist ein **Maß für die Erwartung**, dass ein bestimmtes *zufälliges* Ereignis eintreten wird. Diese Erwartung wird **quantifiziert**, d.h. durch eine reelle Zahl von 0 bis 1 ausgedrückt.
Wahrscheinlichkeitsrechnung	ist eine mathematische **Methode**, um aus bekannten Wahrscheinlichkeiten neue zu ermitteln (Wahrscheinlichkeit des Gegenteils eines Ereignisses, Wahrscheinlichkeit verknüpfter Ereignisse, …).
Wahrscheinlichkeitstheorie	ist die mathematische **Modellierung** des Phänomens Zufall.

Wahrscheinlichkeit

Laplace-Wahrscheinlichkeit: **Wahrscheinlichkeit als relativer Anteil**	Besitzen alle Ergebnisse eines Zufallsexperimentes die gleiche Wahrscheinlichkeit und besteht der Grundraum Ω aus endlich vielen Ereignissen, so gilt für die Wahrscheinlichkeit P eines Ereignisses: $P(E) = \frac{\#\text{ günstige Fälle}}{\#\text{ mögliche Fälle}}$
Frequentistische Wahrscheinlichkeit: **Wahrscheinlichkeit als relative Häufigkeit**	Bei einer möglichst großen Anzahl gleicher, wiederholter, voneinander unabhängiger Zufallsexperimente kann die relative Häufigkeit eines Ereignisses als Schätzwert seiner Wahrscheinlichkeit P verwendet werden: $P(E) \approx \frac{\#\text{ Treffer}}{\#\text{ Versuche}}$
Subjektive Wahrscheinlichkeit	Persönliche Einschätzung der Wahrscheinlichkeit P eines Ereignisses (Expertenmeinung).
Axiomatische Wahrscheinlichkeit	Abstrakte Definition von Wahrscheinlichkeit reduziert auf 3 Eigenschaften (Axiome von Andrej Nikolajewitsch **Kolmogorow** (1903-1987)) – ohne Berücksichtigung der Eignung für Prognosen: (1) $\forall E: 0 \leq P(E) \leq 1$ (2) $P(\Omega) = 1$ (3) $E \cap F = \varnothing \;\Rightarrow\; P(E \vee F) = P(E) + P(F)$

Wahrscheinlichkeit

Lehrplanentwurf (Stand 12.08.2021)

Zentrale fachliche Konzepte

Daten und Zufall werden im Informationszeitalter immer wichtiger. Kenngrößen und Diagramme der beschreibenden Statistik dienen der Orientierung und Entscheidungsfindung.
Der Wahrscheinlichkeitsbegriff ist grundlegend für die Quantifizierung von Sicherheit.
Der Wahrscheinlichkeitsbegriff wird – ausgehend vom alltäglichen Sprachgebrauch von „wahrscheinlich" – intuitiv entwickelt und sein Zusammenhang mit relativen Häufigkeiten bei wiederholbaren Zufallsexperimenten hergestellt.

https://bgm.univie.ac.at/lp-sekundarstufe-1/ (02.02.2022)

Wahrscheinlichkeit

Lehrplanentwurf (Stand 12.08.2021)

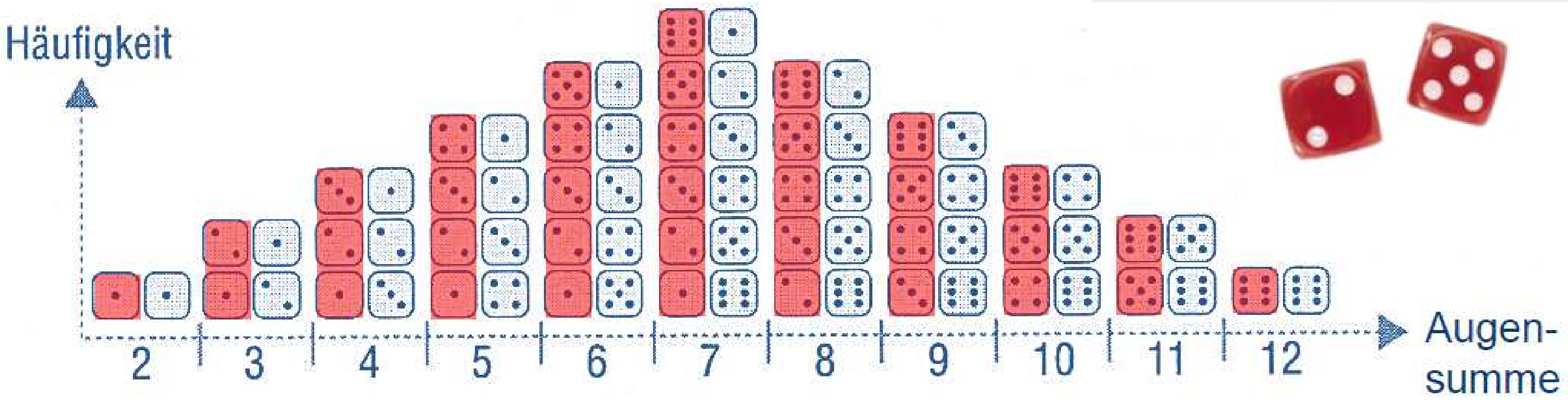
Kompetenzbereich 4: Daten und Zufall

Die Schüler*innen können

1. Klasse	• Daten erheben, ordnen, darstellen und aus unterschiedlichen Darstellungsformen ablesen • einfache statistische Kennzahlen ermitteln und interpretieren
2. Klasse	• relative Häufigkeiten ermitteln, grafisch darstellen und grafische Darstellungen interpretieren
3. Klasse	• statistische Darstellungen erstellen und nutzen; Manipulationen in statistischen Darstellungen erkennen • aufbauend auf einem intuitiven Wahrscheinlichkeitsbegriff Wahrscheinlichkeiten in einfachen Zufallsexperimenten ermitteln, vergleichen und interpretieren.
4. Klasse	• Kreuztabellen erstellen und interpretieren • Wahrscheinlichkeiten bei ein- und zweistufigen Zufallsexperimenten ermitteln und interpretieren

https://bgm.univie.ac.at/lp-sekundarstufe-1/ (02.02.2022)

Wahrscheinlichkeit



*Jürgen **Roth** (Universität Koblenz-Landau WS 2016/17): Didaktik der Stochastik.*
http://www.dms.uni-landau.de/roth/lehre.html (20.07.2017)

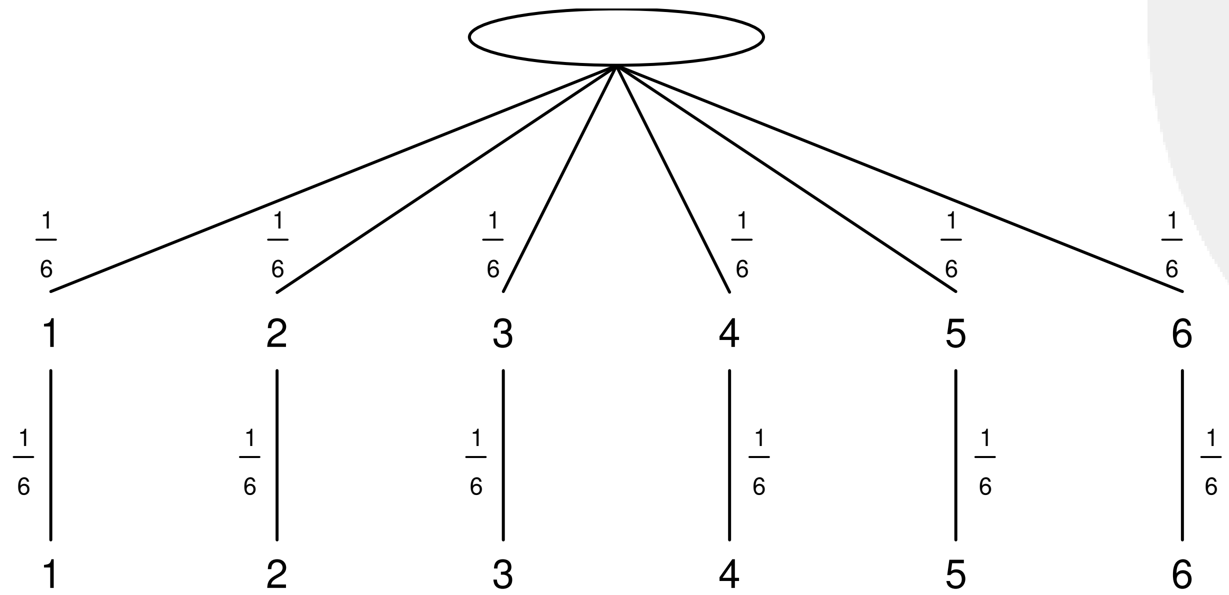
Wahrscheinlichkeit

Unterricht | Aufgabe 1

Münzwurf

Bei einem Spiel werden in jeder Spielrunde zwei *faire* Würfel geworfen. Das Ereignis E („Pasch“) tritt ein, wenn nach einem Wurf beide Würfel die gleiche Augenzahl zeigen.

Ermittle die Wahrscheinlichkeit von E und interpretiere das Ergebnis ***auf 2 Arten***.



$$P(E) = 6 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \underline{\underline{\frac{1}{6}}}$$

Wahrscheinlichkeit

Unterricht | Aufgabe 1

Münzwurf

Bei einem Spiel werden in jeder Spielrunde zwei *faire* Würfel geworfen. Das Ereignis E („Pasch") tritt ein, wenn nach einem Wurf beide Würfel die gleiche Augenzahl zeigen.

Ermittle die Wahrscheinlichkeit von E und interpretiere das Ergebnis ***auf 2 Arten***.

	1	2	3	4	5	6
1	(1;1)	(1;2)	(1;3)	(1;4)	(1;5)	(1;6)
2	(2;1)	(2;2)	(2;3)	(2;4)	(2;5)	(2;6)
3	(3;1)	(2;2)	(3;3)	(3;4)	(3;5)	(3;6)
4	(4;1)	(2;2)	(4;3)	(4;4)	(4;5)	(4;6)
5	(5;1)	(2;2)	(5;3)	(5;4)	(5;5)	(4;6)
6	(6;1)	(2;2)	(6;3)	(6;4)	(6;5)	(6;6)

Ω = {(1;1), (1;2), (1;3), (1;4), (1;5), (1;6), (2;1), (2;2), (2;3), (2;4), (2;5), (2;6),
(3;1), (3;2), (3;3), (3;4), (3;5), (3;6), (4;1), (4;2), (4;3), (4;4), (4;5), (4;6),
(5;1), (5;2), (5;3), (5;4), (5;5), (5;6), (6;1), (6;2), (6;3), (6;4), (6;5), (6;6)}

$$P(E) = \frac{6}{36} = \underline{\underline{\frac{1}{6}}}$$

Wahrscheinlichkeit

Unterricht | Aufgabe 1

Münzwurf

Bei einem Spiel werden in jeder Spielrunde zwei *faire* Würfel geworfen. Das Ereignis E („Pasch“) tritt ein, wenn nach einem Wurf beide Würfel die gleiche Augenzahl zeigen.

Ermittle die Wahrscheinlichkeit von E und interpretiere das Ergebnis ***auf 2 Arten***.

Versuchsserie …

$$P(E) \approx h = \frac{\text{Anzahl der Treffer (Pasche)}}{\text{Anzahl der Versuche}}$$

Wahrscheinlichkeit

Unterricht | Aufgabe 1

Münzwurf

Bei einem Spiel werden in jeder Spielrunde zwei *faire* Würfel geworfen. Das Ereignis E („Pasch“) tritt ein, wenn nach einem Wurf beide Würfel die gleiche Augenzahl zeigen.

Ermittle die Wahrscheinlichkeit von E und interpretiere das Ergebnis ***auf 2 Arten***.

1.

Eine Liste aller möglichen Versuchsausgänge enthält in 1/6 der Fälle das genannte Ereignis.

2.

In einer „genügend langen“ Versuchsserie wird in ca. 1/6 der Fälle das genannte Ereignis eintreten.

Albert Einstein (1879–1955)

Gott würfelt nicht.

[Die Quantenmechanik] liefert viel, aber dem Geheimnis des Alten* bringt sie uns kaum näher. Jedenfalls bin ich überzeugt, daß der nicht würfelt.

** Gott*
Brief an Max Born vom 04.12.1926 | https://de.wikipedia.org/wiki/Gott_w%C3%BCrfelt_nicht (10.03.2021)

Karl Popper (1902–1994)

Die Zukunft ist offen – Optimismus ist Pflicht.

Die Zukunft ist offen. Sie ist nicht vorausbestimmt. Daher kann sie niemand voraussagen – außer durch Zufall. Die Möglichkeiten, die in der Zukunft liegen, gute sowohl wie schlimme, sind unabsehbar. Wenn ich sage »Optimismus ist Pflicht«, so schließt das nicht nur ein, daß die Zukunft offen ist, sondern auch, daß wir alle sie mitbestimmen durch das, was wir tun: Wir sind alle mitverantwortlich für das, was kommt.

So ist es unser aller Pflicht, statt etwas Schlimmes vorauszusagen, uns einzusetzen für jene Dinge, die die Zukunft besser machen können.

Popper, Karl R.: Von der Notwendigkeit des Friedens (1993).
In: Popper, Karl R. Alles Leben ist Problemlösen. Über Erkenntnis, Geschichte und Politik. München 1994 (Piper), S. 326.