Modellierung im Schulbuch

Eine Kurzübersicht in Form von Lehrbuchbeispielen

(Vorlage:

R. Geretschläger, H. Griesel, H. Postel,

Elemente der Mathematik 8,

Dorner, 2007)

- Die vier Schritte der Modellierung
- Wirkungsgraphen
- Modelle mit Differenzengleichungen erstellen
- Vier Typen von Populationsmodellen, diskret
- Modellierung mit Differentialgleichungen
- Vier Typen von Populationsmodellen, stetig
- Richtungsfelder
- Eulersches Verfahren
- Kräftebilanzen

Die vier Schritte:

Text verstehen - Modell erstellen -
Modell bearbeiten - Ergebnis interpretieren

Eine kleine Talsperre kann dadurch gefüllt werden, dass der eine Zufluss 6 Tage allein und außerdem der andere mit ihm zusammen 10 Tage geöffnet ist. Eine andere Möglichkeit ist, den zweiten Zufluss 21 Tage allein und außerdem den ersten mit ihm gemeinsam 4 Tage zu öffnen.

In wievielen Tagen würde der erste Zufluss allein die Talsperre füllen?

Namen geben: Welche Größen kommen vor?

a ... Wassermenge, die der erste Zufluss täglich bringt
b ... Wassermenge, die der zweite Zufluss täglich bringt
v ... Wassermenge, die benötigt wird, um die Sperre zu füllen

Einheiten:
a,b ... Kubikmeter/Tag
c ... Kubikmeter

Modellgleichungen und Ungleichungen aufstellen: Welche Beziehungen sind gegeben?

$16\,a + 10\,b = v$
$4\,a + 25\,b = v$

Gleichungen lösen:

$$16a + 10b = v$$
$$4a + 25b = v$$

$$b = v/30$$
$$a = v/24$$

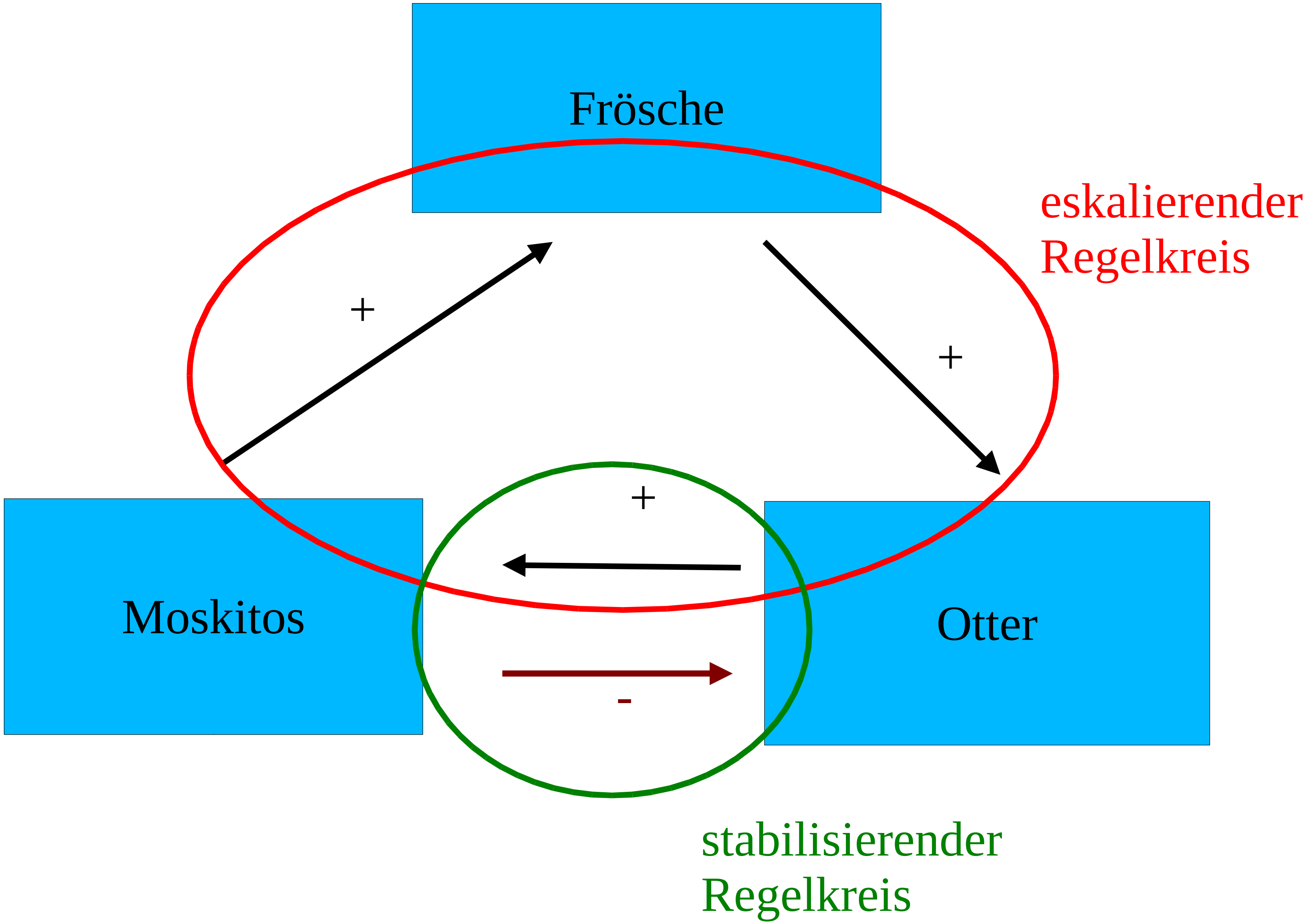
Lösung interpretieren:

Der erste Zufluss allein würde 24 Tage brauchen, um die Sperre zu füllen.

Wirkungsdiagramme. Regelkreise erkennen.

In einem Sumpf leben Frösche, Otter und Moskitos. Es wird beobachtet, dass sich die Frösche stärker vermehren, wenn es mehr Moskitos gibt, und dass sich die Otter stärker vermehren, wenn es mehr Frösche gibt. Zusätzlich vermehren sich die Moskitos stärker, wenn es mehr Otter gibt.
Erstelle ein Wirkungsdiagramm. Handelt es sich um einen eskalierenden oder stabilisierenden Kreislauf?

Die Moskitos übertragen eine für die Otter tödliche Krankheit. Eine vermehrte Moskitobevölkerung bewirkt daher ein verstärktes Absterben der Otter. Wie ändert sich das Wirkungsdiagramm? Ist der neue, zwischen Ottern und Moskitos entstehende Kreislauf eskalierend oder stabilisierend?

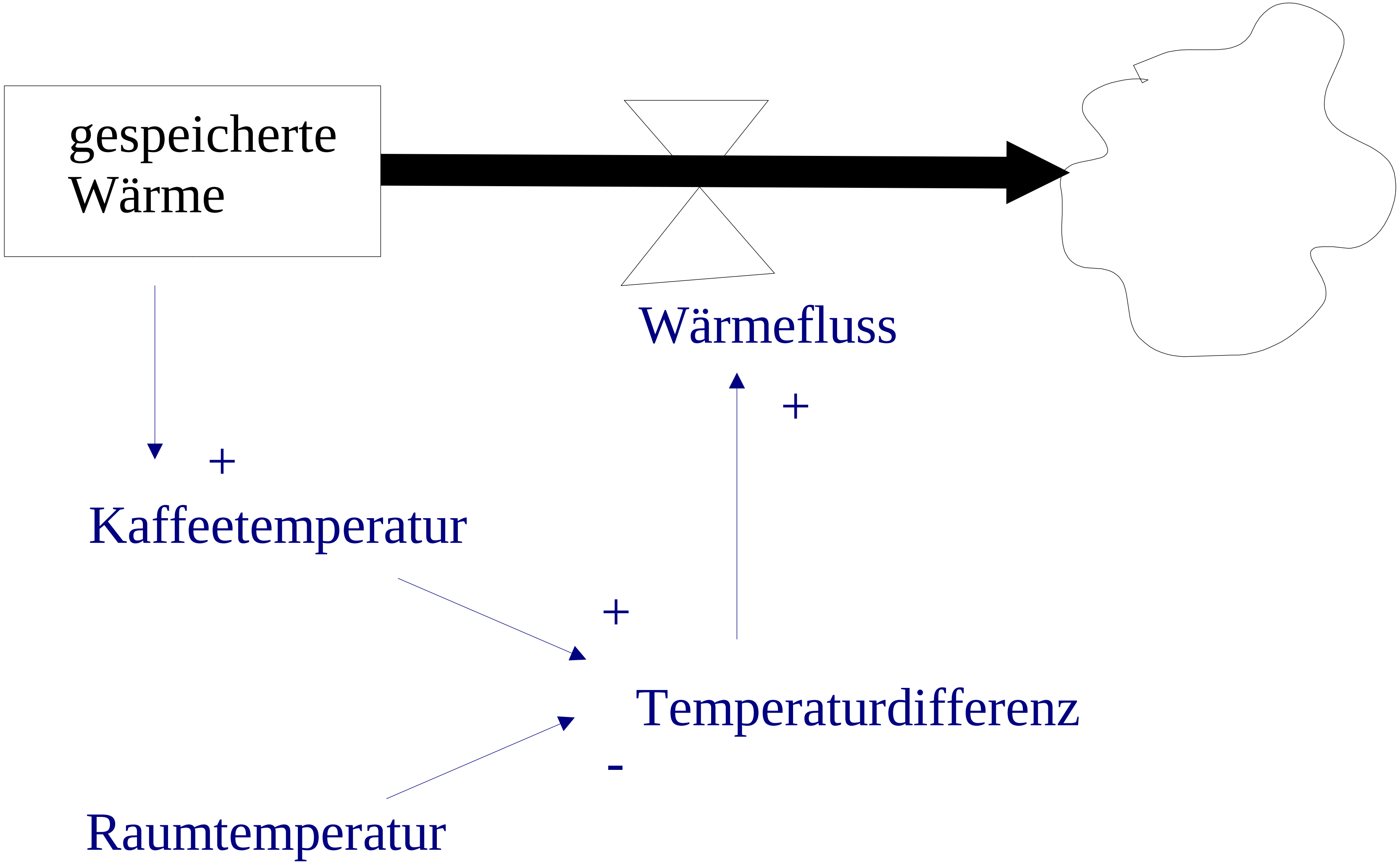

Frösche
eskalierender
Regelkreis
+
+
+
Moskitos
Otter
-
stabilisierender
Regelkreis

Modelle mit Differenzengleichungen erstellen.

Es ist bekannt, dass sich die Temperatur einer heissen Flüssigkeit in vorgegebenen Zeitabständen jeweils um einen Wert reduziert, der proportional zur Temperaturdifferenz zum umgebenden Raum ist.

Die Temperatur einer Tasse einer Kaffee wird mit 82^0C gemessen. Nach genau einer Minute beträgt sie 79^0C. Die Zimmertemperatur wird mit 24^0C auf einem Zimmerthermometer abgelesen.

Erstelle ein Differenzengleichungsmodell, das die weitere Temperaturentwicklung des Kaffees beschreibt, sofern sich die äußeren Bedingungen nicht verändern.


gespeicherte
Wärme
Wärmefluss
+
+
Kaffeetemperatur
+
Temperaturdifferenz
-
Raumtemperatur

Systemgrößen:

T_n ... Kaffeetemperatur zur Minute n (^{0}C)

T_0 ... Anfangstemperatur des Kaffees (=82^{0}C)

T_1 ... Temperatur des Kaffees nach 1 Minute (=79^{0}C)

R ... Raumtemperatur (= 24^{0}C)

n ... Zeit (Minuten)

Wärmeleitungsgesetz:

$T_n - T_{n+1} = k\ (T_n - R)$

dabei ist k ... Wärmeleitungskonstante

Bestimmung der Wärmeleitungskonstante

$T_0 - T_1 = k\ (T_0 - R)$

$82 - 79 = k\ (82 - 24)$

$k = 3 / 58 \sim 0{,}052$

Modell:

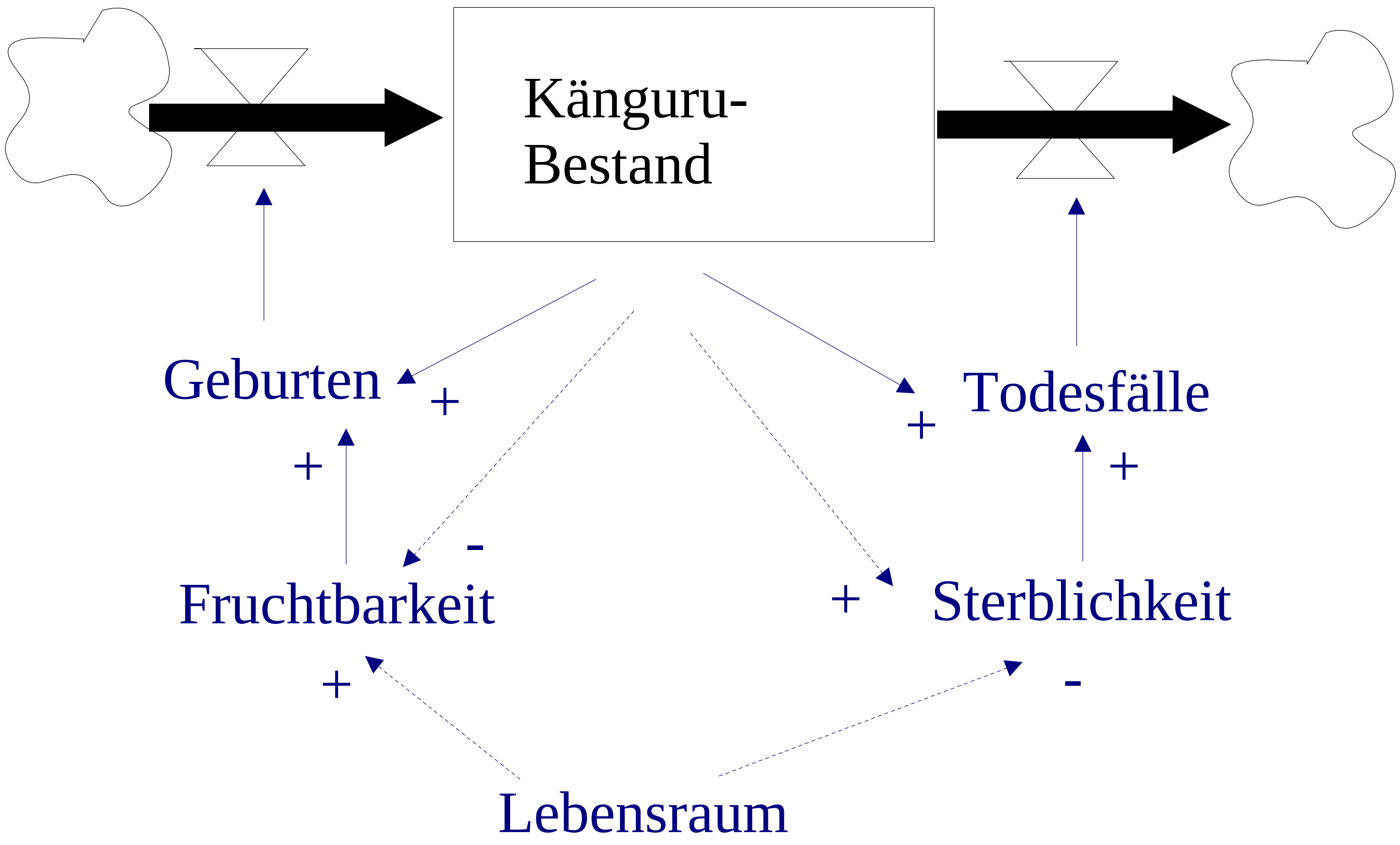
$T_{n+1} = T_n - 0{,}052\ (T_n - 24)$

Verschiedene Modelle für das Populationswachstum und ihre Eigenarten.

Auf einem Berghang in der australischen Wüste lebt eine Kolonie von Felskängurus. Nach einer besonders schlimmen Trockenzeit sind sie bis auf 20 Stück ausgestorben. Nachdem sich die Situation normalisiert hat, vermehren sie sich wieder.

Ein Jahr später zählt man die Mitglieder der Kolonie und kommt auf 24 Individuen. Es ist aus der Vergangenheit bekannt, dass auf dem Hang etwa 100 Kängurus leben können.

Erstelle Differenzengleichungsmodelle, welche die Bevölkerungsentwicklung auf dem Hang numerisch wiedergeben können. Setze dabei der Reihe nach lineares, exponentielles, begrenztes, logistisches Wachstum voraus.



Känguru-
Bestand
Geburten
+
+
Todesfälle
+
+
-
Fruchtbarkeit
+
Sterblichkeit
+
-
Lebensraum

n ... Jahr

P_n ... Population im Jahr n

P_0 ... Population zu Beginn (=20)

P_1 ... Population im Jahr 1 (=24)

K ... Kapazität des Lebensraumes (=100)

Lineares Modell:

$P_{n+1} = P_n + r$

$r = P_1 - P_0 = 4$

$P_n = P_0 + r\, n$

Exponentielles Modell:

$P_{n+1} = k\, P_n$

$k = P_1 / P_0 = 1{,}2$

$P_n = k^n\, P_0$

Beschränktes Modell:

$P_{n+1} = P_n + a(K-P_n)$

$K-P_{n+1} = (1-a)(K-P_n)$

$a = (P_1-P_0)/(K-P_0) = 0{,}05$

$K-P_n = (1-a)^n\,(K-P_0)$

Logistisches Modell:

$P_{n+1} = P_n + aP_n(K-P_n)$

$a = (P_1-P_0)/[P_0(K-P_0)] = 0{,}0025$

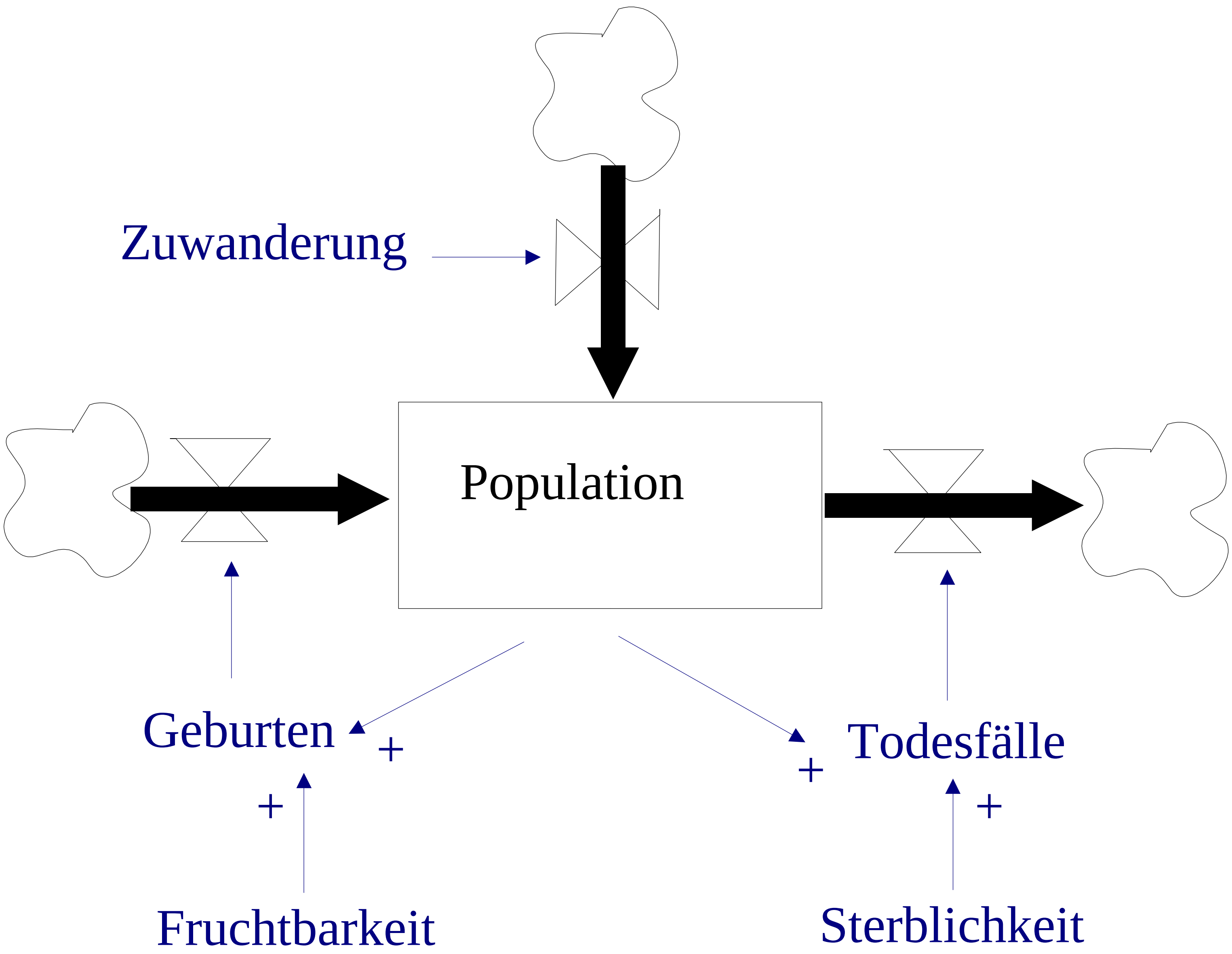
Lösung von Differenzengleichungen mit Tabellenkalkulation

Jahr	linear	exponentiell	beschränkt	logistisch
0	20	20	20	20
1	24	24	24	24
2				
3				
4				
5				
6				
7				
8				
9				
10				
11				
12				
13				
14				
15				

Modellieren mit Differentialgleichungen:

Es sei $N(t)$ die Anzahl einer Tierpopulation in Abhängigkeit von der Zeit t. N kann nur ganzzahlige Werte annehmen. Die Funktion $N(t)$ soll zu einer stetigen und differenzierbaren Funktion erweitert werden. Nimm an, dass die Geburtenrate $N'(t)$ proportional zur jeweiligen Anzahl der Individuen ist.

a) Welche Differentialgleichung beschreibt das Wachstum der Tierpopulation?
b) Welche Differentialgleichung beschreibt das Wachstum, wenn noch zusätzlich eine konstante Einwanderungsrate von außerhalb angenommen wird?


Zuwanderung
Population
Geburten
+
+
Todesfälle
+
+
Fruchtbarkeit
Sterblichkeit

Systemgrößen:

N(t) ... Anzahl der Population zur Zeit t

t ... Zeit

g ... Anzahl der Geburten pro Individuum, pro Zeiteinheit

s ... Anzahl der Todesfälle pro Individuum, pro Zeiteinheit

u ... Anzahl der Zugewanderten pro Zeiteinheit

k ... g-s

Modell:

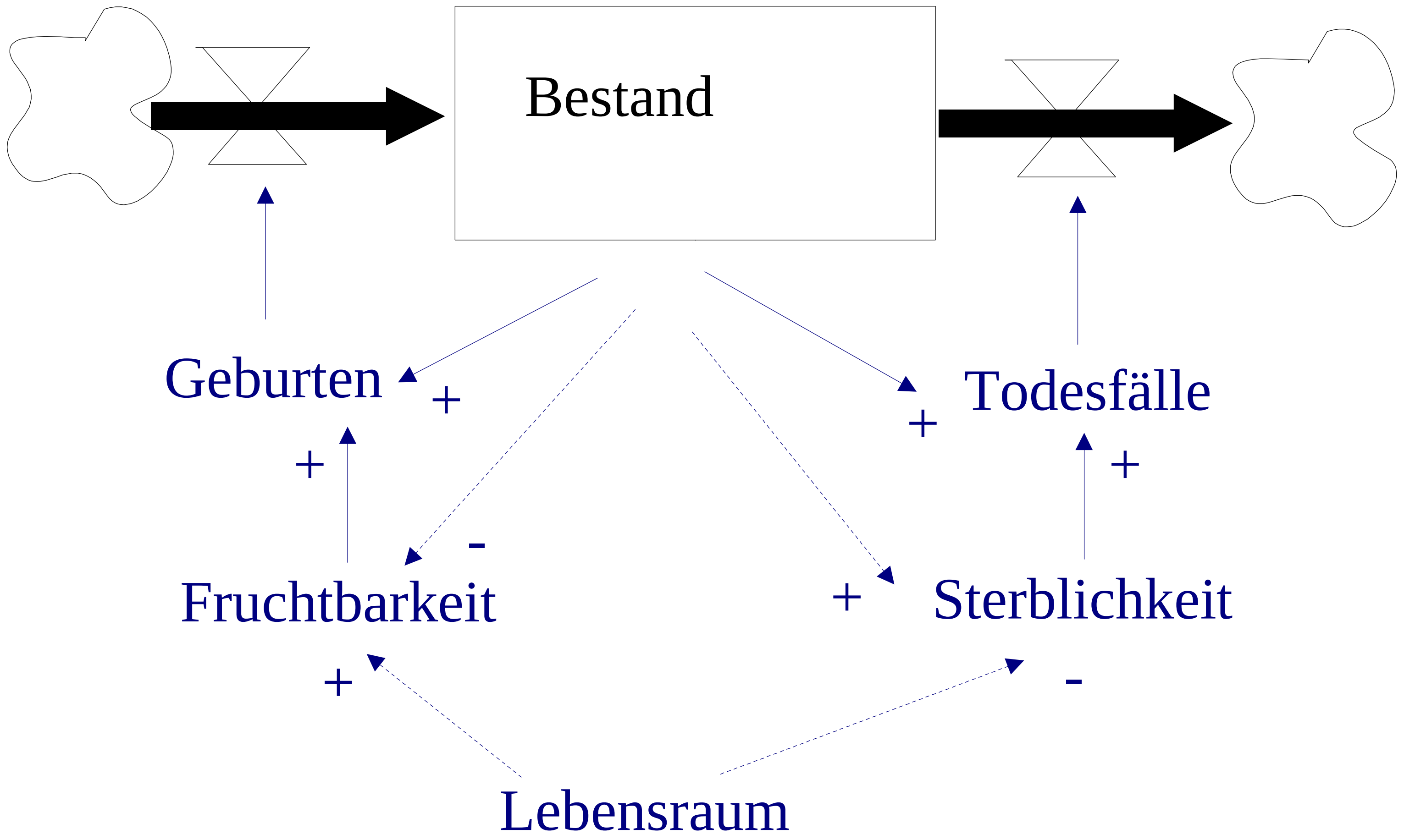
$$\mathbf{N'(t) = gN(t) - sN(t) + u = k\,N(t) + u}$$

Zuwachs durch Zuwanderung

Verlust durch Tod

Zuwachs durch Geburt

Verschiedene stetige Populationsmodelle:



Linear:

$$N'(t) = r$$
$$N(t) = C + r\,t$$

Beschränkt:

$$N'(t) = a\,(K - N(t)\,)$$
$$K - N(t) = C\,e^{-at}$$

Exponentiell:

$$N'(t) = k\,N(t)$$
$$N(t) = Ce^{kt}$$

Logistisch:

$$N'(t) = aN(t)\,(K - N(t))$$
$$N(t) = K\,e^{Ka(t-T)} / (1+ e^{Ka(t-T)})$$

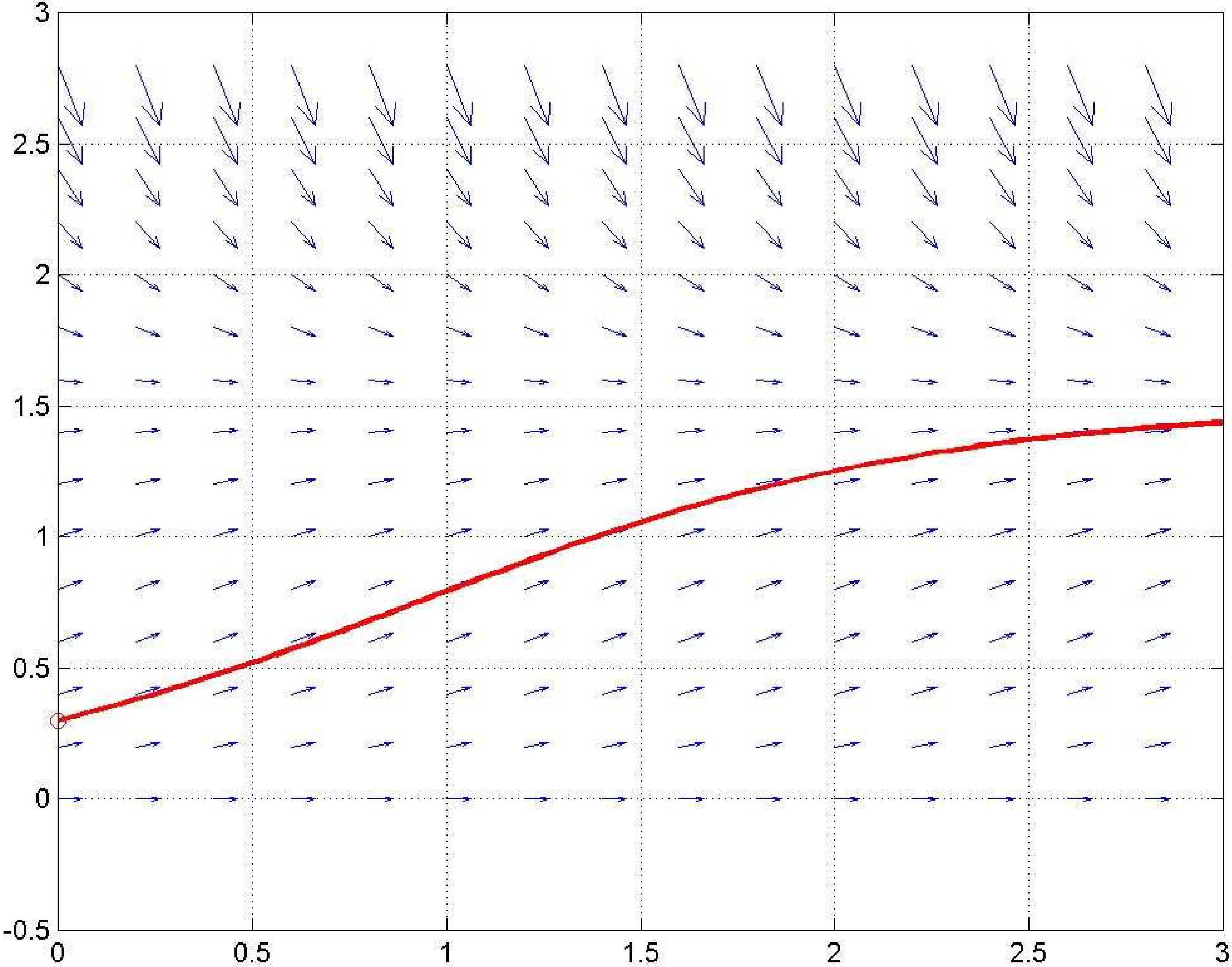
Richtungsfelder von Differentialgleichungen

Zeichnen Sie das Richtungsfeld der logistischen Differentialgleichung

$$y' = y\,(1{,}5 - y)$$

im Bereich x=0...3, y=0...2.

Welchen Verlauf nimmt ungefähr die Lösung mit Anfangswert
y(0) = 0.3?



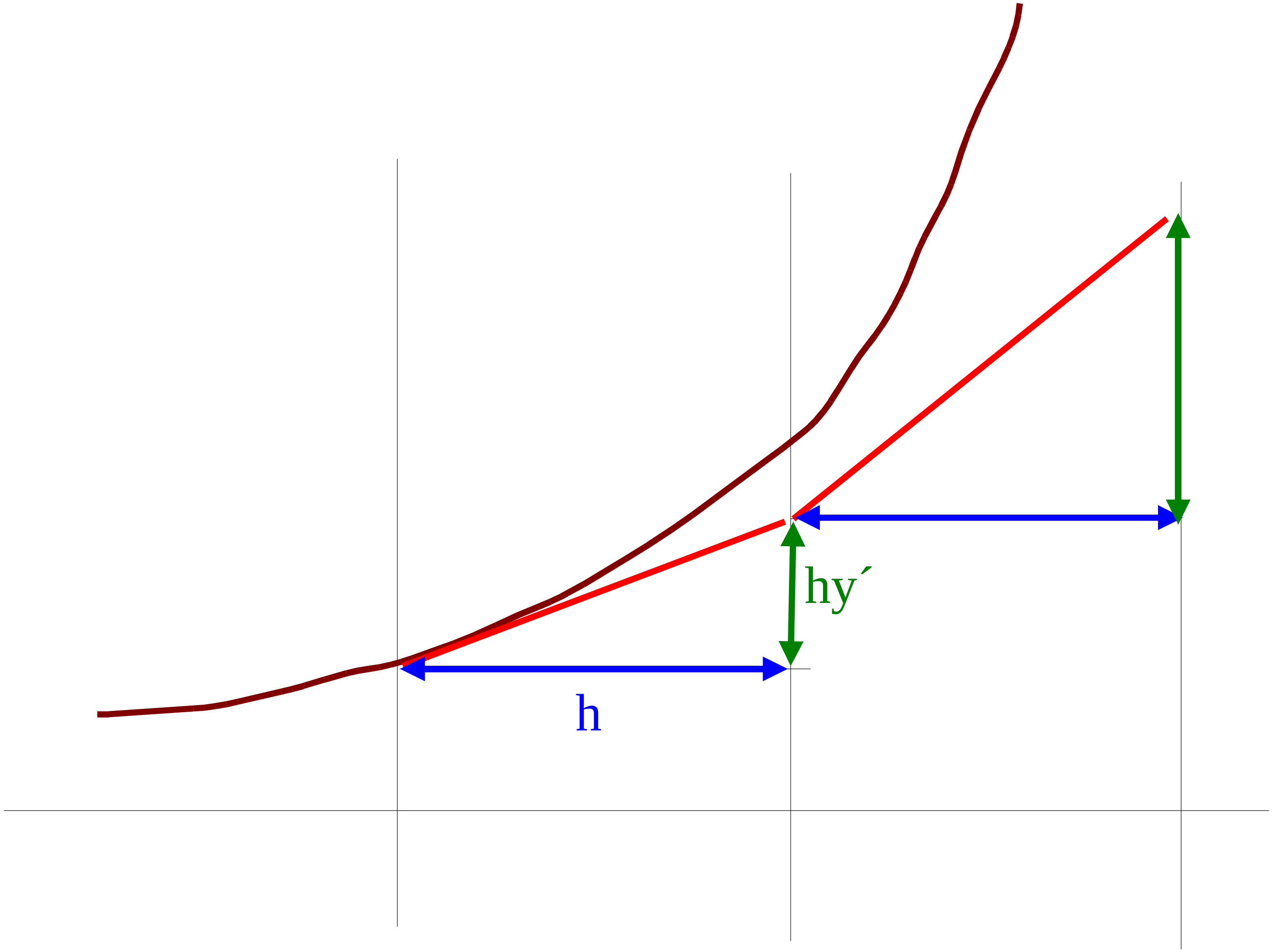
3
2.5
2
1.5
1
0.5
0
-0.5
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3

Euler-Verfahren

Lösen Sie numerisch mit dem Euler-Verfahren das Anfangswertproblem

$$y' = y\,(1{,}5-y)$$
$$y(0) = 0{,}3$$

auf dem Intervall [0 , 3].
(Schrittweite: h=0,1)


hy´
h

t	f	f Ableitung
0	0,3	0,36
0,1	0,34	0,39

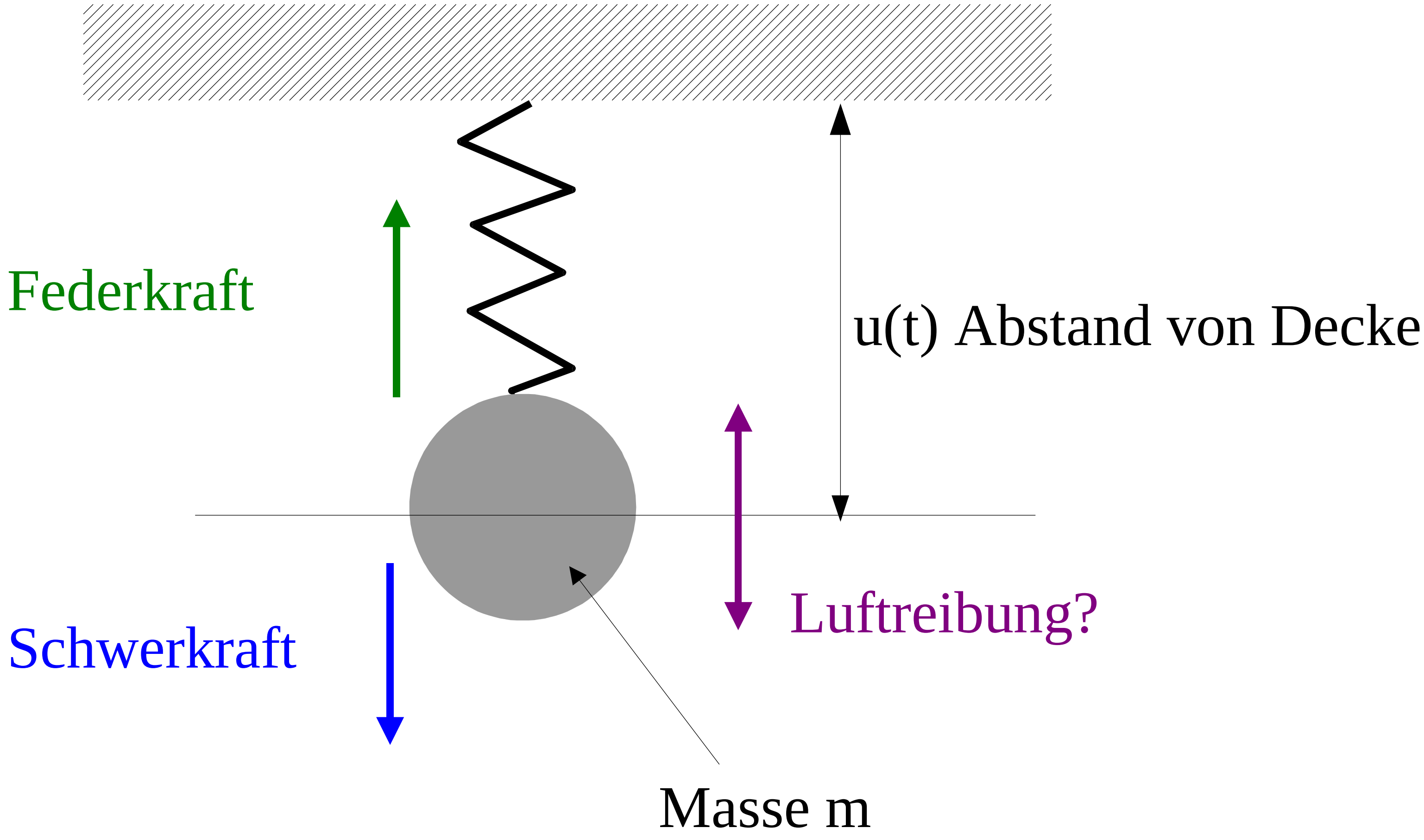
Kräftebilanzen:

Von der Decke hängt ein Körper an einer Feder.

Wir betrachten nur senkrechte Bewegungen des Körpers.

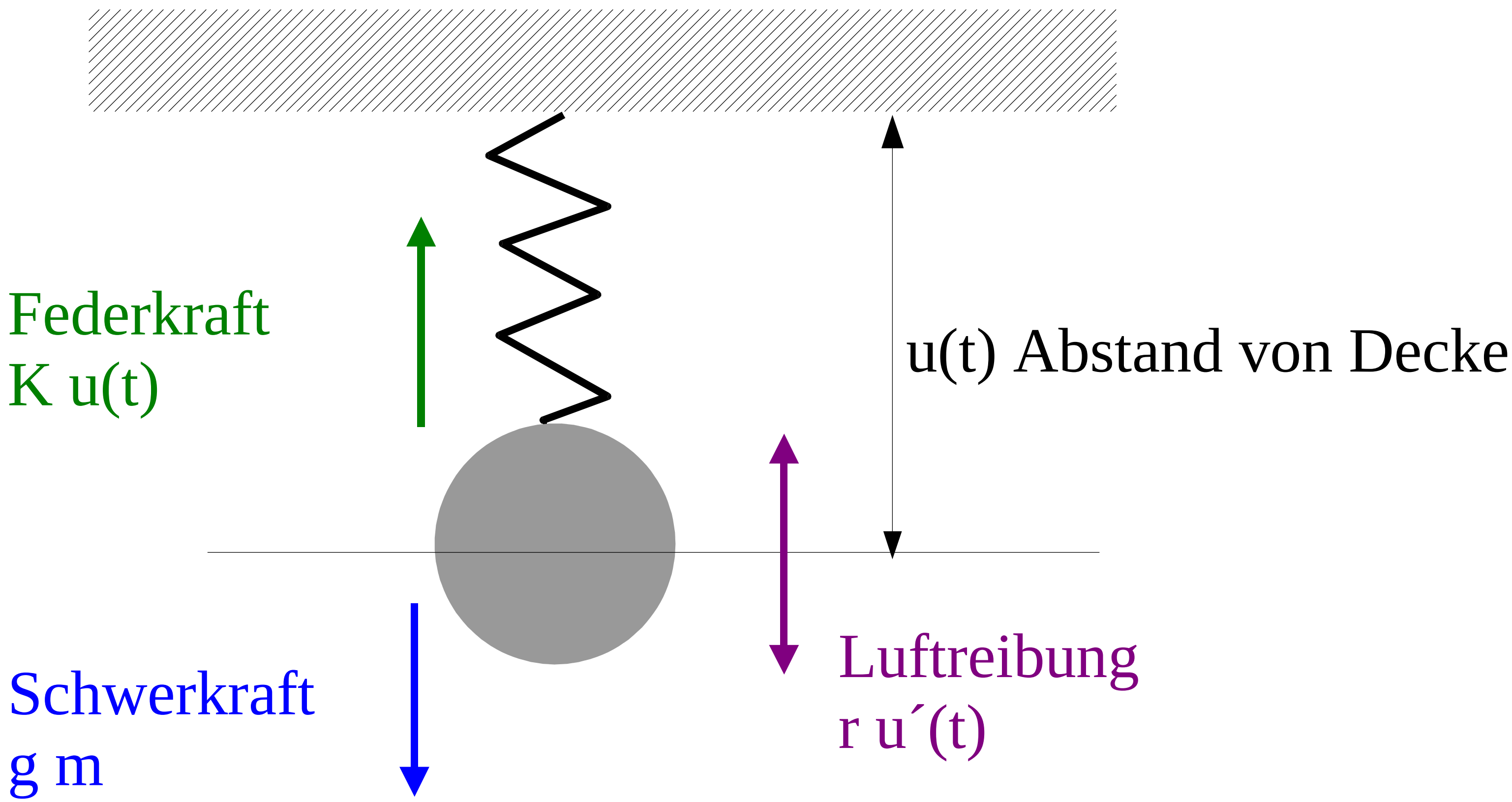
Welche Kräfte wirken auf den Körper?

Erstellen Sie eine Differentialgleichung für die (senkrechte) Bewegung des Körpers.



Größen:

t	...	Zeit
u(t)	...	Abstand von der Decke = Dehnung der Feder
m	...	Masse des Körpers
K	...	Federkonstante (Federkraft = K u)
g	...	Erdbeschleunigung (Schwerkraft = g m)
r	...	Reibungswiderstand (Reibungskraft = r u´)



Masse × Beschleunigung = Gesamtkraft

$$\mathbf{m\,u''(t) = g\,m - K\,u(t) - r\,u'(t)}$$

Reibungskraft
Federkraft
Schwerkraft

Trägheitskraft

The aim of computing is insight, not numbers.

The aim of computing numbers is not in sight