Einführung in die Modellierung:
Statische und dynamische Bilanzgleichungen

Mengenbilanzen:

Beispiel 1:
Kessel
Wirkungsgraph
Flussdiagramm
Modellgleichungen
Statische Mengenbilanz

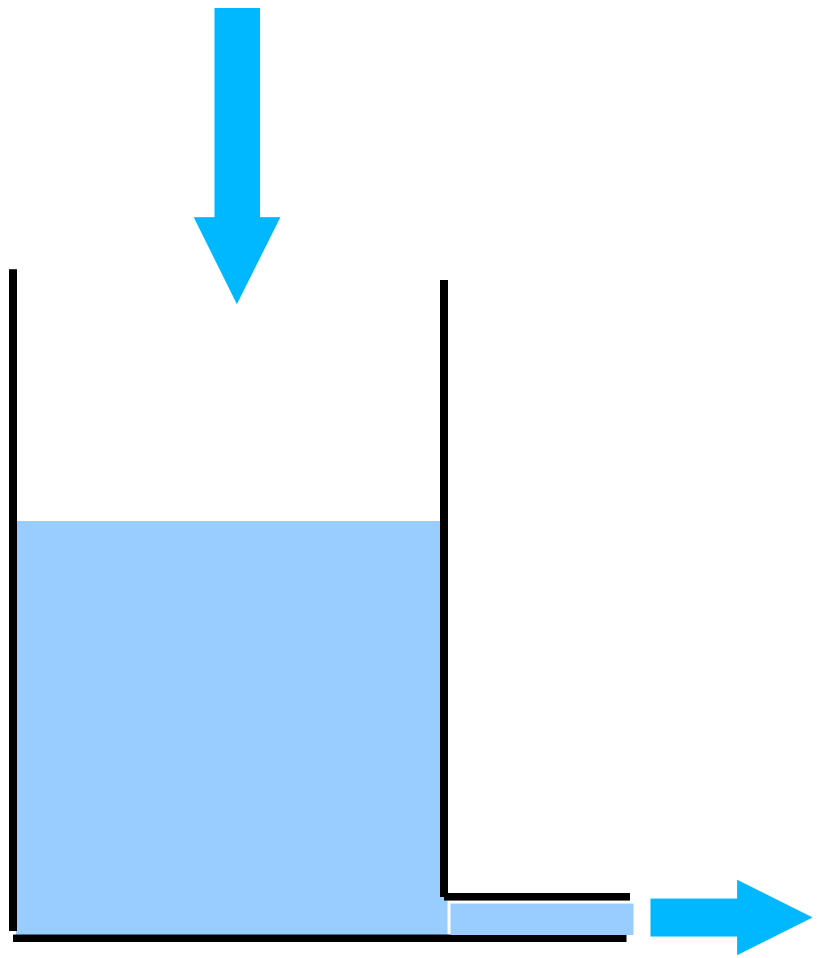
Deispiel 2:
Chemische Reaktion:
Wirkungsgraph
Statische Mengenbilanz
Dynamische Mengenbilanz

Kräftebilanzen:

Beispiel 3:
Aufhängung eines Körpers
Systemgrößen
Kräftegleichgewicht

Beispiel 4:
Lok am Berg
Kräfte
statische Kräftebilanz
dynamische Kräftebilanz

Beispiel 1



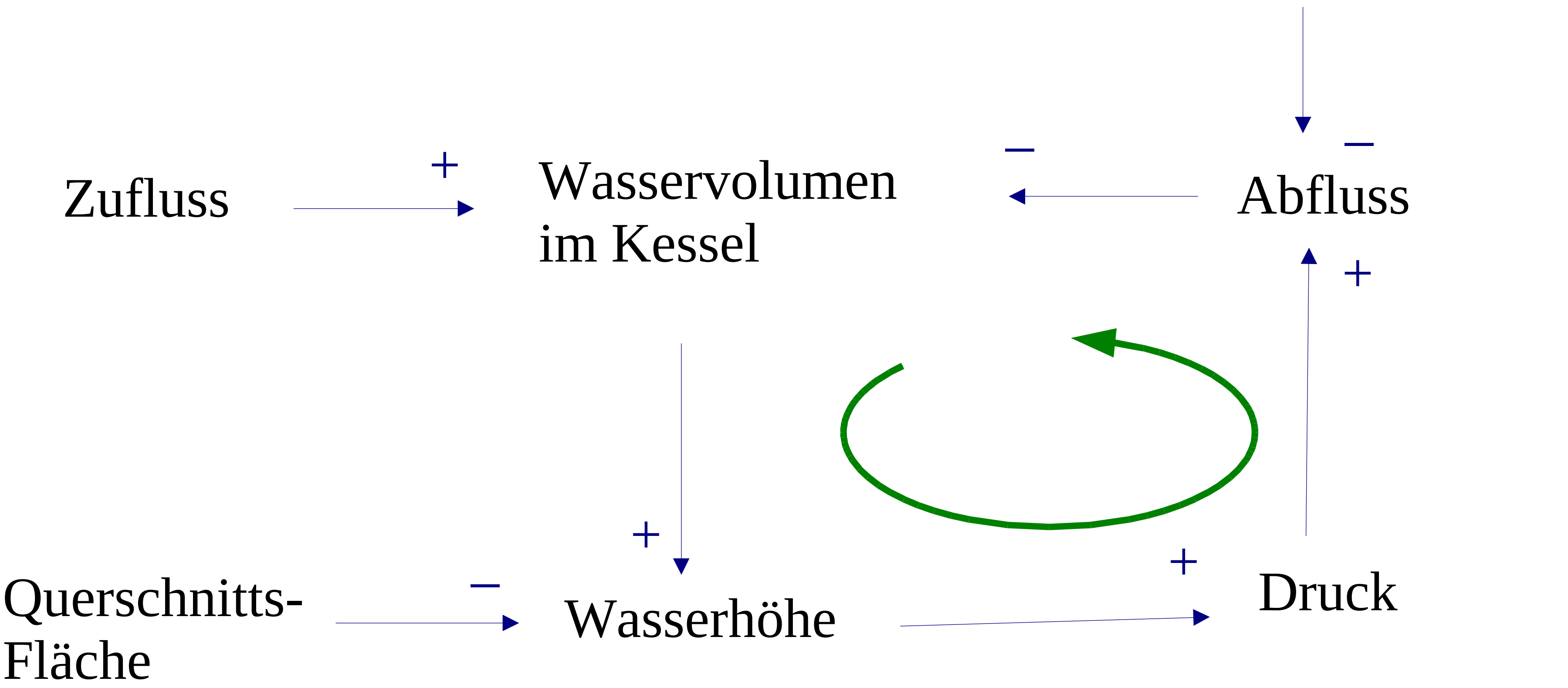
In einen zylindrischen Kessel fließt durch einen Zufluss Wasser.

Am Boden des Kessels befindet sich ein enges Auslassrohr. Der Druck des im Kessel stehenden Wassers treibt das Wasser durch dieses Rohr.

Zuflussmenge, Geometrie des Kessels, Widerstand des Abflussrohrs und physikalische Eigenschaften des Wassers seien bekannt.
Lässt sich daraus der Wasserstand im Kessel berechnen?

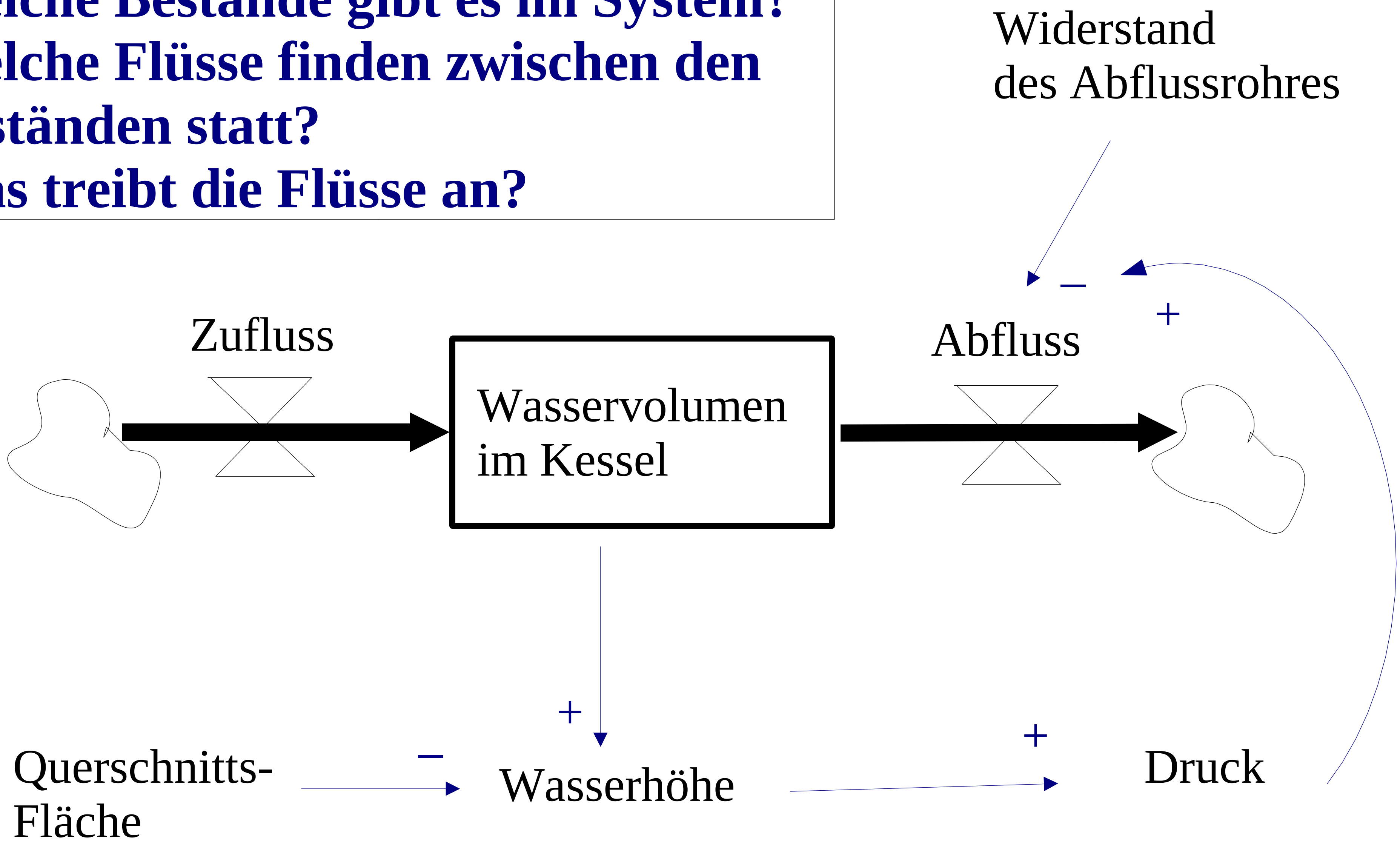
Wirkungsdiagramm

Welche Größen und Vorgänge gibt es im System?
Wie beeinflussen sich die Größen gegenseitig?



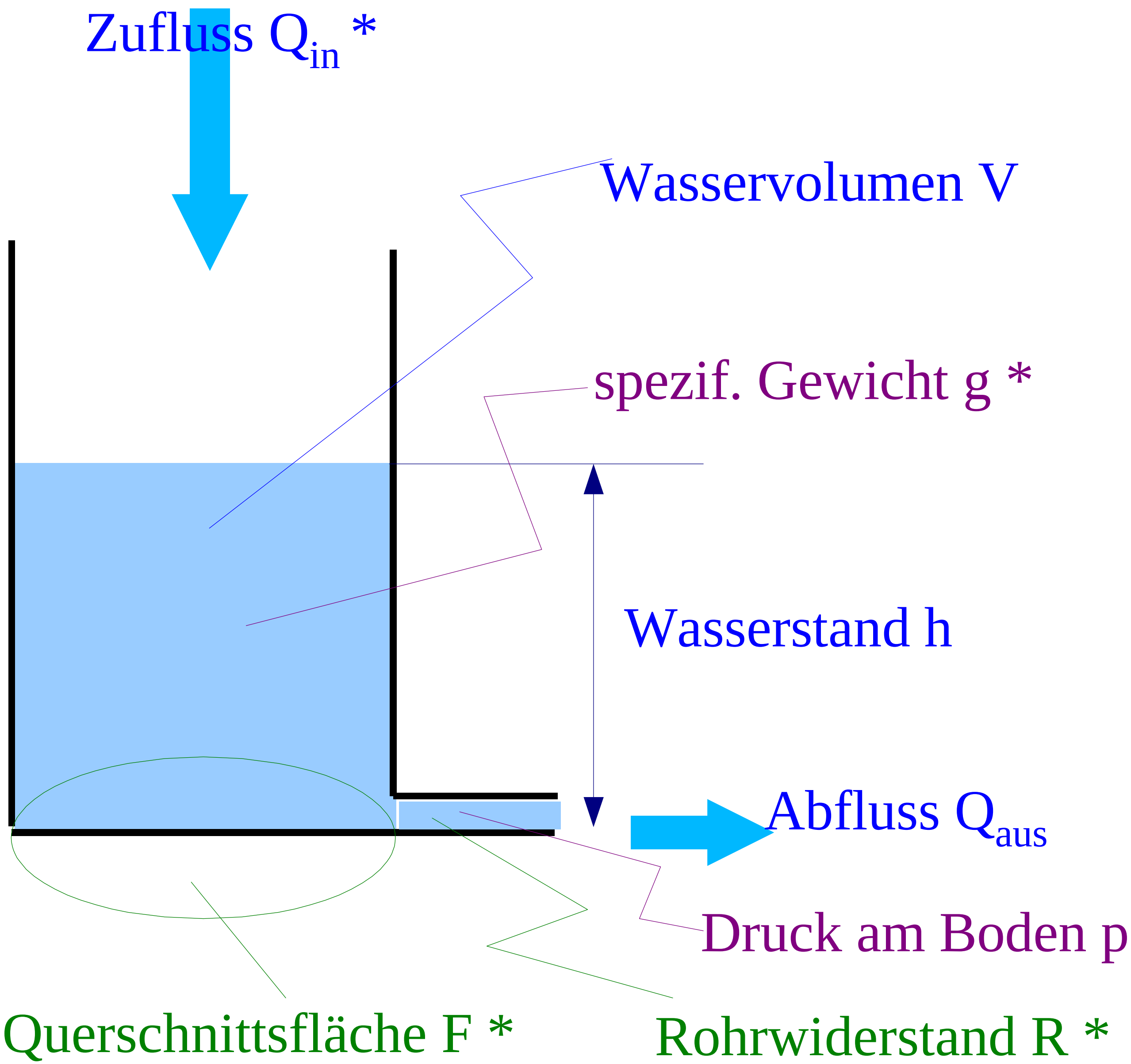
Flussdiagramm

Welche Bestände gibt es im System?
Welche Flüsse finden zwischen den Beständen statt?
Was treibt die Flüsse an?



Größen benennen und Einheiten bestimmen:

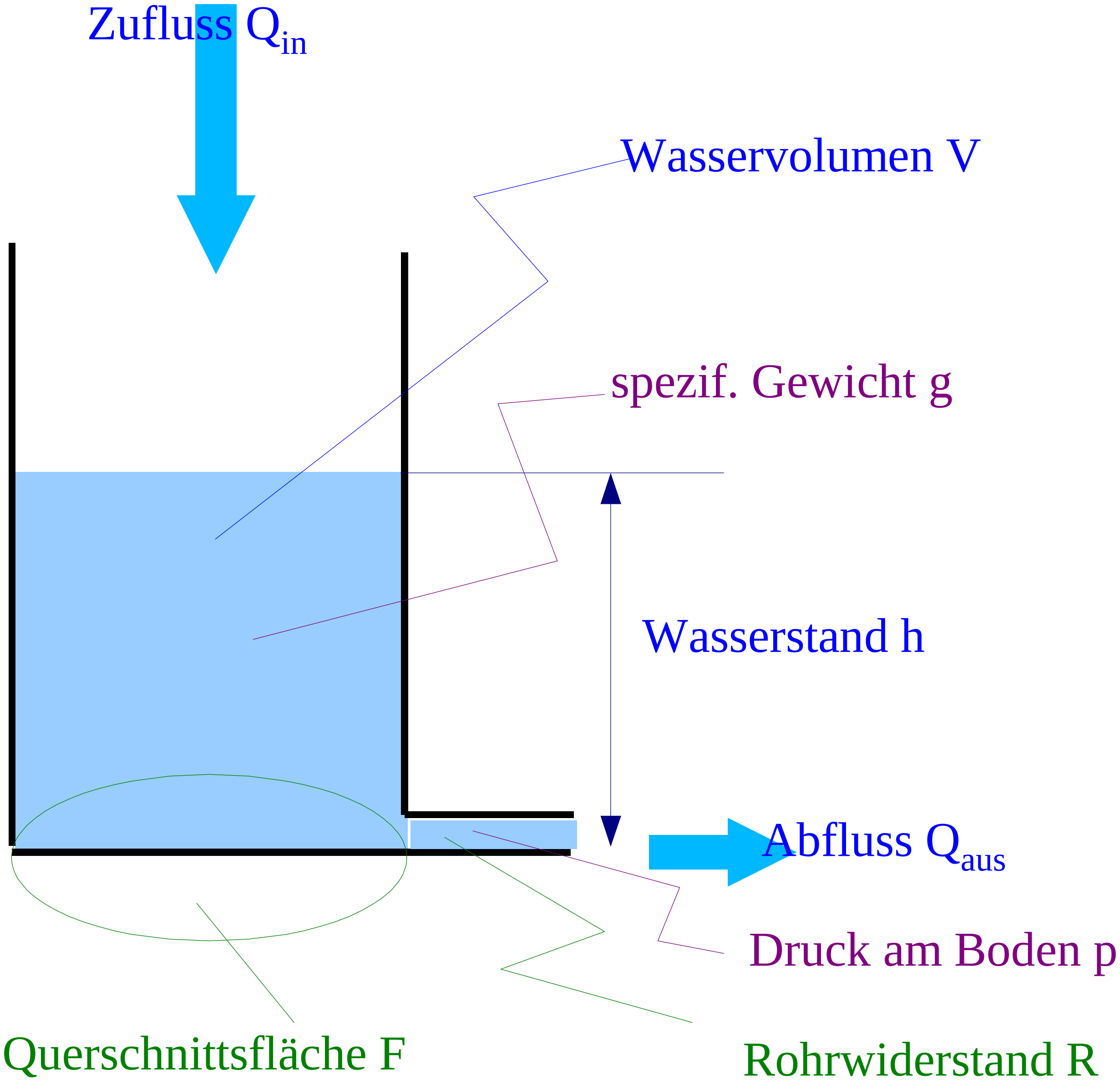
*) bekannte Grösse



V	...	m3
h	...	m
F	...	m^2
Q_{in}, Q_{aus}	...	m^3/s
p	...	N/m^2
g	...	N/m^3
R	...	Ns/m^3

Modellgleichungen

elementare Physik und Hausverstand



$$h = V / F$$

$$p = h\,g$$

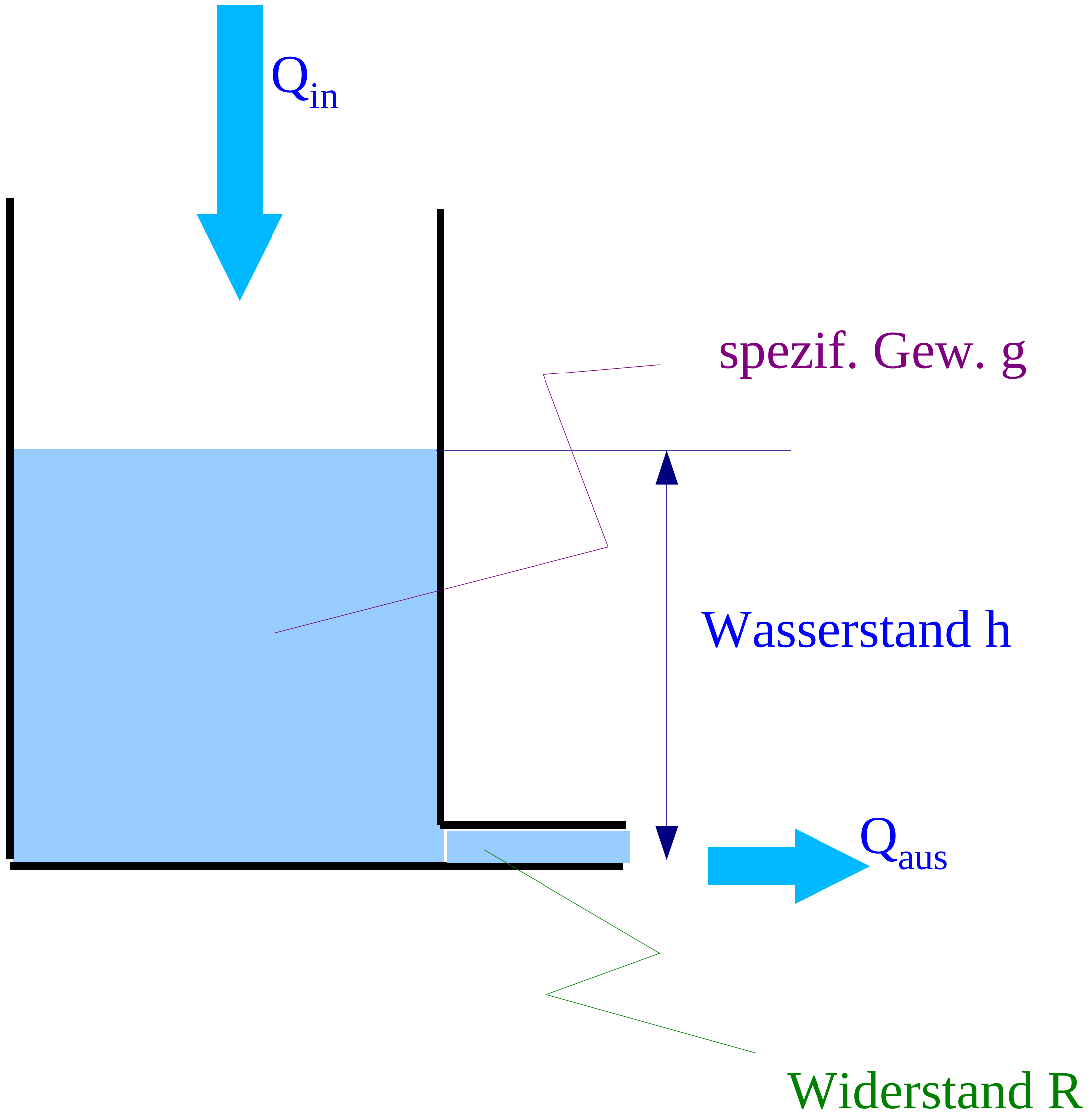
$$Q_{aus} = p / R$$

$$\mathbf{Q_{aus} = phg / R}$$

$$\mathbf{= pVg / (FR)}$$

Statische Mengenbilanz

Der Wasserstand im Kessel ändert sich nicht ... „Gleichgewichtslage“



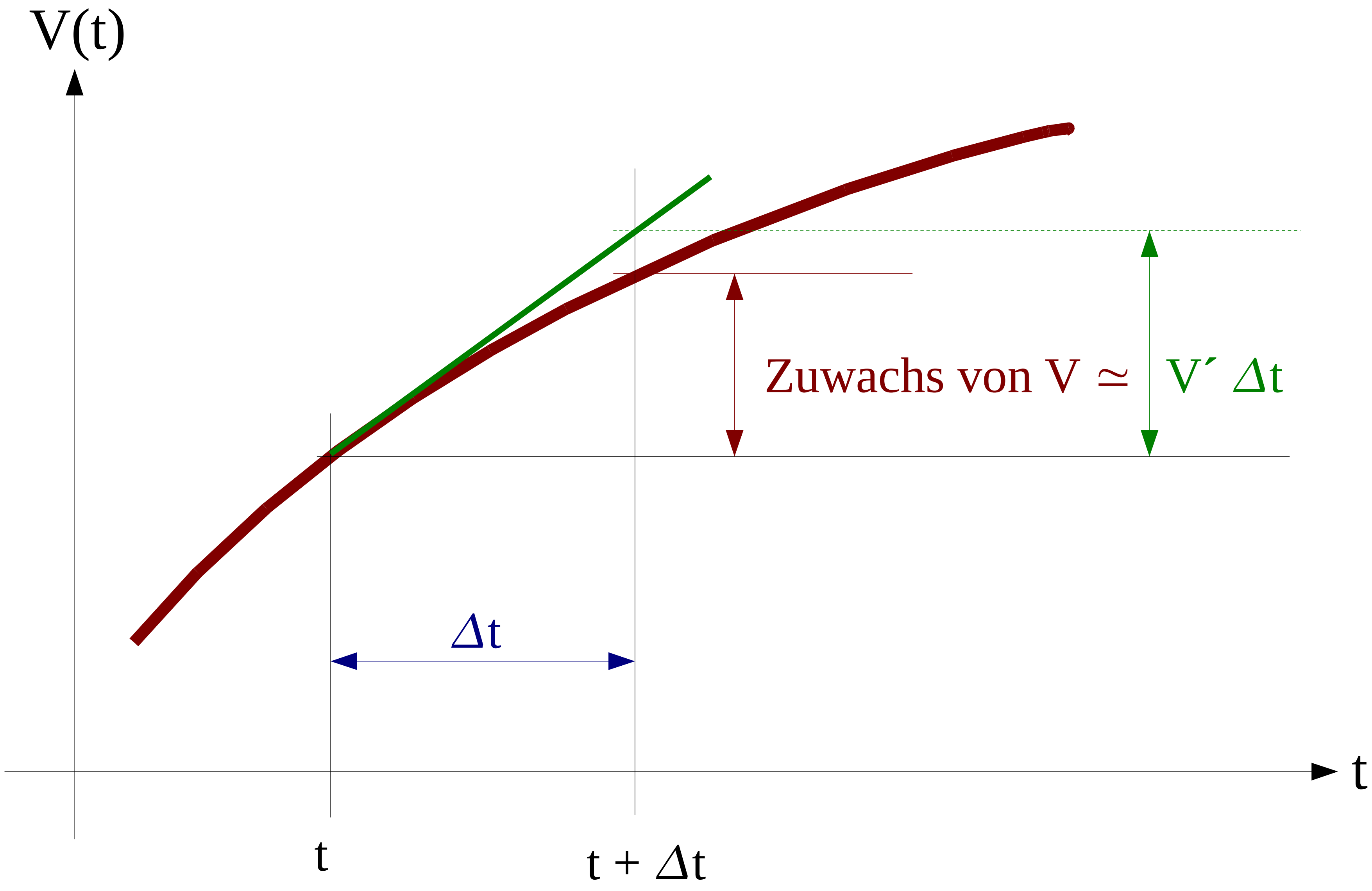
Zufluss = Abfluss

$$Q_{in} = Q_{aus}$$

$$Q_{in} = g\ h\ /\ R$$

$$\mathbf{h = Q_{in}\ R\ /\ g}$$

Wachstumsrate von V
Was bedeutet die erste Ableitung?



Dynamische Mengenbilanz

Der Wasserstand im Kessel ändert sich mit der Zeit.

Zuwachsrate = Zufluss – Abfluss

$$V'(t) \quad = \quad Q_{in}(t) - Q_{aus}(t)$$

$$V'(t) \quad = \quad Q_{in}(t) - V(t)\, p\, g \,/\, (F\, R)$$

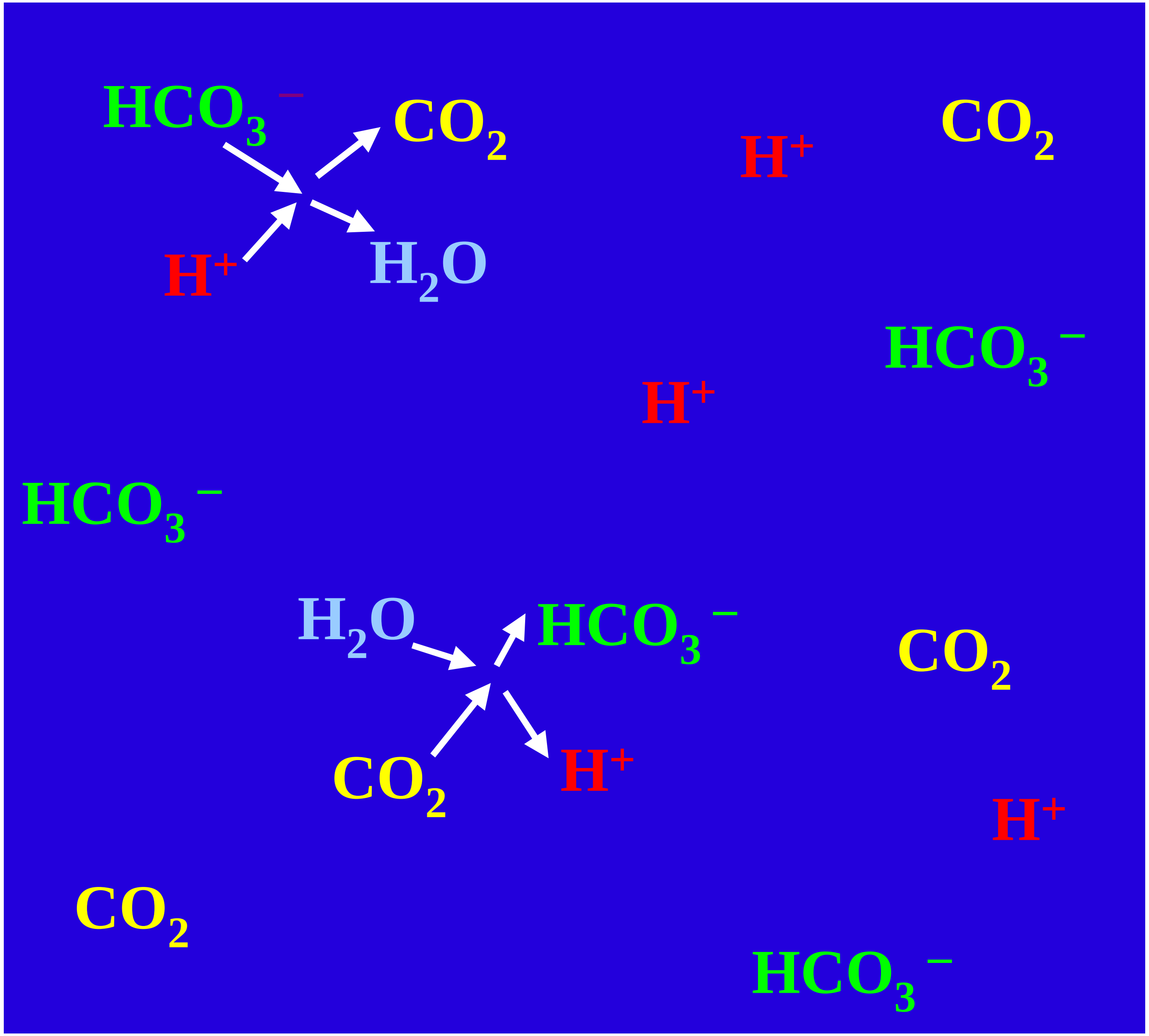
Wenn man einen Anfangswert kennt, z.B. V(0), kann man zumindest numerisch diese Differentialgleichung lösen.

Beispiel 2

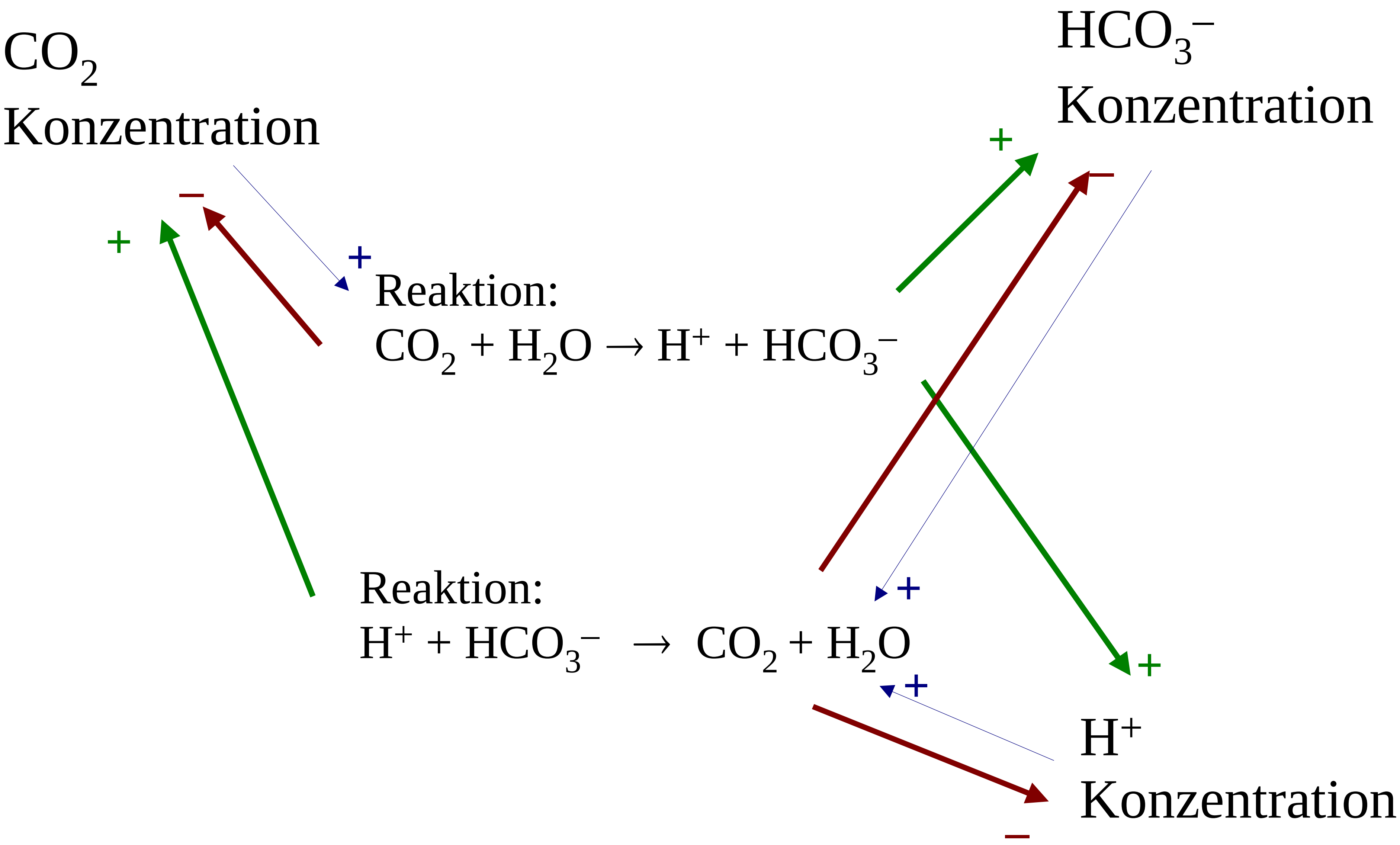
In einer wässerigen Lösung reagiert gelöstes CO_2 reversibel mit dem umgebenden H_2O und bildet HCO_3^- und H^+ - Ionen.

Welches Gleichgewicht stellt sich ein?

$$H^+ + HCO_3^- \updownarrow CO_2 + H_2O$$



Wirkungsdiagramm:



Größen benennen:

Konzentrationen (mol / L):

$[CO_2]$ ... Konzentration gelöstes Kohlendioxid

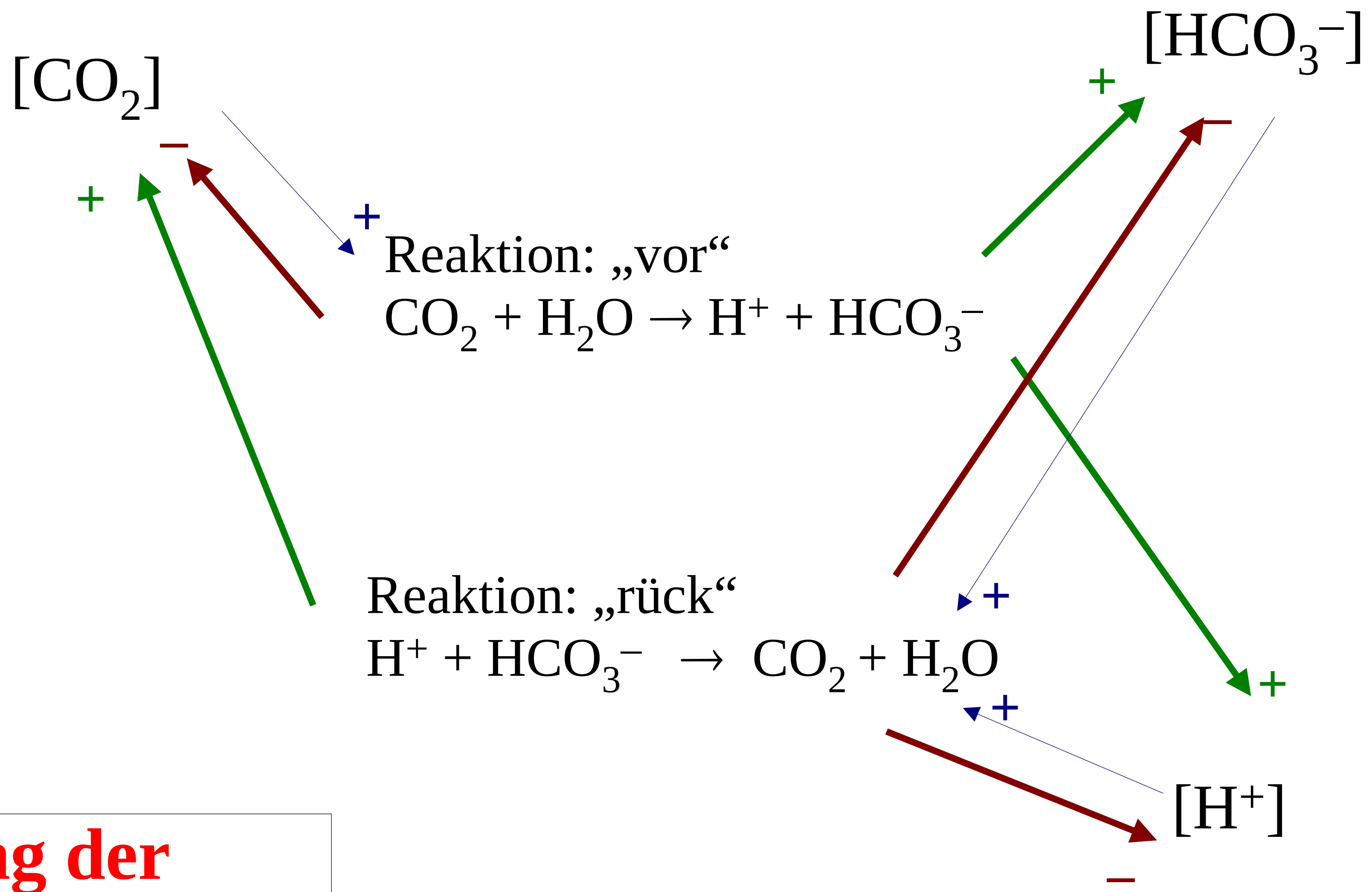
$[H^+]$ ... Konzentration H-Ionen

$[HCO_3^-]$ ... Konzentration Bicarbonat

Häufigkeit der Reaktionen (mol/(L sec))
(umgesetzte Menge von CO_2 pro Zeit- und Volumseinheit)

v_{vor} ... Häufigkeit der Reaktion $CO_2 + H_2O \rightarrow H^+ + HCO_3^-$

$v_{rück}$ ... Häufigkeit der Reaktion $H^+ + HCO_3^- \rightarrow CO_2 + H_2O$



Modellierung der Reaktionshäufigkeiten

$$\mathbf{v_{vor} = k_{vor}\,[CO_2]}$$

$$\mathbf{v_{rück} = k_{rück}\,[H^+]\,[HCO_3^-]}$$

Reaktionskonstanten:

k_{vor}... 1 / s

$k_{rück}$ ... L / (mol s)

Statische Mengenbilanz
Alle Konzentrationen im Gleichgewicht

	Gewinn	=	Verlust
für CO_2:			
	$v_{rück}$	=	v_{vor}
	$k_{rück}\,[H^+]\,[HCO_3^-]$	=	$k_{vor}\,[CO_2]$
für H^+:			
	v_{vor}	=	$v_{rück}$
	$k_{vor}\,[CO_2]$	=	$k_{rück}\,[H^+]\,[HCO_3^-]$
für HCO_3^-:			
	v_{vor}	=	$v_{rück}$
	$k_{vor}\,[CO_2]$	=	$k_{rück}\,[H^+]\,[HCO_3^-]$

Massenwirkungsgesetz:

$$[H^+]\,[HCO_3^-]\,/\,[CO_2] \quad = \quad k_{vor}\,/\,k_{rück} =: K$$

Dynamische Mengenbilanz

$$\text{Wachstum} = \text{Gewinn} - \text{Verlust}$$

für CO_2:

$$[CO_2]' = v_{rück} - v_{vor}$$

$$[CO_2]' = k_{rück}\,[H^+]\,[HCO_3^-] - k_{vor}\,[CO_2]$$

für H^+:

$$[H^+]' = v_{vor} - v_{rück}$$

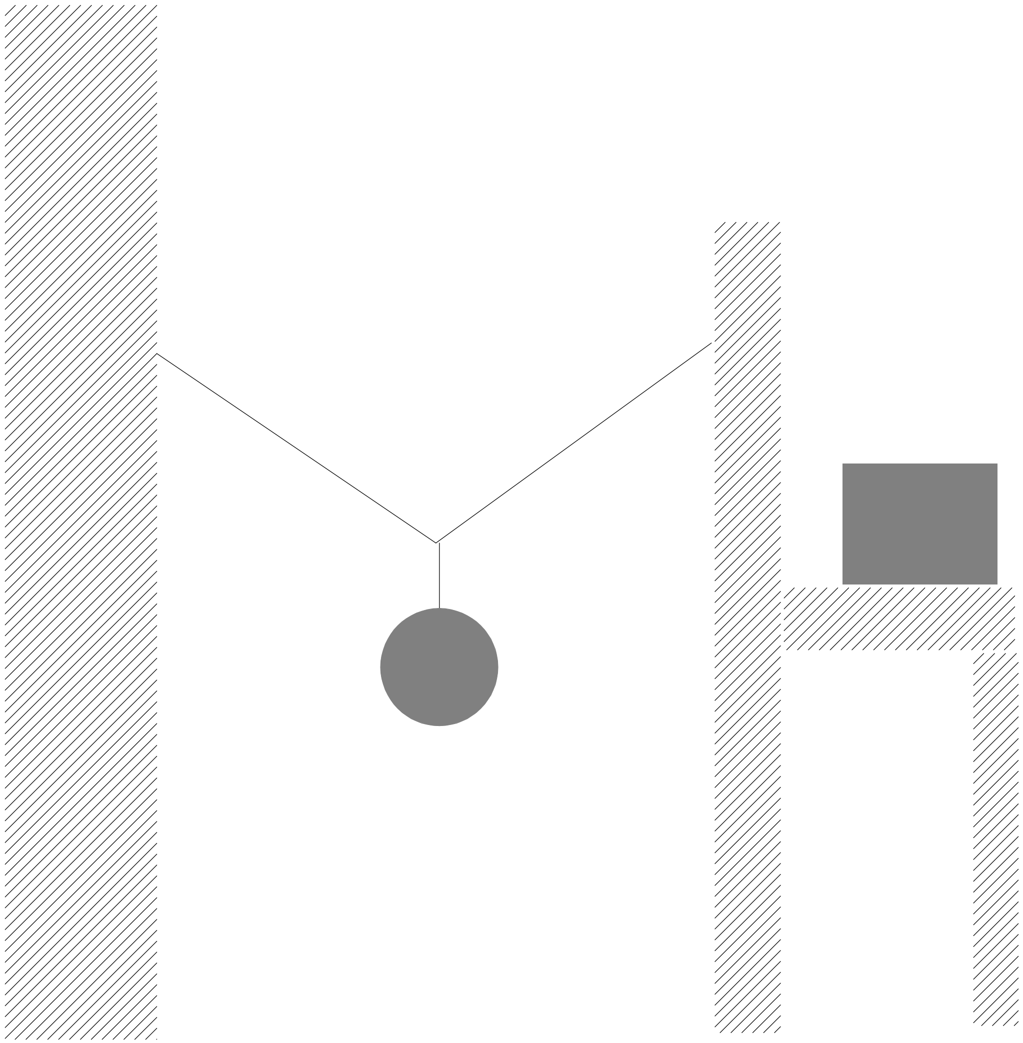
$$[H^+]' = k_{vor}\,[CO_2] - k_{rück}\,[H^+]\,[HCO_3^-]$$

für HCO_3^-:

$$[HCO_3^-]' = v_{vor} - v_{rück}$$

$$[HCO_3^-]' = k_{vor}\,[CO_2] - k_{rück}\,[H^+]\,[HCO_3^-]$$

Beispiel 3

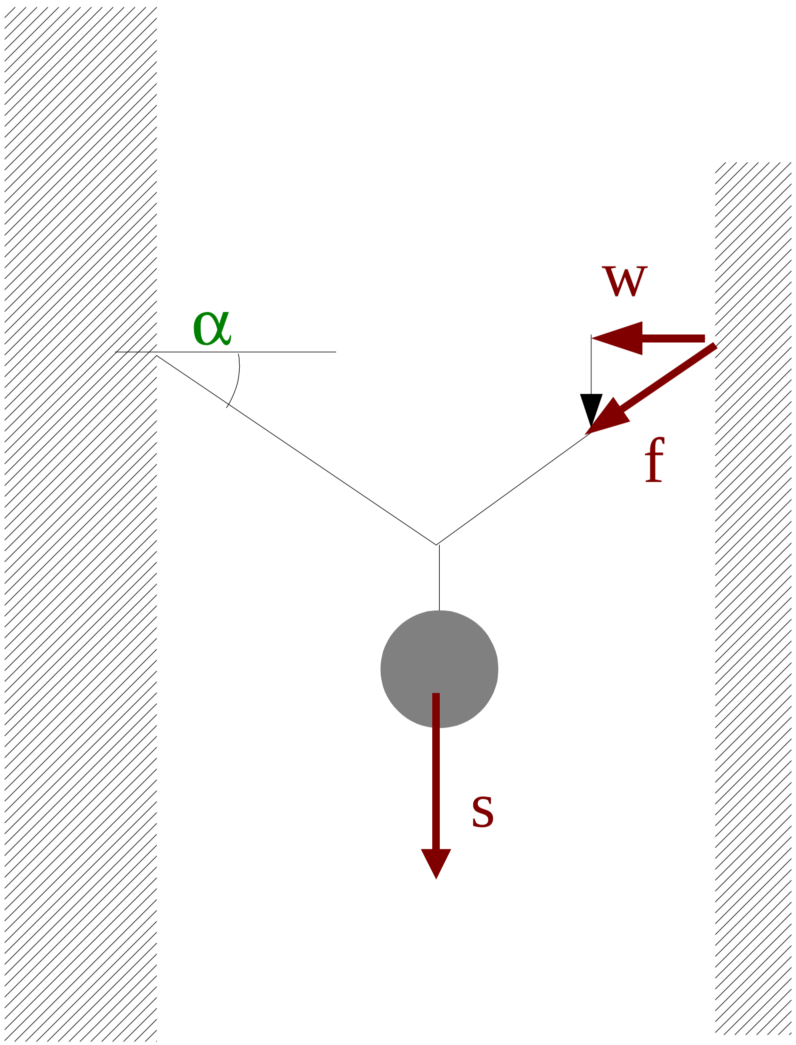


Um einen Gegenstand ohne Untergrund und Schatten zu fotografieren, wurde er an einer dünnen Nylonschnur zwischen der Wand und einem Stuhl aufgehängt.

Damit er nicht kippen kann, wurde die Sitzfläche des Stuhles beschwert. Aber wenn eine Kraft von mehr als 20 Newton waagrecht am Stuhl zieht, wird die Haftreibung überwunden und der Stuhl beginnt zu gleiten. Der Gegenstand wiegt 1 kg.

Worauf ist bei der Anordnung zu achten?

Systemgrößen:



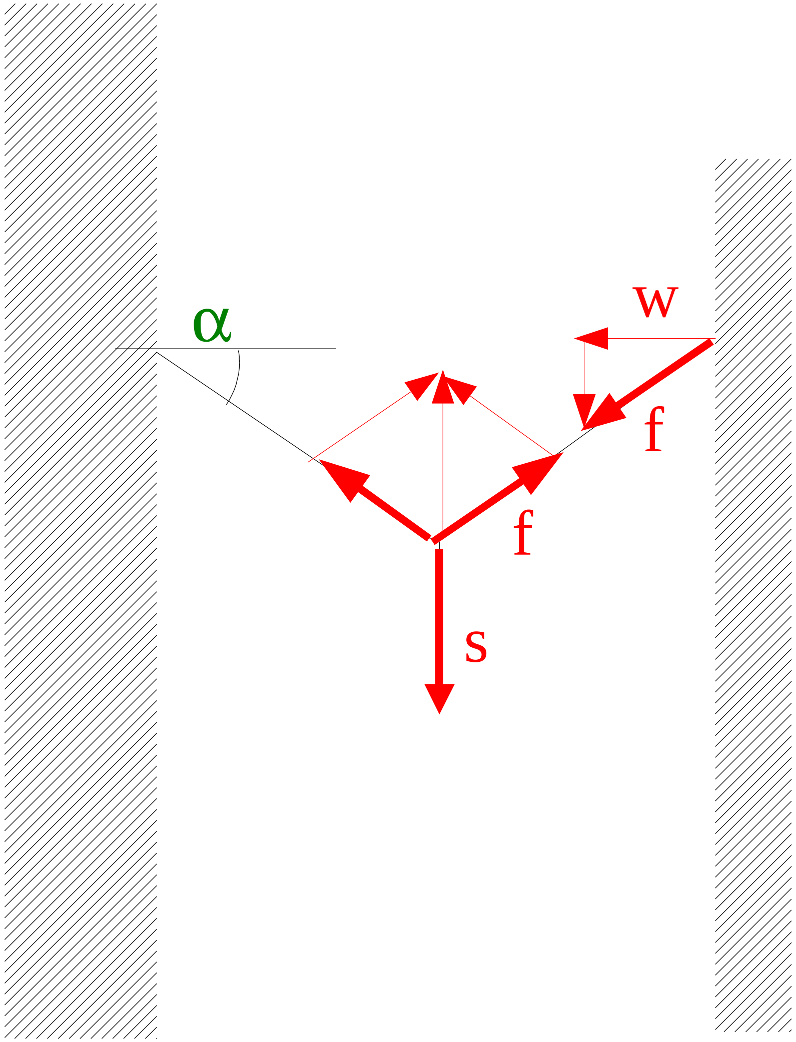
m ... Masse des Körpers (1 kg)
g ... Erdbeschleunigung (10 N/kg)

α ... Winkel, in dem Seil durchhängt (1)

s ... Betrag Schwerkraft Körper (N)
f ... Betrag Zugkraft am Seil (N)
w ... waagrechte Komp. Zugkraft (N)
h ... Betrag Haftreibung (20 N)

Kräftegleichgewicht:

Alle angreifenden Kraftvektoren summieren sich auf Null



$$s = 2\,f\,\sin(\alpha)$$

$$w = f\,\cos(\alpha)$$

$$s = m\,g$$

$$f = m\,g\,/\,(2\,\sin(\alpha))$$

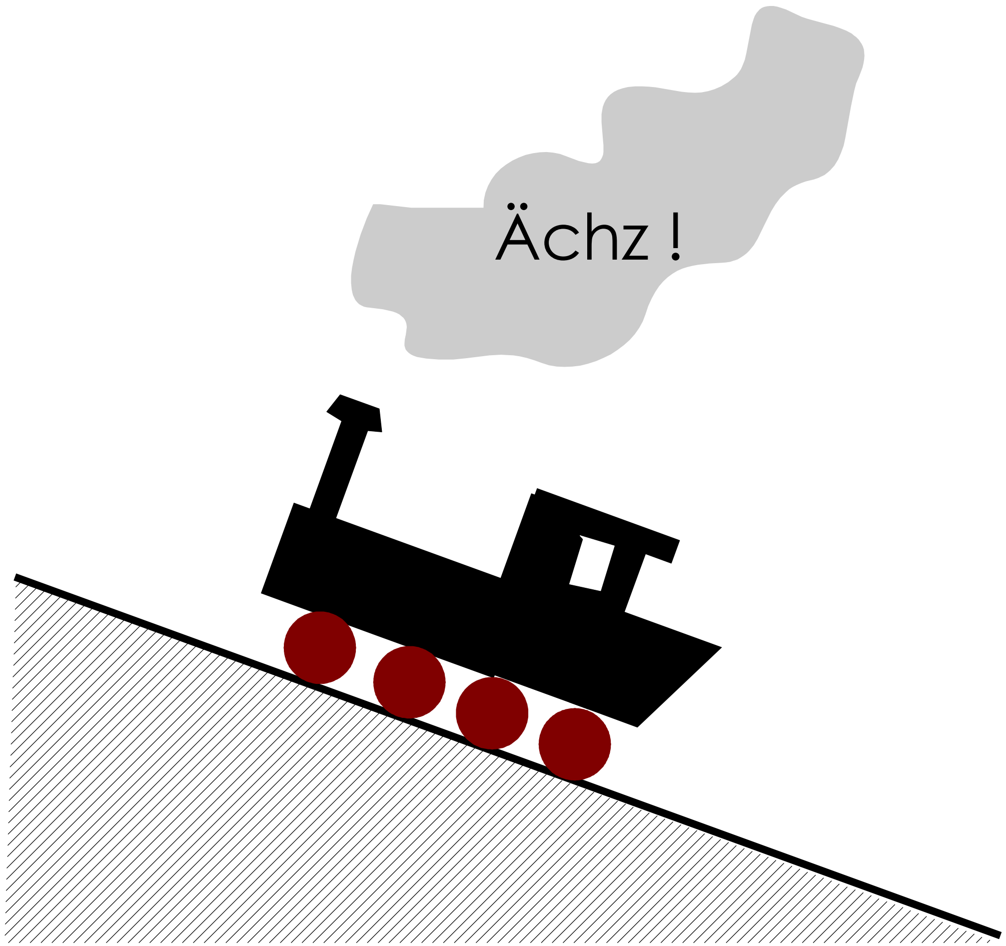
$$w = m\,g\,/\,(2\,\tan(\alpha))$$

Die waagrechte Komponente darf nicht größer als h sein:

$$h \geq mg\,/\,(2\,\tan(\alpha))$$

$$\tan(\alpha) \geq mg\,/\,2\,h = 1/4$$

Beispiel 3:



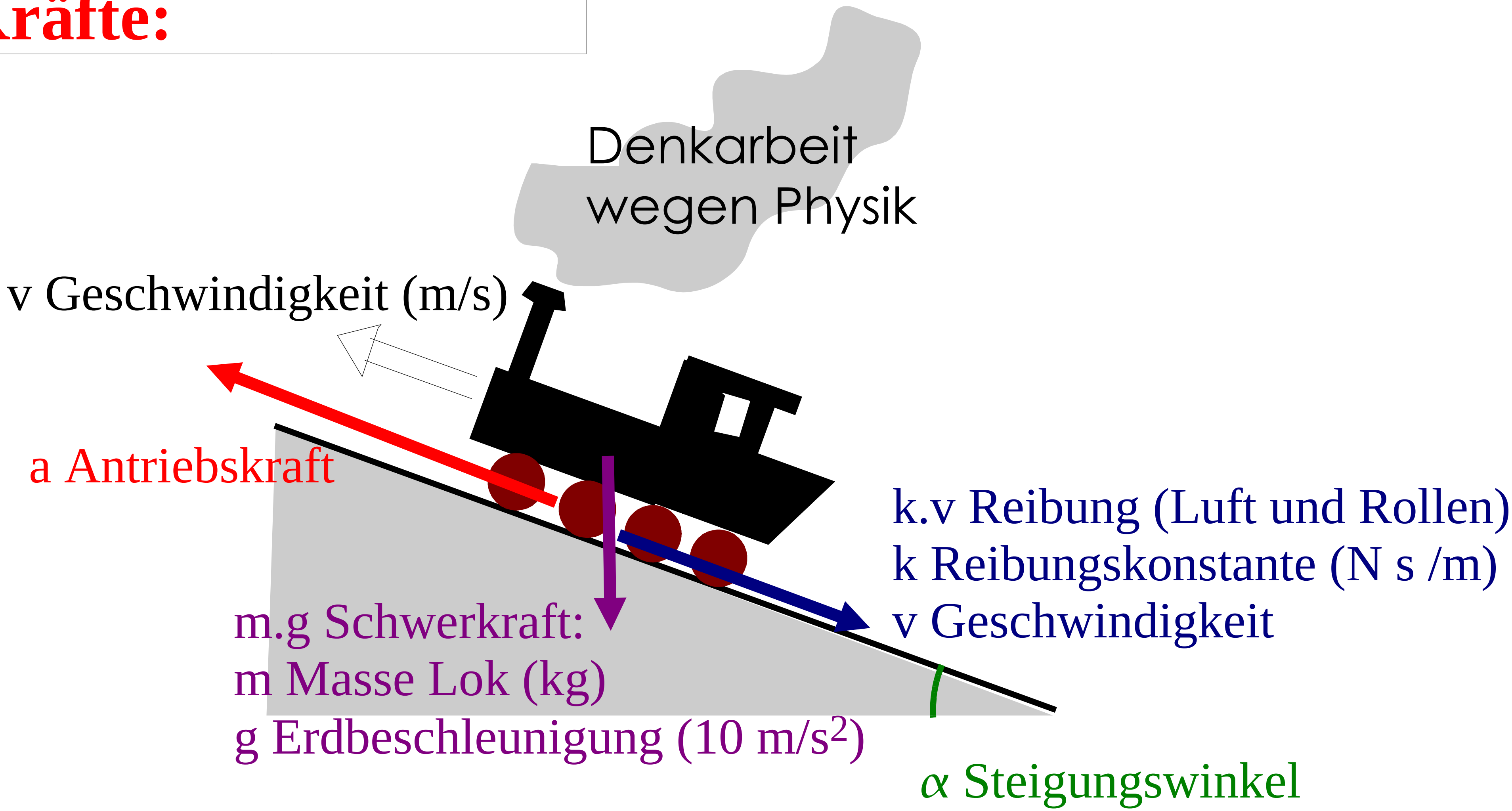
Eine Lok fährt einen Berghang aufwärts.

Modellieren Sie die angreifenden Kräfte in Abhängigkeit von der Geschwindigkeit.

1.) Welche Antriebskraft muss die Lok aufbringen, damit die Geschwindigkeit beibehalten wird?

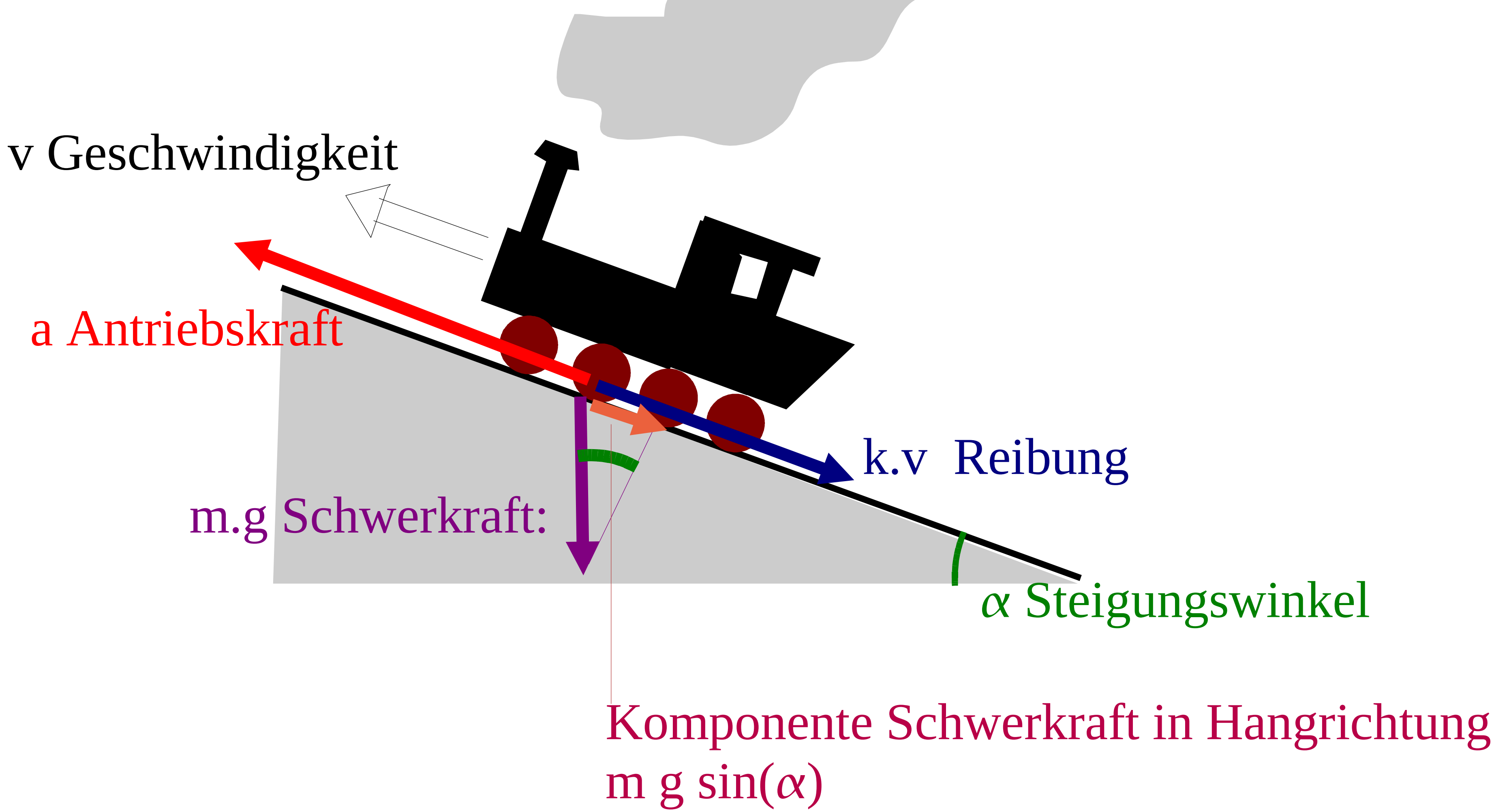
2.) Wie läuft die Bewegung ab, wenn die Lok eine bestimmte Antriebskraft entwickelt?

Systemgrößen und Kräfte:



Alle Kräfte in N = kg / (m s²)

Resultierende Kraft und statische Kräftebilanz



Kräftegleichgewicht: Alle Kräfte summieren sich zu Null.

$a - k\,v - m\,g\,\sin(\alpha) = 0$

Dynamische Kräftebilanz:

Die Newtonsche Bewegungsgleichung

Masse × Beschleunigung = Kraft

$$\mathbf{m\,v'(t) = a - k\,v(t) - m\,g\,\sin(\alpha)}$$

Hängen die Kräfte auch von der Position u(t) ab, dann entsteht eine Differentialgleichung zweiter Ordnung für u(t).