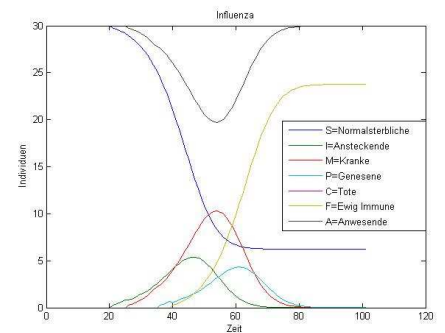
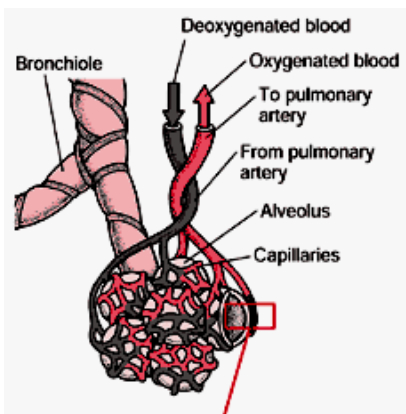


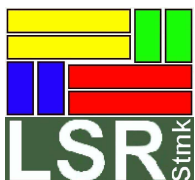
# MATHEMATIK- MODELLIERUNGSWOCHE

## KURZBERICHT

7. - 13. Jänner 2006



Bank Austria  
Creditanstalt



# Mathematik-Modellierungswoche



Schloss Seggau, 07.01. - 13.01.2006

Ausführliche Dokumentation der einzelnen Projekte:

<http://math.uni-graz.at/modellwoche/2006/>

# Vorwort

Die Idee zu der in der Steiermark durchgeführten „Modellierungswoche“ für Schüler der 7. und 8. Klasse der AHS wurde schon längere Zeit am Institut für Mathematik und Wissenschaftliches Rechnen der Universität Graz diskutiert. Vorbild waren ähnliche Vorhaben, die bereits in Kaiserslautern, in Bozen und erstmals im letzten Jahr auch in Linz durchgeführt wurden. Mitglieder des Institutes haben bereits Erfahrungen mit ähnlichen Veranstaltungen für Studierende und angehende Wissenschaftler. Im Jahre 2005 wurde vom Institut für Mathematik und Wissenschaftliches Rechnen der Karl-Franzens-Universität erstmals eine Modellierungswoche durchgeführt, die bei allen teilnehmenden SchülerInnen großen Anklang gefunden hat. Ermutigt durch diesen durchschlagenden Erfolg haben wir auch im Jahre 2006 wieder eine Modellierungswoche angeboten. Hauptziel der Modellierungswoche war es, Schüler mit einem Aspekt der Mathematik zu befassen, der unserer Meinung nach im Unterricht an den AHS unterrepräsentiert ist: Die Rolle der Mathematik als Werkzeug zum Verständnis der Welt, die uns in Alltag und Wissenschaft umgibt. Während ihrer gesamten Geschichte stand die Mathematik immer in Wechselwirkung mit angewandten Bereichen. Viele mathematische Theorien entstanden in Reaktion auf Anforderungen aus den verschiedensten Anwendungsbereichen. Die Verfügbarkeit immer leistungsfähigerer Computer hat neue Möglichkeiten für die mathematische Behandlung verschiedenster komplexer Probleme eröffnet. Quantitative Resultate statt qualitativer Aussagen sind immer wichtiger und erfordern zu ihrer Bewältigung die mathematische Modellierung komplexer Systeme in interdisziplinärer Zusammenarbeit.

Den an der Modellierungswoche teilnehmenden SchülerInnen sollte an Hand sorgfältig ausgewählter Projektaufgaben Gelegenheit gegeben werden, den angewandten Aspekt der Mathematik durch Teamarbeit in Projektgruppen zu erleben. Es wurde versucht, den Teilnehmenden die wesentlichen Phasen eines Modellierungsprozesses nahe zu bringen: Einarbeiten in das Anwendungsgebiet, Wahl der Modellstruktur in Hinblick auf die Aufgabenstellung, Einsatz numerischer Methoden, Interpretation der Ergebnisse, Präsentation der Resultate.

Treibende Kraft für die Realisierung der Modellierungswoche war Dr. Stephen Keeling, dem hier für seinen großen Einsatz gedankt sei. Besonderer Dank gebührt dem Landesschulrat für Steiermark, und hier insbesondere Frau Landesschulinspektor Hofrat Mag. Marlies Liebscher. Sie hat die Idee einer gemeinsamen Veranstaltung sofort sehr positiv aufgenommen und tatkräftig unterstützt. Ohne den großen Einsatz der direkten Projektbetreuer, Dr. Sigrid Thaller – Institut für Sportwissenschaft, Dr. Wolfgang Desch, Dr. Stephen Keeling, Dr. Georg Propst – alle Institut für Mathematik und Wissenschaftliches Rechnen, und der Betreuer aus dem Kreis der Lehrerschaft, Mag. Theresa Gradnitzer, Mag. Erna Hammerl und Mag. Melanie Wogrin, die auch die Gestaltung dieses Berichtes übernommen haben, sowie Dr. Alfio Borzì vom Institut für Mathematik und Wissenschaftliches Rechnen wäre die Modellierungswoche nicht durchführbar gewesen. Der Bank Austria – Creditanstalt sei für eine nicht unbeträchtliche Subvention gedankt. Dem Programm für Begabten- und Begabungsförderung Steiermark sei für eine wesentliche Subvention gedankt. Für seine Unterstützung sei Vizerektor Polaschek, Universität Graz, gedankt.

Schloss Seggau, am 13. 1. 2006

F. Kappel  
(Leiter des Institutes für Mathematik und  
Wissenschaftliches Rechnen)

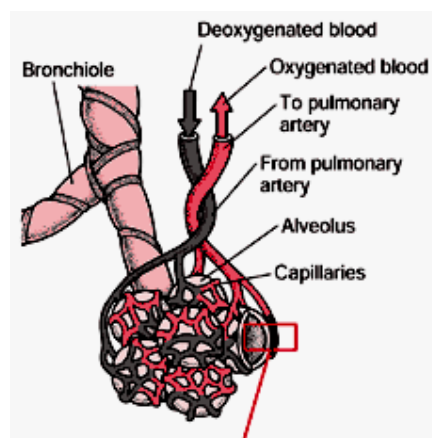




Teilnehmer: Brodatsch Philipp, Fritz Eva-Maria, Gallhofer Silvia, Hierzer Marlies, Moik Christine

**PROBLEMSTELLUNG:**

In der Lunge befinden sich  $3 \cdot 10^8$  Alveoli, in denen der Gasaustausch durch eine semipermeable Membran durch Diffusion stattfindet. Unsere Aufgabe war, Bedingungen für einen optimalen Gasaustausch herauszufinden.

**ERGEBNISSE:**

Der Partialdruck für Gase im Blut ist umso größer je größer die Konzentration des gelösten Gases im Blut ist. Dieser lineare Zusammenhang gilt nicht für  $O_2$ , da  $O_2$  an Haemoglobin gebunden wird. Der Partialdruck für  $O_2$  entspricht einer Funktion, die nicht explizit dargestellt und daher nur abgeschätzt werden kann.

**Abschätzung des maximalen Gasflusses für Gase mit einfacher Lösung:**

Ausgehend von der Formel für den Gasaustausch in der Gesamtlunge

$$f = \sum_{i=1}^N f_i = Q_o \sigma \cdot (P_l - P_v) \cdot E,$$

wobei E für die Effizienz steht (siehe Graphik E(r))

$$E = \frac{1}{Q_o} \cdot \sum_{i=1}^N \frac{Q_i r_i}{r_i + \sigma k T}$$

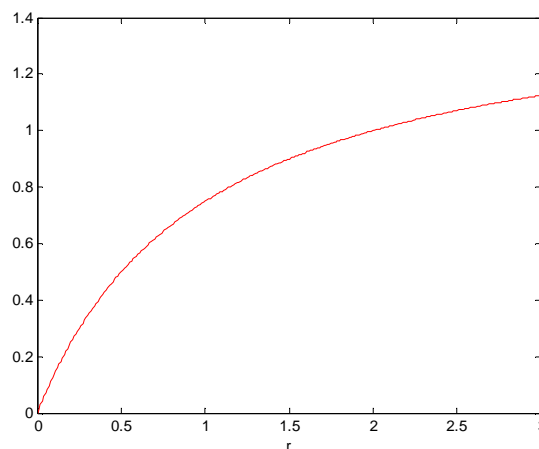
versuchten wir zunächst durch Diskussion der Funktion  $g_i$  auf ihre Eigenschaften zu schließen. Die Funktionen  $g_i$  sind folgendermaßen definiert

$$g_i(r) = \frac{Q_i r}{r + \sigma k T}. \text{ Aufgrund der strengen Konkavität}$$

der Kurve konnten wir zunächst eine Abschätzung nach oben durchführen. Wenn  $r_i \neq r_o$ , dann kommt es nur zu einer Approximation von  $f_{\max}$ . Der optimale Gasaustausch ( $f_{\max}$ ) ist nur möglich, wenn in allen Alveoli das Ventilations-Perfusions-Verhältnis gleich ist. Man erhält daher durch das Ersetzen der Funktionswerte  $g_i(r_i)$  durch  $y_i$  eine Abschätzung nach oben.

$$E < \frac{1}{Q_o} \sum_{i=1}^N \frac{Q_i r_o}{r_o + \sigma k T} + \frac{1}{Q_o} \sum_{i=1}^N g_i'(r_o)(r_i - r_o) = \frac{r_o}{r_o + \sigma k T} = E_{\max}$$

falls  $r_i \neq r_o$  für mindestens ein i gilt.



Man beachte, dass der 2. Summand auf der rechten Seite Null ist und  $E_{\max}$  tatsächlich das Maximum der Funktion  $E$ , wenn für alle Alveoli gilt  $r_i=r_o$ .

### Ergebnis:

Ein maximaler Gasfluss ( $f$ ) kann nur erreicht werden, wenn das Ventilations- Perfusions-Verhältnis in allen Alveoli gleich ist:

$$f_{\max} = Q_o \sigma \cdot (P_I - P_v) \cdot \frac{r_o}{r_o + \sigma k T}.$$

### Abschätzung des maximalen Gasflusses für Sauerstoff:

Anhand dieser Ergebnisse konnten wir ein analoges Resultat für den  $O_2$ -Transport in der Lunge berechnen. Durch einige Umformungen gingen wir zuerst von folgender Gleichung aus

$$r c_I + c_v = c_a + \frac{r}{kT} \cdot H(c_a),$$

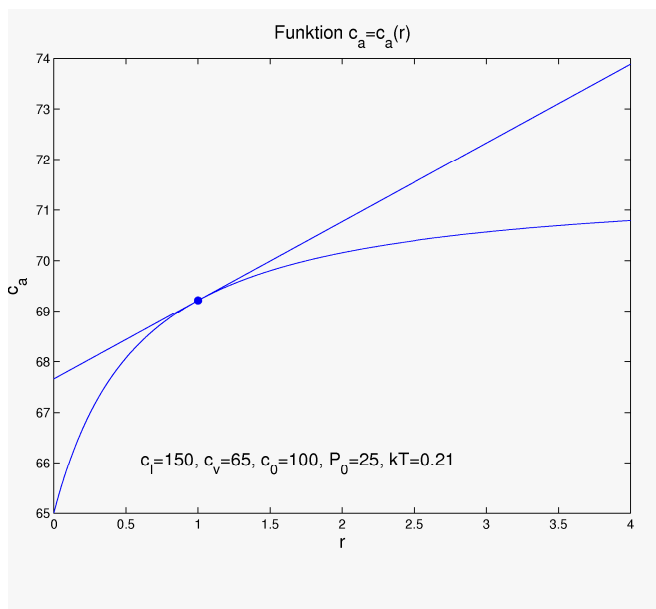
um im nächsten Schritt die Funktion  $H(c_a)$  bzw. deren Abhängigkeit von der arteriellen  $O_2$ -Konzentration genauer zu betrachten. Da einige Komponenten ( $c_I, c_v, k, T$ ) der Funktion konstant sind, konnten wir davon ausgehen, dass die Funktion  $c_a$  für alle Alveoli gleich ist. Aufgrund der Funktionseigenschaften kamen wir wieder zum Ergebnis, dass es sich um eine streng monoton wachsende und strikt konkave Funktion handelt.

### Ergebnis:

Durch analoge Überlegungen wie im Falle eines Gases, das mit Blut eine einfache Lösung bildet, erhalten wir auch in diesem Fall das Ergebnis

$$f = \sum_{i=1}^N Q_i (c_a(r_i) - c_v) \leq Q_o (c_a(r_o) - c_v) = f_{\max},$$

d.h.  $f$  ist maximal, wenn für alle Alveoli  $r_i=r_o$  gilt.



### Aufgabe1:

Die Lunge besteht aus 2 Teilen, in denen jeweils das Ventilations-Perfusions-Verhältnis für alle Alveoli gleich ist,  $r_i=\tilde{r}_1$  bzw.  $r_i=\tilde{r}_2$ . Der Einfachheit halber setzen wir  $(V_A)_I = x$ .

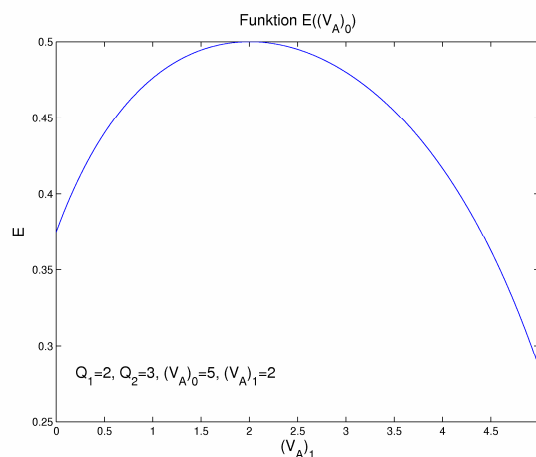
Zuerst bewiesen wir durch Ableiten der Formel E als Funktion von  $(V_A)_1$ , dass die maximale Effizienz der Lunge vom Ventilationsvolumen abhängt. Es handelt sich um ein Extremwertbeispiel. Wir bildeten die 1. Ableitung und setzten diese 0. Wir erhielten die Gleichungen:

$$(Q_2 + (V_A)_0 - x) \cdot Q_1 = \pm(Q_1 + x) \cdot Q_2$$

Diese Gleichung hat 2 Lösungen, wobei man physiologisch sehen kann, dass nur eine Lösung relevant ist.

$$x = Q_1 \frac{(V_A)_0}{Q_0}$$

. Berechnet man die Effizienz von diesem Wert, so sieht man, dass die Ventilation des ersten Lungenteils so gewählt werden muss, dass das Ventilations-Perfusions-Verhältnis für sämtliche Alveoli gleich  $r_0$  ist.



### Aufgabe2:

In der nächsten Aufgabe sollten wir die Ergebnisse aus folgenden Gleichungen interpretieren,

$$\bar{P}_a = \frac{\sum_{i=1}^2 Q_i \cdot (c_a)_i}{Q_0 \cdot \sigma}$$

$$\bar{P}_A = kT \frac{\sum_{i=1}^2 (V_A)_i \cdot (c_A)_i}{(V_A)_0}$$

wobei man in beiden Fällen zu folgendem Resultat kommt:

Der durchschnittliche Partialdruck  $\bar{P}_A$ , im arteriellen Blut als auch in den Alveoli ist der Quotient der Summe aller  $(c_a)_i$  (=Konzentration der Teilchen) und der Löslichkeit.

### Aufgabe3:

Wie muss der Strom  $Q_0$  beschaffen sein, wenn die Durchblutung eines Lungenteiles plötzlich ausfällt?

Nach Unterbrechung der Blutversorgung ist der gesamte Gasaustausch in der Lunge ausschließlich durch den Gasaustausch von Teil 1 gegeben, d.h. es gilt

$$f_1 = Q_0 \sigma (P_I - P_v) \frac{r_1}{r_1 + \sigma k T}, r_1 = \frac{(V_A)_1}{Q_0},$$

wobei auch hier angenommen wird, dass der Gasaustausch in Teil 1 in der Lunge optimal ist. Es gilt daher  $f_0 = f_1$ , genau dann, wenn  $r_0 = r_1$  gilt. Wegen  $(V_A)_1 = x (V_A)_0$ , bedeutet dies

$$(V_A)_0 = \frac{1}{x} \cdot V_0.$$

Ist z.B.  $x=2/3$ , d.h. 1/3 der Lunge ist von der Unterbrechung der Blutversorgung betroffen, so muss die Ventilation bei gleich bleibender Perfusion der Lunge um den Faktor 3/2 erhöht werden.



Teilnehmer: Claudia Andrä, Romana Boiger, Thomas Janisch, Theodora Korkas, Philipp Prinz und Elias Windisch

## PROBLEMSTELLUNG:

Der Weitsprung aus dem Stand war Teil des antiken olympischen Fünfkampfes. Die Sportler verwendeten beim Sprung Zusatzgewichte, so genannte Halteres, die sie in den Händen hielten. Diese Gewichte sollten die Sprungweite erhöhen. Mit Hilfe von schon bestehenden Modellen einfacherer Bewegungen soll die Wirkungsweise der Zusatzgewichte beim Standweitsprung erklärt werden.



510-500 v.Chr. Foto: Museum of Fine Arts, Boston

## ERGEBNISSE:

### 1. Modell für den senkrechten Sprung ohne Ausholbewegung

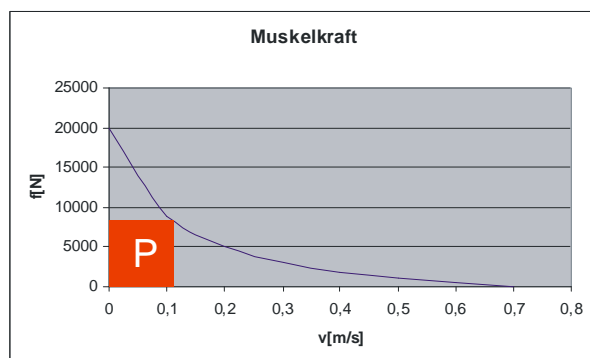
#### Einschaltung des Muskels

Jeder Muskel besteht aus mehreren Muskelfasern. Ein Nerv versorgt immer eine Gruppe von Muskelfasern. Diese bekommt daraufhin den Befehl, zu kontrahieren oder nicht. (Eine motorische Einheit kann nicht „halb“ kontrahieren!) Damit eine Bewegung zustande kommt, müssen motorische Einheiten eingeschaltet werden. Das Einschalten des Muskels wird mit der Funktion  $s(t) = 1 - e^{-At}$  beschrieben. A hat z.B. den Wert  $A=7 \text{ s}^{-1}$ .

#### Muskelkraft:

Die Muskelkraft verhält sich indirekt proportional zur Kontraktionsgeschwindigkeit. Je größer diese Geschwindigkeit ist, desto geringer ist die Muskelkraft. Die rechteckige Fläche P zwischen der Kurve und der x-Achse gibt die Leistung des Muskels an (siehe Abbildung). Anfangs vergrößert sich die Leistung mit zunehmender Geschwindigkeit, bis sie ein Maximum erreicht. Eine höhere Geschwindigkeit wirkt sich negativ auf die Leistung aus.

$$f = \frac{c}{v+b} - a$$



f = Muskelkraft  
v = Kontraktionsgeschwindigkeit  
a, b, c = konstante Größen  
z.B. a = 3069 N, b = 0,1074 m/s,  
c = 2478 W

## Modell für den Sprung

Laut Newton bewirkt die Summe aller Kräfte die Beschleunigung des Körpers. Die Kräfte setzen sich zusammen aus dem Gewicht des Körpers und der vom Muskel verursachten Kraft. Dabei müssen die Einschaltfunktion und ein Faktor für die Geometrie berücksichtigt werden.

$$m \cdot a = \Sigma \cdot F_i = -m \cdot g + F_m = -m \cdot g + s(t) \cdot f(v) \cdot G(X)$$

X = Ort des Schwerpunkts

G(x) = Geometriefunktion

a = Beschleunigung

F<sub>m</sub> = vom Muskel erzeugte Kräfte

s(t) = Einschaltfunktion

f = Muskelkraft

g = Gravitationsbeschleunigung

t = Zeit

m = Masse

v = Kontraktionsgeschwindigkeit

## 2. Wie wirkt sich die Armbewegung auf die senkrechte Kraft aus?

Versuchsaufbau: Die Versuchsperson steht auf einer Waage und muss die Arme so schnell wie möglich nach oben reißen. Die Gewichtsänderung wird auf der Waage gemessen.

a. Ohne Hanteln:

Im Durchschnitt gab es einen Kraftausschlag auf der Waage von 151,074 N.

b. Mit Hanteln:

Der durchschnittliche Kraftausschlag auf der Waage betrug 223,668 N.

## Modell der Armbewegung beim Sprung

### Modell a:

Die aufgrund der Armbewegung vergrößert auftretende Kraft und Gewichtsänderung kann man in der Modellgleichung wegen  $\mathbf{m \cdot a = -m \cdot g + s(t) \cdot f(v) \cdot G(X)}$  berücksichtigen, wenn man die Gravitation verändert und die Masse konstant lässt. (Masse ist nicht gleich Gewicht!) Wenn die Gewichtsänderung 130 N beträgt, muss man diese zur Körpermasse addieren und durch die Körpermasse dividieren. Der dabei errechnete Wert wird mit der Erdgravitation von 9,81 m/s<sup>2</sup> multipliziert und man erhält die Gravitation mit Berücksichtigung der Kraftänderung.

Masse: 40 kg

Gewichtsänderung: 130 N

Gravitation: 9,81 m/s<sup>2</sup>

$$\frac{53}{40} = 1,325 \longrightarrow 1,325 \times 9,81 = 12,99 \text{ m/s}^2$$

Das Ergebnis der Simulation lautet, dass man mit Armbewegung und zusätzlichen Gewichten höher springt als ohne diese Hilfsmittel. Die Begründung hierfür liegt darin, dass man sich durch mehr Gewicht langsamer bewegt, wodurch man mehr Kraft einsetzen und so höher springen kann. Es gibt allerdings eine Gewichtsgrenze, ab der die Sprunghöhe wieder abnimmt, weil man die Arme nicht mehr so schnell bzw. überhaupt nicht mehr nach oben reißen kann.

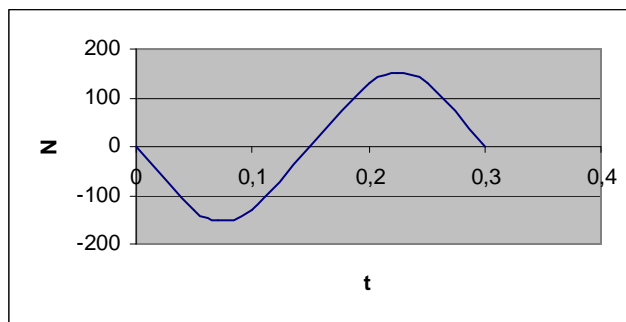
### Modell b:

Durch das Heben der Arme wirkt zunächst eine Kraft nach unten, wodurch das Gewicht größer wird.

Da die Armbewegung aber ab der Hälfte der Zeit wieder abgebremst wird, wirkt die Kraft dann in die entgegengesetzte Richtung, wodurch das Gewicht wieder kleiner wird. Beim Absprung ist man dadurch leichter!

Diese Kraft wird in diesem Modell durch eine Sinusfunktion dargestellt:

$$y = -151.074 \sin(20\pi/3 \cdot x)$$



### 3. Versuch: Standweitsprung mit bzw. ohne Halteres

In einem praktischen Versuch wollten wir die Wirkung von Halteres feststellen. Zunächst sprang jeder von uns sowohl ohne Gewichte als auch ohne Armbewegung. Mit Armbewegung zeigte sich bei allen eine deutliche Erhöhung der Sprungweite, die teilweise sogar bis zu 33 cm betrug.

Im Zuge des dritten Sprunges, bei dem beide Arme mit je 1 kg beschwert waren, stellte sich heraus, dass diese zusätzlichen Gewichte nicht für jeden eine Hilfe darstellten. So vergrößerte sich die Sprungweite bei einigen zwar (um bis zu 22 cm), bei anderen blieb sie jedoch etwa gleich oder verringerte sich sogar ein wenig.

Bei einem zusätzlichen Gewicht von 2 kg pro Arm wurde dieser Effekt noch deutlicher sichtbar. Einige sprangen weiter als zuvor, für andere war dieses Gewicht allerdings zu schwer, sodass sich ihre Sprungweite um bis zu 20 cm verkürzte.

Zwischen der Armbewegung und der Sprungweite lässt sich ein Zusammenhang feststellen: Durch das Zurückschwingen der Arme während des Sprunges wird der Schwerpunkt nach hinten verlagert und die Weite so erhöht. Sind die Gewichte allerdings zu schwer, gelingt dieses Zurückschwingen der Arme nicht mehr so gut oder gar nicht mehr und die Gewichte haben einen negativen Effekt. Dieser „Knackpunkt“ der zusätzlichen Gewichte ist nur individuell festlegbar, es gibt keinen „allgemeinen Grenzwert“.

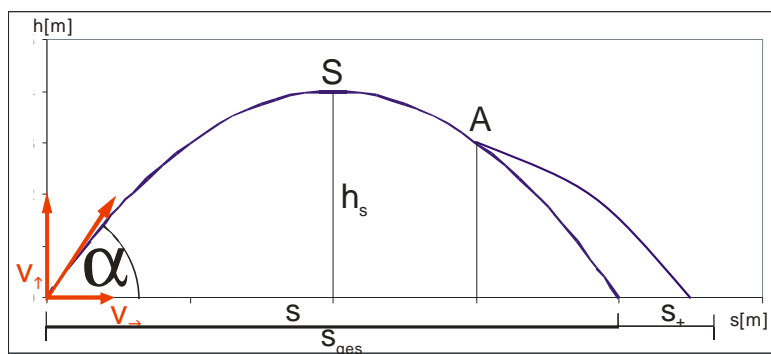


### 4. Erhöhung der Sprungweite durch Wegwerfen der Halteres im Laufe des Sprungs

In manchen Quellen wird behauptet, dass die alten Griechen, um ihre Sprungweite zu erhöhen, im Laufe des Sprungs die Halteres nach hinten warfen. Wir stellten zu dieser Behauptung folgende Überlegungen an:

Durch das nach hinten Werfen der Gewichte bekommt der Springer einen zusätzlichen Impuls. Dieser erhöht den Eigenimpuls des Springers und somit auch seine Geschwindigkeit.

Der Ort, an dem die Gewichte weggeworfen werden, ist leider nicht genau feststellbar. Ideal wäre es natürlich, wenn man sie gleich zu Beginn von sich stoßen würde. Da das allerdings nicht möglich ist, nahmen wir an, dass dies nach  $\frac{3}{4}$  der Strecke der Fall ist. Rechnerisch wurde nachgewiesen, dass das Wegwerfen der Gewichte an diesem Punkt eine Erhöhung der Sprungweite von ca. 2 cm ( $=S_+$ ) bewirkt. Dies ist allerdings nur ein Richtwert, da die Sprungweite auch stark von den jeweiligen Muskeleigenschaften des Springers abhängt, die wir leider nicht messen konnten. Die Dauer des Sprunges wird durch den zusätzlichen Impuls aber nicht geändert.



Teilnehmer: Rita Ambach, Iris Bardel, Matthias Haselmann, Caroline Neuray, Hannes Plank, Stefan Sorger

### PROBLEMSTELLUNG:

Eine Seilbrücke besteht im Prinzip aus zwei durchhängenden Tragseilen, welche am Ufer verankert sind. An diesen sind an senkrechten Seilen Querbalken aufgehängt. Weitere Fixierungen verhindern, dass die Querbalken sich zu frei bewegen können (z.B. ein Seil, das die Querbalken miteinander verbindet). Über die Querbalken können, damit man leichter geht, in Längsrichtung Bretter gelegt werden.

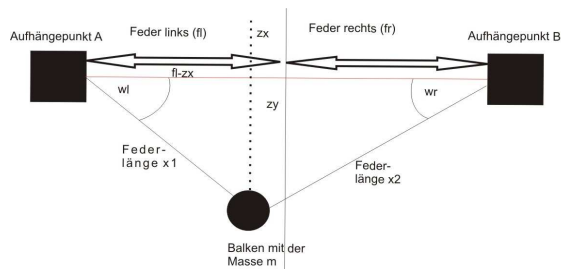
Gesucht ist ein Modell, das die Eigenschaften der tragenden Konstruktion einer einfachen Seilbrücke simulieren kann, und zwar sowohl statisch, wenn die Brücke unter konstanter Last in Ruhe ist, als auch dynamisch, wenn sich die Lastverteilung auf der Brücke ändert, oder die Brücke auf- und abschwingt. Wenn Zeit bleibt, könnte eine feinere Modellierung auch die Transversalbewegung der Brücke und Rotationsbewegungen der Balken darstellen.

Wie viel trägt die Brücke? Welche Rolle spielen die Tragfähigkeit, Gewicht und Elastizität der Tragseile? Welche Rolle spielt das Gewicht und die Anzahl der Querbalken? Können aus dem Modell Empfehlungen für die Konstruktion einer Seilbrücke abgeleitet werden?

### ERGEBNISSE:

#### Ein Balken in 2D

Um dieses „Monsterproblem“ zu lösen, haben wir es in viele kleine Unterprobleme unterteilt, wodurch wir uns erhofft haben, Schritt für Schritt eine stabile, wahrheitsgetreue Brücke zu modellieren.



Als erstes haben wir uns mit der einfachsten Art einer „Brücke“ beschäftigt – ein Gewicht, das von zwei Federn gehalten wird, wobei das Gewicht einen Querbalken in 2D darstellt und die Federn ein Tragseil symbolisieren – und uns die Zusammenhänge zwischen den verschiedenen, auf den Querbalken wirkenden, Größen überlegt. Wir wollten eine Formel zur

Errechnung der Koordinaten finden.

Es gibt dafür zwei Lösungswege: die Berechnung mit Hilfe von Winkelfunktionen und die Berechnung mit Hilfe von Vektoren.

Nach ersten Versuchen mit Winkelfunktionen haben wir festgestellt, dass die Berechnung mit Vektoren für alle weiteren Probleme geeigneter ist, da sie die sonst zu komplizierten Rechnungen vereinfacht.

Frage: Welche Größen beeinflussen einen Querstab der Brücke?

m...Masse

F... Kraft (setzt sich meistens aus mehreren Komponenten zusammen)

Gewicht  $G = mg$   $g$ ... Erdbeschleunigung ( $g = 9,81\text{m/s}^2$ )

Federkraft  $F = kx$   $k$ ...Federkonstante (=Länge der Feder  $\rightarrow$  Trägerseil)

Allgemein müssen an dieser Stelle einige Fakten geklärt werden; wir haben überlegt, dass auf jeden Massepunkt (= Balken) mindestens drei Kräfte wirken: Die zwei Kräfte, die die Seile ausüben und die Erdanziehungskraft, die den Balken nach unten zieht. Wobei wir uns hier in Erinnerung rufen müssen, dass Kraft gleich Masse \* Beschleunigung ist.

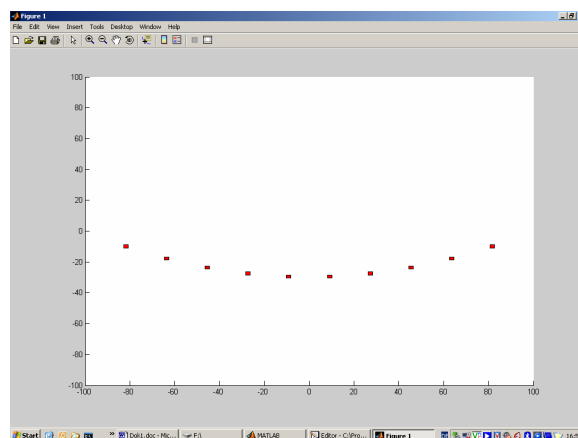
Hier wird auch die Differentialrechnung gebraucht, nach der die erste Ableitung des Ortes die Geschwindigkeit, und die zweite Ableitung ist die Beschleunigung ist.

## Zwei Balken in 2D

Nachdem wir einen Balken berechnen konnten, haben wir uns demselben Problem mit zwei Balken gewidmet, und haben damit eine Simulation in 2D für eine Brücke mit zehn Balken programmiert.

Bei diesem Programm werden Auf- und Abschwingung und Lage der Schwerpunkte bereits berücksichtigt. Hier haben wir ebenfalls eine frei wählbare Masse mit gleichmäßiger Bewegung über die Balken gehen lassen.

Im Programm sind grundsätzlich Masse der Balken, Federkonstante und Positionen der Aufhängepunkte frei wählbar.



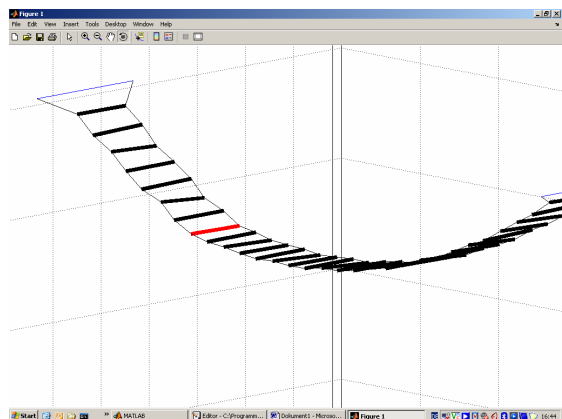
## Der dreidimensionale Raum

Das nächste Problem war die Einbeziehung von seitlichen Kipp- und Drehbewegungen der Balken in 3D. Grundlage der Simulation sind die Bewegungsgleichungen für einen Balken unter Berücksichtigung von Kräften und Drehmomenten. Wir haben zunächst ein vereinfachtes Modell betrachtet, in dem wir die Masse des Balkens in die Eckpunkte konzentriert haben. Es hat sich jedoch gezeigt, dass die Vereinfachung unnötig ist, weil das Rechnen mit den tatsächlichen Dreh- und Trägheitsmomenten auf ausreichend einfache Formen führt.

## Simulation im Programm MatLab

In Abhängigkeit von veränderbaren Parametern simulierten wir, wie sich eine Brücke von einer vorgegebenen Ausgangslage in eine Ruhelage einpendelt. Später ließen wir einen Fußgänger über die Brücke marschieren.

Als wir jedoch anfangen sehr starke Federn zu verwenden, die an das Verhalten von echten Seilen herankommen, standen wir vor einem Problem, das uns die meiste Programmierzeit beschäftigte: Wenn die Federn stark wirken, schwingen sie mit sehr hohen Frequenzen. Das hat eine sehr hohe Änderungsrate der Geschwindigkeit zufolge. Um diese Änderungen unter



Kontrolle zu halten, ergibt sich eine aufwendige Berechnung. Wir konnten daher keine flüssige Animation der Brücke in Echtzeit erstellen. Aus diesem Grund teilten wir unser Projekt in zwei Programme. Das erste führt die Berechnungen aus und speichert alle Positionen der Balken in einer Datei. Das zweite Programm liest diese Informationen aus der Datei und spielt die Animation ab.

Damit konnten wir unsere Rechner nebenbei über mehrere Stunden die Animationen berechnen lassen.

## Das statische Problem in 2D

Wir betrachteten eine Brücke in Ruhelage. Ruhelage ist gegeben, wenn sich alle wirkenden Kräfte aufheben. Ausgehend von einem Massepunkt haben wir uns zur Betrachtung von Brücken mit beliebig vielen Balken vorgearbeitet. Schließlich erkennt man, dass die  $x$ - und die  $y$ -Koordinaten jeweils dieselbe Gleichung haben und so kann über die Matrizenrechnung mit Hilfe des Computers, die Lage von beliebig vielen Massepunkten bei beliebig vielen unterschiedlichen Federkonstanten bestimmen. Wenn alle Massen und Federkonstanten gleich sind, haben die  $x$ -Werte immer den gleichen Abstand zueinander, was sich durch die gleichmäßige Kräfteverteilung auf die Punkte erklären lässt. Weiters haben wir festgestellt, dass die  $y$ -Koordinaten der Massepunkte in ganzzahligen Verhältnissen zueinander stehen. Diese Phänomene haben wir durch Gleichungen mathematisch bewiesen.

In den obigen Modellen wurden die Seile als Federn modelliert, welche in Ruhelage die Länge Null haben. Wirkliche Seile können schlaff durchhängen. Wir verbesserten unser Modell dahingehend, dass auch diese Eigenschaft berücksichtigt wurde.

Projekt: Biowissenschaften/Sozialwissenschaften  
**Ausbreitung ansteckender Krankheiten**  
 Dr. Georg Propst

Teilnehmer: Maria Barelli, Karlheinz Breinhalter, Florian Langmann, Martin Perz, Cornelia Reinharter, Sofie Walzl

**PROBLEMSTELLUNG:**

Infektiöse Krankheiten können durch den Kontakt von ansteckenden und ansteckbaren Individuen übertragen werden. Je nach dem Verhalten der Gruppe und den Maßnahmen, die gesetzt werden, breiten sich verschiedene Krankheiten unterschiedlich aus.

**ERGEBNISSE:**

**Modell 1**

Hierbei wird gezeigt, welche Auswirkungen der Ausbruch einer ansteckenden Krankheit auf eine gut durchmischte Population beweglicher Individuen hat. Modelliert werden die Größen von Untergruppen zu diskreten Zeitpunkten.

Am Beginn besteht die Population aus einer großen, konstanten Gruppe ( $G$ ), die in zwei Untergruppen, die gesunden Ansteckbaren ( $S$  - susceptible) und die infizierten Ansteckenden ( $I$  - infectious), unterteilt wird.

$$S_n + I_n = G \quad \text{für alle } n = 1, 2, 3, \dots, n$$

Solange für  $S_n > 0$  und  $S_n + I_n \leq G$  gilt, werden zwischen  $n$  und  $(n+1)$   $S_n$  angesteckt und werden zu  $I_n$ .

**Formeln des Modells**

Klassen		Parameter	Zeitspannen
X	Auslöser der Krankheit		n Anzahl der vergangenen Zeitpunkte
S	Ansteckbare	$\eta$ Aggressionsfaktor	m $I \rightarrow M$ - Inkubationszeit
I	Ansteckende	$\sigma$ Hoffnungsfaktor	p $M \rightarrow P$ bzw. $M \rightarrow C$ - Quarantänezeit
M	Morituri (in Quarantäne)	$\varphi$ Glucksfaktor	s $P \rightarrow S$ bzw. $P \rightarrow F$ - vorubergehende Immunitatszeit
P	Zeitweise Immune	$\alpha$ Geburtenrate	
F	Immune	$\omega$ Sterberate	
C	Tote		

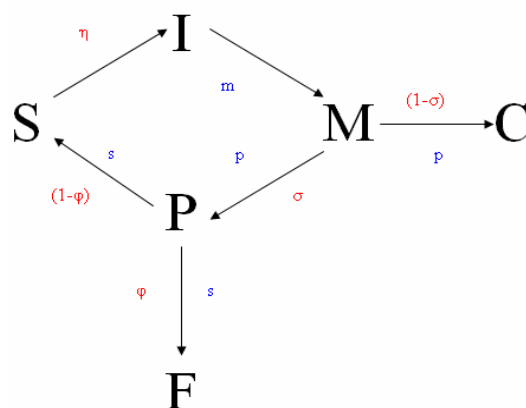
$$\bar{S}_n = \bar{F}_n = \frac{S_{n-m-p-s}}{S_{n-m-p-s} + I_{n-m-p-s} + P_{n-m-p-s} + F_{n-m-p-s}} * I_{n-m-p-s}$$



$$\bar{I}_n = \frac{S_n}{S_n + I_n + P_n + F_n} * I_n$$

$$\bar{M}_n = \frac{S_{n-m}}{S_{n-m} + I_{n-m} + P_{n-m} + F_{n-m}} * I_{n-m}$$

$$\bar{P}_n = \bar{C}_n = \frac{S_{n-m-p}}{S_{n-m-p} + I_{n-m-p} + P_{n-m-p} + F_{n-m-p}} * I_{n-m-p}$$



Die Krankheit wird durch den externen Überträger  $X$  ausgelöst, der zur Klasse  $I_1$  addiert wird.

Die Anzahl der die Klasse Wechselnden wurde als nichtlinearer Ausdruck  $\bar{I}_n$  modelliert, welcher die Kontakte von Ansteckenden und Ansteckbaren ausdrückt.

Die ansteckbaren Individuen ( $S_{n+1}$ ) zur Zeit  $n+1$  setzen sich aus den Ansteckbaren der letzten Messung ( $S_n$ ), den Neugeborenen ( $\alpha * (S_n + I_n + M_n + P_n + F_n)$ ) und denen, die aus der Klasse der zeitweise Immunen dazu stoßen ( $(1-\varphi) * \sigma * \eta * \bar{S}$ ) zusammen, werden aber um die Anzahl derer verringert, die in die Klasse  $I$  wechseln ( $\bar{I}_n$ ) oder eines natürlichen Todes sterben, ( $\omega_s * S_n$ ).

$$S_{n+1} = S_n + (1-\varphi) * \sigma * \eta * \bar{S}_n - \eta * \bar{I}_n - \omega_s * S_n + \alpha * (S_n + I_n + M_n + P_n + F_n)$$

Die infizierten Individuen ( $I_{n+1}$ ) zur Zeit  $n+1$  setzen sich aus den Infizierten der letzten Messung ( $I_n$ ) und denen zusammen, die aus der Klasse  $S$  dazu stoßen ( $\eta * \bar{I}_n$ ), werden aber um die Anzahl derer verringert, die in die Klasse  $M$  wechseln ( $\eta * \bar{M}_n$ ) oder eines natürlichen Todes sterben, ( $\omega_I * I_n$ ).

$$I_{n+1} = I_n + \eta * \bar{I}_n - \eta * \bar{M}_n - \omega_I * I_n$$

Die Individuen in Quarantäne ( $M_{n+1}$ ) zur Zeit  $n+1$  setzen sich aus den Isolierten der letzten Messung ( $M_n$ ) und den Infizierten, die vor  $m$  Messungen zu  $I$  gestoßen sind ( $\eta * \bar{M}_n$ ), zusammen, werden aber um die Anzahl derer verringert, die in die Klasse  $P$  ( $\sigma * \eta * \bar{P}_n$ ) oder durch die Krankheit in die Klasse  $C$  ( $(1-\sigma) * \eta * \bar{C}_n$ ) wechseln oder eines natürlichen Todes sterben, ( $\omega_M * M_n$ ).

$$M_{n+1} = M_n + \eta * \bar{M}_n - \eta * \sigma * \bar{P}_n - (1-\sigma) * \eta * \bar{C}_n - \omega_M * M_n$$

Die zeitweise Immunen ( $P_{n+1}$ ) zur Zeit  $n+1$  setzen sich aus den zeitweise Immunen der letzten Messung ( $P_n$ ) und denen zusammen, die vor  $m+p$  Messungen infiziert worden sind ( $\sigma * \eta * \bar{P}_n$ ), verringert um die Anzahl derer, die in die Klassen  $S$  ( $(1-\varphi) * \sigma * \eta * \bar{S}_n$ ) oder  $F$  ( $\varphi * \sigma * \eta * \bar{F}_n$ ) wechseln, oder eines natürlichen Todes sterben, ( $\omega_p * P_n$ ).

$$P_{n+1} = P_n + \sigma * \eta * \bar{P}_n - (1-\varphi) * \sigma * \eta * \bar{S}_n - \varphi * \sigma * \eta * \bar{F}_n - \omega_p * P_n$$

Die ewig Immunen ( $F_{n+1}$ ) zur Zeit  $n+1$  setzen sich aus den ewig Immunen ( $F_n$ ) der letzten Messung und denen, die vor  $m+p+s$  Messungen infiziert worden sind ( $\varphi * \sigma * \eta * \bar{F}_n$ ), zusammen, werden aber um die Anzahl derer verringert, die eines natürlichen Todes sterben, ( $\omega_F * F_n$ ).

$$F_{n+1} = F_n + \varphi * \sigma * \eta * \bar{F}_n - \omega_F * F_n$$

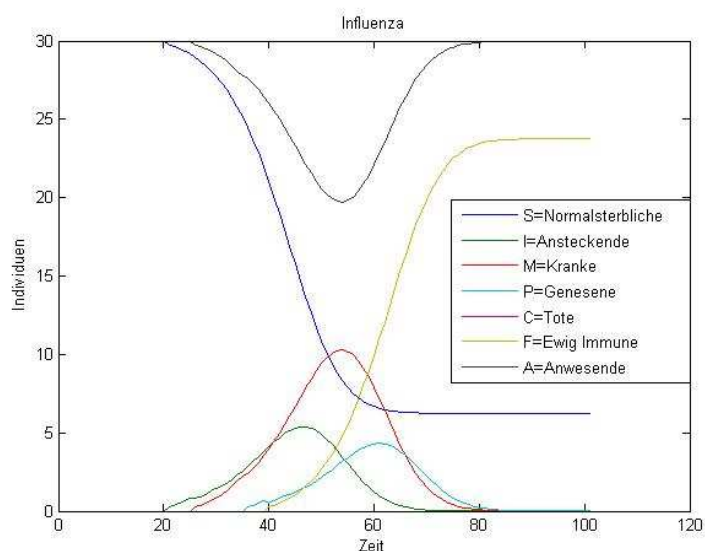
Die Anzahl der Toten ( $C_{n+1}$ ) zur Zeit  $n+1$  entspricht der Anzahl der sich schon in der letzten Messung in  $C$  Befindenden ( $C_n$ ), addiert mit der Menge aller krankheitsbedingten Tode ( $(1-\sigma) * \eta * \bar{C}_n$ ) und natürlichen Todesfälle ( $\omega_S * S_n + \omega_I * I_n + \omega_P * P_n + \omega_M * M_n + \omega_F * F_n$ ).

$$C_{n+1} = C_n + (1-\sigma) * \eta * \bar{C}_n + \omega_S * S_n + \omega_I * I_n + \omega_P * P_n + \omega_M * M_n + \omega_F * F_n$$

### Beispiel: „Influenza in einer Schulklasse“

Bei diesem Modell wird ein niedriger Aggressivitätsfaktor gewählt und somit verbreitet sich die Infektion nur langsam. Alle Schulkinder, bei denen die Krankheit ausgebrochen ist, werden behandelt (kommen nach  $M$ ) und sterben deshalb nicht ( $\sigma=1$ ). In weiterer Folge werden alle immun ( $\varphi=1$ ), d.h., dass es in diesem geschlossenen System keine Neuerkrankungen gibt.

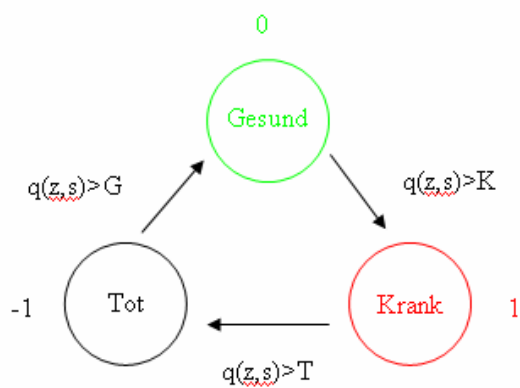
Es wurden auch viele andere Beispiele am Computer simuliert. Da uns keine genauen Daten zur Verfügung standen, sind die Ergebnisse unserer Simulationen als qualitativ zu interpretieren.



### Modell 2: „Der kranke Wald“

Dieses Modell ist im Vergleich zum ersten eines mit unbeweglichen Individuen, das mit Hilfe eines Zellularautomaten simuliert wird.

Es wird die flächenmäßige Ausbreitung einer Baumkrankheit in einem Wald (abgeschlossenes System) dargestellt.



In jeder Zelle kann entweder ein gesunder (0), kranker (1) oder toter (-1) Baum stehen. Zu Beginn sind fast alle Bäume gesund, und nur einige wenige infiziert, die wiederum unter bestimmten Bedingungen (genügend kranke Nachbarn) gesunde Bäume infizieren. Die kranken können zu toten Bäumen werden, wenn  $q$  (eine zufällige Zahl zwischen 1 und 0) größer als die festgelegte Wahrscheinlichkeit ( $T$ ) ist, d.h. nicht alle erkrankten Bäume sterben zwangsläufig nach einer Zeiteinheit ( $n$ ). Nachdem ein Baum gestorben ist, kann – wenn  $q > G$  – ein neuer, gesunder Baum nachwachsen.

Die Möglichkeit, dass ein gesunder Baum erkrankt, steigt mit der Anzahl der kranken Nachbarbäume ( $q * Anzahl > K$ ).

Unser Simulationsprogramm berechnet die Zustände 0, 1, -1 als Einträge einer großen rechteckigen Matrix zu jedem diskreten Zeitpunkt. Das Update geschieht gemäß den angegebenen Regeln. Die dynamische Entwicklung der Epidemie wird in einer bewegten, dreifarbigen Grafik dargestellt, nämlich als grüne, gesunde Zellen, rote, kranke Zellen und schwarze, tote Zellen.

Durch Verändern der Parameter und Berücksichtigung des Zufallsgenerators können verschiedenste Szenarien simuliert werden, z. B. das Aussterben der Krankheit, oder diverse Ausbreitungsarten der Krankheit.

Teilnehmer: Michael Hsieh, Daniel Kraft, Sara Kropf, Christoph Planitzer, Stefan Reisinger, Christoph Triebel



### PROBLEMSTELLUNG:

Zeitreihen von medizinischen Bildern werden oft aufgenommen, um physiologische Prozesse dynamisch zu untersuchen. Damit solche Prozesse immer detaillierter untersucht werden können, wird der Bedarf für hohe zeitliche Auflösung immer größer, d. h. die Anzahl von aufgenommenen Bildern pro Zeiteinheit muss immer größer werden. Andererseits verlangt die Aufnahme eines einzigen Bildes eine gewisse Zeitdauer. Wenn diese Zeitdauer relativ groß ist, wird die dynamische Untersuchung verhindert. Es stellt sich dann die Frage, ob man zwischen Bildern der aufgenommenen Zeitreihe interpolieren kann, um die dynamische Untersuchung zu erleichtern. Das Ziel dieses Projekts ist es, ein Verfahren zu entwickeln, mit dem fehlende Bilder zwischen zwei gegebenen Bildern interpoliert werden können.

### Vorarbeiten

#### JGP2Matrix

Um Bilder bearbeiten zu können, müssen sie in Form einer Matrix dargestellt werden. Wir schreiben ein Programm in C++, welches uns dies ermöglicht.

#### Berechnung des Schwerpunktes

Der Schwerpunkt im Zwischenbild wird durch das gewichtete Mittel der zwei ursprünglichen Schwerpunktkoordinaten berechnet. Analog dazu berechnen wir den Radius eines Punktes des Zwischenbildes im Polarkoordinatensystem. Auf diese Weise ermitteln wir einander zugeordnete Punkte der Bilder.

## Segmentierung

Die Segmentierung dient zur Identifikation von einander entsprechenden Objekten. Hierfür machten wir Gebrauch von der Level-Set-Methode.

## Registrierung

Die Registrierung erkennt einander zugeordnete Objekte in den beiden Bildern und berechnet die Koordinatentransformationen.

## ERGEBNISSE:

### Methode 1: Uhrzeiger-Algorithmus

Der Umriss der Bilder ist als Funktion in Polarkoordinaten gegeben. Der Ursprung des Koordinatensystems liegt im Schwerpunkt des Objektes. Durch das PCA-Verfahren ist der Winkel  $\theta$  gegeben. Der Radius in Abhängigkeit des Winkels ist gegeben als das gewichtete arithmetische Mittel der entsprechenden Radien der Ausgangsbilder.

### Methode 2: Thin-Plate Spline Algorithmus

Eine weitere Problemlösung stellt der Thin-Plate Spline Algorithmus dar. Ein selbstprogrammiertes Punktzuordnungsverfahren, das in Start- und Endbildern markante Punkte erkennt, übergibt diese zugeordneten Punkte an den Algorithmus, um eine Interpolation zwischen den Bildern durchzuführen. Außerdem programmierten wir ein GUI mit GTK+ und gtkmm um die Punkterkennung manuell zu ermöglichen. Im Verlauf unseres Arbeitsvorganges arbeiteten wir uns durch die Erkennung der Achsen Zweck Identifikation ihrer Zusammengehörigkeit und ermittelten anschließend eine Anzahl an zusammengehörigen signifikanten Punkten in jedem Bild.

## Beispiel





Bank  Austria  
Creditanstalt

