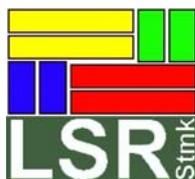
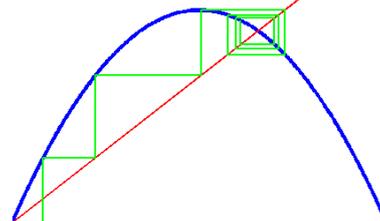
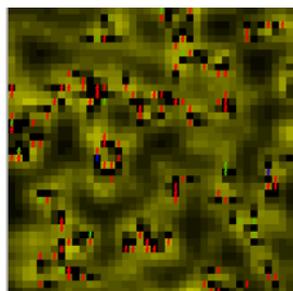
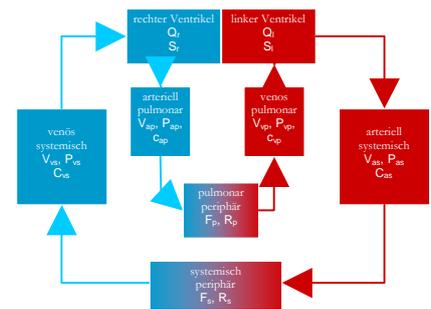
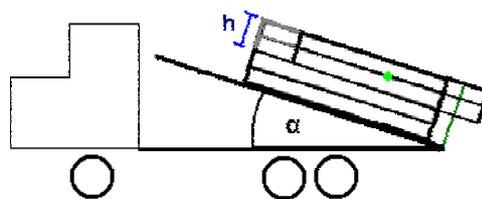


MATHEMATIK- MODELLIERUNGSWOCHE

KURZBERICHT

6. - 11. März 2005



Bank Austria
Creditanstalt



Mathematik-Modellierungswoche



Schloss Seggau, 06.03. - 11.03.2005

Ausführliche Dokumentation der einzelnen Projekte:

<http://math.uni-graz.at/modellwoche/2005/>

Vorwort

Die Idee zu der erstmals in der Steiermark durchgeführten „Modellierungswoche“ für Schüler der 7. und 8. Klasse der AHS wurde schon längere Zeit am Institut für Mathematik und Wissenschaftliches Rechnen der Universität Graz diskutiert. Vorbild waren ähnliche Vorhaben, die bereits in Karlsruhe, in Bozen und erstmals im letzten Jahr auch in Linz durchgeführt wurden. Mitglieder des Institutes haben bereits Erfahrungen mit ähnlichen Veranstaltungen für Studierende und angehende Wissenschaftler. Hauptziel der Modellierungswoche war es, Schüler mit einem Aspekt der Mathematik zu befassen, der unserer Meinung nach im Unterricht an den AHS unterrepräsentiert ist. Die Mathematik ist einerseits eine Wissenschaft, die sich mit Problemen beschäftigt, die mit strukturellen Fragen ihrer eigenen Theorien zu tun haben und wo man sehr bald mit grundlegenden Fragen betreffend die logische Grundlegung der Mathematik und mit erkenntnistheoretischen Problemen in Berührung kommt. Dieser Aspekt der Mathematik ist wohl nicht für alle ganz einfach zugänglich. Andererseits war die Mathematik während ihrer gesamten Geschichte ständig in Wechselwirkung mit angewandten Bereichen. Viele mathematische Theorien entstanden in Reaktion auf Anforderungen in den verschiedensten Anwendungsbereichen. Die Verfügbarkeit immer leistungsfähigerer Computer hat neue Möglichkeiten für die mathematische Behandlung verschiedenster komplexer Probleme eröffnet. Quantitative Resultate statt qualitativer Aussagen sind immer wichtiger und erfordern zu ihrer Bewältigung die mathematische Modellierung komplexer Systeme in interdisziplinärer Zusammenarbeit.

Den an der Modellierungswoche teilnehmenden Schülern sollte an Hand sorgfältig ausgewählter Projektaufgaben Gelegenheit gegeben werden, den angewandten Aspekt der Mathematik durch Teamarbeit in Projektgruppen zu erleben. Es wurde versucht, den Schülern die wesentlichen Phasen eines Modellierungsprozesses nahe zu bringen: Einarbeiten in das Anwendungsgebiet, Wahl der Modellstruktur in Hinblick auf die Aufgabenstellung, Einsatz numerischer Methoden, Interpretation der Ergebnisse, Präsentation der Resultate.

Treibende Kraft für die Realisierung der Modellierungswoche war Dr. Stephen Keeling, dem hier für seinen großen Einsatz gedankt sei. Besonderer Dank gebührt dem Landesschulrat für Steiermark, und hier insbesondere Frau Landesschulinspektor Hofrat Mag. Marlies Liebscher. Sie hat die Idee einer gemeinsamen Veranstaltung sofort sehr positiv aufgenommen und tatkräftig unterstützt. Ohne den großen Einsatz der direkten Projektbetreuer (Dr. Sigrid Thaller – Institut für Sportwissenschaften, Dr. Wolfgang Desch, Dr. Stephen Keeling, Dr. Georg Propst – alle Institut für Mathematik und Wissenschaftliches Rechnen) und der Betreuer aus dem Kreis der Lehrerschaft (DDr. Andrea Windischbacher-Mailänder, Mag. Melanie Wogrin), die auch die Gestaltung dieses Berichtes übernommen haben, wäre die Modellierungswoche nicht durchführbar gewesen. Der Bank Austria – Creditanstalt sei für eine nicht unbeträchtliche Subvention gedankt. Das BM:BWK und die Wissenschaftsabteilung der Steiermärkischen Landesregierung haben ebenfalls Subventionen in Aussicht gestellt. In diesem Zusammenhang sei Vizerektor Polaschek, Universität Graz, für seine Unterstützung gedankt.

Schloss Seggau, am 11. 3. 2005

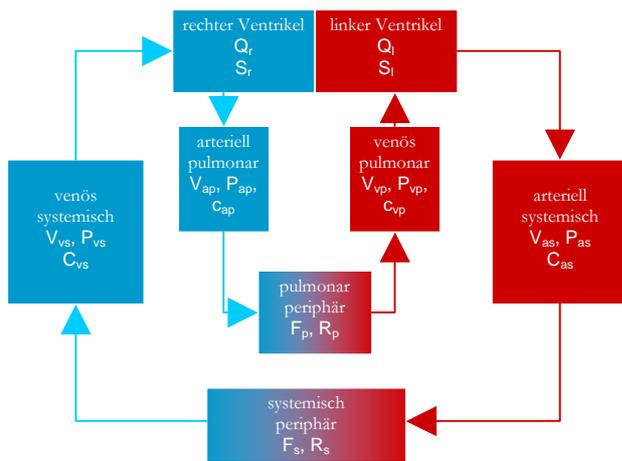
F. Kappel
(Leiter des Institutes für Mathematik und
Wissenschaftliches Rechnen)

Teilnehmer: Andreas Fitzek, Eva Klampfer, Denise Loder, Andreas Postl, Matthias Praunegger, Clemens Schiffer

PROBLEMSTELLUNG:

Aufgabe dieses Projekts war es, anhand eines einfachen mathematischen Modells für das Herz-Kreislauf-System die Auswirkungen verschiedener Regelungsmöglichkeiten (wie etwa Erhöhung der Herzfrequenz) zu erforschen und wechselseitig zu vergleichen.

Erklärungen:



Blockdiagramm des Herz-Kreislaufsystems

Q_l, Q_r	Herzminutenvolumen des linken bzw. rechten Ventrikels
S_l, S_r	Kontraktilität des linken bzw. rechten Ventrikels (Stärke der Kontraktion)
$V_{as}, V_{vs}, V_{ap}, V_{vp}$	Blutvolumen im jeweiligen Gefäß (as = arteriell systemisch, vs = venös systemisch, ap = arteriell pulmonar, vp = venös pulmonar)
$C_{as}, C_{vs}, C_{ap}, C_{vp}$	Komplianz (Elastizität, Nachgiebigkeit) der jeweiligen Gefäßwand
$P_{as}, P_{vs}, P_{ap}, P_{vp}$	Blutdruck im jeweiligen Gefäß
F_s, F_p	Blutfluss durch die periphere Region des systemischen bzw. pulmonaren Kreislaufs
R_s, R_p	Blutstromwiderstand in der peripheren Region des systemischen bzw. pulmonaren Kreislaufs

Eine wesentliche Aufgabe des Herz-Kreislaufsystems besteht darin, Organe und Muskel mit Sauerstoff zu versorgen, der an die roten Blutkörperchen gebunden ist. Da die Sauerstoffkonzentration im Blut i.a. gesättigt ist, muss ein höherer Sauerstoffbedarf durch eine Erhöhung des Blutflusses abgedeckt werden. Ein sehr effizientes Mittel, dies zu tun, besteht darin, den Widerstand R_s zu verringern.

ERGEBNISSE:

Problem 1: Welche Auswirkungen hat eine Verringerung von R_s auf die Druckwerte $P_{as}, P_{vs}, P_{ap}, P_{vp}$ und auf den Blutfluss F ?

Abb. 1a: $F(R_s)$ „einfaches Modell“

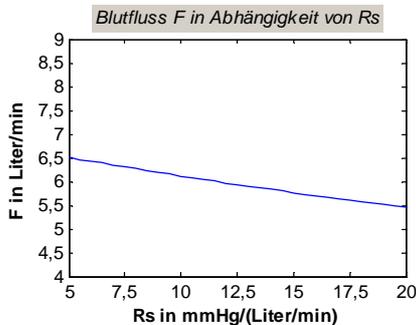
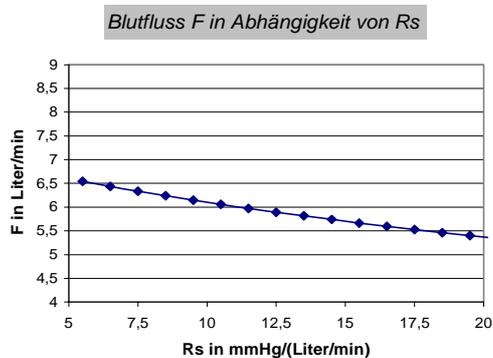


Abb. 1b: $F(R_s)$ „komplexeres Modell“



PROBLEMLÖSUNG 1: Blutfluss F pro Minute steigt bei Verringerung von R_s , der Druckwert P_{as} sinkt dabei allerdings eindeutig. Die anderen eher unbedeutenden Druckwerte P_{vs} und P_{ap} steigen, anders als P_{as} , mit Verringerung von F . Interessant ist, dass P_{vp} sich bei den beiden Modellen anders verhält. Aussagekräftiger sind höchstwahrscheinlich die Ergebnisse des „komplexeren Modells“.

Problem 2: Warum ist eine bloße Verringerung von R_s nicht sinnvoll? Was bewirken jeweils Veränderungen von H , S_b , S_r und c_{vs} ? Wodurch unterscheiden sich die Auswirkungen?

PROBLEMLÖSUNG 2: Was bei der alleinigen Verringerung von R_s geschieht, wissen wir ja aus den Ergebnissen zu Problem 1: Da dies eine drastische Verringerung des für uns bedeutenden mittleren arteriellen Blutdruck P_{as} zur Folge hat, was zu Müdigkeit über Schwindel und Übelkeit bis hin zu Zusammenbrüchen führt, kann nicht R_s allein verändert werden. Ein mittlerer Blutdruck von 70 mmHg würde nämlich etwa den vom Arzt gemessenen Blutdruckwerten 90 / 60 (systolisch / diastolisch) entsprechen.

Wir verändern in unserem Gleichungssystem des „komplexeren Modells“ den Parameter für den Blutstromwiderstand in der peripheren Region des Systemkreislaufs R_s . Für die Graphen wählten wir folgende Intervalle:

[40;200] für H (Norm = 80 Schläge/min),

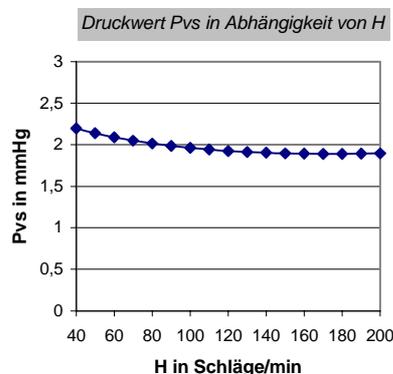
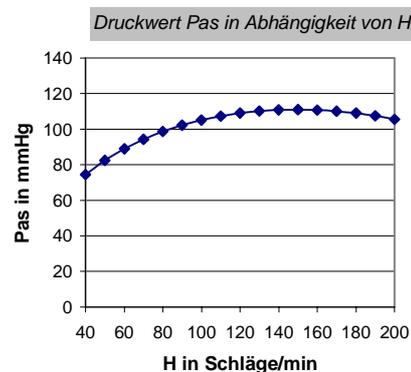
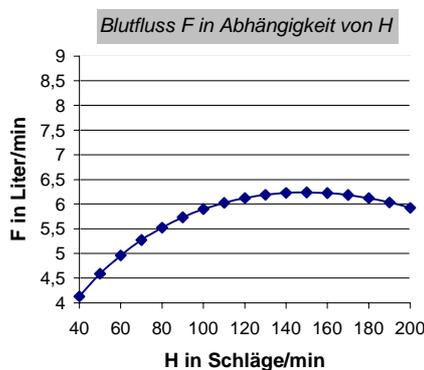
[50;100] für S_1 (Norm = 67,7 mmHg),

[7.5;15] für S_r (Norm = 10.9 mmHg),

[1;2.5] für c_{vs} (Norm = 1.75 Liter/mmHg)

(und zusätzlich [4;6] für V_0 (Norm = 5.0 Liter))

Auswirkungen auf den Blutfluss und Blutdruck bei Veränderung von H



Problem 3: Eine Verstellung des Herzschrittmachers zu einer höheren Herzfrequenz unter Ruhebedingungen führt im Allgemeinen zu keiner Erhöhung des Blutflusses. Kann dies mit Hilfe des oben beschriebenen Modells simuliert werden?

PROBLEMLÖSUNG 3: Die Erhöhung von H und S_1 kompensieren wir hier einfach durch Erhöhung von c_{vs} , sodass wir als Resultat einen Blutfluss erhalten, der (annähernd) gleich dem Normwert ist. Bei $H = 100$ Schläge/min und $S_1 = 75$ mmHg müssen wir c_{vs} in etwa bis auf **2.11 Liter/mmHg** erhöhen.

Der Abfall des Blutflusses durch Erhöhung von c_{vs} , d.h. die Gefäßwände im venösen systemischen Kompartiment sind elastischer, lässt sich wie folgt erklären:

Werden die Gefäße in einem Kompartiment elastischer, sinkt der Blutdruck in diesem Kompartiment. Dadurch strömt das Blut weniger schnell in die benachbarten Regionen, was einen geringeren Blutfluss mit sich bringt.

Teilnehmer: Gregor Klinser, Timon Kunter, Angelina Orthacker, Daniel Rieder, Eva Sprung

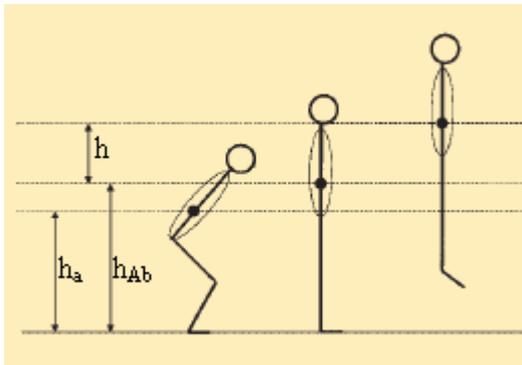
PROBLEMSTELLUNG:

Menschliche Bewegungen verlaufen bei geringerer Gravitation anders als auf der Erde. Ein Astronaut springt am Mond klarerweise höher als auf der Erde. Aber um wie viel springt er höher? Ist die Verbesserung der Sprunghöhe für alle Leute gleich, oder hängt sie von den individuellen Eigenschaften der Personen ab? Kann es also sein, dass manche Menschen (Muskel-) Eigenschaften besitzen, die für einen Sprung auf dem Mond vorteilhafter sind als für einen Sprung auf der Erde? Was passiert, wenn man einem Astronauten soviel zusätzliches Gewicht auflädt, dass er am Mond gleich schwer ist wie ohne Zusatzgewicht auf der Erde? Springt er dann auch noch höher am Mond oder bleibt die Sprunghöhe gleich? Oder springt er vielleicht weniger hoch, weil ja mehr Masse zu beschleunigen ist? Was muss man an einem Film von einem Erdsprung ändern, um einen Sprung am Mond vorzutauschen? Gesucht ist ein mathematisches Modell für die Bewegung des Schwerpunktes eines Astronauten bei einem senkrechten Sprung.

ERGEBNISSE:

Zuerst beschäftigten wir uns mit der Definition der Begriffe Schwerpunkt und Sprunghöhe.

- Wir haben den Schwerpunkt des Astronauten im Bereich der Taille angenommen. Gewicht der Beine sowie Gewicht des Oberkörpers sind im Schwerpunkt konzentriert.



- Die Sprunghöhe h definierten wir als den Weg, den der Schwerpunkt vom normalen Stand bis zum höchsten Punkt des Sprunges zurücklegt.
- Als h_a bezeichneten wir die Schwerpunkthöhe bei der Ausgangshocke.
- h_{Ab} ist die Höhe zum Zeitpunkt des Absprungs.

Durch praktische Sprungversuche haben wir einzelne Bewegungskomponenten des Sprunges herausgefiltert. Wir zerlegten den gesamten Sprung zuerst in Absprunghase und Flugphase. Die Absprunghase wird weiter aufgeschlüsselt in Krafterzeugung durch verschiedene Muskel. Wir haben ein sehr stark vereinfachtes Modell erzeugt, indem wir sowohl die Krafterzeugung des Sprunggelenkes sowie das Schwungholen mit den Armen vorerst ignoriert haben. Da die Flugphase eine gleichmäßig beschleunigte Bewegung und somit die einfachere ist, haben wir uns zuerst mit ihr befasst.

Modell 1: *Flugphase*

Die Energie beim Absprung setzt sich aus kinetischer und potentieller Energie zusammen. Die kinetische Energie wird am Umkehrpunkt zur Gänze in potentielle Energie umgewandelt. Daraus folgt eine einfache Formel zur Beschreibung der Sprunghöhe h (v = Absprunggeschwindigkeit, g = Gravitationsbeschleunigung):

$$h = \frac{v^2}{2g}$$

Die Gravitation auf der Erde beträgt ungefähr das Sechsfache der Mondanziehung. Bei konstanter Absprunggeschwindigkeit kommt man somit auf dem Mond sechs Mal so hoch wie auf der Erde.

Modell 2: Absprungphase

In unserem zweiten Modell beschäftigten wir uns mit dem Sprung unter der Voraussetzung, dass die vom Muskel angewandte Kraft $F_M - m \cdot g = m \cdot a$ immer dieselbe bleibt.

Daraus folgt:

$$s(t) - h_a = \frac{t^2}{2} \cdot \frac{1}{m} \cdot (F_M - m \cdot g)$$

und

$$h = \frac{(F_M - m \cdot g) \cdot (s(t_{Ab}) - h_a)}{g \cdot m}.$$

Am Mond springt man also etwa 11 Mal so hoch wie auf der Erde.

Modell 3: Modell unter Einbeziehung der Physiologie

Um das Modell realistischer zu gestalten, wollten wir auch physiologische Aspekte miteinbeziehen. Darunter fallen Geometrie des Knies, Ansteuerung der Muskelaktivität durch das Gehirn und die Hillsche Gleichung (Muskelkraft in Abhängigkeit von der Geschwindigkeit der Bewegung).

Einfluss des Kniewinkels

Nun wollten wir erfahren, welchen Einfluss die Tiefe der Hocke bzw. der Winkel des Knies auf die Kraftübertragung zum Boden hat. Wir versuchten mit Hilfe einer Badezimmerwaage eine Beinpresse nachzustellen. Wir lehnten diese an die Wand, setzten uns in Abständen von 40/ 50/ 60 /70 cm dazu, so dass der Kniewinkel sich von Versuch zu Versuch vergrößerte, und maßen die größtmögliche aufbringbare Kraft der Versuchsperson. Die Kraft konnte man in kg von der Waage ablesen. Die Ergebnisse, die wir erhielten, trugen wir in eine Tabelle ein, um sie anschließend als Graph darzustellen. Da die Messungen mit einer Badezimmerwaage nicht sehr genau sind, haben wir zusätzlich bereits bekannte Messergebnisse aus der Literatur miteinbezogen.

Ansteuerung

Ein zusätzliches Problem für die Generalisierung der Sprungkraft stellt die unterschiedlich benötigte Zeit für die Ansteuerung der Muskel dar. Unter Ansteuerung versteht man die Ausbreitung der Aktivität der Muskelfasern. Je weniger Muskelfasern aktiv sind, desto mehr werden aktiviert, wenn man den Muskel maximal anspannen möchte. Nimmt die Anzahl an aktiven Fasern zu, so sinkt die Rate der neuen Kontraktionen.

3. Hillsche Gleichung

Auch die Geschwindigkeit, mit der die Bewegung durchgeführt wird, nimmt großen Einfluss auf die Muskelkraft. Je größer die Kontraktionsgeschwindigkeit, desto kleiner ist die Kraft, die vom Muskel erzeugt werden kann.

Diese drei Teilmodelle und Newtons Bewegungsgleichung setzen wir zu einer Differentialgleichung zusammen.

Durch Simulieren mit verschiedenen Zahlenwerten für die maximal mögliche Kontraktionsgeschwindigkeit, den Parameter der Ansteuerung sowie der Gravitation kamen wir zu dem Schluss, dass die Sprunghöhe auf dem Mond nicht nur von der niedrigeren Gravitation, sondern auch von den individuellen motorischen Eigenschaften abhängt.

Es kann vorkommen, dass eine Person mit für einen Sprung auf der Erde schlechten motorischen Eigenschaften bei einem Sprung auf dem Mond eine größere prozentuelle Sprunghöhenerhöhung als eine Person mit guten motorischen Eigenschaften hat.

Weiters zeigt das Modell, dass eine Person, deren Masse so stark erhöht wird, dass das Gewicht auf dem Mond dem auf der Erde ohne Zusatzmasse entspricht, auf dem Mond höher springt als auf der Erde.

Bewegung von Schüttgut in einer rotierenden Trommel

Dr. Wolfgang Desch

Teilnehmer: Christopher Albert, Angelika Haindl, Matteo Luisi, Patrick Schlögl, Stefan Zerobin

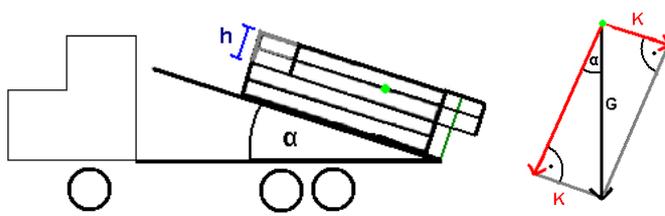
PROBLEMSTELLUNG:

In einer waagrecht liegenden Röhre befindet sich Schüttgut. Die Röhre dreht sich langsam um ihre Längsachse. Beschreibe die Bewegung des Schüttgutes. Wie steil ist die Oberfläche? Wie schnell rutscht der Sand die Oberfläche entlang ab? Von welchen Eigenschaften des Schüttgutes hängt der Winkel ab? Besteht ein Unterschied, ob Glasmurmeln oder Mehl in der Röhre sind? Welche Rolle spielt die Drehgeschwindigkeit des Behälters?

ERGEBNISSE:

1. Modelle herabrutschender Ziegelsteine auf einer gekippten Ladefläche

Modell 1: Modell eines Kipplasters mit einem Ziegelsteinblock



K...Kraft, mit der man die Reibung überwindet
A ... Kontaktfläche der beiden Steine
c ... Reibungskonstante
 ρ ...Dichte des Materials

$$\boxed{K = c \cdot A} \rightarrow h \cdot \sin \alpha = \frac{c}{\rho} \quad \text{Modelliert nicht, dass bei größerem Druck die Reibung stärker wird.}$$

Beim langsamen Anheben (geringe Neigung) rutscht der gesamte Block (jedoch zunächst ohne die Schicht, die direkt auf der Ladefläche aufliegt, da die Reibung hier zu stark ist), bei großem Winkel zuerst die obere(n) Schicht(en).

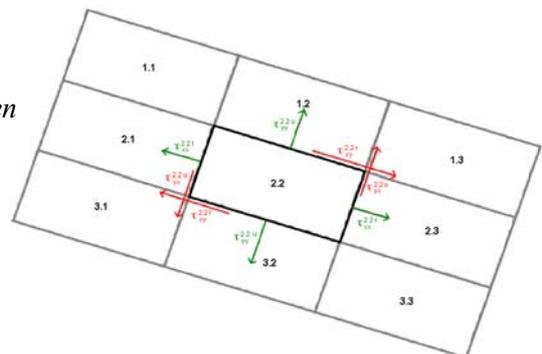
Modell 2: Einbeziehung des Drucks auf die Ziegel

$$\boxed{K = c \cdot A \cdot P} \rightarrow c = \tan \alpha$$

Mit diesem Modell wird gezeigt, dass der Winkel allein von der Reibungskonstanten abhängig ist und nicht von der Höhe des Stapels.

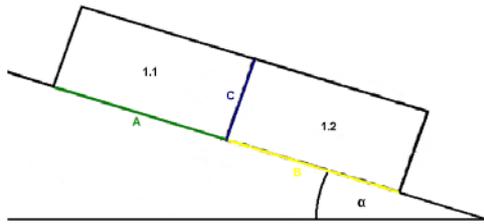
Modell 3: n Ziegelsteine, welche sich in Ruhelage befinden

Es herrschen zwei Arten von Spannungen (betreffend einen Ziegelstein in Innenlage), welche berücksichtigt werden müssen: Normalspannung und Scherspannung.



Modell 4: Zwei Ziegelsteine auf einer gekippten Ladefläche, welche sich in Ruhelage befinden

Wir wollen die fehlenden Spannungen berechnen.



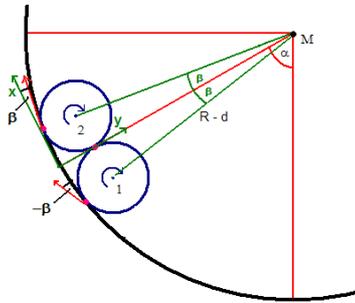
$$\begin{aligned}
 -\tau_{yy}^A \cdot l + \tau_{xy}^C \cdot h &= l \cdot h \cdot r \cdot \cos \alpha \\
 -\tau_{yx}^A \cdot l + \tau_{xx}^C \cdot h &= -l \cdot h \cdot r \cdot \sin \alpha \\
 -\tau_{yy}^B \cdot l - \tau_{xy}^C \cdot h &= l \cdot h \cdot r \cdot \cos \alpha \\
 -\tau_{yx}^B \cdot l - \tau_{xx}^C \cdot h &= -l \cdot h \cdot r \cdot \sin \alpha
 \end{aligned}$$

Das System ist statisch unbestimmt: Es gibt keine eindeutige Lösung.

2. Kugelbewegung in einer drehenden Trommel

Nach dem Kennenlernen des Systems der herabrutschenden Ziegelsteine wollen wir uns nun mit unserem eigentlichen Problem beschäftigen: die Bewegung von Kugeln in einer drehenden Trommel.

Modell 1: Zwei Kugeln in einer sich mit konstanter Geschwindigkeit bewegend Trommel



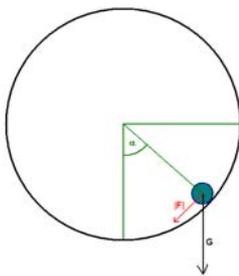
- ... Reibungspunkte
- R ... Radius der Trommel
- r ... Radius einer Kugel (= 1)
- g ... Gewicht einer Kugel
- K... Reibungskraft

Als Resultat erhalten wir

$$K = \frac{g \cdot \sin \alpha \cdot \cos \beta}{\sin \beta + 1}$$

Modell 2: Bewegung einer Kugel entlang der Trommelwand ohne Reibung

Wir wollen nun eine Kugel modellieren, die sich in der Trommel hin- und herbewegt. Die Reibung lassen wir außer Acht, daher hört sie nie auf zu gleiten (ebenso vernachlässigen wir die Rollbewegung – die Kugel rutscht).



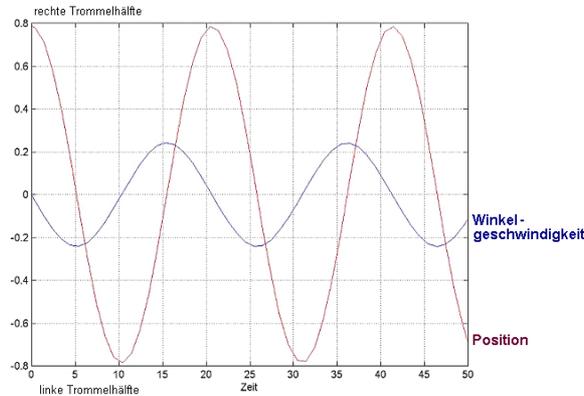
- a ... Beschleunigung
- f ... Kraft
- M ...Masse der Kugel
- G... Gewicht der Kugel
- g ... Erdbeschleunigung
- $f = M \cdot a$
- $G = M \cdot g$

Zeichnen wir ein Zeit-Geschwindigkeit – Diagramm, ergibt sich etwa eine Sinuskurve.

Für die tangentielle Komponente der Schwerkraft erhält man: $M \cdot (R - r) \cdot \alpha'' = -M \cdot g \cdot \sin \alpha(t)$

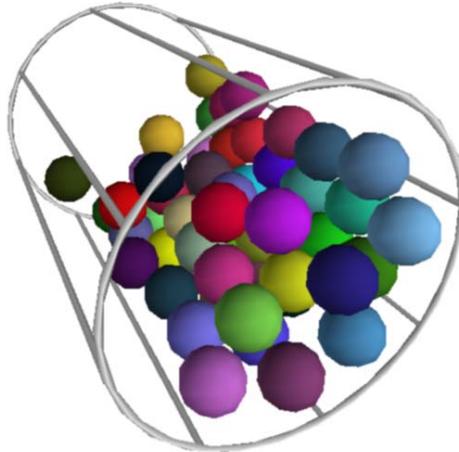
Diese Gleichung lässt sich nur unter Verwendung des Computers lösen, wir zeigen die Lösung grafisch an:

Hier lässt sich die Ähnlichkeit zu einer Sinuskurve deutlich erkennen.



3. Computersimulation der Kugelbewegung in einer drehenden Trommel

Jokerballs: *Ein Programm zur Simulation der Bewegung von Glaskugeln in einem rotierenden Zylinder mit rauher Oberfläche*



Die Grundlage des Modells bilden das Impulserhaltungsgesetz und damit elastische Stöße. Jede Kugel hat eine Geschwindigkeit v und eine Masse m . Stoßen zwei Kugeln aneinander, so tauschen sie Impuls aus und fliegen auseinander. Selbiges geschieht bei der Kollision von Kugel und Zylinder mit dem Unterschied, dass der Zylinder seine Position nicht verändert.

Da Glaskugeln simuliert werden sollen, kann die Reibung zwischen den Kugeln vernachlässigt werden, sie werden jedoch am Rand des Zylinders „mitgezogen“. Jokerballs wurde in der Sprache Python geschrieben, für die dreidimensionale grafische Darstellung kommt die Erweiterung VPython mit OpenGL zum Einsatz.

Teilnehmer: Florian Bloder, Bernhard Fuchs, Elias Karabelas, Susanne Kerndle, Anton Reiter

PROBLEMSTELLUNG:

In diesem Projekt wird untersucht, was einfache mathematische Modelle von Ernte-Strategien in nachwachsenden Beständen zu deren nachhaltiger Bewirtschaftung beitragen können. Nachhaltigkeit bedeutet dabei, trotz Entnahme den Bestand der Ressource nicht zu gefährden. Gleichzeitig sollte nicht unnötigerweise auf Erträge verzichtet werden. Welche Strategien sind riskant, welche sind stabil? Was geschieht in altersstrukturierten Populationen oder in Räuber-Beute Modellen? Können - im Prinzip - mathematische Modelle den Zusammenbruch der Ressourcen rechtzeitig voraussagen oder die Wahl der Ernte-Strategie beeinflussen?

ERGEBNISSE:

Im Laufe der Modellierungswoche haben wir uns mit vielen Populationsmodellen beschäftigt, teils realistisch teils sehr unrealistisch.

Aus allen Modellen die wir im Laufe der Modellierungswoche behandelten, kristallisierten sich langsam gewisse Bedingungen heraus, die uns schlussendlich auf das Logistische Modell führten.

Modell 1: *Logistisches Modell*

Die **logistische Gleichung** ist ein Beispiel dafür, wie komplexes, chaotisches Verhalten aus einfachen nichtlinearen Gleichungen entstehen kann.

⊗ Durch Fortpflanzung vermehrt sich die Population um einen Faktor, der proportional zur aktuellen Populationsgröße ist.

⊗ Durch Verhungern verringert sich die Population um einen Faktor, der proportional zur Differenz der theoretischen Maximalgröße der Population und der aktuellen Größe ist.

Mathematisch konnten wir diese Bedingungen durch folgende Gleichung ausdrücken:

$$\Phi(P_n) = P_{n+1} = P_n * \left(1 + R * \left(1 - \frac{P_n}{K} \right) \right) \quad \begin{array}{l} K \dots \text{Kapazitätsgrenze, } R \dots \text{Wachstumsrate} \\ R < 2 \text{ da sonst chaotisches Verhalten auftritt} \end{array}$$

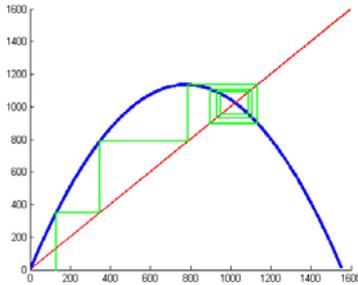
Der Startwert dieser Folge ist nun die Population zum Jahr 0. Diese Folge fassten wir nun als Funktion auf, und diskutierten sie um auf ihre Charakteristika schließen zu können.

Aus der Lage des Extremwertes und der Nullstellen bewiesen wir, dass die Funktion symmetrisch um die Ordinate des Extremwertes ist.

Um nun auf ein Verhalten dieser Folge schließen zu können muss man die Folge iterieren. Iterieren bedeutet, eine Funktion immer wieder auf sich selbst abzubilden, also $f(f(f... (x)))$. Dabei gibt es vier mögliche Fälle von auftretendem Verhalten.

1. **Konvergenz:** Die Folge strebt gegen einen Fixpunkt $f(x_\infty)$ wenn der Betrag der Ableitung $f'(x_\infty)$ kleiner als eins ist. Dieser Fixpunkt ist also stabil.
2. **Periodizität:** Die Folge kann zwischen einer gewissen Anzahl von Werten hin und her springen. Dies ist ein Spezialfall und für die Populationsdynamik nicht relevant.
3. **Divergenz:** Wenn der Betrag der Ableitung bei einem Fixpunkt $f'(x_\infty)$ größer als eins ist, dann ist dieser Fixpunkt instabil, demzufolge verlässt die Iteration die Gleichgewichtslage x_∞ .
4. **Chaotisch:** In unserem Modell haben wir dieses Verhalten durch Setzen von $R < 2$ ausgeschlossen.

Um dies nun anschaulich darstellen zu können, führten wir eine graphische Iteration der Logistischen Gleichung durch. Hierbei wählt man einen Startwert auf der X-Achse und zeichnet eine Linie zum zugehörigen Funktionswert ein. Danach zieht man eine horizontale Linie von diesem neuen Punkt zur ersten Mediane ($y=x$). von diesem neuen Punkt zieht man wieder eine Linie zum zugehörigen Funktionswert, usw.



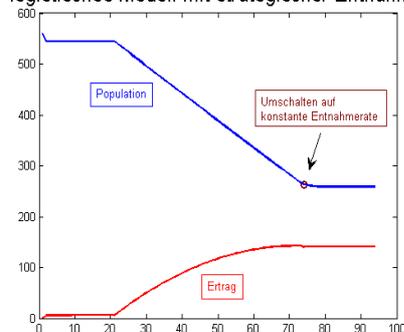
In unserem Modell ist der Anstieg der Kurve im Ursprung immer größer als eins daher gibt es genau einen Schnittpunkt mit der 1. Mediane, weil es eine quadratische Funktion ist.

Wenn f ein Populationsmodell ist, dann ist $P_{n+1} = f(P_n) - E_n$ ein Entnahmepopulationsmodell, wobei E_n ein Modell für die Entnahme repräsentiert. Nach einigen Umformungen hatten wir eine neue Gleichung der Form

$$\Phi(P_n) = P_{n+1} = \frac{P_n}{1 + \frac{e}{2}} * \left(1 - \frac{e}{2} + R * \left(1 - \frac{P_n}{K} \right) \right)$$

Doch man kann dieses Modell nicht in der Realität anwenden, da man, abgesehen davon ob dieses Modell überhaupt gültig ist, nicht einmal die Parameter R und K kennt. In der Realität kennt man nur Schätzungen für den Aufwand e und den Ertrag Y_n . Eine Strategie für eine nachhaltige Entnahme kann nur diese Größen verwenden. Eine einfache Strategie besteht darin, den Aufwand solange zu erhöhen, als gleichzeitig der Ertrag steigt. Sobald der Ertrag zurückgeht friert man den Aufwand e ein.

logistisches Modell mit strategischer Entnahme



Die folgende Abbildung zeigt, wie sich die Population und der Ertrag entwickelt wenn diese Strategie auf das logistische Modell angewendet wird. Während der Rechnung beobachteten wir wie sich der Aufwand e dem maximal zulässigen Aufwand

$$e = \frac{R}{2}$$

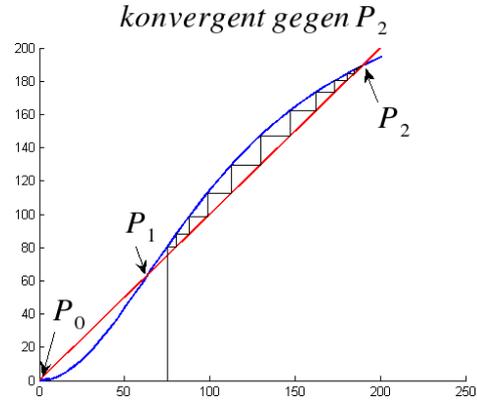
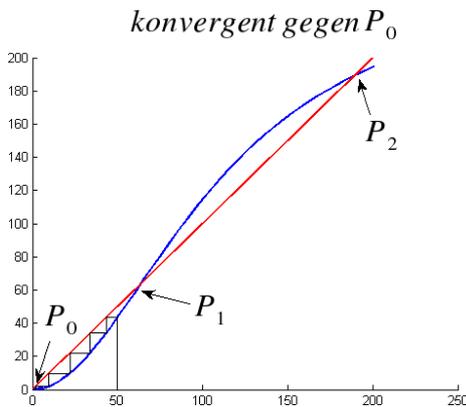
nähert und dort eingefroren wird. Der so erreichte Gleichgewichtszustand ist stabil (laut obiger Analyse) und unempfindlich gegenüber Störungen.

Modell 2: Quadratisches – Modell ohne Entnahme

Nachdem wir mit dem logistischen Modell ein relativ stabiles und nachhaltiges Modell gefunden hatten, suchten wir nach einem Modell, welches auch zusammenbrechen kann, wenn eine gewisse Populationsgröße unterschritten wird. Dieses Modell kann durch folgende Gleichung mathematisch beschrieben werden:

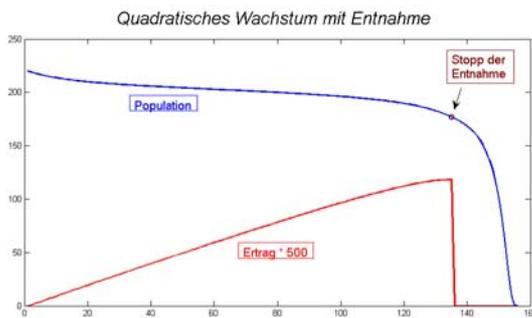
$$\psi_{(n+1)} = \frac{r}{1 + \left(\frac{\psi_n}{k} \right)^2} * (\psi_n)^2 \quad r \dots \text{Wachstumsrate, } \psi_n \dots \text{Population nach n Vermehrungszyklen}$$

Aus dieser Gleichung lassen sich nun 3 Fixpunkte finden:



In der Iteration ist zu sehen, dass der Fixpunkt P_1 instabil ist und dass die Fixpunkte P_0 und P_2 stabil sind. Wird der Wert von P_1 unterschritten, wird die Population aussterben. Wird dieser Wert überschritten, wird die Population gegen P_2 gehen.

Modell 3: Quadratisches – Modell mit Entnahme



Bei diesem Modell wollen wir eine Entnahme simulieren, indem wir nach jedem Vermehrungszyklus den Ertrag aus der Population entnehmen. Der Aufwand der aufgebracht werden muss um den Ertrag zu erzielen, wird nach jedem Vermehrungszyklus erhöht. Vor jedem neuen Vermehrungszyklus wird überprüft, ob sich der Ertrag verglichen mit dem vorhergegangen vergrößert oder vermindert hat. Wurde der Ertrag vermindert wird sofort danach der ganze Fischfang gestoppt, aber trotzdem bricht die Population zusammen, wenn ein bestimmter Wert unterschritten wurde.

Wir testeten ein und dieselbe Strategie mit zwei verschiedenen Populationsmodellen. Als Strategie erhöht man die Entnahmerate (=Aufwand) solange bis der Ertrag zurückgeht und hält die Entnahmerate dann konstant. Es werden dabei also nur in der Wirklichkeit beobachtbare Größen verwendet, die vom mathematischen Modell unabhängig sind.

Angewendet auf eine Population, die von einem logistischen Modell beschrieben wird, nähert sich diese Strategie dem maximalen nachhaltig erzielbaren Ertrag. Die zugehörige Population befindet sich in einem Gleichgewicht, das auf Störungen stabil reagiert.

Aber angewendet auf eine Population, die von einem quadratischen Modell beschrieben wird, kann diese Strategie zur Auslöschung der Population führen, selbst dann wenn bei Rückgang des Ertrages die Entnahme sofort gestoppt wird.

Projekt: Sozialwissenschaften

Wie können demokratische Freiheit und Reichtum eines Landes gleichmäßig verteilt werden?

Dr. Stephen Keeling

Teilnehmer: Rudolf Griss, Michael Hsieh, Georg Michelitsch, Christoph Planitzer, Stefan Raminger,
Jan Schifko, Christoph Triebel, Markus Weger

PROBLEMSTELLUNG:

Es soll gezeigt werden, wie die Komplexität sozialer Systeme aus dem Zusammenspiel einzelner Individuen entsteht. Dabei wird eine so genannte Multi-Agenten Simulation verwendet, um soziales Verhalten von interagierenden Individuen zu untersuchen. Die Interaktion der Agenten wird mit Hilfe des Programmierwerkzeugs Netlogo untersucht. Mögliche Modelle beschreiben das Tauschen von Ressourcen und einfache diesbezügliche Entscheidungen der Agenten. Vom Tauschen erwartet man eine emergierende Wirtschaft. Von Gruppenentscheidungen erwartet man eine emergierende Regierung. Anhand eines solchen Modells werden Parameter gesucht, die zur gleichmäßigen Verteilung von Reichtum und Entscheidungskraft führen.

ERGEBNISSE:

Berufsgruppen, Ressourcen

Um der Realität näher zu rücken, erstellten wir drei *Berufsgruppen*, die jeweils eine von drei Ressourcen ernten können. Jedes Individuum benötigte für das Überleben eine gewisse Anzahl an Ressourcen pro *Zeiteinheit*, konnte jedoch nur eine Ressource selbst abernten. So erreichten wir eine Abhängigkeit zwischen den Individuen, die eine Interaktion in Form eines Tauschhandels forcierte.

Tauschhandel

Wir führten einen selektiven Tauschhandel ein, bei dem sich jeder Agent den für ihn am besten geeigneten Partner in seiner nahen Umgebung aussucht und mit diesem tauscht. Um die Elemente der freien Marktwirtschaft nicht zu verlieren, gestalteten wir zunächst einen Markt, der die Regeln des *Supply and Demand* Modells befolgte. Wurde mehr an den Markt verkauft, stieg das Angebot und sank der Preis; wurde mehr gekauft, stieg sowohl die Nachfrage als auch der Preis. Wenn ein Agent keinen Tauschpartner gefunden hatte, hatte er die Möglichkeit, den Markt aufzusuchen und die fehlenden Rohstoffe im Tausch zu erwerben – eine Art Sozialhilfesystem. Doch während der ersten Testläufe zeigte sich die Tendenz zur „Städtebildung“, große Ansammlungen von Agenten, die untereinander tauschten. Dies machte das Vorhandensein eines Marktes unnötig. Um dennoch eine soziale Gerechtigkeit zu garantieren, führten wir die von uns entwickelte SS Sonderregelung ein, eine Art Sozialsteuer, die ab einem bestimmten Anteil von sich in Armut befindlichen Agenten von reichen Agenten zu entrichten ist.

Entscheidungskraft

Um auch auf die demokratische Freiheit eines Systems Bezug zu nehmen, schufen wir den Faktor „*Entscheidungskraft*“ und unser damit zusammenhängendes FEE-System. Der Faktor dient zur Bestimmung des Einflusses auf andere Agenten bei Tauschgeschäften. Wie auch in der Realität spielen zur Bestimmung dieses Wertes Faktoren wie Charisma,

Aggressionsbereitschaft und Herkunft eine entscheidende Rolle. Bei einem Tauschgeschäft wirken die beiden EK-Werte der Handelspartner antagonistisch und bilden so die für beide Partner fairsten Tauschkonditionen.

Prozessverarbeitung

Während unseres Arbeits- und Programmierungsprozesses stießen wir natürlich immer wieder auf interessante Ergebnisse. Wir ließen das von uns geschriebene Modell mit verschiedenen Parametern einige Zeit lang laufen und analysierten die Resultate: manchmal waren diese für uns befriedigend bezügl. der Erwartungen: z.B. der erwarteten Verteilung, des Wachstums etc.

System I

amount-of-food:	7
amount-of-wood:	7
amount-of-water:	7
num-people:	211
regrowth-rate:	47
max-vision:	10
life-expectancy-min:	80
life-expectancy-max:	100
birthrate:	1.3
tax:	10
Metabolism-max:	6

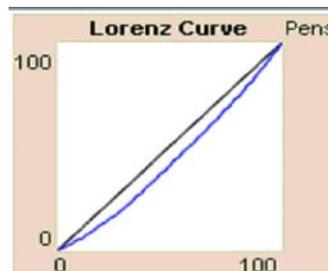
Ergebnis: Ausgeglichenes, faires System

Stabile Population von 80 Individuen

Fast ideale, „gerade“ Lorenzkurve (Kurve)

Upper-middle-class: reichste, größte Klasse

Gesamtpopulation wird immer reicher



Dargestellt wird der Reichtum in Abhängigkeit von der Bevölkerung in %.

Je kleiner die Fläche zwischen 1. Mediane und Lorenzkurve, desto gleichmäßiger ist der Reichtum der Population verteilt.

System II

amount-of-food:	10
amount-of-wood:	10
amount-of-water:	10
num-people:	200
regrowth-rate:	25
max-vision:	8
life-expectancy-min:	95
life-expectancy-max:	100
birthrate:	3,3
tax:	0
metabolism-max:	14

Ergebnis: Unfares, ausbeutendes System

Stabile Bevölkerung

Sehr viele Arme, nur wenig Reiche

Arme haben nichts, Reiche extrem viel

Sehr große Fläche zwischen Lorenzkurve und 1. Mediane

