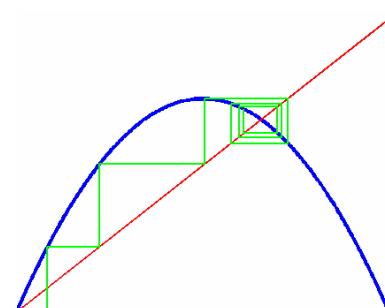
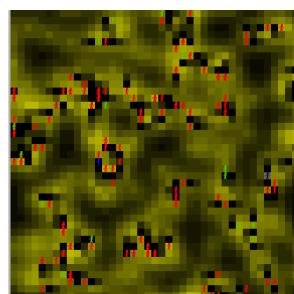
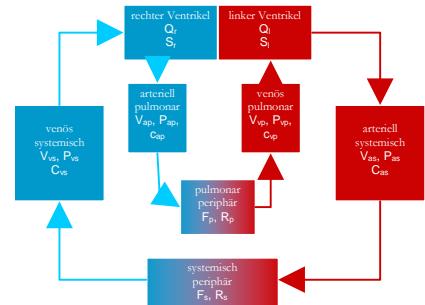
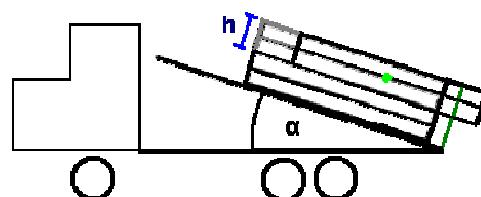


WOCHE DER MODELLIERUNG MIT MATHEMATIK

Dokumentationsbroschüre

6. - 11. März 2005



Woche der Modellierung mit Mathematik



Schloss Seggau, 06.03. - 11.03.2005

Weitere Informationen:

<http://math.uni-graz.at/modellwoche/2005/>

Vorwort

Die Idee zu der erstmals in der Steiermark durchgeführten „Modellierungswoche“ für Schüler der 7. und 8. Klasse der AHS wurde schon längere Zeit am Institut für Mathematik und Wissenschaftliches Rechnen der Universität Graz diskutiert. Vorbild waren ähnliche Vorhaben, die bereits in Karlsruhe, in Bozen und erstmals im letzten Jahr auch in Linz durchgeführt wurden. Mitglieder des Institutes haben bereits Erfahrungen mit ähnlichen Veranstaltungen für Studierende und angehende Wissenschaftler. Hauptziel der Modellierungswoche war es, Schüler mit einem Aspekt der Mathematik zu befassen, der unserer Meinung nach im Unterricht an den AHS unterrepräsentiert ist. Die Mathematik ist einerseits eine Wissenschaft, die sich mit Problemen beschäftigt, die mit strukturellen Fragen ihrer eigenen Theorien zu tun haben und wo man sehr bald mit grundlegenden Fragen betreffend die logische Grundlegung der Mathematik und mit erkenntnistheoretischen Problemen in Berührung kommt. Dieser Aspekt der Mathematik ist wohl nicht für alle ganz einfach zugänglich. Andererseits war die Mathematik während ihrer gesamten Geschichte ständig in Wechselwirkung mit angewandten Bereichen. Viele mathematische Theorien entstanden in Reaktion auf Anforderungen in den verschiedensten Anwendungsbereichen. Die Verfügbarkeit immer leistungsfähigerer Computer hat neue Möglichkeiten für die mathematische Behandlung verschiedenster komplexer Probleme eröffnet. Quantitative Resultate statt qualitativer Aussagen sind immer wichtiger und erfordern zu ihrer Bewältigung die mathematische Modellierung komplexer Systeme in interdisziplinärer Zusammenarbeit.

Den an der Modellierungswoche teilnehmenden Schülern sollte an Hand sorgfältig ausgewählter Projektaufgaben Gelegenheit gegeben werden, den angewandten Aspekt der Mathematik durch Teamarbeit in Projektgruppen zu erleben. Es wurde versucht, den Schülern die wesentlichen Phasen eines Modellierungsprozesses nahe zu bringen: Einarbeiten in das Anwendungsgebiet, Wahl der Modellstruktur in Hinblick auf die Aufgabenstellung, Einsatz numerischer Methoden, Interpretation der Ergebnisse, Präsentation der Resultate.

Treibende Kraft für die Realisierung der Modellierungswoche war Dr. Stephen Keeling, dem hier für seinen großen Einsatz gedankt sei. Besonderer Dank gebührt dem Landesschulrat für Steiermark, und hier insbesondere Frau Landesschulinspektor Hofrat Mag. Marlies Liebscher. Sie hat die Idee einer gemeinsamen Veranstaltung sofort sehr positiv aufgenommen und tatkräftig unterstützt. Ohne den großen Einsatz der direkten Projektbetreuer (Dr. Sigrid Thaller – Institut für Sportwissenschaften, Dr. Wolfgang Desch, Dr. Stephen Keeling, Dr. Georg Propst – alle Institut für Mathematik und Wissenschaftliches Rechnen) und der Betreuer aus dem Kreis der Lehrerschaft (DDr. Andrea Windischbacher-Mailänder, Mag. Melanie Wogrin), die auch die Gestaltung dieses Berichtes übernommen haben, wäre die Modellierungswoche nicht durchführbar gewesen. Der Bank Austria – Creditanstalt sei für eine nicht unbedeutliche Subvention gedankt. Das BM:BWK und die Wissenschaftsabteilung der Steiermärkischen Landesregierung haben ebenfalls Subventionen in Aussicht gestellt. In diesem Zusammenhang sei Vizerektor Polaschek, Universität Graz, für seine Unterstützung gedankt.

Schloss Seggau, am 11. 3. 2005

F. Kappel
(Leiter des Institutes für Mathematik
und Wissenschaftliches Rechnen)

Projekt: Physiologie

Ein einfaches Modell zur Regulierung des Herzkreislauf-Systems

Andreas Fitzek, Eva Klampfer, Denise Loder,
Andreas Postl, Matthias Praunegger, Clemens Schiffer unter
Projektleitung: Univ. -Prof. Dr. F. Kappel
im Rahmen der „Woche der Modellierung mit Mathematik“
im Schloss Seggau von 6.-11. März 2005

Projekt: Physiologie

**EIN EINFACHES MODELL
ZUR REGULIERUNG DES HERZKREISLAUF-SYSTEMS**

Andreas Fitzek, Eva Klampfer, Denise Loder,
Andreas Postl, Matthias Praunegger, Clemens Schiffer
Projektleitung: Univ. -Prof. Dr. F. Kappel
im Rahmen der „Woche der Modellierung mit Mathematik“
im Schloss Seggau von 6.-11. März 2005

INHALTSVERZEICHNIS:

• Problemstellung:	
• Kurzfassung	3
• 1 EINFÜHRUNG	3
1.1 Das Herzkreislaufsystem – Physiologie	3
1.2 Das Modell	4
1.3 Mathematische Beschreibung des Modells	5
1.4 Genau Problemstellungen	10
• 2 SIMULATION	11
2.1 „Einfaches Modell“	11
2.2 „Komplexeres Modell“	11
• 3 ERGEBNISSE UND PROBLEMLÖSUNGEN	12
3.1 Problem 1	12
3.2 a) Problem 2a	15
3.2 b) Problem 2b	15
3.3 Problem 3	20
3.4 Simulation unter Belastung	21
3.5 Dreidimensionale Funktionsgraphen	22
• 4 ZUSAMMENGEFASSTE AUSWERTUNG, AUSBLICK	23
4.1 Wirkung der verschiedenen Regelungsmöglichkeiten	23
4.2 Ausblicke, Gedanken für die Zukunft	24
• 5 LITERATUR	24
• * TEILNEHMER	25

Exemplarische Programm-Quellcodes und Diagramme finden Sie unter „anhaenge.zip“

PROBLEMSTELLUNG:

Aufgabe dieses Projekts war es, anhand eines einfachen mathematischen Modells für das Herzkreislauf-System die Auswirkungen verschiedener Regelungsmöglichkeiten (wie etwa Erhöhung der Herzfrequenz) zu erforschen und wechselseitig zu vergleichen.

KURZFASSUNG:

Wir untersuchen (mehr oder weniger sehr vereinfacht) im Wesentlichen die Auswirkungen von Änderung des Blutstromwiderstandes im Blutkreislauf, der Herzfrequenz und der Schlagstärke des Herzens, was etwa bei Belastung des Körpers in der Praxis durch die barorezeptorische Regulation häufig vorkommt, auf den Blutfluss, der pro Minute durch den Körper fließt, und den arteriellen Blutdruck. Diese beiden Daten betrachten wir deshalb am genauesten, weil sie in der Praxis die wesentlichste Rolle spielen. Beispielsweise wird bei Anstrengung in gewissen Körperregionen mehr Sauerstoff und damit Blutfluss benötigt und auch der arterielle Blutdruck (eben auch jener Wert, den der Arzt misst) sollte relativ stabil gehalten, da bekanntlich ein zu tiefer Blutdruck zu geringer Durchblutung des Gehirns und damit zu Zusammenbrüchen und ein zu hoher zu Gefäßdehnungen und in weiterer Folge zu Schlaganfällen führt.

Außerdem ist interessant, welche Vorgänge passieren, wenn man beispielsweise rasch von der Liege- in die Stehposition wechselt, und dadurch, wie jeder wahrscheinlich bereits schon selbst erlebt hat, Schwindel, Übelkeit oder sogar Herzrasen bis hin Bewusstlosigkeit auftreten. Hier funktionieren die natürlichen Kontrollmechanismen für den Blutdruck nicht richtig bzw. sehr zeitverzögert und es kommt zu so genanntem orthostatischen Stress, d.h. zu einer Verschiebung des Blutvolumen im Körper. Wir wollen diese Kontroll-Loop-Verzögerung mit künstlichen Regelungsmöglichkeiten kompensieren.

Dabei sei gesagt, das wir mit der Regelung des Modells nur die barorezeptorische Kurzzeitregulation bei bestimmten kurzfristigen Veränderungen (zum Beispiel Belastung auf den Körper) simulieren wollen, nicht aber gehen andere Kontrollmechanismen zur Herzkreislauf-Regulierung, insbesondere die hormonell gesteuerte Langzeitregulation, die etwa bei körperlichem Training die Eigenschaften des Pumpverhaltens des Herzens (Schlagvolumen, ...) langfristig ändern, in das Modell ein.

1 EINFÜHRUNG

1.1 Das Herzkreislaufsystem - Physiologie

Das Herzkreislauf-System (*kardiovaskuläres System*) besteht aus zwei Kreisläufen, dem Systemkreislauf (systemischer Kreislauf) und dem Lungenkreislauf (pulmonaler Kreislauf), die durch das Herz miteinander verbunden sind. Das Herz besteht aus 4 Kammern, paarweise links und rechts angeordnet sind. Auf beiden Seiten fließt das Blut zunächst in das Atrium und danach in die muskulösen Ventrikel, die für unser Modell eine wesentliche Rolle spielen. Das Blut verlässt das Herz, ausgestoßen durch die Ventrikel, wiederum durch Klappen, vom rechten Ventrikel in den kleineren Lungenkreislauf oder vom linken Ventrikel in den großen Systemkreislauf, der mit seinem Arteriensystem (beginnend mit der Aorta) den gesamten Körper mit dem im Lungenkreislauf mit Sauerstoff angereicherten Blut versorgt. Für unser Modell sind wiederum der linke Ventrikel und der Systemkreislauf vorrangig von Bedeutung.

Systemkreislauf: Das Arteriensystem des Systemkreislaufs verzweigt sich immer weiter in den Körper und bei jeder Verzweigung nimmt der Durchmesser der Arterien ab; man spricht dann bei sehr kleinen Arterien von Arteriolen (Innendurchmesser 30-100 μ m) und schließlich von Kapillaren (Innendurchmesser 4-5 μ m), die am Ende des Verzweigungssystems stehen. Um diesen Kreislauf zu schließen und zur rechten Herzkammer fortzuführen, führen die immer größer werdenden Venolen bzw. Venen die weit verzweigten Gefäße wieder zusammen. Schließlich münden die weiten Venae Cavae ins rechte Atrium des Herzens.

Herzschlag-Perioden: Die Ventrikel erzeugen selbstverständlich einerweise einen „stoßweisen“ Blutfluss, da der Druck, mit dem Blut ausgestoßen wird, nur während der Kontraktionsphase des

Herzens (Systole) entsteht. Während dieses Ausstoßungsprozesses mit einer Dauer von 0,2-0,3s ist der Blutdruck im Ventrikel größer als in der Aorta bzw. der pulmonaren Arterie. Das Blut wird mit dem systolischen Blutdruck weiter in die Arterien, die, wie wir wissen, sich bei höherem Druck auch ausdehnen, also eine gewisse Elastizität (*Komplianz*) aufweisen. Nach der Systole folgt der Füllungsprozess (Diastole) mit einer von Dauer von 0,5-0,7s, währenddessen der Blutausstoß zum Stillstand gekommen ist. Der Systemdruck sinkt während der Diastole bis zur Wiederkehr der Systole; diesem Abfall wirkt aber die Kontraktion der Aorta (dabei ändert sich die besagte Komplianz) entgegen, was weiterhin einen stabilen Systemdruck und somit den Blutfluss durch den Systemkreislauf garantiert.

1.2 Das Modell

Man musste zunächst die entscheidenden Parameter des gesamten Systems identifizieren, so etwa Gesamtblutvolumen, Blutstromwiderstände, Schlagstärke des Herzens oder die Komplianz oder Nachgiebigkeit der Gefäßwände und der Ventrikel, da, wie bereits besagt, Arterien und Venen bis zu einem gewissen Grad dehnbar sind.

Zusammenfassung zu **Kompartments**: Für unsere Zwecke ist es völlig ausreichend, die großen und kleinen Arterien der beiden Kreise jeweils zu einem Gefäß zusammenzufassen, ebenso die großen und kleinen Venen, während die Arteriolen, Kapillaren und Venolen jeweils zur peripheren Region zusammengefasst werden. Die Zusammenfassung aller Arterien bzw. Venen im systemischen und auch im pulmonaren Kreislauf werden später auch als Kompartments bezeichnet (arteriell bzw. venös systemisches u. arteriell bzw. venös pulmonares Kompartiment).

Wir betrachten stets die mittleren Werte für Blut **Blutdruck**, **Volumina** in den einzelnen Kompartments **und Komplianz** (Elastizität) der Gefäßwände in den Kompartments zu den verschiedenen Herzschlag-Perioden (Systole u. Diastole)

Im Folgenden ein einfaches Blockdiagramm des Herzkreislauf-Modells (mit vorangehender Erklärung der Parameter):

ERKLÄRUNGEN ZU ABB.1:

Parameter	Bedeutung
Q_l, Q_r	<i>Herzminutenvolumen</i> = Blutstromvolumen, das vom linken bzw. rechten Ventrikel pro Minute aufgestoßen wird
S_l, S_r	<i>Kontraktilität</i> des linken bzw. rechten Ventrikels (Stärke der Kontraktion des Herzens)
$V_{as}, V_{vs}, V_{ap}, V_{vp}$	<i>Mittleres Blutvolumen</i> im jeweiligen Kompartiment (as = arteriell systemisch, vs = venös systemisch, ap = arteriell pulmonar, vp = venös pulmonar)
$C_{as}, C_{vs}, C_{ap}, C_{vp}$	<i>Komplianz</i> (Elastizität, Nachgiebigkeit) der Gefäßwand im jeweiligen Kompartiment
$P_{as}, P_{vs}, P_{ap}, P_{vp}$	<i>Blutdruck</i> im jeweiligen Kompartiment
F_s, F_p	<i>Blutfluss</i> durch die periphere Region des systemischen bzw. pulmonaren Kreislaufs
R_s, R_p	<i>Blutstromwiderstand</i> in der peripheren Region des systemischen bzw. pulmonaren Kreislaufs

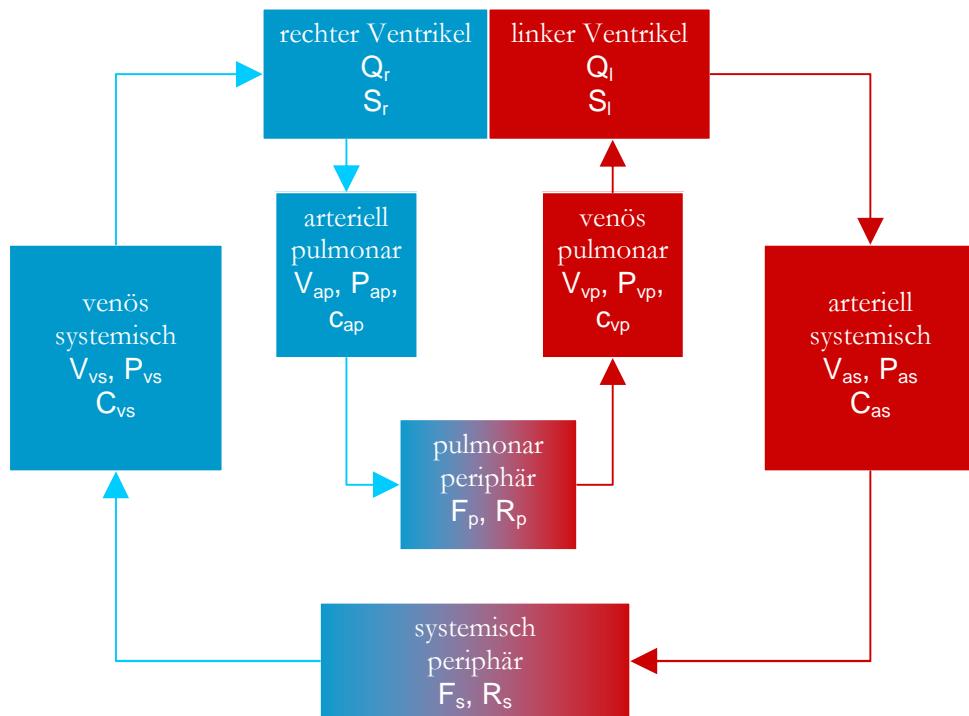


Abb. 1: Blockdiagramm des Herzkreislaufsystems

Weiters gehen von einem **Gleichgewicht des Systems** aus, d.h. der Blutfluss durch die peripheren Regionen ist gleich den von den Ventrikeln ausgestoßenen Herzminutenvolumina. Selbstverständlich mussten wir noch einige weitere andere Annahmen treffen, auf diese gehen wir jedoch erst ein, sobald wir darauf stoßen.

1.3 Mathematische Beschreibung des Modells

Die peripheren Regionen werden also als reine Widerstandsgefäße für den Blutfluss aufgefasst. Wir nehmen an, dass das Ohm'sche Gesetz anwendbar ist, d.h. der Blutfluss ist proportional der Druckdifferenz in den benachbarten Gefäßen und indirekt proportional dem Widerstand in den peripheren Regionen:

$$(1) \quad F_s = \frac{1}{R_s} (P_{as} - P_{vs}), \quad F_p = \frac{1}{R_p} (P_{ap} - P_{vp})$$

Die Kompartimente, die durch Zusammenfassung von Arterien bzw. Venen entstanden sind, weisen allesamt eine bestimmte Komplianz (Nachgiebigkeit) auf. Zwischen Volumen und Druck in den Kompartimenten und zwischen Volumen und der Komplianz der Gefäßwände besteht ein Zusammenhang, den wir als linear annehmen:

$$(2) \quad V_{as} = c_{as} P_{as}, \quad V_{vs} = c_{vs} P_{vs}, \quad V_{ap} = c_{ap} P_{ap}, \quad V_{vp} = c_{vp} P_{vp}$$

Sämtliche Compliances c_{as} , c_{vs} , c_{ap} , c_{vp} und später auch $c_{diast,l}$ bzw. $c_{diast,r}$ (Komplianz der Ventrikel während der Diastole) charakterisieren wie vorhin erklärt die Elastizität oder Nachgiebigkeit der Gefäßwände und werden zunächst als konstant angenommen, jedoch wird später auch c_{vs} variiert, da dies auch in der Wirklichkeit stattfindet. Die anderen Komplianz-Werte haben eher weniger Einfluss in unserem Modell, daher werden wir diese als konstant beibehalten.

Die Ventrikel werden als Pumpen aufgefasst, die einen bestimmten Blutstrom erzeugen. Für die Herzminutenvolumina Q_l und Q_r des linken bzw. rechten Ventrikels, die für ein Gleichgewicht im Herzkreislaufsystem gleich den Blutflusswerten pro Minute F_s und F_p im systemischen bzw. pulmonaren Kreislauf sein müssen, gilt zunächst:

$$(3) \quad Q_l = HV_{schlag,l}, \quad Q_r = HV_{schlag,r},$$

wobei H die *Herzfrequenz* und $V_{schlag,l}$ bzw. $V_{schlag,r}$ die *Schlagvolumina* der beiden Ventrikel sind, d.h. die Volumina, welche bei einem Herzschlag ausgestoßen werden.

Die Schlagvolumina bestimmen wir durch Bildung der Differenz der Volumina am Ende der *Diastole* (Füllungsprozess des Ventrikels) und am Ende der *Systole* (Ausstoßungsprozess des Ventrikels). In beiden Fällen werden auch die Ventrikel als Gefäße mit nachgiebigen Wänden aufgefasst. Diese Komplianz der Ventrikel für Diastole bzw. Systole wird mit c_{diast} und c_{syst} bezeichnet.

- i) Der an den Ventrikeln anliegende venöse Druck P_v (P_{vp} für den linken Ventrikel, P_{vs} für den rechten) sorgt für die Füllung der Ventrikel während der Diastole. Dieser Füllungsprozess endet, wenn der Druck im Ventrikel den anliegenden venösen Druck P_{vs} bzw. P_{vp} erreicht hat. Für das Volumen im Ventrikel am Ende der Diastole gilt also:

$$V_D = c_{diast} P_v$$

- ii) Nach einer jeden Diastole folgt eine Systole. Die Ausstoßung von Blut während der Systole endet, wenn der Druck im Ventrikel bis zum arteriellen Druck P_a (P_{as} für den linken Ventrikel, P_{ap} für den rechten), gegen den ausgestoßen wird, gesunken ist. Für das Volumen im Ventrikel am Ende der Systole ergibt sich:

$$V_S = c_{syst} P_a$$

Das Schlagvolumen ist dann

$$V_{schlag} = V_D - V_S = c_{diast} P_v - c_{syst} P_a$$

Da die Ventrikel während der Systole wesentlich steifer ist als während der Diastole, nehmen wir $c_{syst} = 0$ an, d.h. wir erhalten:

$$V_{schlag} = c_{diast} P_v$$

woraus für den linken bzw. rechten Ventrikel im Einzelnen direkt folgt:

$$(4) \quad V_{schlag,l} = c_{diast,l} P_{vp}, \quad V_{schlag,r} = c_{diast,r} P_{vs}$$

Gleichungen (3) und (4) ergeben für die Herzminutenvolumina schließlich

$$(5) \quad Q_l = c_{diast,l} HP_{vp}, \quad Q_r = c_{diast,r} HP_{vs}$$

Wie zuvor erläutert, gehen wir von einem Gleichgewicht im Herzkreislaufsystem aus, d.h. der Blutfluss pro Minute in den peripheren Regionen (sowohl im systemischen als auch im pulmonaren Kreislauf) muss gleich dem Herzminutenvolumen (sowohl beim linken als auch beim rechten Ventrikel) sein. Dann gilt:

$$(6) \quad Q_r = Q_l = F_s = F_p =: F \quad \text{und} \quad V_{schlag,l} = V_{schlag,r} = V_{schlag}$$

Eine weitere Gleichung erhält man für das Gesamtvolumen V_0 im gesamten Herzkreislauf:

$$(7) \quad V_0 = V_{as} + V_{vs} + V_{ap} + V_{vp} = c_{as} P_{as} + c_{vs} P_{vs} + c_{ap} P_{ap} + c_{vp} P_{vp}$$

NORMWERTE, ZUSAMMENFASSUNG DES GLEICHUNGSSYSTEMS UND DER PARAMETER

I) Im Folgenden einige **Normwerte im Ruhezustand**, die wir für die einzelnen Variablen bzw. Parameter verwendet haben:

Variable	Wert	Einheit
P_{as}	100	mmHg
P_{vs}	2	mmHg
P_{ap}	15	mmHg
P_{vp}	5	mmHg
V_{as}	1.0	Liter
V_{vs}	3.5	Liter
V_{ap}	0.1	Liter
V_{vp}	0.4	Liter
H	80	Schläge/min
V_{schlag}	0.07	Liter/Schlag
F	5.6	Liter/min

Tabelle 1: Normwerte für den Ruhezustand

II) Zusammenfassend nochmals die **Gleichungen** für das Modell des Herzkreislauf-Systems:

$$(8) \quad V_{as} = c_{as} P_{as}$$

$$(9) \quad V_{vs} = c_{vs} P_{vs}$$

$$(10) \quad V_{ap} = c_{ap} P_{ap}$$

$$(11) \quad V_{vp} = c_{vp} P_{vp}$$

$$(12) \quad F_s = \frac{1}{R_s} (P_{as} - P_{vs})$$

$$(13) \quad F_p = \frac{1}{R_p} (P_{ap} - P_{vp})$$

$$(14) \quad Q_l = c_{diast,l} H P_{vp}$$

$$(15) \quad Q_r = c_{diast,r} H P_{vs}$$

III) Mit Hilfe der 9 Gleichungen (7) – (15) erhalten wir unter Beachtung von (6) und Verwendung der Werte aus Tabelle 1 die Parameter c_{as} , c_{vs} , c_{ap} , c_{vp} , R_s , R_p , $c_{diast,l}$, $c_{diast,r}$ und V_0 :

Parameter	Wert	Einheit
R_s	17.5	mmHg/(Liter/min)
R_p	1.79	mmHg/(Liter/min)
C_{as}	0.01	Liter/mmHg
C_{vs}	1.75	Liter/mmHg
C_{ap}	0.00667	Liter/mmHg
C_{vp}	0.08	Liter/mmHg
$C_{diast,l}$	0.014	Liter/mmHg
$C_{diast,r}$	0.035	Liter/mmHg
V_0	5.0	Liter

Tabelle 2: Parameter des Modells für den Ruhezustand, falls das „einfache Modell“ mit den Herzminutenvolumina gegeben durch (14) und (15) betrachtet wird

1.3.1 „Einfaches Modell“

Mit Hilfe eines linearen Gleichungssystems aus den Gleichungen (7) und (12) – (15) simulieren wir später die unbekannten Größen F sowie die 4 Druckwerte P_{as} , P_{vs} , P_{ap} und P_{vp} . Die relevant veränderbaren Eingabeparameter R_s , H , V_0 und C_{vs} können wir dann beliebig festsetzen und dafür die unbekannten Größen errechnen. Auch eine kombinierte bzw. wechselseitige Veränderung der Eingabeparameter ist dann möglich, wobei selbstverständlich nicht jede Kombination sinnvoll ist und wir nur einige Kombinationen durchrechnen. Diese Simulation(-ergebnisse) finden Sie später unter dem von uns definierten „einfachen Modell“ unter 2.1 bzw. 3.1.

1.3.2 Weiterführung des Modells - „Komplexeres Modell“

Die Modellierung der Herzminutenvolumina Q_l und Q_r durch die Gleichungen (14) und (15), die wir für die Simulation des „einfachen Modells“ heranziehen, ist für einige Situation zu ungenau. Es wird dabei nicht berücksichtigt, dass das Schlagvolumen sowohl von der Herzfrequenz als auch vom arteriellen Druck, gegen den ausgestoßen werden muss, abhängt. Daher wurden Überlegungen, die hier nicht ausführlich dargestellt werden, angestellt, die neue Formeln für die Herzminutenvolumina ergeben.

Einige wenige Teile dieser Überlegungen: Wir erhalten unter Beachtung von Frank Starling und unter Berücksichtigung des Füllungsprozesses (Diastole) des Ventrikels Folgendes:

Frank-Starling-Gesetz:

$$(16) \quad V_{schlag} = \frac{S}{P_a} V_{diast}$$

d.h. das Schlagvolumen ist proportional dem end-diastolischen Volumen. Der Faktor S kann als Stärke der Kontraktion des Ventrikels interpretiert werden und heißt die *Kontraktilität* des Ventrikels.

Bezeichnet nun t_d die Dauer des Diastole sowie t_s die Dauer der Systole (in Sekunden), so gilt:

$$t_d + t_s = \frac{60}{H} \quad (= \text{Dauer eines Herzschlags})$$

Für den uns interessierenden Bereich für die Herzfrequenz können wir die von H. C. Bazett gegebene Formel für t_s verwenden:

$$t_s = \kappa \sqrt{\frac{60}{H}},$$

wobei $\kappa = 0.4$ gesetzt werden kann.

Insgesamt erhalten wir für die Dauer der Diastole als Funktion der Herzfrequenz

$$(17) \quad t_d(H) = \sqrt{\frac{60}{H}} \cdot \left(\sqrt{\frac{60}{H}} - \kappa \right)$$

Für die Herzminutenvolumina erhält man schließlich anstelle von (14) und (15), der Formeln für Q_l und Q_r beim „einfachen Modell“:

$$(18) \quad Q_l = \frac{(1 - \alpha_l) c_{diast,l} P_{vp} S_l H}{(1 - \alpha_l) P_{as} + \alpha_l S_l},$$

$$(19) \quad Q_r = \frac{(1 - \alpha_r) c_{diast,r} P_{vs} S_r H}{(1 - \alpha_r) P_{ap} + \alpha_r S_r},$$

wobei

$$(20) \quad \alpha_l = e^{-(c_{diast,l} R_l)^{-1} t_d(H)}, \quad \alpha_r = e^{-(c_{diast,r} R_r)^{-1} t_d(H)},$$

wobei R_r bzw. R_l den Widerstand gegen das Einströmen von Blut in den rechten bzw. linken Ventrikel bezeichnet.

ZUSAMMENFASSUNG DER PARAMETER UND DES NEUEN NICHTLINEAREN GLEICHUNGSSYSTEMS

Die in Tabelle 2 zusammengefassten Parameterwerte sind nun jedoch nur mehr für die Parameter C_{as} , C_{vs} , C_{ap} , C_{vp} , R_s , R_p , und V_0 gültig. Von den hinzugekommenen neuen Parameter R_l , R_r , S_l und S_r abgesehen, ist insbesondere damit zu rechnen, dass sich die Parameter $c_{diast,l}$ und $c_{diast,r}$, die Komplianz der Ventrikel, ändern. Typische Parameterwerte, die mit den Daten in den Tabellen 1 und 2 verträglich sind, werden in der folgenden Tabelle gegeben:

Parameter	Wert	Einheit
R_s	17.5	mmHg/(Liter/min)
R_p	1.79	mmHg/(Liter/min)
C_{as}	0.01	Liter/mmHg
C_{vs}	1.75	Liter/mmHg
C_{ap}	0.00667	Liter/mmHg
C_{vp}	0.08	Liter/mmHg
$c_{diast,l}$	0.014	Liter/mmHg
$c_{diast,r}$	0.035	Liter/mmHg
V_0	5.0	Liter

Tabelle 2: Parameter des Modells für den Ruhezustand, falls das „komplexere Modell“ mit den Herzminutenvolumina gegeben durch (18) und (19) betrachtet wird

Für unser „komplexeres Modell“ erhalten wir nun ein *nichtlineares* Gleichungssystem aus den Gleichungen (7), (12), (13), (18) und (19). Dieses enthält wiederum dieselben 5 unbekannten Größen F sowie P_{as} , P_{vs} , P_{ap} und P_{vp} , allerdings einige zusätzliche Eingabeparameter, die wir verändern können. Dies ermöglicht eine Simulation genauer an der Wirklichkeit, somit ist unser „komplexeres Modell“, in dem zwar das Herzkreislauf-System nach wie vor sehr vereinfacht modelliert ist, von höherer Relevanz.

Wir haben in diesem Gleichungssystem nun folgende Eingabeparameter, die wir einzeln oder kombiniert bzw. wechselseitig regeln können und die auch eine wesentliche Rolle in diesem Modell spielen: R_s , H , S_l , c_{vs} sowie eventuell V_0 und S_r .

Diese Simulation bzw. die Ergebnisse finden Sie später unter dem von uns definierten „einfachen Modell“ unter 2.2 bzw. 3.1 – 3.3.

Zwecks der erforderlichen Übersichtlichkeit nochmals das gesamte nichtlineare Gleichungssystem:

$$(7) \quad V_0 = V_{as} + V_{vs} + V_{ap} + V_{vp} = c_{as} P_{as} + c_{vs} P_{vs} + c_{ap} P_{ap} + c_{vp} P_{vp}$$

$$(12) \quad F_s = \frac{1}{R_s} (P_{as} - P_{vs})$$

$$(13) \quad F_p = \frac{1}{R_p} (P_{ap} - P_{vp})$$

$$(18) \quad Q_l = \frac{(1 - \alpha_l) c_{diast,l} P_{vp} S_l H}{(1 - \alpha_l) P_{as} + \alpha_l S_l}$$

$$(19) \quad Q_r = \frac{(1 - \alpha_r) c_{diast,r} P_{vs} S_r H}{(1 - \alpha_r) P_{ap} + \alpha_r S_r},$$

wobei

$$\alpha_l = e^{-(c_{diast,l} R_l)^{-1} t_d(H)}, \quad \alpha_r = e^{-(c_{diast,r} R_r)^{-1} t_d(H)},$$

$$t_d(H) = \sqrt{\frac{60}{H}} \cdot \left(\sqrt{\frac{60}{H}} - \kappa \right),$$

$$Q_r = Q_l = F_s = F_p =: F$$

gilt.

1.4 Genaue Problemstellungen

Eine wesentliche Aufgabe des Herzkreislauf-Systems besteht darin, Organe und Muskeln mit Sauerstoff zu versorgen, der an die roten Blutkörperchen gebunden ist. Da die Sauerstoffkonzentration in Blut im Allgemeinen gesättigt ist, muss ein höherer Sauerstoffbedarf durch eine Erhöhung des Blutflusses abgedeckt werden. Ein sehr effizientes Mittel, dies zu tun, besteht darin, den Widerstand R_s zu verringern.

Problem 1. Man untersuche, welche Auswirkungen eine Verringerung von R_s auf die Druckwerte P_{as} , P_{vs} , P_{ap} , P_{vp} und auf den Blutfluss F hat.

Eine Verringerung des arteriellen Systemdrucks P_{as} wird von den so genannten Barorezeptoren in der Aorta (und in der carotis sinus) registriert. Es werden Signale an das Kleinhirn geschickt, wo sich das Kontrollzentrum für die Kreislaufregulation befindet. Von dort

werden über das autonome Nervensystem (Sympathicus und Parasympathicus) Signale ausgesendet, die zu einer Veränderung verschiedener Größen im Herzkreislauf-System führen. Insbesondere werden die Herzfrequenz H und die Kontraktilitäten S_l , S_r , aber auch die Komplianz c_{vs} verändert.

Problem 2. a) Warum ist eine bloße Verringerung von R_s nicht sinnvoll?

b) Was bewirken jeweils Veränderungen von H , S_l , S_r und c_{vs} ? Wodurch unterscheiden sich die Auswirkungen?

In der Vergangenheit hat es Herzschrittmacher gegeben, die durch den Träger des Schrittmachers verstellt werden konnten.

Problem 3. Eine Verstellung des Herzschrittmachers zu einer höheren Herzfrequenz unter Ruhebedingungen führt im Allgemeinen zu keiner Erhöhung des Blutflusses. Kann dies mit Hilfe des oben beschriebenen Modells simuliert werden?

2 SIMULATION

Entscheidung für das Erfüllen des Ziels der Modellierung ist natürlich die Simulation der Auswirkungen der Regelungsmöglichkeiten (durch Änderung der Eingabeparameter), die wir hier demonstrieren. Selbstverständlich muss man einen Computer mit diesen Gleichungssystemen gespeist werden, um den Rechengang schnell und flexibel durchzuführen.

2.1 „Einfaches Modell“

Das einfachere Modell wurde mit MATLAB 7 simuliert. Zu diesem Zweck bringen wir das lineare Gleichungssystem aus den fünf Gleichungen (7) und (12) – (15) durch Umformen in die richtige Form und geben sie in Form einer Koeffizientenmatrix und ihrem Störvektor ein. Hier ein kurzer Auszug aus dem Quellcode des Rechenprogramms, das wie gesagt dieses lineare Gleichungssystem für jede beliebige Veränderung bestimmter Eingabeparameter löst. Es handelt sich dabei um das umgeformte Gleichungssystem, das als Matrix in das Programm eingegeben wird

```
% *) Lineares Gleichungssystem für das "einfache Modell" mit
% fünf unbekannten Größen (Pas, Pvs, Pap, Pvp, F), das wir durch
% Umformen der Gleichungen (7) und (12)-(15) erhalten:
%
% (12)      -Pas      +          Pvs      +          Rs*F = 0
% (13)                  -Pap      +          Pvp      +          Rp*F = 0
% (14)                  -cdiastl*H*Pvp +          F = 0
% (15)      -cdiastr*H*Pvs +          F = 0
% (7)      cas*Pas      +          cvs*Pvs +          cap*Pap +          cvp*Pvp      = v0
```

Die exemplarischen Quellcodes für den Rechengang und das Zeichnen der Graphen finden Sie in den Anhängen 2.1.

2.2 „Komplexeres Modell“

Das komplexere Modell konnte nicht in eine solche Form gebracht und anschließend in eine Koeffizientenmatrix eingegeben werden, da es sich um ein nichtlineares Gleichungssystem handelt. Wir lösten das Gleichungssystem jedoch zunächst mit DERIVE 6 und später mit MuPAD 3, welches unseren Ansprüchen weitaus gerechter wurde. Zwar konnten beide Programme die unbekannten Größen nicht explizit in einer Formel darstellen, doch numerisch wurde das Gleichungssystem in einem Rechengang von 400-500 Sekunden (Derive 6) bzw. 4-5 Sekunden (MuPAD 3) gelöst.

Exemplarische Quellcodes für den Rechengang finden Sie in den Anhängen 2.2.

Die in MuPAD 3 erhaltene Wertetabelle für den Blutfluss bzw. die Druckwerte in Abhängigkeit jeweiliger Eingabeparameter mussten wir anschließend in Microsoft Excel exportieren, um Funktionsgraphen zeichnen zu können.

3 ERGEBNISSE UND PROBLEMLÖSUNG

Problem 1 und Problem 2 werden im Folgenden mit Hilfe von Diagrammen dargestellt und beantwortet. (Diese finden Sie in den Anhängen 3a und 3b) Dabei finden Sie auf der Y-Achse stets den Blutfluss pro Minute F bzw. den Blutdruck im arteriell systemischen Kompartiment P_{as} (teilweise auch P_{vs}), jeweils in Abhängigkeit von den Werten auf der X-Achse. Wie gesagt vernachlässigen wir die Druckwerte P_{vs} , P_{ap} , P_{vp} in den meisten Fällen, da sie keine wesentliche Rolle spielen.

Auf der X-Achse finden Sie die Werte für den peripheren systemischen Widerstand R_s , die Herzfrequenz H , die Komplianz der Gefäßwände im venös systemischen Kompartiment c_{vs} , die Kontraktilitäten (Schlagstärken) der Ventrikel S_l und selten S_r sowie das Gesamtblutvolumen V_0 . Dabei vergleichen wir für Problem 1 auch erhaltene Werte unseres „komplexeren Modells“ mit jenen des „einfachen Modells“. Außerdem führen wir nach Interpretation der Diagramme mit Worten eine Wertetabelle mit einigen Zahlenwerten (wobei der nächste Wert an der Norm leicht grau hinterlegt ist) an.

Problem 3 wurde mit der Eingabe von konkreten Werten in das „komplexere Modell“ behandelt.

3.1 Problem 1

Aufgabenstellung: Man untersuche, welche Auswirkungen eine Verringerung von R_s auf die Druckwerte P_{as} , P_{vs} , P_{ap} , P_{vp} und auf den Blutfluss F hat.

Wir verändern also in unseren beiden Gleichungssystemen den Parameter für den Blutstromwiderstand in der peripheren Region des Systemkreislaufs R_s . Für die Graphen wählten wir ein Intervall [5;20] für R_s . (Normwert = 17.5 mmHg/(Liter/min))

3.1.F Auswirkungen auf den Blutfluss F bei Veränderung von R_s

Zunächst betrachten wir die Veränderung, die wir für den Blutfluss pro Minute errechnet haben:

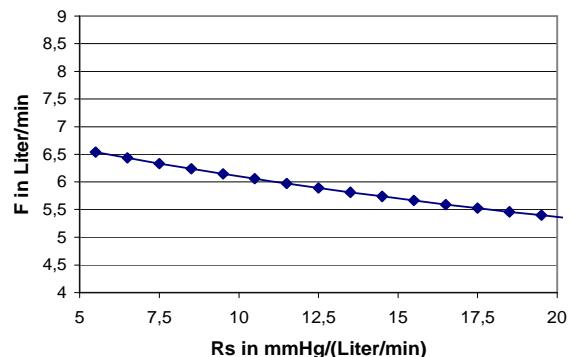
a) „einfaches Modell“

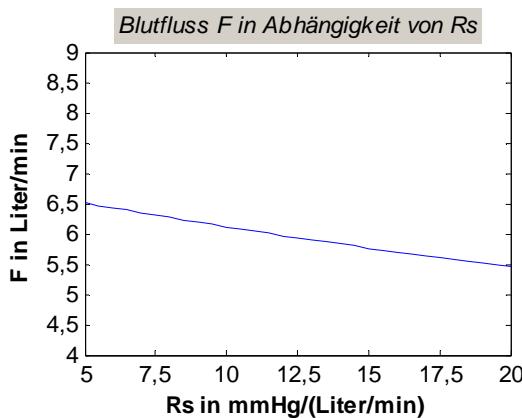
Abb. 1a: $F(R_s)$ „einfaches Modell“

b) „komplexeres Modell“

Abb. 1b: $F(R_s)$ „komplexeres Modell“

Blutfluss F in Abhängigkeit von R_s





Der resultierende Blutfluss F wird, wie auch erwünscht, bei Verringerung des Widerstandes größer, d.h. es kommt mehr Sauerstoff in die Körperregionen mit höherem Bedarf.

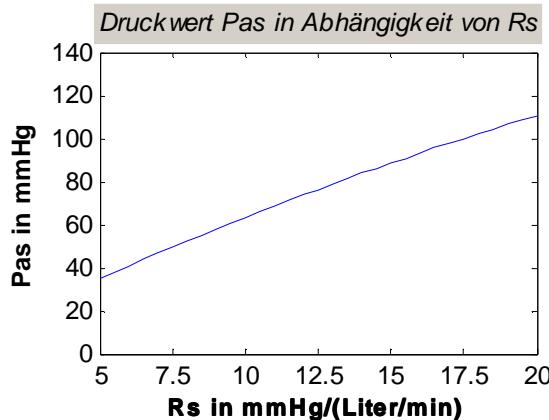
Der Blutfluss F steigt auch hier bei Verringerung von R_s , und das ähnlich wie beim einfachen Modell.

3.1.P Auswirkungen auf die Blutdruckwerte bei Veränderung von R_s

Nun folgt die Veränderung, die bei den Blutdruckwerten in den einzelnen Kompartimenten auftritt.

a) „einfaches Modell“

Abb. 2a: $P_{as}(R_s)$ „einfaches Modell“



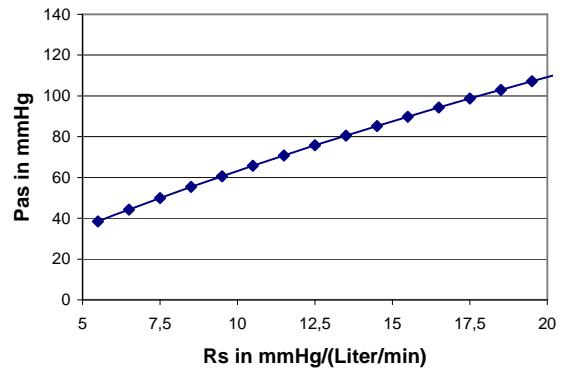
Man sieht, verringert man einfach nur den peripheren Widerstand, was bei Belastung unter anderem vorkommt, sinkt der Blutdruck P_{as} immer weiter.

Abb. 3a: $P_{vs}(R_s)$ „einfaches Modell“

b) „komplexeres Modell“

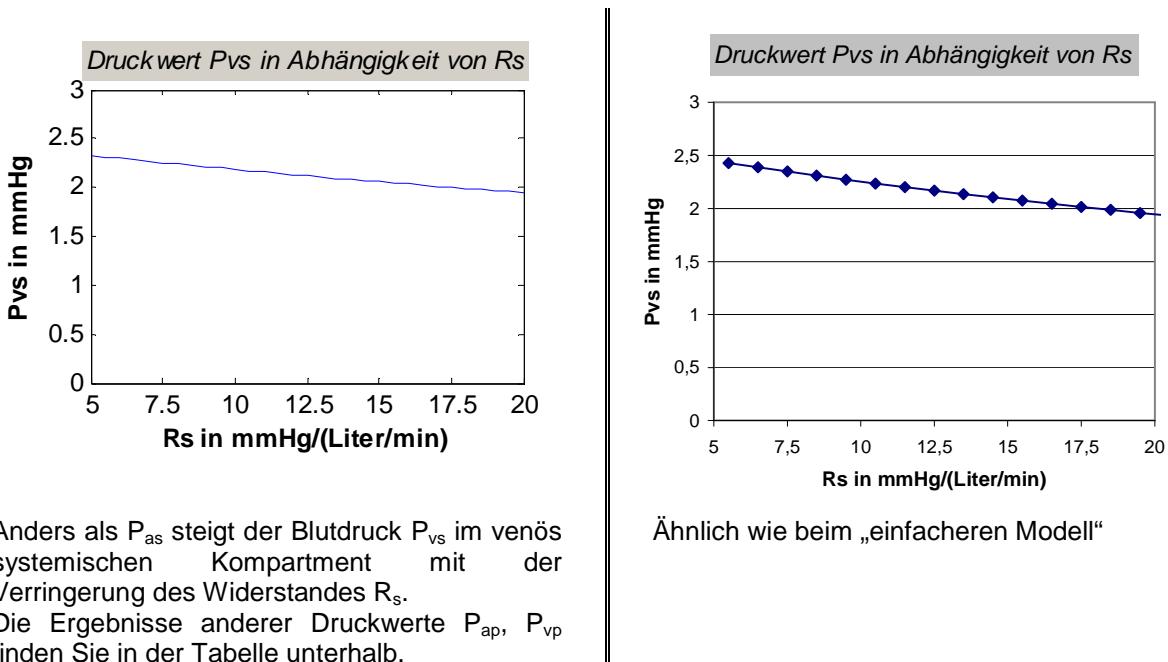
Abb. 2b: $P_{as}(R_s)$ „komplexeres Modell“

Druckwert P_{as} in Abhängigkeit von R_s



Wie wir sehen, senkt auch hier die Verringerung von R_s den arteriellen Blutdruck, und das ähnlich wie beim einfachen Modell.

Abb. 3b: $P_{vs}(R_s)$ „komplexeres Modell“



3.1.T Wertetabelle (gerundet) bei Veränderung von R_s

Tabelle für das „einfache Modell“:

R_s	F	P_{as}	P_{vs}	P_{ap}	P_{vp}
5,5	6,47	37,9	2,31	17,36	5,78
8,5	6,23	55,2	2,22	17,71	5,56
11,5	6,00	71,2	2,14	16,11	5,36
14,5	5,79	86,1	2,07	15,55	5,17
17,5	5,60	100,0	2,00	15,02	5,00
20,5	5,42	113,0	1,93	14,54	4,84

Tabelle 3a: Blutfluss und Blutdruck in Abhängigkeit von R_s , „einfacheres Modell“

Tabelle für das „komplexeres Modell“:

R_s	F	P_{as}	P_{vs}	P_{ap}	P_{vp}
5,5	6,54	38,4	2,43	15,06	3,35
8,5	6,24	55,3	2,31	15,01	3,84
11,5	5,97	70,9	2,20	14,94	4,25
14,5	5,74	85,3	2,10	14,86	4,59
17,5	5,533	98,7	2,01	14,77	4,88
20,5	5,33	111,3	1,93	14,67	5,12

Tabelle 3b: Blutfluss und Blutdruck in Abhängigkeit von R_s , „komplexeres Modell“

PROBLEMLÖSUNG 1:

Blutfluss F pro Minute steigt bei Verringerung von R_s , der Druckwert P_{as} sinkt dabei allerdings eindeutig. Die anderen eher unbedeutenden Druckwerte P_{vs} und P_{ap} steigen, anders als P_{as} , mit Verringerung von F . Interessant ist, dass P_{vp} sich bei den beiden Modellen anders verhält (siehe 3.1.T). Aussagekräftiger sind höchstwahrscheinlich die Ergebnisse des „komplexeren Modells.“

3.2a Problem 2. a)

Aufgabenstellung: Warum ist eine bloße Verringerung von R_s nicht sinnvoll?

PROBLEMLÖSUNG 2A:

Was bei der alleinigen Verringerung von R_s geschieht, wissen wir ja aus den Ergebnissen zu Problem 1. Da dies eine zu einer drastischen Verringerung des für uns bedeutenden mittleren arteriellen Blutdruck P_{as} zur Folge hat, was wie besagt zu Müdigkeit über Schwindel und Übelkeit bis hin zu Zusammenbrüchen führt, kann nicht R_s allein verändert werden. Ein mittlerer Blutdruck von 70 mmHg würde nämlich etwa den vom Arzt gemessenen Blutdruckwerten 90 / 60 (systolisch / diastolisch) entsprechen.

Dieser Blutdruckabfall muss also durch andere Regelungsmöglichkeiten wieder kompensiert werden. Mehr dazu im Folgenden:

3.2b Problem 2. b)

Aufgabenstellung: Was bewirken jeweils Veränderungen von H , S_l , S_r und c_{vs} ? Wodurch unterscheiden sich die Auswirkungen?

Wir haben zwar sämtliche Simulationen auch für unser „einfaches Modell“ durchgeführt und auch Diagramme gezeichnet, jedoch werden diese hier nicht angeführt, da sie relativ ungenau sind und daher von kleinerer Aussagekraft sind. Sie finden jedoch alle Funktionsgraphen in den Anhängen 3a. Sämtliche Werte und Diagramme, die wir für das „komplexere Modell“ erhalten haben, finden Sie in den Anhängen 3b.

Wir verändern also in unserem Gleichungssystem des „komplexeren Modells“ den Parameter für den Blutstromwiderstand in der peripheren Region des Systemkreislaufs R_s . Für die Graphen wählten folgende Intervalle:

- [40;200] für H (Norm = 80 Schläge/min),
- [50;100] für S_l (Norm = 67,7 mmHg),
- [7.5;15] für S_r (Norm = 10.9 mmHg),
- [1;2.5] für c_{vs} (Norm = 1.75 Liter/mmHg)
- (und zusätzlich [4;6] für V_0 (Norm = 5.0 Liter)

3.2b.1 Auswirkungen auf den Blutfluss und Blutdruck bei Veränderung von H

Abb. 4: F(H)

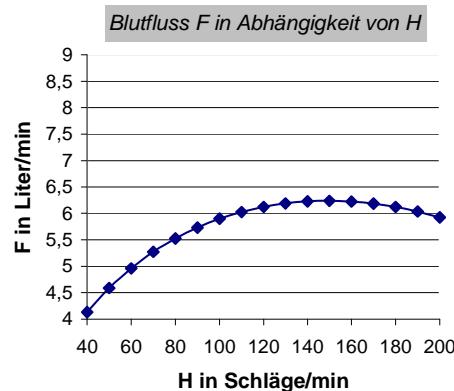


Abb. 4: Pas(H)

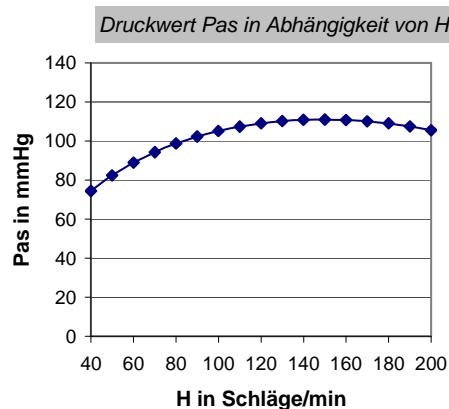
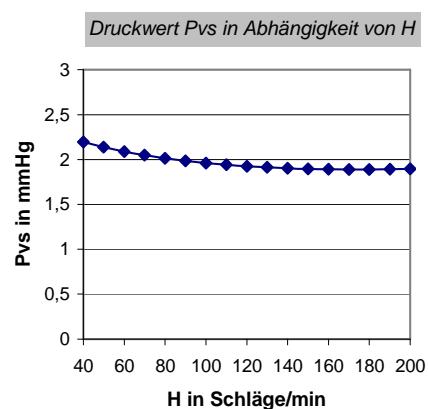


Abb. 5: Pvs(H)



Wir beobachten ein interessantes Ergebnis. Blutfluss F sowie mittlerer arterieller Blutdruck P_{as} steigen zunächst mit H, haben allerdings bei einem H von etwa 150 ihren Höchstpunkt. Der venöse Blutdruck P_{vs} hingegen sinkt mit Anstieg von H zunächst, und steigt dann ab H = 150 wieder leicht.

Kurz gesagt, die Erhöhung der Herzfrequenz erhöht im relevanten Bereich (bis etwa 150) sowohl den Blutfluss als auch arteriellen Blutdruck und führt damit zu erhöhter Sauerstoffzufuhr in den Körperregionen und somit zu einer Leistungssteigerung. In der Wirklichkeit geht die Erhöhung der Herzfrequenz allerdings zumeist einher mit einer adäquaten Erhöhung der Kontraktilität der Ventrikel SI u. S_r , einer Verringerung des Blutstromwiderstandes R_s und auch einer Erhöhung der Komplianz C_{vs} . Diese kombinierten und wechselseitigen Veränderungen der Regelungsmechanismen werden später in Problem 3 genauer betrachtet.

H	F	P _{as}	P _{vs}	P _{ap}	P _{vp}
40	4,13	74,5	4,17	2,2	11,56
60	4,96	88,9	4,56	2,09	13,44
80	5,53	98,7	4,88	2,01	14,77
100	5,9	105,2	5,15	1,96	15,7
120	6,12	109,1	5,39	1,93	16,35
140	6,23	110,9	5,63	1,9	16,77

Tabelle 4: Blutfluss und Blutdruck in Abhängigkeit von H, „komplexeres Modell“

3.2b.2 Auswirkungen auf den Blutfluss und Blutdruck bei Veränderung von S_l

Folgend die Auswirkungen, die eine Veränderung der Kontraktilität (Schlagstärke) des linken Ventrikels zur Folge hat:

Abb. 4: $F(S_l)$

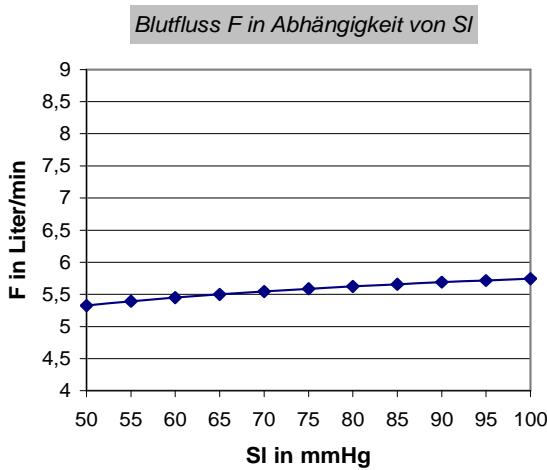
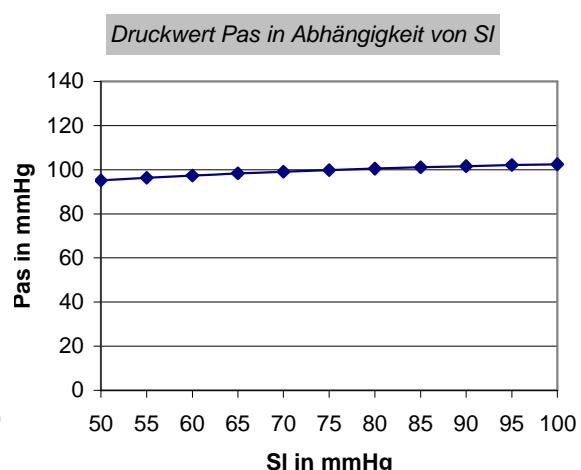


Abb. 5: $P_{as}(S_l)$



So wie eine Erhöhung von H führt auch die Erhöhung von S_l zu einem erhöhten Blutfluss sowie zu erhöhten Blutdruck.

Interessant wird für uns später die Simulation einer kombinierten Erhöhung von H und S_l sein.

S_l	F	P_{as}	P_{vs}	P_{ap}	P_{vp}
55	5,39	96,3	5,42	2	15,07
65	5,5	98,3	4,98	2,01	14,83
75	5,59	99,8	4,64	2,02	14,64
85	5,66	101	4,36	2,03	14,49
95	5,72	102,1	4,13	2,03	14,37

Tabelle 5: Blutfluss und Blutdruck in Abhängigkeit von S_l , „komplexeres Modell“

3.2b.3 Auswirkungen auf den Blutfluss und Blutdruck bei Veränderung von S_r

Folgend die Auswirkungen, die eine Veränderung der Kontraktilität (Schlagstärke) des rechten Ventrikels zur Folge hat:

Abb. 6: $F(S_r)$

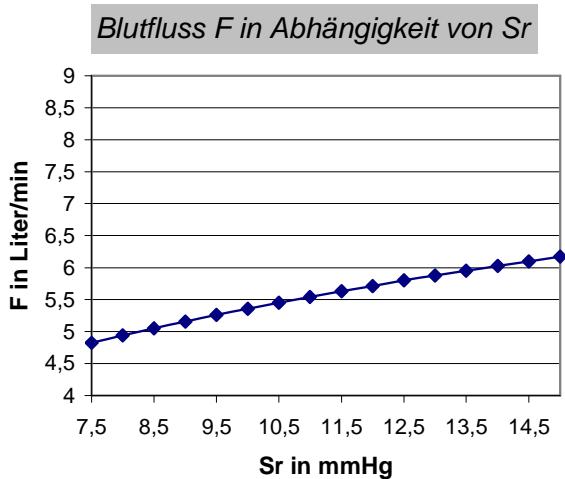
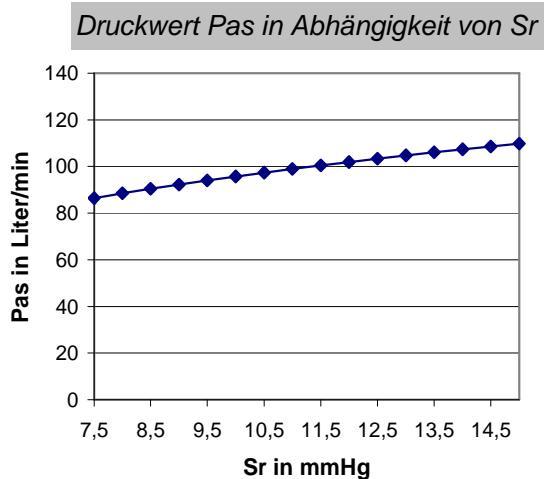


Abb. 7: $P_{as}(S_r)$



Auch die Erhöhung von S_r führt zu einem Anstieg des Blutflusses sowie des Blutdrucks.

S_r	F	P_{as}	P_{vs}	P_{ap}	P_{vp}
8	4,94	88,6	2,12	4,05	12,89
9	5,16	92,3	2,08	4,35	13,58
10	5,36	95,8	2,04	4,64	14,23
11	5,54	99	2,01	4,91	14,83
12	5,72	102	1,98	5,16	15,39
13	5,88	104,8	1,95	5,41	15,93
14	6,03	107,4	1,92	5,64	16,43
15	6,17	109,8	1,9	5,87	16,91

Tabelle 6: Blutfluss und Blutdruck in Abhängigkeit von S_r , „komplexeres Modell“

3.2b.4 Auswirkungen auf den Blutfluss und Blutdruck bei Veränderung von c_{vs}

Was bewirkt nun eine Veränderung der Komplianz der Venen im systemischen Kreislauf, also ein Steifer- bzw. Elastischerwerden der Gefäßwände im venös systemischen Kompartiment?

Abb. 8: $F(c_{vs})$

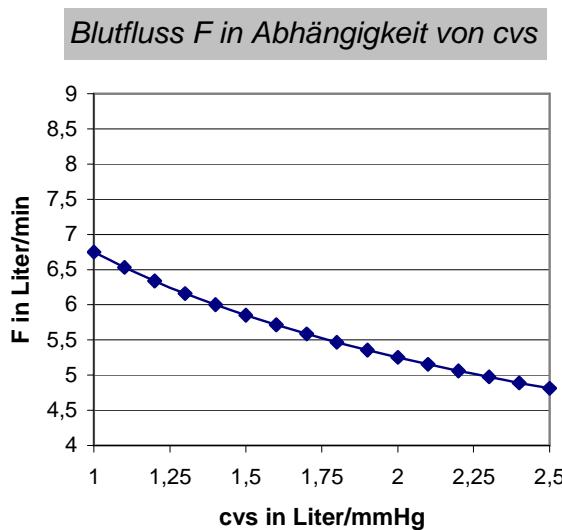
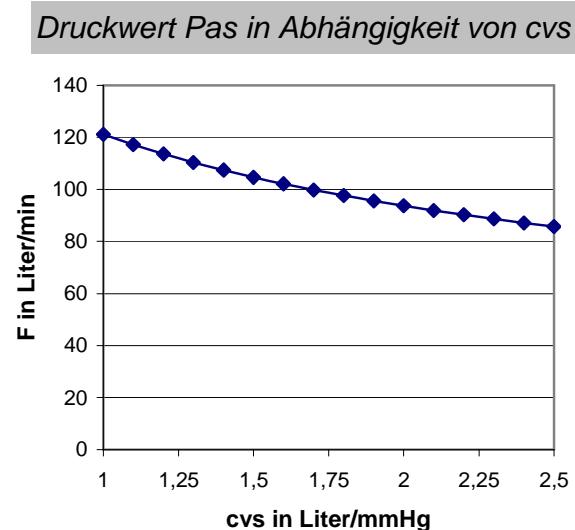


Abb. 9: $P_{as}(c_{vs})$



Wir sehen: Je höher die Komplianz der Venen, d.h. je elastischer sie werden, desto niedriger werden Blutfluss und Blutdruck. Wenn c_{vs} kleiner wird und die Venen somit steifer werden, was bei körperlicher Anstrengung in der Wirklichkeit häufig passiert, steigen Blutfluss und Blutdruck.

c_{vs}	F	P_{as}	P_{vs}	P_{ap}	P_{vp}
1	6,75	121,2	3,11	6,89	18,97
1,2	6,34	113,6	2,71	6,18	17,52
1,4	6	107,4	2,41	5,62	16,36
1,6	5,71	102,2	2,16	5,17	15,39
1,8	5,47	97,6	1,97	4,79	14,58
2	5,25	93,7	1,81	4,48	13,88
2,2	5,06	90,2	1,67	4,2	13,26
2,4	4,89	87,1	1,55	3,97	12,72

Tabelle 7: Blutfluss und Blutdruck in Abhängigkeit von c_{vs} , „komplexeres Modell“

3.2b.5 Auswirkungen auf den Blutfluss und Blutdruck bei Veränderung von V_0

Es liegt natürlich auch auf der Hand, dass das Gesamtblutvolumen im Körper ebenfalls nicht konstant ist. Durch vermehrte Flüssigkeitszufuhr kann zum Beispiel dieses V_0 erhöht werden.

Abb. 10: $F(v_0)$

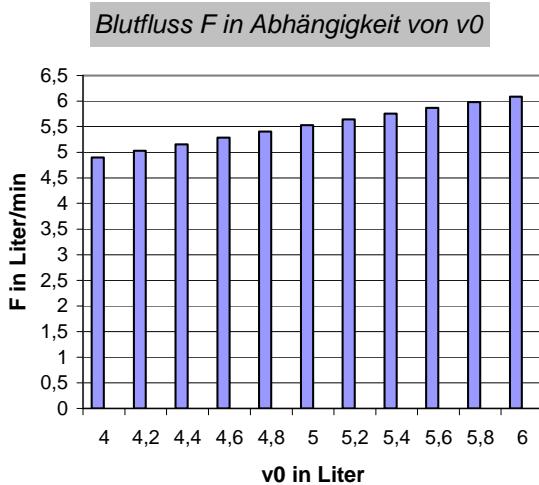
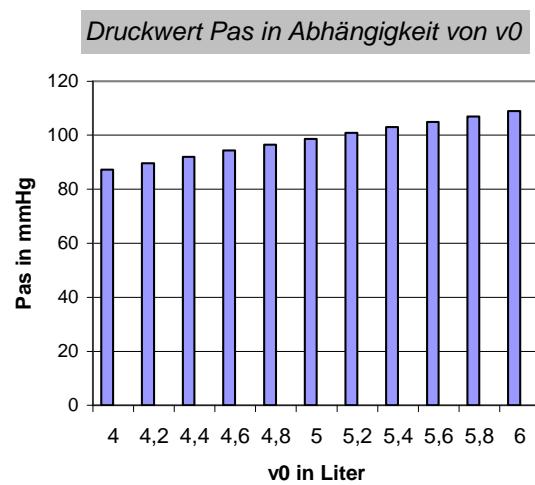


Abb. 11: $P_{as}(v_0)$



Je mehr Gesamtblutvolumen wir unserem Körper haben, desto größer werden auch Blutfluss sowie Blutdruck.

V_0	F	P_{as}	P_{vs}	P_{ap}	P_{vp}
4,2	5,03	89,7	1,65	4,16	13,16
4,6	5,28	94,3	1,83	4,52	13,98
5	5,53	98,7	2,01	4,88	14,77
5,4	5,76	102,9	2,2	5,23	15,54
5,8	5,98	107	2,39	5,58	16,28

Tabelle 7: Blutfluss und Blutdruck in Abhängigkeit von c_{vs} , „komplexeres Modell“

PROBLEMLÖSUNG 2B:

Eine Erhöhung von H , S_l oder S_r bewirken auch Erhöhungen bei Blutfluss und Blutdruck. Hingegen wird bei Erhöhung von c_{vs} der Blutfluss sowie der Blutdruck niedriger.

3.3 Problem 3

Aufgabenstellung: Eine Verstellung des Herzschrittmachers zu einer höheren Herzfrequenz unter Ruhebedingungen führt im Allgemeinen zu keiner Erhöhung des Blutflusses. Kann dies mit Hilfe des oben beschriebenen Modells simuliert werden?

Diese Problemstellung haben wir nur noch mit dem „komplexen Modell“ behandelt. Hier haben wir keine Intervalle für die Eingabeparameter verwendet, sondern konkrete Werte.

Zielsetzung: Wir versuchen die Erhöhung des Blutflusses aufgrund der Erhöhung der Herzfrequenz durch Veränderung anderer Eingabeparameter (S_l , R_s , c_{vs}) zu kompensieren, da dies, wie aus Messungen bekannt, in der Wirklichkeit passiert.

3.3.1 Simulation für $H = 100$ – Kompensation des Blutflusses durch c_{vs}

Setzen wir für die Herzfrequenz den erhöhten Wert H und belassen zunächst alle anderen Eingabeparameter beim Normwert, erhalten wir eine Erhöhung des Blutflusses. Diesen Anstieg versuchen wir hier, durch Erhöhung von c_{vs} auszugleichen. Wir erhalten folgende Werte:

$$H = 100 \text{ Schläge/min, } c_{vs} = 2.065 \text{ Liter/mmHg} \Rightarrow F = 5.525 \dots = \text{kons.}$$

was dem Normwert für F entspricht.

Da wir aber wissen, dass die Kontraktilität des Ventrikels auch von der Herzfrequenz abhängt, d.h. das Herz pumpt stärker, wenn es schneller schlägt, ist diese Simulation nicht wirklichkeitstreng.

3.3.2 Simulation für $H = 100$ und $S_l = 75$ – Kompensation des Blutflusses durch c_{vs}

Hier haben wir sowohl H und S_l , der Kontraktilität des linken Ventrikels, erhöht. Dies entspricht in etwa der Veränderung der Parameter, die auch bei einer Verstellung des Herzschrittmachers zu einer höheren Herzfrequenz auftritt. Zudem haben wir angenommen, dass der Widerstand R_s konstant bleibt. Kompensiert wird die Erhöhung des Blutflusses wiederum durch Erhöhung der Komplianz c_{vs} . Wir erhalten:

$$H = 100 \text{ Schläge/min, } S_l = 75 \text{ mmHg, } c_{vs} = 2.11 \text{ Liter/mmHg} \Rightarrow F = 5.525 \dots = \text{kons.}$$

PROBLEMLÖSUNG 3:

Die Erhöhung von H und S_l kompensieren wir hier einfach durch Erhöhung von c_{vs} , sodass wir als Resultat einen Blutflusses erhalten, der (annähernd) gleich dem Normwert ist. Bei $H = 100$ Schläge/min und $S_l = 75$ mmHg müssen wir c_{vs} in etwa bis auf **2.11 Liter/mmHg** erhöhen.

Der Abfall des Blutflusses durch Erhöhung von c_{vs} , d.h. die Gefäßwände im venösen systemischen Kompartiment sind elastischer, lässt sich wie folgt erklären:
Werden die Gefäße in einem Kompartiment elastischer, sinkt der Blutdruck in diesem Kompartiment. Dadurch strömt das Blut weniger schnell in die benachbarten Regionen, was einen geringeren Blutfluss mit sich bringt.

3.4 Simulation unter Belastung

Was geschieht, wenn eine Versuchsperson am Ergometer mit 75 Watt Leistung belastet wird?

In jedem Fall erhöhen sich Herzfrequenz H und auch Kontraktilität der Ventrikel (dabei ist vor allem von S_l Bedeutung). Wie wir zudem wissen, verringert sich der Blutstromwiderstand in den peripheren Regionen (dabei ist vor allem R_s von Bedeutung) und die Komplianz im venösen systemischen Kompartiment c_{vs} .

Wir ziehen folgende Parameterwerte für diese Simulation heran:

$$H = 120 \text{ Schläge / min} \quad (\text{Norm} = 80)$$

$$S_l = 85 \text{ mmHg} \quad (\text{Norm} = 67.7)$$

$$R_s = 15 \text{ mmHg/(Liter/min)} \quad (\text{Norm} = 17.5)$$

$$c_{vs} = 1.4 \text{ mmHg/(Liter/min)}$$

Wir erhalten folgende Werte für Blutfluss sowie den arteriellen Blutdruck:

$$F = 7.031 \text{ Liter/min}$$

$$P_{as} = 107.9 \text{ mmHg}$$

Wir können also daraus schließen: Der menschliche Körper hat mehrere effiziente Regelungsmöglichkeiten, um unter Belastung und bei höherem Sauerstoffbedarf, einen höheren Blutfluss zu erzielen, aber den arteriellen Blutdruck relativ stabil zu halten.

3.5 Dreidimensionale Funktionsgraphen

Für die Darstellung der Abhängigkeit des Blutflusses in Abhängigkeit zweier Parameter (in unserem Fall H und SI) erhalten wir ein Ergebnisfeld für den Blutfluss und können dieses in einem dreidimensionalen Diagramm abbilden.

Zusätzlich haben wir drei 3D-Diagramme erstellt, um auch die Auswirkungen der Komplianz c_{vs} zu illustrieren:

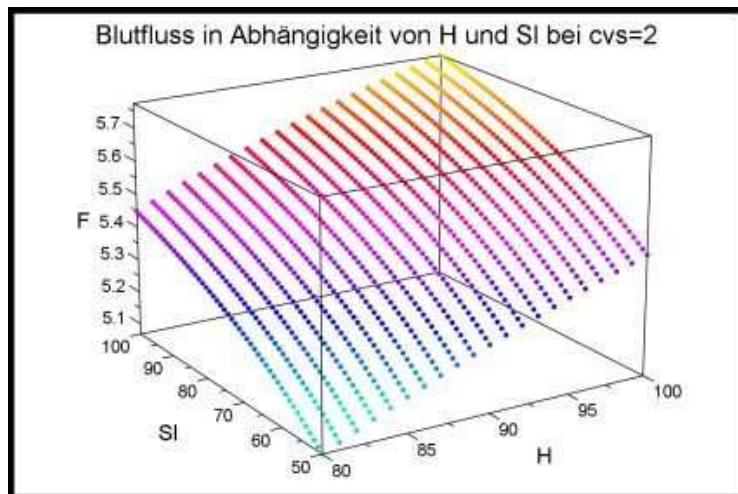


Abb. 12a: $F(H, SI)$ bei $c_{vs} = 2$

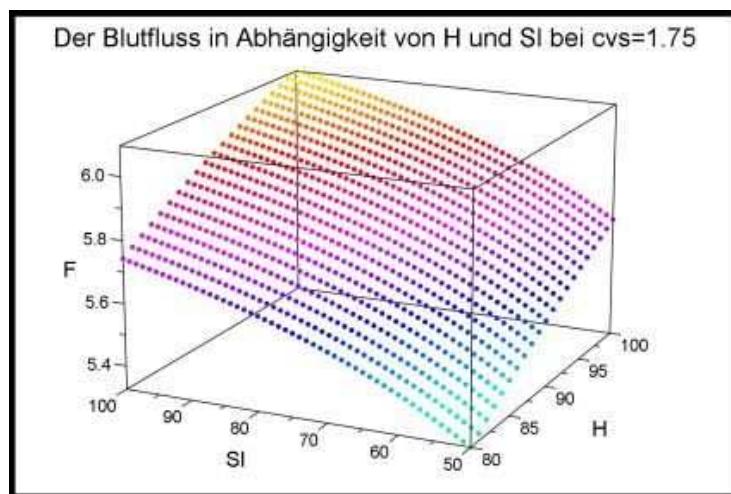


Abb. 12b: $F(H, SI)$ bei $cvs = 1.75$

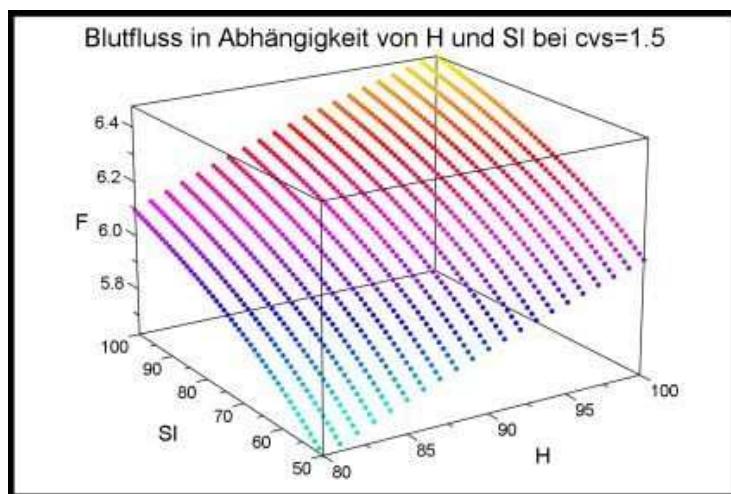


Abb. 12c: $F(H, SI)$ bei $cvs = 1.5$

4 ZUSAMMENGEFASSTE AUSWERTUNG, AUSBLICK

4.1 Wirkung der verschiedenen Regelungsmöglichkeiten

Hier nochmals eine kurze Übersicht, wie sich die verschiedenen Eingabeparameter auf Blutfluss und Blutdruck auswirken: (Genauere Ergebnisse siehe 3.1-3.2)

Parameter- Erhöhungen	Wirkung auf Blutfluss F	Wirkung auf Blutdruck P_{as}
Herzfrequenz H	Erhöhung (bis $H = 150$)	Erhöhung (bis $H = 150$)
Kontraktilität S_l, S_r	Erhöhung	Erhöhung
Gesamtvolumen V_0	Erhöhung	Erhöhung

Parameter-Verringerungen	Wirkung auf Blutfluss F	Wirkung auf Blutdruck P_{as}
Komplianz c_{vs}	Erhöhung	Erhöhung
Widerstand R_s, R_p	Verringerung	Verringerung

Tabelle 8: Übersicht über Auswirkungen der einzelnen Regelungsmöglichkeiten

Zu Problem 3 (siehe 3.3 ab Seite 20) ist zu sagen, dass mit Hilfe unseres Modells leicht simuliert werden kann, warum eine Verstellung des Herzschrittmachers im Allgemeinen zu KEINER Erhöhung des Blutflusses führt. Dies geschieht durch Kompensation über andere Parameter (in unserem Falle durch Erhöhung der Komplianz c_{vs}).

4.2 Ausblicke, Gedanken für die Zukunft

An dieser Stelle müssen wir gestehen, dass unser Modell das Herzkreislauf-System nur sehr vereinfacht darstellt. Es existieren bereits weitaus komplexere Modelle, außerdem sogar ein „globales Modell“, das das Atmungssystem auch miteinbezieht. Die Forschungsarbeit auf diesem Sektor in Verbindung mit mathematischer Modellierung ist noch lange nicht abgeschlossen. Es sind auch in weiterer Zukunft noch viele Gedanken zu machen, wie wir „Fehler“ in den Kontrollmechanismen des Herzkreislauf-System künstlich kompensieren können und wie wir die Regulierung des Herzkreislauf-System unter Kontrolle bekommen können.

5 LITERATUR

- [1] *D. Möller, D. Popovic, G. Thiele*: Modeling, simulation and parameter-estimation of the human cardiovascular system. Braunschweig; Wiesbaden: Vieweg, 1983.
- [2] *T. Pedley*: The Fluid Mechanics of Large Blood Vessels. Cambridge University Press, 1980.

*** FÜR PERSÖNLICHES, INTUITIVES, ARBEITSVERHALTEN,
AUFGABENTEILUNG, GEGENÜBERSTELLUNG UND
AUSEINANDERSETZUNG MIT DEM MODELL, ERFOLGSGEFÜHLE,
KOMMENTARE, FEHLER IN DER COVER-PAGE...**

hatten wir leider keine Zeit mehr.

ZU EINEM GRUPPENFOTO HAT ES GOTT SEI DANK NOCH GEREICHT:



sitzend v.l.n.r.:

Clemens Schiffer, BG/BRG Gleisdorf

Andreas Fitzek, BG/BRG Weiz

Matthias Praunegger, BG/BRG Weiz

stehend v.l.n.r.:

Denise Loder, WIKU BRG Graz

Andreas Postl, BG/BRG/BORG Hartberg

Eva Klampfer, WIKU BRG Graz

Projektleiter:

Univ.-Prof. Dr. Franz Kappel,

Leiter des Instituts für Mathematik und Wissenschaftliche Rechnen an der Universität Graz



Sprung auf dem Mond

Biomechanik

Gregor Klinser, Timon Kunter, Angelina

Orthacker, Daniel Rieder, Eva Sprung

Unter der Leitung von:

Ao. Univ-Prof. Dr. Sigrid Thaller

Im Rahmen der „Woche der
Modellierung der Mathematik“
im Schloss Seggau von 6.-11.
März 2005

Sprung auf dem Mond

Biomechanik

Aufgabenstellung:

Bewegungen am Mond

Menschliche Bewegungen verlaufen bei geringerer Gravitation anders als auf der Erde. Ein Astronaut springt am Mond klarerweise höher als auf der Erde. Aber um wie viel springt er höher? Ist die Verbesserung der Sprunghöhe für alle Leute gleich, oder hängt sie von den individuellen Eigenschaften der Personen ab? Kann es also sein, dass manche Menschen (Muskel-)Eigenschaften besitzen, die für einen Sprung auf dem Mond vorteilhafter sind als für einen Sprung auf der Erde? Was passiert, wenn man einem Astronauten soviel zusätzliches Gewicht auflädt, dass er am Mond gleich schwer ist wie ohne Zusatzgewicht auf der Erde? Springt er dann auch noch höher am Mond oder bleibt die Sprunghöhe gleich? Oder springt er vielleicht weniger hoch, weil ja mehr Masse zu beschleunigen ist? Was muss man an einem Film von einem Erdsprung ändern, um einen Sprung am Mond vorzutäuschen? Gesucht war ein mathematisches Modell für die Bewegung des Schwerpunktes eines Astronauten bei einem senkrechten Sprung.



Apollo 16 Commander John Young
April 20, 1972
NASA as16-113-18340

Vorbereitende Überlegungen:

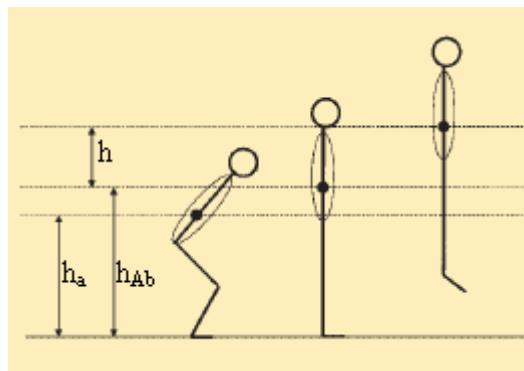
Zuerst überlegten wir uns, mit welchen Experimenten Astronauten auf der Erde Bewegungen am Mond simulieren. Die häufigsten Methoden sind Simulation

- unter Wasser,
- mit Hilfe von Gummiseilen,
- mit Parabelflügen.

- Bei der Simulation
- unter Wasser wirkt der Auftrieb der Schwerkraft entgegen. Der Aufwand ist gering, die Methode hat aber den Nachteil, dass der Widerstand im Wasser sehr groß ist.
 - mit Gummiseilen wirkt die Federkraft der Erdanziehung entgegen, allerdings sind Arme und Beine von dieser Erleichterung ausgeschlossen.
 - mit Parabelflügen befindet sich ein Flugzeug kurz im freien Fall. Diese Art der Simulation hat ein schlechtes Kosten – Nutzen Verhältnis.

Als nächstes beschäftigten wir uns mit der Definition der Begriffe Schwerpunkt und Sprunghöhe.

- Wir haben den Schwerpunkt des Astronauten im Bereich der Taille angenommen. Gewicht der Beine sowie Gewicht des Oberkörpers sind im Schwerpunkt konzentriert.



- Die Sprunghöhe h definierten wir als den Weg, den der Schwerpunkt vom normalen Stand bis zum höchsten Punkt des Sprunges zurücklegt.
- Als h_a bezeichneten wir die Schwerpunktshöhe bei der Ausgangshocke.
- h_{Ab} ist die Höhe zum Zeitpunkt des Absprungs.

Der nächste Schritt war die Erläuterung zweier verschiedener Modellarten, welche wir später verwendeten.

- Empirisches Modell: Durch Messwerte kommt man zu Graphen, deren Funktionen man zu ermitteln versucht.
- Strukturmodell: Beschreibung eines Zusammenhangs durch theoretische Überlegungen.

Durch praktische Sprungversuche haben wir einzelne Bewegungskomponenten des Sprunges herausgefiltert. Wir zerlegten den gesamten Sprung zuerst in Absprungphase und Flugphase. Während der Absprungphase wirken die Muskelkräfte. Wir haben ein sehr stark vereinfachtes Modell erzeugt, indem wir sowohl die Krafterzeugung des Sprunggelenkes sowie das Schwungholen mit den Armen ignoriert haben.

Da die Flugphase eine gleichmäßig beschleunigte Bewegung, und somit die einfachere ist, haben wir uns zuerst mit ihr befasst.

Modell 1 Flugphase

Die Energie beim Absprung setzt sich aus kinetischer und potentieller Energie zusammen.

$$E_{Ab} = E_{kin} + E_{pot}$$

$$E_{Ab} = \frac{mv^2}{2} + m \cdot g \cdot h_{Ab}$$

Dabei ist m die Masse, g die Gravitationsbeschleunigung und v die Geschwindigkeit zum Zeitpunkt des Absprunges.

Die kinetische wird am Umkehrpunkt zur Gänze in potentielle Energie umgewandelt.

$$E_U = E_{kin} + E_{pot}, \quad E_{kin} = 0$$

$$E_U = E_{pot}$$

$$E_U = m \cdot g \cdot (h_{Ab} + h)$$

Daraus folgt:

$$E_{Ab} - E_U = 0$$

$$\frac{mv^2}{2} + m \cdot g \cdot h_{Ab} = m \cdot g \cdot (h_{Ab} + h)$$

Durch Umformen und Kürzen kommt man auf die einfache Formel zur Beschreibung der Sprunghöhe:

$$h = \frac{v^2}{2g}$$

Die Gravitation auf der Erde beträgt ungefähr das Sechsfache der Mondanziehung.

$$g_{Mond} = \frac{1}{6} g_{Erde}$$

$$g_{erde} = 9.81 \frac{m}{s^2}$$

$$g_{mond} = 1,62 \frac{m}{s^2}$$

Daraus folgt:

$$h = \frac{v^2}{2 \cdot \frac{1}{6} g_{Erde}} \quad \rightarrow \quad 6 \cdot h = \frac{v^2}{2 \cdot g_{Erde}}$$

Bei konstanter Absprunggeschwindigkeit kommt man somit auf dem Mond immer genau *sechs Mal so hoch wie auf der Erde*.

Allerdings ist die Absprungsgeschwindigkeit bei gleichem Kraftaufwand auf Erde und Mond nicht dieselbe, deswegen beschäftigten wir uns nun mit der Absprungphase.

Modell 2

Absprungphase

In unserem zweiten Modell beschäftigten wir uns mit dem Sprung unter der Voraussetzung, dass die vom Muskel auf den Schwerpunkt wirkende Kraft F_M immer dieselbe bleibt.

$$\begin{aligned}\sum F &= m \cdot a \\ F_M - m \cdot g &= m \cdot a\end{aligned}$$

Da F_M konstant ist und die Anfangsgeschwindigkeit Null gesetzt wird, gilt

$$v(t) = a \cdot t$$

und

$$s(t) = \frac{a}{2} t^2 + h_a$$

Daraus folgt:

$$s(t) - h_a = \frac{t^2}{2} \cdot \frac{1}{m} \cdot (F_M - m \cdot g)$$

Nach t umgeformt:

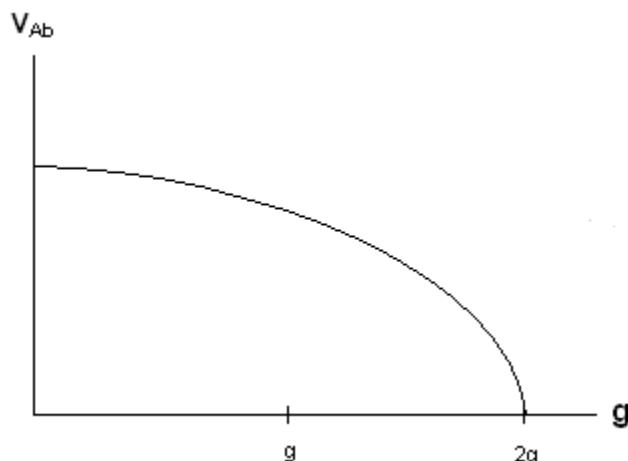
$$t = \sqrt{(s(t) - h_a) \cdot \frac{2m}{F_M - m \cdot g}}$$

Die Zeit bis zum Absprung ist

$$t_{Ab} = \sqrt{(s(t_{Ab}) - h_a) \cdot \frac{2m}{F_M - m \cdot g}}$$

t_{Ab} in $v(t)$ eingesetzt ergibt die Absprunggeschwindigkeit v_{Ab} .

Folgendes Diagramm gilt unter der Voraussetzung, dass die Kraft, die der Mensch maximal aufbringen kann, genau dem doppelten seines Körpergewichtes entspricht, also $F_M = 2mg_{Erde}$. Dabei bezeichnet v_{Ab} die Absprunggeschwindigkeit.



Verbinden von drei Gleichungen durch Einsetzen:

$$h = \frac{v^2}{2g} \quad (F_M - m \cdot g) \cdot \frac{1}{m} \cdot t = v \quad t = \sqrt{(s(t_{Ab}) - h_a) \cdot \frac{2m}{F_M - m \cdot g}}$$

Daraus ergibt sich für die Sprunghöhe:

$$h = \frac{(F_M - m \cdot g) \cdot (s(t_{Ab}) - h_a)}{g \cdot m}$$

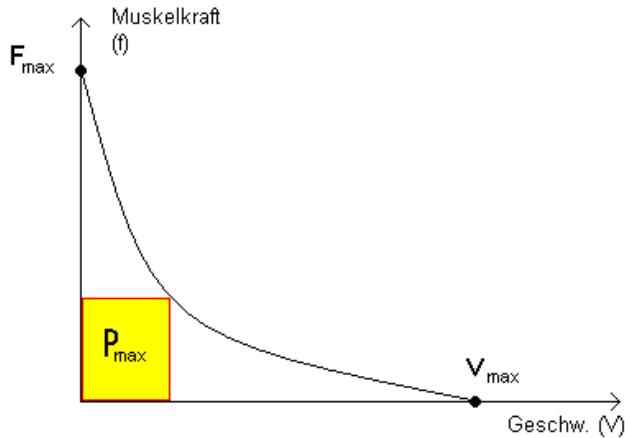
Das zweite Modell zeigt durch Einsetzen von Zahlenwerten ($F_M = 2mg_{Erde}$), dass die Sprunghöhe auf dem Mond bei gleichem Kraftaufwand zirka um das Elfache höher ist als auf der Erde.

Modell 3 Einbeziehung der Physiologie

Um das Modell realistischer zu gestalten, wollten wir auch physiologische Aspekte mit einbeziehen. Darunter fallen: der Einfluss des Kniegelenks, Ansteuerung der Muskelaktivität durch das Gehirn und die Hillsche Gleichung (Muskelkraft in Abhängigkeit von der Geschwindigkeit der Bewegung).

1. Hillsche Gleichung

Auch die Geschwindigkeit, mit der die Bewegung durchgeführt wird, nimmt großen Einfluss auf die Kraft, die der Muskel erzeugen kann. Je größer die Kontraktionsgeschwindigkeit, desto kleiner ist die Kraft, die vom Muskel erzeugt werden kann. Da die Kraft nicht unendlich sein kann, muss der Kraft-Geschwindigkeits-Graph an einem bestimmten Punkt die y-Achse schneiden. Dasselbe gilt für die Geschwindigkeit (x-Achse). Ohne diese Einschränkung würde die Funktion $1/x$ gleichen. Da der Graph $1/x$ die x- wie auch die y-Achse nicht schneidet, muss die Funktion durch Parameter verändert werden, sodass Kraft und Geschwindigkeit eingeschränkt werden. Daraus ergibt sich folgendes:



Die Hillsche Gleichung ist eine bereits in der Literatur vorhandene, von uns übernommene Gleichung, die folgendermaßen aussieht:

$$f = \frac{C}{v + B} - A$$

f = Kraft im Muskel

v = Kontraktionsgeschwindigkeit

A = Reibungseffekte

B = Reaktionsgeschwindigkeit

C = chem. Leistung

Da gilt: „Leistung = Kraft mal Geschwindigkeit“, multiplizieren wir die Gleichung mit v , um anschließend die optimale Leistung zu errechnen

$$P = f \cdot v = \left(\frac{C}{v + B} - A \right) \cdot v$$

$$P'(v) = \frac{-(A \cdot v^2 + 2 \cdot A \cdot B \cdot v + (A \cdot B - C) \cdot B)}{(v + B)^2}$$

Durch Nullsetzen dieser Gleichung erhält man die Geschwindigkeit, bei der die maximale Leistung auftritt:

$$v_{opt} = \sqrt{\frac{B \cdot C}{A}} - B$$

Diese Gleichung beschreibt wie die Kraft im Muskel wirkt, allerdings sagt sie noch nichts darüber aus, wie der Muskel angesteuert wird. (Arbeitet der Muskel überhaupt mit voller Kraft?)

2. Ansteuerung

Ein zusätzliches Problem für die Generalisierung der Sprungkraft stellt die unterschiedlich benötigte Zeit für die Ansteuerung der Muskeln dar. Unter Ansteuerung versteht man die Ausbreitung der Aktivität der Muskelfasern. Je weniger Muskelfasern aktiv sind, desto mehr

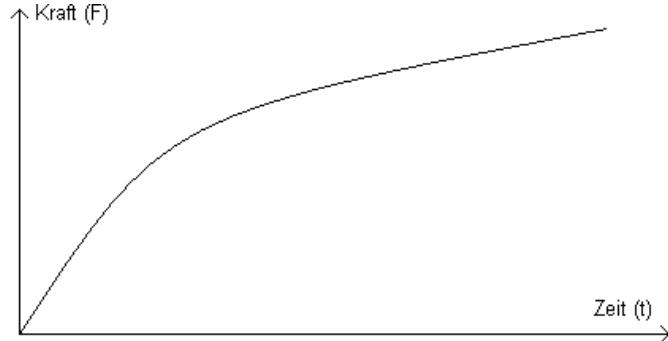
werden aktiviert, wenn man den Muskel maximal anspannen möchte. Nimmt die Anzahl an aktiven Fasern zu, so sinkt die Rate der neuen Kontraktionen.

$$n'(t) = S(n_{\max} - n(t))$$

$n(t)$ = Anzahl der aktiven motorischen Einheiten

n_{\max} = maximale Anzahl der gleichzeitig aktivierbaren motorischen Einheiten

Daraus ergibt sich folgender Graph:



Durch Probieren und Verschieben bzw. Spiegeln der Funktion

$$y = e^x$$

erhielten wir die Funktion:

$$y_2 = -e^{-Sx} + 1.$$

Die Lösung der Differentialgleichung ist

$$n(t) = n_{\max} \cdot (1 - e^{-St}).$$

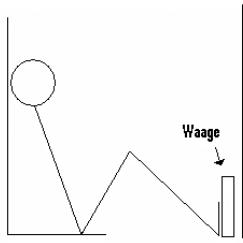
Die Einschaltfunktion hat Werte zwischen 0 und 1 und ist gegeben durch

$$E(t) = (1 - e^{-St}).$$

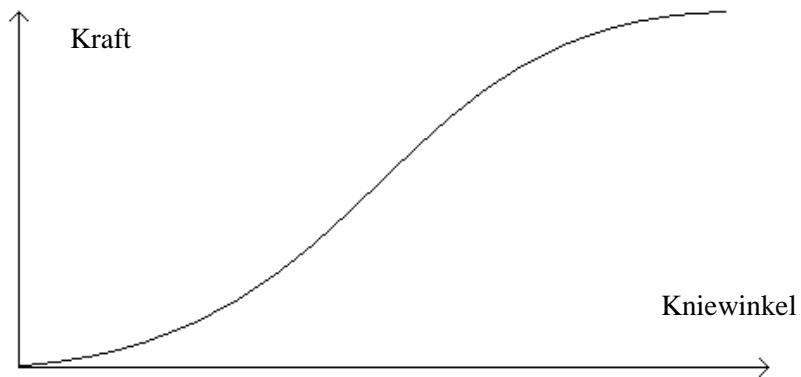
Die tatsächlich wirkende Muskelkraft ergibt sich aus der Einschaltfunktion multipliziert mit der theoretisch möglichen Muskelkraft.

3. Einfluss des Kniewinkels

Nun wollten wir erfahren, welchen Einfluss die Tiefe der Hocke bzw. der Winkel des Knies auf die Kraftübertragung zum Boden hat. Dazu führten wir folgendes Experiment durch:



Wir versuchten mit Hilfe einer Badezimmerwaage eine Beinpresse nachzustellen. Wir lehnten diese an die Wand, setzten uns in Abständen von 40/ 50/ 60 /70 cm dazu, so dass der Kniewinkel sich von Versuch zu Versuch vergrößerte, und maßen die größtmögliche aufbringbare Kraft der Versuchsperson. Die Kraft konnte man in kg von der Waage ablesen. Die Ergebnisse, die wir erhielten, trugen wir in eine Tabelle ein, um sie anschließend als Graph darzustellen. Da die Messungen mit einer Badezimmerwaage nicht sehr genau sind, haben wir zusätzlich bereits bekannte Messergebnisse aus der Literatur miteinbezogen. Der Graph sieht wie folgt aus:



Diese Grafik ist absichtlich nicht skaliert, da die Daten von Mensch zu Mensch variieren in Abhängigkeit von Körpergröße, Muskelkraft und Relationen der verschiedenen Körperteile. Im Allgemeinen sind die Kraftverhältnisse auf diese Grundstruktur zurückzuführen. Wir sind durch theoretische Überlegungen und Versuche auf die mögliche Funktion, die dieses Verhältnis für unser Modell ausreichend beschreibt, gekommen:

$$y = 0,05 \cdot x^2$$

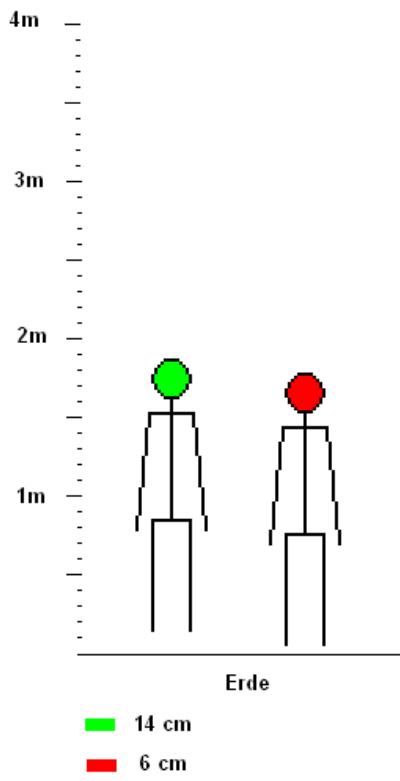
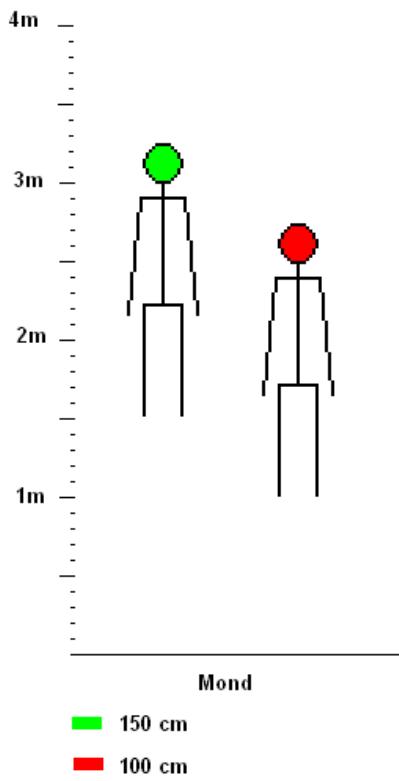
Diese drei Teilmodelle und Newtons Bewegungsgleichung setzten wir zu einer Differentialgleichung zusammen.

$$\begin{aligned} m \cdot a &= \sum F \\ E(t) \cdot f(v) \cdot G(z), \quad F &= G(z) \cdot f \\ m \cdot a &= \left(\frac{C}{v + B} - A \right) \cdot (1 - e^{-st}) \cdot 0,05 \cdot z^2 - m \cdot g \end{aligned}$$

Durch Simulieren mit verschiedenen Zahlenwerten für die maximal mögliche Kontraktionsgeschwindigkeit, Parameter der Schaltfunktion sowie der Gravitation kamen wir zu dem Schluss, dass die Sprunghöhe auf dem Mond nicht nur von der niedrigeren Gravitation, sondern auch von den verschiedenen motorischen Eigenschaften abhängt.

Es kann vorkommen, dass eine Person mit für einen Sprung auf der Erde schlechten motorischen Eigenschaften bei einem Sprung auf dem Mond eine größere prozentuelle Sprunghöhenhöhung als eine Person mit guten motorischen Eigenschaften hat.

Weiters zeigt das Modell, dass eine Person, deren Masse so stark erhöht wird, dass das Gewicht auf dem Mond dem auf der Erde ohne Zusatzmasse entspricht, auf dem Mond höher springt als auf der Erde.

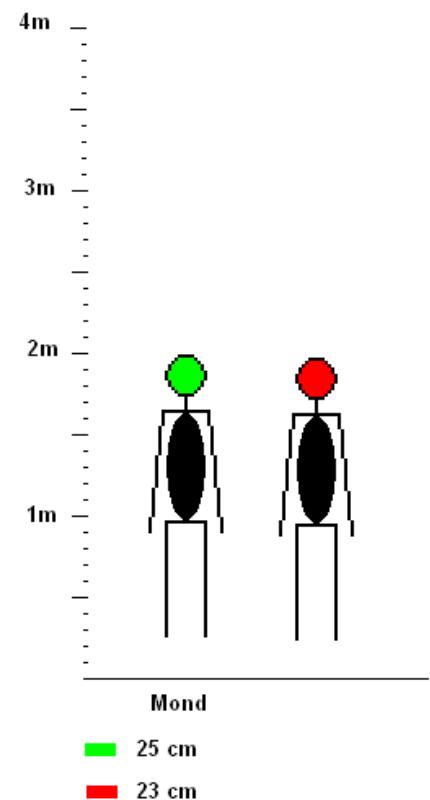


Diese Grafik veranschaulicht die prozentuelle Steigerung der Sprunghöhe. Der linke Mensch hat gute motorische Eigenschaften, der rechte ist mit schlechten Werten ausgestattet. Auf der Erde beträgt das Verhältnis der erreichten Höhen **14:6**

Auf dem Mond erhält man durch kürzen das Verhältnis 3:2, was **9:6** entspricht.

Daraus kann man schön ablesen, dass die Person mit schlechten Eigenschaften auf dem Mond sozusagen Höhe aufholt.

Hier sind noch einmal dieselben zwei Personen. Beiden Personen werden Gewichte angehängt, sodass ihre Masse versechsfacht wird. Da am Mond nur ein Sechstel der Gravitation herrscht, müssen beide Personen das gleiche Gewicht wie ohne Zusatzgewicht auf der Erde beschleunigen. Interessanterweise ist kaum ein Unterschied zu erkennen. (Vergleiche obige Grafik: Eine Person springt eineinhalb Mal so hoch) Durch die erhöhte Masse wird die Absprungphase stark verlängert. Dadurch wirken sich verschiedene physiologische Eigenschaften kaum aus.



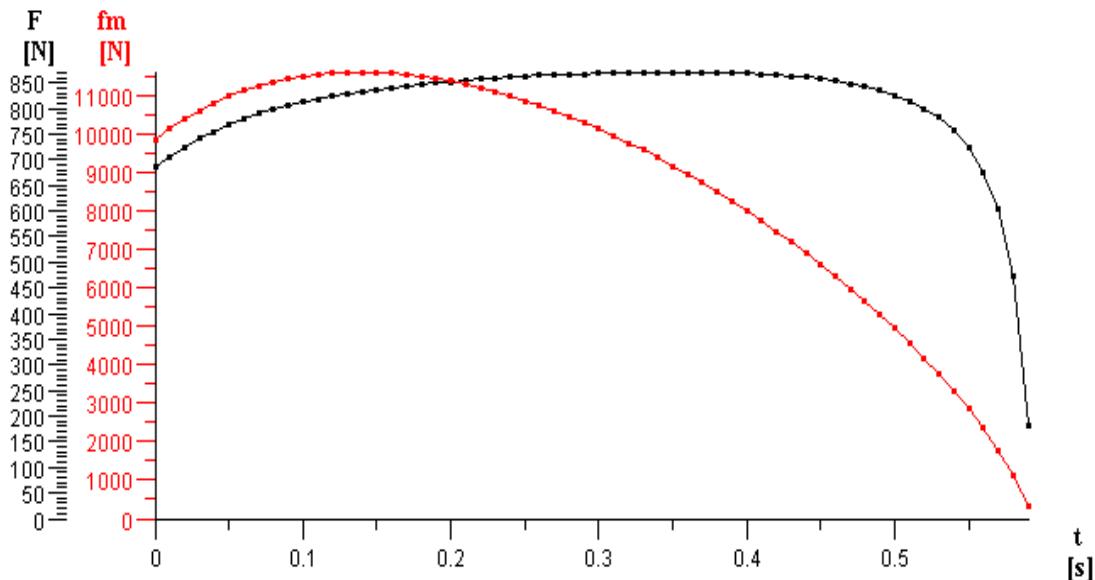
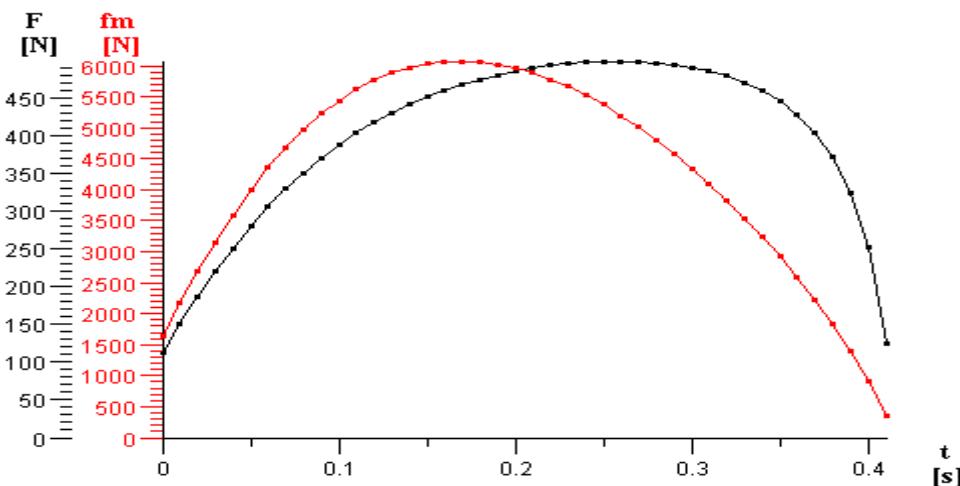


Abb.: Sprung auf der Erde (oben) und Sprung auf dem Mond (unten) einer Person mit durchschnittlichen motorischen Eigenschaften. Rot eingezeichnet die Kraft, die im Muskel wirkt (f), und schwarz die Kraft, die wirklich auf den Boden übertragen wird (F).

Auf dem Mond sind die Kurven am Anfang niedriger, und beginnen dafür schneller zu steigen. Das heißt, die tatsächliche Absprungkraft wird auf dem Mond langsamer übertragen. Im Allgemeinen wirken auf dem Mond niedrigere Kräfte im Muskel sowie auf den Boden. Außerdem dauert die gesamte Sprungphase kürzer.



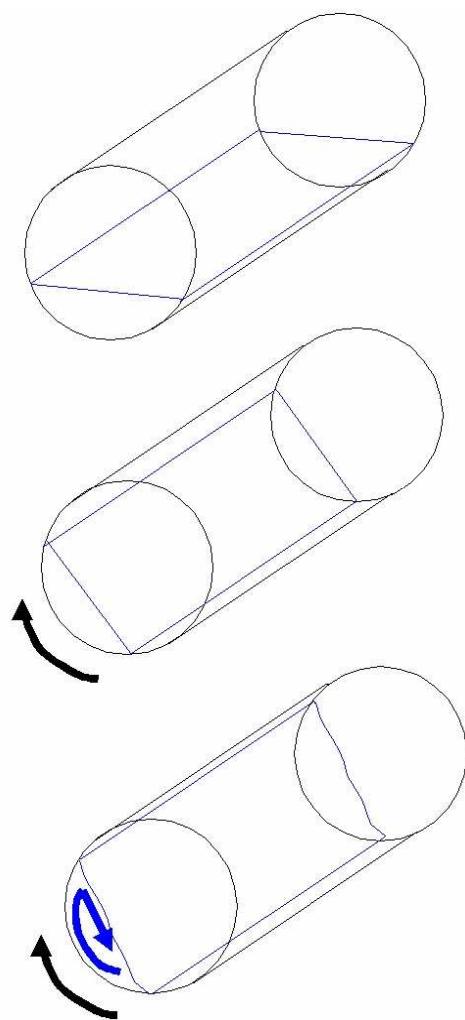
Schlussbetrachtung

Die Sprunghöhe auf dem Mond realistisch zu modellieren ist mehr als nur die einfache Berücksichtigung der Gravitation. Zwar ist die Flugphase leicht zu simulieren, da sie eine gleichmäßig beschleunigte Bewegung bei weniger Anziehung ist. Allerdings nimmt in dieser Phase der Mensch keinen Einfluss mehr auf den Verlauf des Sprunges. Betrachtet man zusätzlich die Absprungphase, erhöht sich bei gleichem Kraftaufwand die Höhe auf das 11fache im

Vergleich zur Erde. Außerdem gibt es etliche weiter Faktoren, die auf ein möglichst realistisches Modell Einfluss nehmen. Verschiedene Muskeleigenschaften und Beugungsgrad des Knies sind zwei Aspekte, die in unser Modell einbezogen wurden. Wir kamen zu dem Schluss, dass es nicht möglich ist, einfach anzunehmen, jeder Mensch springe auf dem Mond um denselben Faktor höher. Alleine bei der Betrachtung eines Sprunges nur aus dem Knie heraus (Sprunggelenk und Schwungholen mit den Armen wurden nicht weiter analysiert) sind bemerkenswerte Differenzen in der Sprunghöhe bei verschiedenen motorischen Eigenschaften aufgetreten.

Projekt: Mechanik

Bewegung von Schüttgut in einer rotierenden Trommel



***Christopher ALBERT, Angelika HAINDL, Matteo LUISI,
Patrick SCHLÖGL, Stefan ZEROBIN***

Betreuer: Wolfgang Desch

Die Problemstellung

Stellen Sie sich einen Behälter in Form einer waagrecht liegenden Röhre vor. Darin befindet sich Schüttgut (zum Beispiel Reis, Mehl, Murmeln...), sodass der Behälter etwa zum Drittel seines Volumens gefüllt ist. Solange der Behälter still steht, bildet das Schüttgut darin eine waagrechte Oberfläche. Nun beginnt sich die Röhre langsam um ihre Längsachse zu drehen. Das Schüttgut bewegt sich zunächst mit, und die Oberfläche wird daher geneigt. Wenn die Neigung zu steil wird, beginnt das Schüttgut die Oberfläche entlang abzurutschen. Die Röhre dreht sich gleichmäßig weiter, und im Schüttgut stellt sich folgende Bewegung ein: An der Röhrenwand wird es mitgenommen und nach oben getragen. Entlang der schrägen Oberfläche innerhalb der Röhre rutscht es wieder nach unten.

Aufgabenstellung ist, die Bewegung des Schüttguts möglichst gut zu beschreiben. Beispielsweise ergeben sich folgende Fragestellungen: Wie steil ist die Oberfläche? Wie schnell rutscht der Sand die Oberfläche entlang ab? Von welchen Eigenschaften des Schüttguts hängt der Winkel ab? Besteht ein Unterschied, ob Glasmurmeln oder Mehl in der Röhre sind? Welche Rolle spielt die Drehgeschwindigkeit des Behälters?

Aufgrund der Komplexität der Problemstellung konnten wir lediglich vereinfachte Darstellungen des Funktionszusammenhangs modellieren.

Was wurde beobachtet?

Beobachtung der Drehung von REIS im Glas:

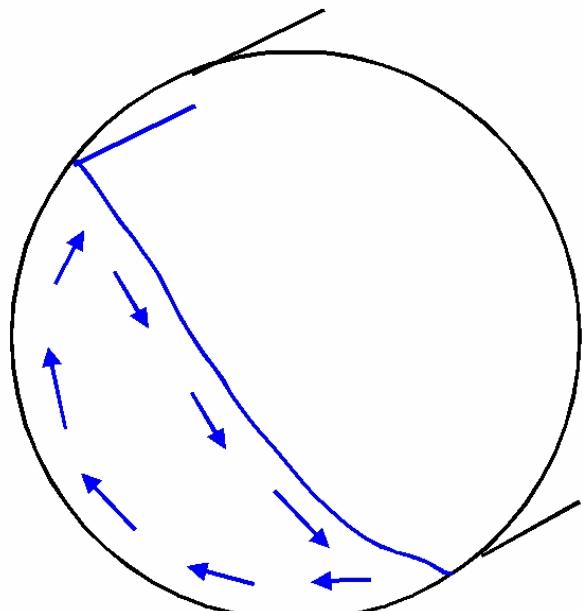
Die Fallgeschwindigkeit der Körner ist durch die Schwerkraft immer gleich.

Aufwärtsbewegung: Der Reis wird bis zu einem gewissen Punkt durch die Reibung mitgenommen.

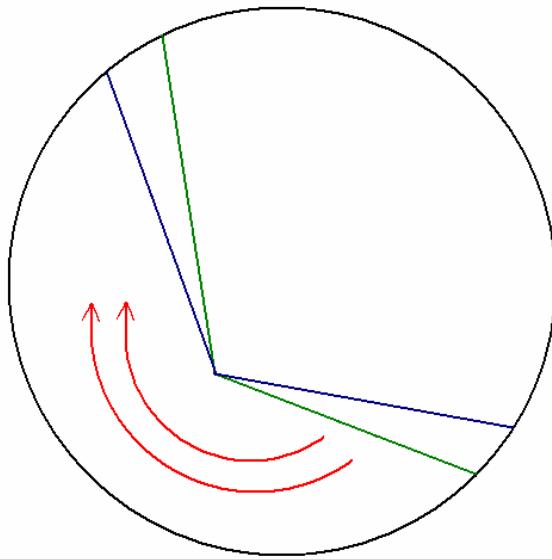
Abwärtsbewegung: Der Reis rinnt über die Schicht des sich aufwärts bewegenden Reises abwärts.

Je schneller sich das Glas dreht, desto breiter wird die Reisschicht, welche sich nach unten bewegt.

Der Winkel, den die Reisschicht auf den Weg nach unten festlegt, bleibt bei jeder Drehgeschwindigkeit des Glases gleich.



Beobachtung der Drehung von MEHL im Glas:



Aufwärtsbewegung: Das Mehl bewegt sich durch die Reibung am Rand des Glases aufwärts.

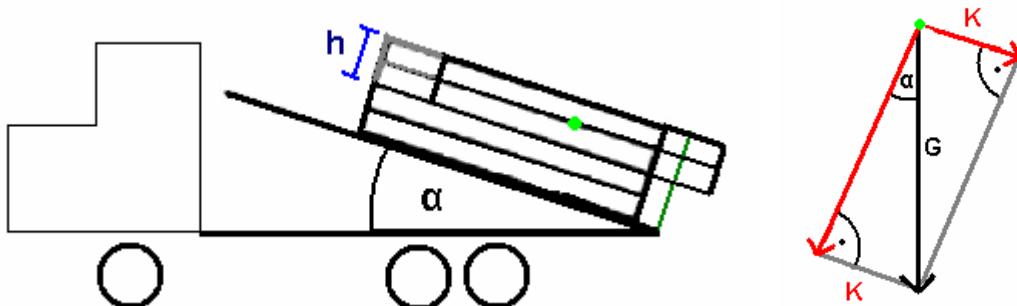
Abwärtsbewegung: Ab einem bestimmten Winkel bricht eine obere Mehlschicht, ohne dabei hinunterzurutschen. Bei weiterem Drehen des Glases tritt die Abwärtsbewegung ein. Diese ist ruckartig - das Mehl löst sich schichtweise von der Glasinnenseite und der darunter liegenden Mehlschicht, da die Reibung unter den einzelnen Mehlkörner diese zusammenhält. Bei langsamer Drehung des Glases kann es sein, dass die Reibung an der Glaswand nachlässt und das Mehl als ganzer Block nach unten gleitet.

„Ruhephase“:

Zwischen Auf- und Abwärtsbewegung gibt es eine Ruhephase, in der das Mehl in der gleichen Position kurzzeitig unverändert liegen bleibt, bis die nächste Schicht folgt. Wir sehen nun ganz deutlich, dass die „ruhende Schicht“ einen anderen Winkel einschließt, als die nachfolgende brechende Schicht.

1. Idee: Modelle herabrutschender Ziegelsteine auf einer gekippten Ladefläche

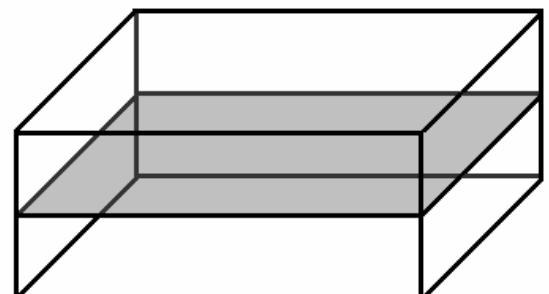
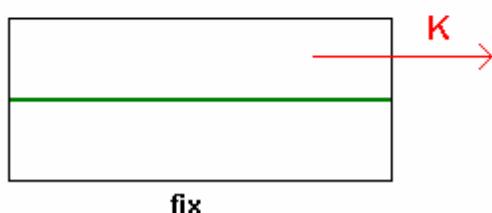
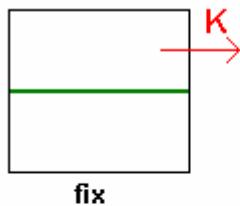
Modell 1: Modell eines Kipplasters mit einem Ziegelsteinblock



Parameter mit Einfluss auf das Modell:

G... Schwerkraft
 Druck auf Ladefläche
 Neigungswinkel
 Anordnung der Ziegel
 Reibung zw. Ziegeln
 Größe
 Masse
 Reibungsstärken bei Druck der Grenzflächen aufeinander

Waagrecht liegende Ziegel (unterer fix) - welche Kraft K ist nötig, um den oberen zu bewegen?



K ... Kraft, mit der man die Reibung überwindet
 A ... Kontaktfläche der beiden Steine
 c ... Reibungskonstante (enthält die Eigenschaften des Materials)

$K = c \cdot A$ (modelliert nicht: bei größerem Druck wird die Reibung stärker)

$\frac{K}{A}$... Spannung, Druck

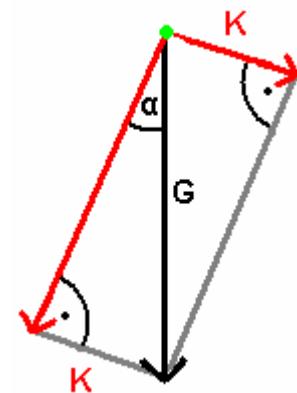
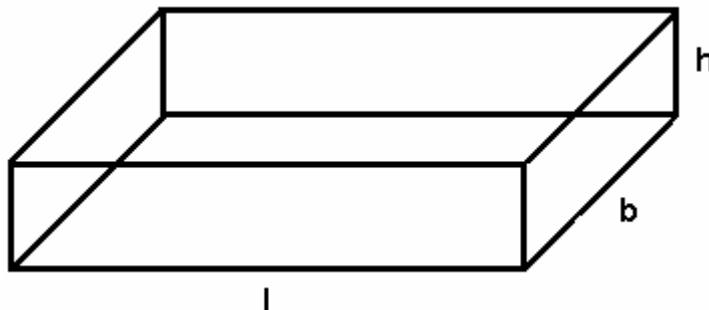
Zerlegung der Schwerkraft in zwei Komponenten (1. Druck auf Ladefläche, 2. Verschiebung der Ziegel Richtung Boden (bei gewisser Neigung)

→ Möglichkeit, K zu errechnen: $\sin \alpha = \frac{K}{G}$

$$G = l \cdot b \cdot h \cdot \rho$$

$$K = \rho \cdot l \cdot b \cdot h \cdot \sin \alpha$$

$$A = l \cdot b$$



$$\rho \cdot l \cdot b \cdot h \cdot \sin \alpha = c \cdot l \cdot b \quad \rightarrow \quad h \cdot \sin \alpha = \frac{c}{\rho}$$

Folgerung: Beim langsamen Anheben (geringe Neigung) rutscht der gesamte Block (jedoch zunächst ohne die Schicht, die direkt auf der Ladefläche aufliegt, da die Reibung hier zu stark ist), bei großem Winkel zuerst die obere(n) Schicht(en). Bei kleinerem Winkel können auch kleinere Schichten abheben.

Modell 2: Einbeziehung des Drucks auf die Ziegel

Je schwerer die Ziegel aufeinander drücken, desto größer die Haftreibung:

$$K = c \cdot A \cdot P$$

P ... Druck

K_1 ... Kraft, die dieser Druck auf die Ziegel ausübt

c ... Reibungskonstante (enthält die Eigenschaften des Materials)

$$P = \frac{K_1}{A} \quad \rightarrow \quad K_1 = P \cdot A$$

$$K = G \cdot \sin \alpha$$

$$G \cdot \sin \alpha = c \cdot A \cdot P \quad \rightarrow \quad G \cdot \sin \alpha = c \cdot K_1$$

$$\cos \alpha = \frac{K_1}{G}$$

$$\sin \alpha = c \cdot \cos \alpha \quad \rightarrow \quad c = \tan \alpha$$

Mit diesem Modell wird gezeigt, dass der Winkel allein von der Reibungskonstante abhängig ist und nicht von der Höhe des Stapels.

Versuch 1: Um das Bessere der beiden Modelle herauszufinden, führten wir einen einfachen Versuch durch. Wir platzierten kleine Schokoladentafeln („Ziegelsteine“) auf einem Lineal („Ladefläche“), welches wir dann vorsichtig anhoben, bis die Tafeln stürzten, um mit einem Winkelmaß α herauszufinden.

Es zeigte sich, dass der Winkel tatsächlich relativ unabhängig von der Höhe des Stapels ist. Um dieses Resultat zu falsifizieren, führten wir den gleichen Versuch mit einer höheren Reibung zwischen den Schokoladentafeln durch, indem wir sie in Taschentücher wickelten. Damit die Reibung der Ladefläche nicht geringer ist als die zwischen den Schichten, legten wir ein Schleifpapier darauf.

Hier merkten wir einen größeren Unterschied; α schwankte je nach Höhe von 35° bis 45° (zum Vergleich bei geringerer Reibung: immer $\sim 20^\circ$).

Modell 3: ein Kompromiss zwischen Modellen 1 und 2

Zur Verbesserung des 2. Modells fügen wir hier zum Druck noch eine Konstante d hinzu.

$$K = c \cdot A \cdot (P + d)$$

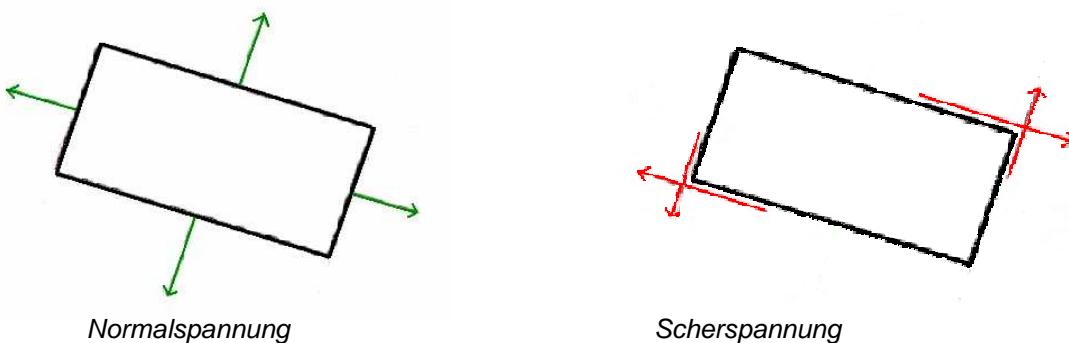
$$G \cdot \sin \alpha = c \cdot l \cdot b \cdot \left(\left(\frac{K_1}{A} \right) + d \right)$$

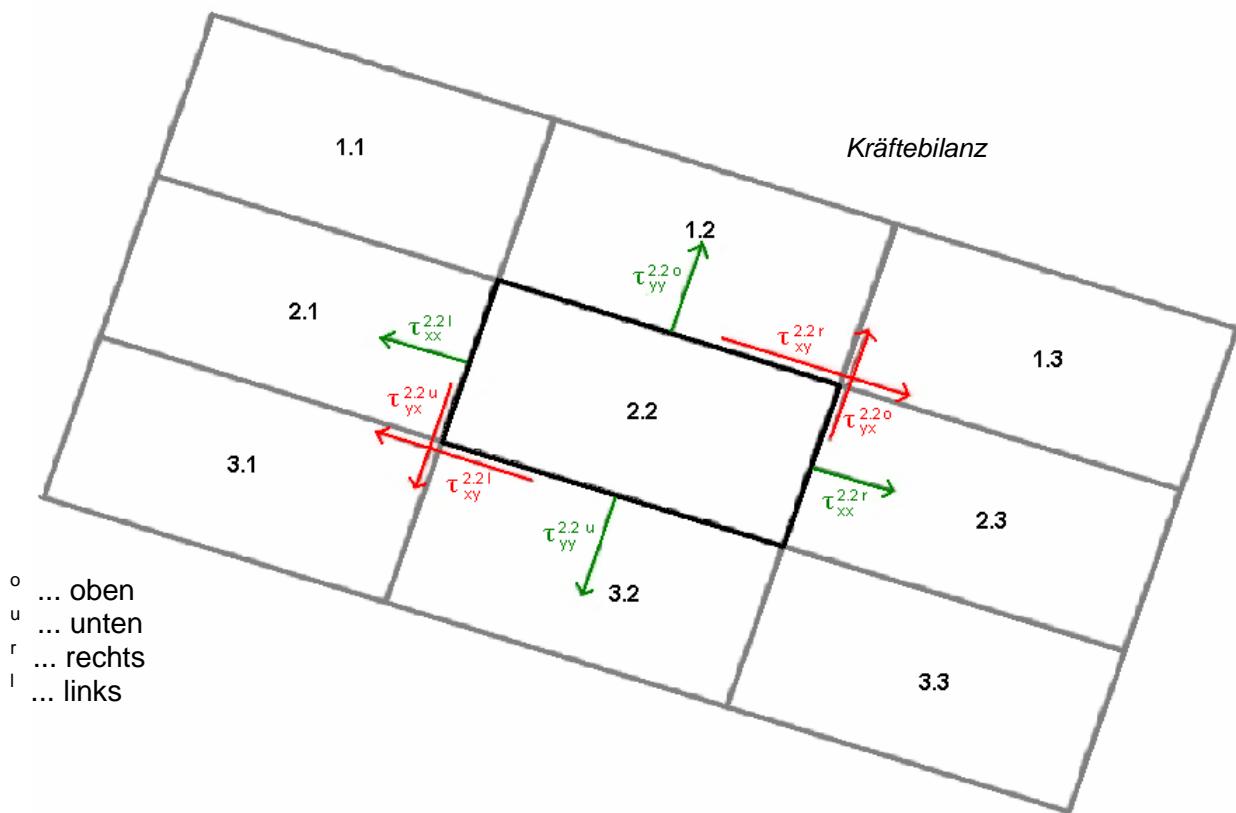
$$\rightarrow c = \frac{G \cdot \sin \alpha}{K_1 + d \cdot l \cdot b}$$

Modell 4: Kräftebilanz mehrerer Ziegelsteine

Wir betrachten ein Modell mit n Ziegelsteinen, welches sich in Ruhelage befindet.

Es herrschen zwei Arten von Spannungen (betrifft einen Ziegelstein in Innenlage), welche berücksichtigt werden müssen: Normalspannung und Scherspannung.





In y-Richtung ziehen:

$$\tau_{yy}^o \cdot 1 \cdot b - \tau_{yy}^u \cdot 1 \cdot b + \tau_{xy}^r \cdot b \cdot h - \tau_{xy}^l \cdot b \cdot h - \rho \cdot 1 \cdot b \cdot h \cdot \cos \alpha = 0 \text{ (weil in Ruhelage)}$$

In x-Richtung ziehen:

$$\tau_{xx}^r \cdot b \cdot h - \tau_{xx}^l \cdot b \cdot h + \tau_{xy}^o \cdot 1 \cdot b - \tau_{xy}^u \cdot 1 \cdot b - \rho \cdot 1 \cdot b \cdot h \cdot \sin \alpha = 0$$

Im Uhrzeigersinn dreht:

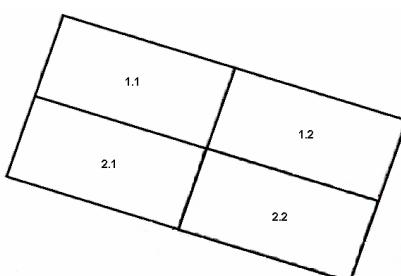
$$\tau_{xy}^r \cdot 1 \cdot b \cdot \frac{h}{2} + \tau_{xy}^l \cdot 1 \cdot b \cdot \frac{h}{2} - \tau_{yx}^o \cdot h \cdot b \cdot \frac{1}{2} - \tau_{yx}^u \cdot h \cdot b \cdot \frac{1}{2} = 0$$

Haben wir 4 Ziegelsteine, können wir folgende Spannungen voraussagen:

$$\tau_{xx}^{1.1.r} = \tau_{xx}^{1.2.l}$$

$$\tau_{xx}^{1.1.l} = \tau_{xx}^{1.2.r} = 0$$

$$\tau_{yx}^{1.2.u} = \tau_{yx}^{2.2.u}$$



Wir versuchen nun, die Formel für 1 Ziegel auf der Ladefläche mit Hilfe dieser Gleichungen herzuleiten:

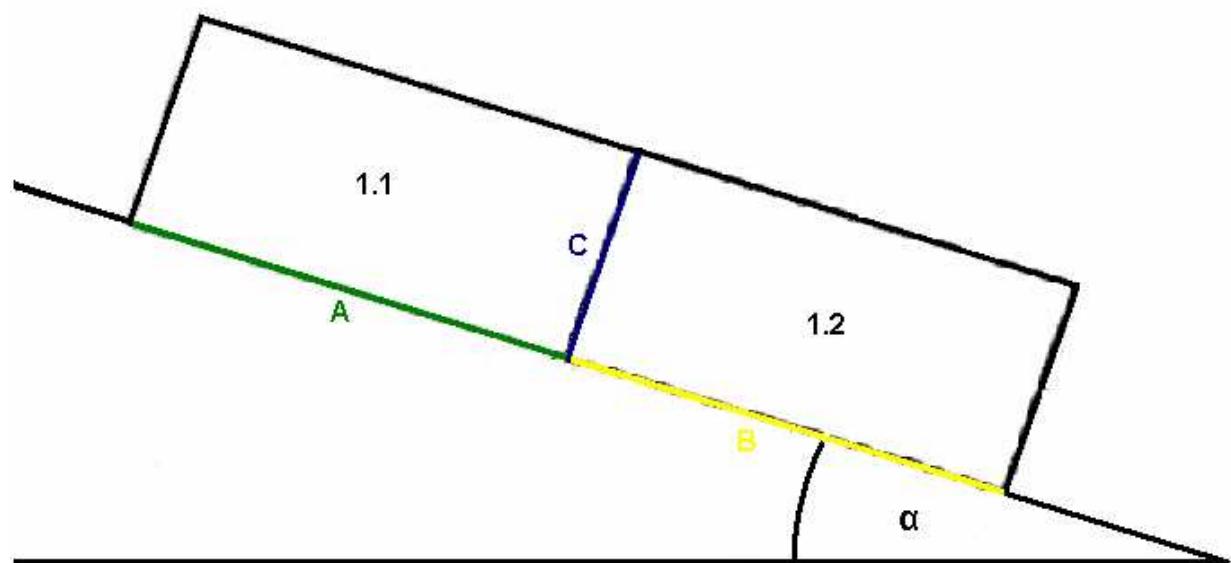
τ_{xx}^l		$-\tau_{xx}^l \cdot h$		$= 0$
τ_{xx}^r		$+\tau_{xx}^r \cdot h$		$= 0$
τ_{yy}^o	$+\tau_{yy}^o \cdot l$			$= 0$
τ_{yy}^u	$-\tau_{yy}^u \cdot l$			$= ?$
τ_{xy}^l	$-\tau_{xy}^l \cdot h$		$+\tau_{xy}^l$	$= 0$
τ_{xy}^r	$+\tau_{xy}^r \cdot h$		$+\tau_{xy}^r$	$= 0$
τ_{yx}^o		$+\tau_{yx}^o \cdot l$	$-\tau_{yx}^o$	$= 0$
τ_{yx}^u		$-\tau_{yx}^u \cdot l$	$-\tau_{yx}^u$	$= ?$
	$-\rho \cdot l \cdot b \cdot h \cdot \cos \alpha$	$+\rho \cdot l \cdot b \cdot h \cdot \sin \alpha$		
	$= 0$	$= 0$		$= 0$

Die Gleichung für die Bilanz der Drehmomente führt mit den anderen Gleichungen zum Widerspruch! Interpretation: Die Ladefläche oder die einzelnen Oberflächen der Ziegel

können auch Drehmomente austauschen! Dieser Austausch der Drehmomente wurde in der Bilanz nicht einbezogen.

Modell 5:

Auf einer gekippten Ladefläche liegen zwei Ziegelsteine, welche sich in Ruhelage befinden. Wir wollen die fehlenden Spannungen berechnen.



$$-\tau_{yy}^A \cdot l + \tau_{xy}^C \cdot h = l \cdot h \cdot r \cdot \cos \alpha$$

$$-\tau_{yx}^A \cdot l + \tau_{xx}^C \cdot h = -l \cdot h \cdot r \cdot \sin \alpha$$

$$-\tau_{yy}^B \cdot l - \tau_{xy}^C \cdot h = l \cdot h \cdot r \cdot \cos \alpha$$

$$-\tau_{yx}^B \cdot l - \tau_{xx}^C \cdot h = -l \cdot h \cdot r \cdot \sin \alpha$$

Nach dem Zusammenfassen erhalten wir einfache lineare Gleichungen, die durch die statische Situation jedoch nicht ausgerechnet werden können, da wir nicht die genaue Kräfteverteilung auf A, B, und C kennen.

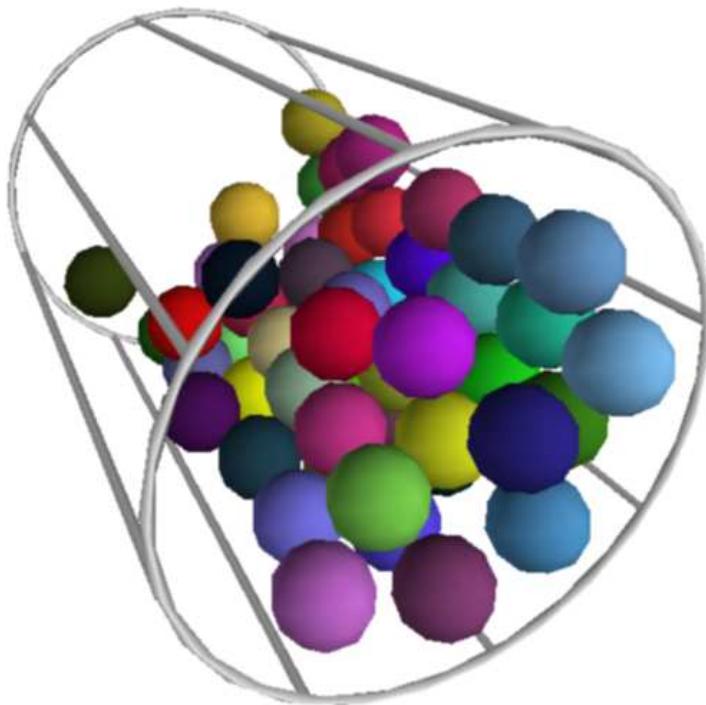
Ein weiteres, alltägliches Beispiel dafür wäre ein Stuhl mit vier Füßen – es sind entweder drei beliebige Füße voll belastet, oder das Gewicht ist auf alle vier aufgeteilt (dies kann natürlich auch absichtlich, etwa durch Gumminoppen an den Füßen, erreicht werden).

2. Idee: Computersimulation der Kugelbewegung in einer drehenden Trommel

Jokerballs:

Ein Programm zur Simulation der Bewegung von Glaskugeln in einem rotierenden Zylinder mit rauer Oberfläche

von Christopher Albert



Modell:

Die Grundlage des Modells bilden das Impulserhaltungsgesetz und damit elastische Stöße. Jede Kugel hat eine Geschwindigkeit v und eine Masse m . Stoßen zwei Kugeln aneinander, so tauschen sie Impuls aus und fliegen auseinander. Selbiges geschieht bei der Kollision von Kugel und Zylinder mit dem Unterschied, dass der Zylinder seine Position nicht verändert. Da Glaskugeln simuliert werden sollen, kann die Reibung zwischen den Kugeln vernachlässigt werden, sie werden jedoch am Rand des Zylinders „mitgezogen“.

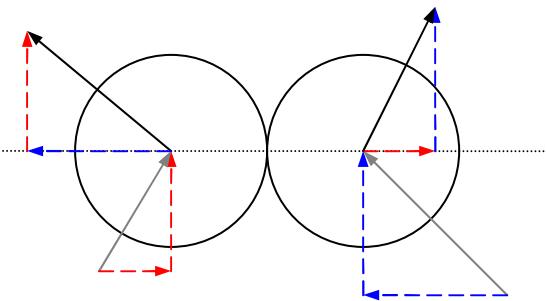
Programmkonzept:

Jokerballs wurde in der Sprache Python geschrieben, für die dreidimensionale grafische Darstellung kommt die Erweiterung VPython mit OpenGL zum Einsatz. Das Programm läuft in einer Schleife, in jedem Durchlauf wird der neue Zustand des Systems zum Zeitpunkt $t + dt$ bestimmt. Je kleiner dt gewählt wird, desto genauer und langsamer ist die Simulation.

Die Berechnung setzt sich aus folgenden Schritten zusammen:

- 1) Kollisionen zwischen je zwei Kugeln überprüfen und Impulse verändern:
Da alle Kugeln dieselbe Masse 1 besitzen, können diese in der Impulserhaltung vernachlässigt werden, die Geschwindigkeit entspricht dem Impuls einer Kugel.

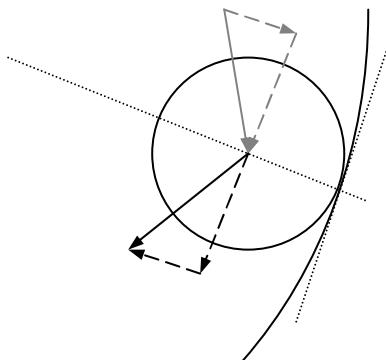
Der Stoß passiert in Richtung der Verbindung der beiden Mittelpunkte. Die Änderung der Geschwindigkeiten passiert nur in ihren radialen Komponenten, die tangentialem bleiben gleich. Bei einem um Faktor d gedämpften elastischen Stoß ohne Reibungskräfte sieht das folgendermaßen aus:



$$vr_{1,n} = d \cdot vr_{2,a} \quad vr_{1,n} = vr_{1,a}$$

$$vr_{2,n} = d \cdot vr_{1,a} \quad vr_{2,n} = vr_{2,a}$$

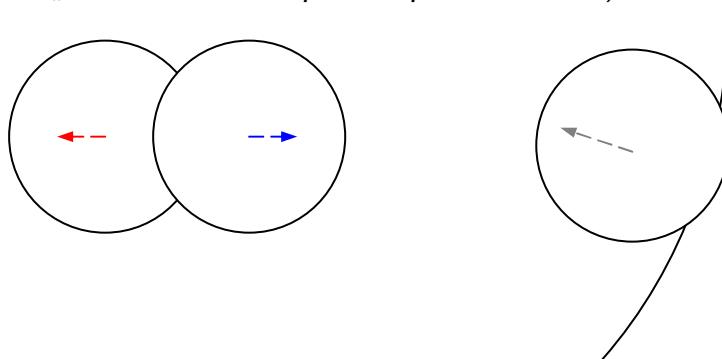
- 2) Kollisionen zwischen Kugeln und Zylinderoberfläche überprüfen und Kugeln abprallen lassen, abhängig von der Rotationsgeschwindigkeit des Zylinders die Kugeln mitbewegen.
Radiale und tangentiale Komponenten werden wieder getrennt betrachtet.



$$vr_n = -d \cdot vr_a$$

$$vt_n = c \cdot ((v - vr_a) + (v_{zyl} - vt))$$

- 3) Konfliktsituationen durch Vergabe von kleinen Impulsen lösen (Das Verhalten könnte als „Elastizität“ der Körper interpretiert werden)



Probleme:

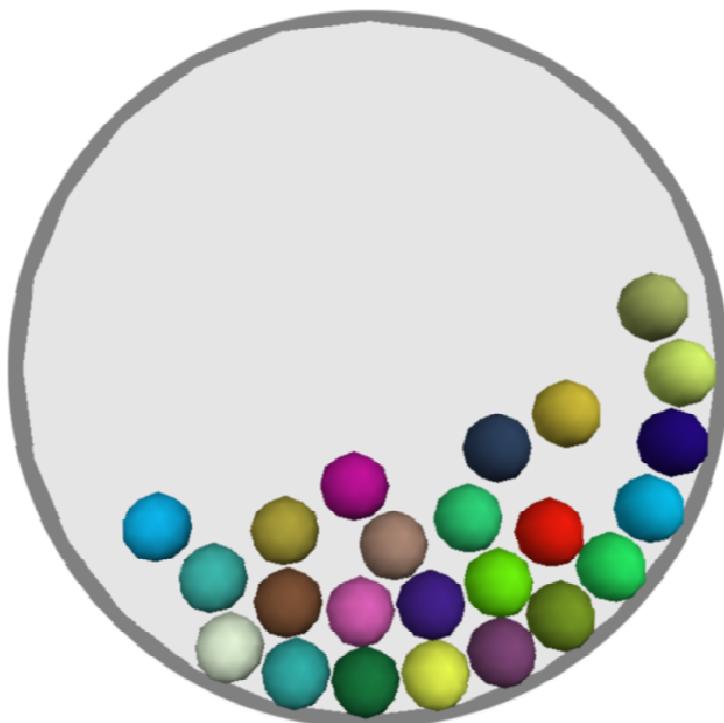
Rechenungenauigkeit:

Eine numerische Simulation geschieht in endlichen Zeitschritten um eine scheinbare Stetigkeit zu erzeugen, darum können Ungenauigkeiten auftreten, sodass beispielsweise zwei Kugeln ineinander stecken oder eine Kugel die Zylinderwand durchstößt. Dieses Problem kann durch kleinere „Tricks“ bei der Programmierung weitgehend behoben werden.

Das Programm überprüft das System laufend auf unmögliche Situationen und versucht, diese durch zusätzliche Impulse auszugleichen. Beispiel: Je weiter eine Kugel in der Wand steckt, desto fester wird sie hinausgeschleudert.

Langsame Kollisionserkennung:

In der momentanen Version des Programms werden in jedem Schritt alle möglichen Kombinationen zweier Kugeln auf ihre Entfernung zueinander und mögliche Kollisionen überprüft. Diese äußerst ineffiziente aber einfache Methode führt zu einer Rechenzeit, die mit der Anzahl der Kugeln quadratisch ansteigt, der Algorithmus ist also der Ordnung N^2 . Obwohl er für eine kleine Anzahl von Kugeln sehr schnell funktioniert, kann die Simulation ab ca. 50 Kugeln nicht mehr mit ausreichender Genauigkeit in akzeptabler Geschwindigkeit erfolgen.



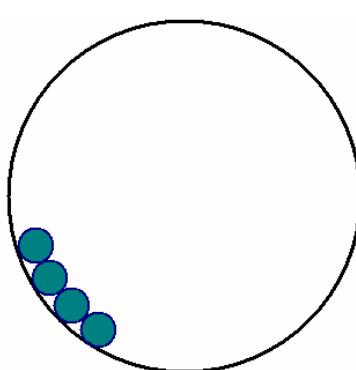
3. Idee: Modellierung von einzelnen, statischen Kugeln in der Trommel

Grundlagen

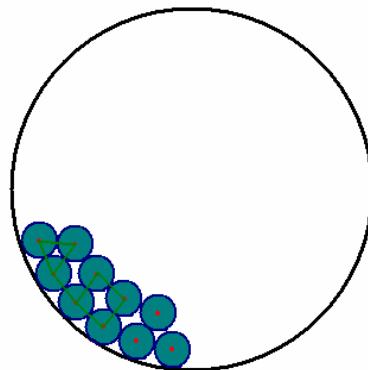
Nach dem Kennenlernen des Systems der herabrutschenden Ziegelsteine wollen wir uns nun mit unserem eigentlichen Problem beschäftigen: die Bewegung von Kugeln in einer drehenden Trommel.

Da hier die Berechnungen komplizierter werden, müssen wir uns eingehender mit Programmierung auseinandersetzen, sodass uns der Computer einen Großteil der Arbeit abnehmen kann.

Wir stellen uns vor:



einfach

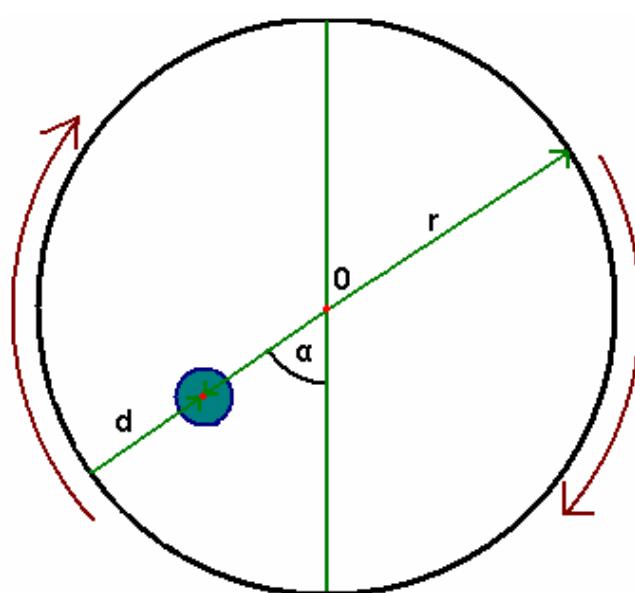


komplex

Radius aller Kugeln = $r = 1$

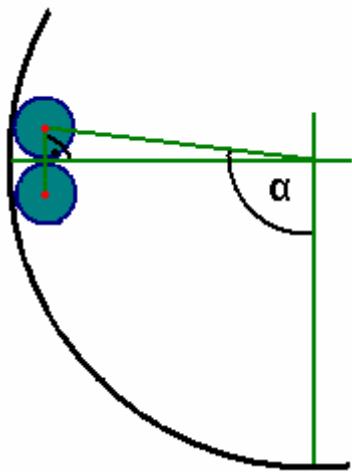
R ... Gesamtradius der Trommel

d ... Entfernung des Mittelpunktes der Kugel von der Außenfläche der Trommel



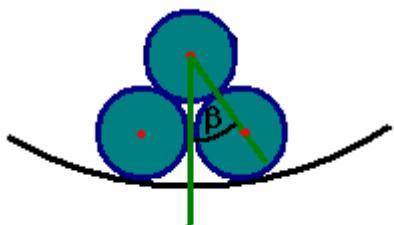
Wenn $d = 1$, dann berührt die Kugel die Wand der Trommel

Zeitpunkt, zu dem die oberste Kugel fällt:



$$\sin(\alpha - 90^\circ) = \frac{1}{R-1} \quad \alpha - 90^\circ = \arcsin\left(\frac{1}{R-1}\right)$$

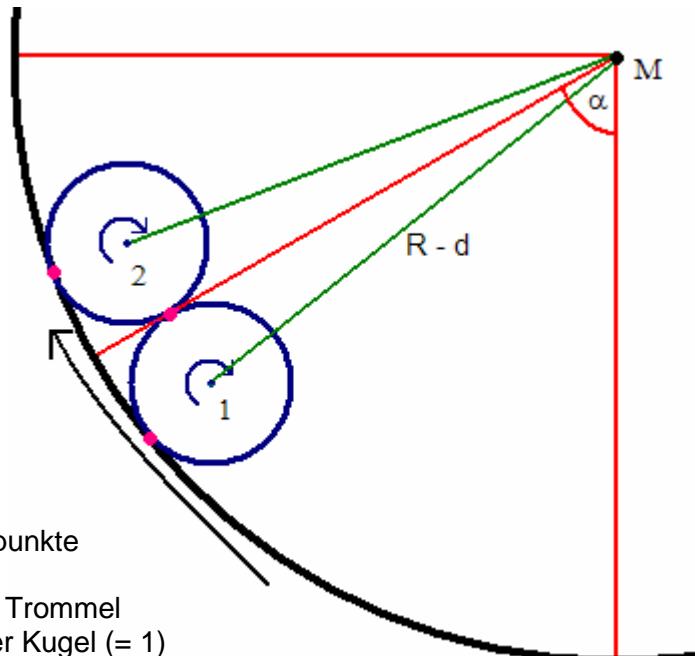
Zeitpunkt, zu dem eine beliebige Kugel fällt, die keinen Kontakt zur Wand hat:



Dreht sich die Trommel um β weiter, fällt die Kugel

Modell 6: Kräftebilanzen an wenigen Kugeln

Wir haben zwei Kugeln in der sich mit einer konstanten Geschwindigkeit bewegenden Trommel. Können sich die Kugeln auf Grund der Reibung mit der Wand in einer Schräglage an der Trommelwand halten?



- ... Reibungspunkte

R ... Radius der Trommel

r ... Radius einer Kugel (= 1)

α ... Lagewinkel der Kugel

ω_1 ... Winkelgeschwindigkeit der 1. Kugel

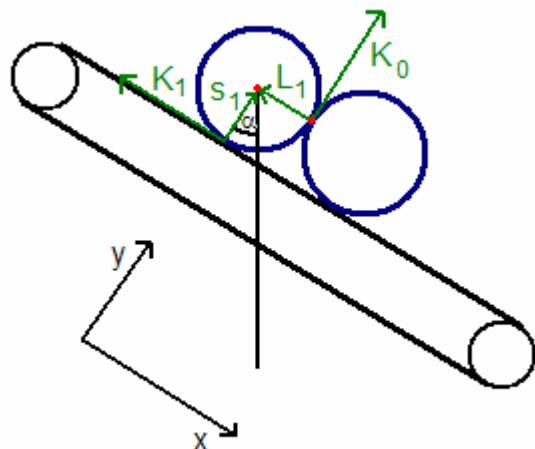
ω_2 ... Winkelgeschwindigkeit der 2. Kugel

ω_T ... Winkelgeschwindigkeit der Trommel

g ... Gewicht einer Kugel

Das Reibungsgesetz lautet: $K = c \cdot (v_1 - v_2)$

A.) Zur einfacheren Rechnung stellen wir uns die beiden Kugeln auf einem Laufband vor, sodass keine verschiedenen Winkel berücksichtigt werden müssen:



K_1, K_2 Reibungskräfte zwischen Kugeln und Trommelwand

K_0 Reibungskraft zwischen den Kugeln

S_1, S_2 Kräfte, mit denen die Trommelwand die Kugeln stützt

L Stützkraft der anderen Kugel

α Winkel des Laufbandes

v_B Geschwindigkeit des Laufbandes

Wir bekommen die Gleichungen:

1. Kugel in x-Richtung:	$-K_1 - L + g \cdot \sin \alpha = 0$
1. Kugel in y-Richtung:	$S_1 + K_0 - g \cdot \cos \alpha = 0$
2. Kugel in x-Richtung:	$-K_2 + L + g \cdot \sin \alpha = 0$
2. Kugel in y-Richtung:	$S_2 - K_0 - g \cdot \cos \alpha = 0$

Da sich die Drehmomente für jede einzelne Kugel aufheben müssen, gilt: $K_1 = K_2 = K_0$

Somit erhalten wir: $K = g \cdot \sin \alpha$

Dies setzen wir in das Reibungsgesetz $(K = c \cdot (v_1 - v_2))$ ein, um die Geschwindigkeit des Laufbandes zu erhalten.

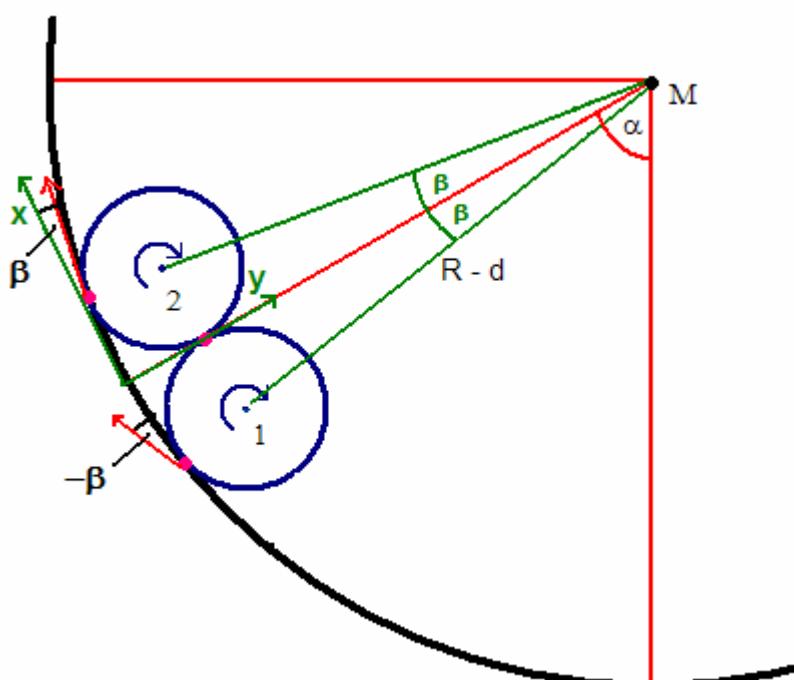
$$\begin{aligned} g \cdot \sin \alpha &= c \cdot (v_1 - v_2) & \rightarrow & g \cdot \sin \alpha = c \cdot (v_B - w_1) \\ & & & g \cdot \sin \alpha = c \cdot (v_B - w_2) \\ & & & g \cdot \sin \alpha = c \cdot (w_1 + w_2) \end{aligned}$$

$$\frac{g}{c} \cdot \sin \alpha = v_B - w_1 = v_B - w_2 = w_1 + w_2$$

Durch weitere Umwandlungen erhalten wir: $w_1 = w_2$
 $v_B = 3 \cdot w_1$

$$v_B = \left(\frac{3 \cdot g}{2 \cdot c} \right) \cdot \sin \alpha$$

B.) Nun können wir mit der Berechnung des ursprünglichen Modells beginnen.



Wir bekommen die Gleichungen:

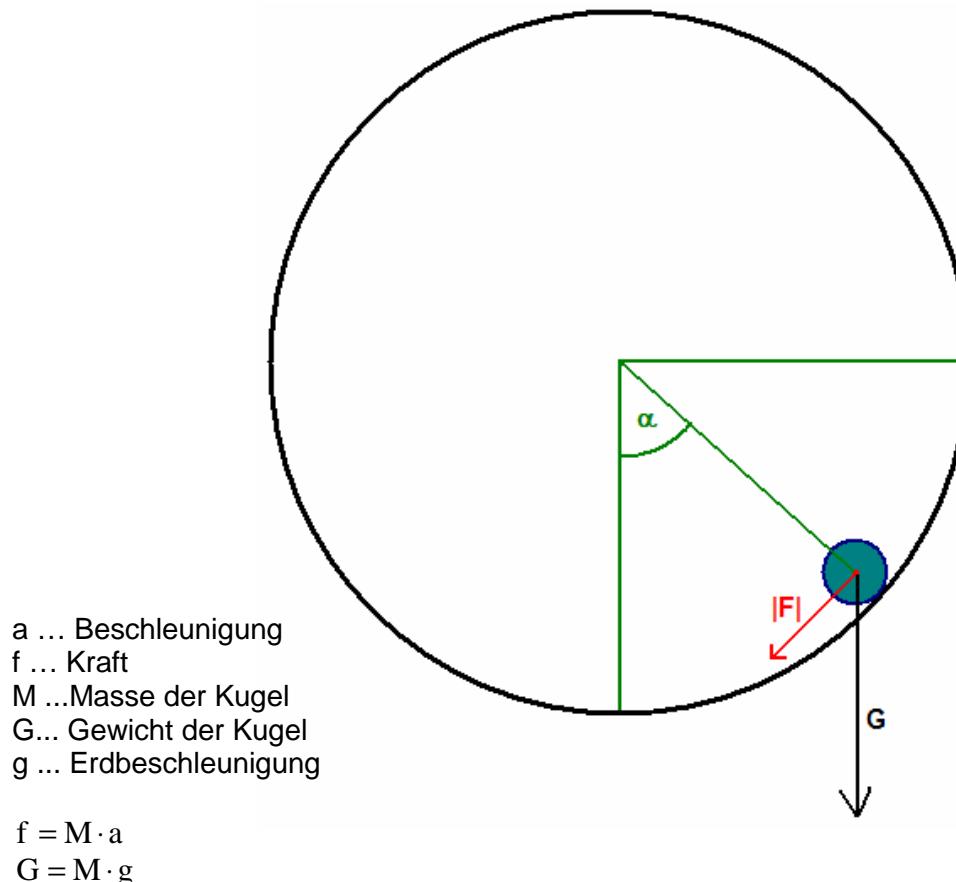
1. Kugel in x-Richtung:	$-K_1 \cdot \cos \beta - L + g \cdot \sin \alpha + S_1 \cdot \sin \beta = 0$
1. Kugel in y-Richtung:	$S_1 \cdot \cos \beta + K_0 + g \cdot \cos \alpha - K_1 \cdot \sin \beta = 0$
2. Kugel in x-Richtung:	$-K_1 \cdot \cos \beta + L + g \cdot \sin \alpha - S_2 \cdot \sin \beta = 0$
2. Kugel in y-Richtung:	$S_2 \cdot \cos \beta - K_0 + g \cdot \cos \alpha - K_1 \cdot \sin \beta = 0$

Nach zahlreichen Umformungen erhalten wir als Resultat:

$$K = \frac{g \cdot \sin \alpha \cdot \cos \beta}{\sin \beta + 1}$$

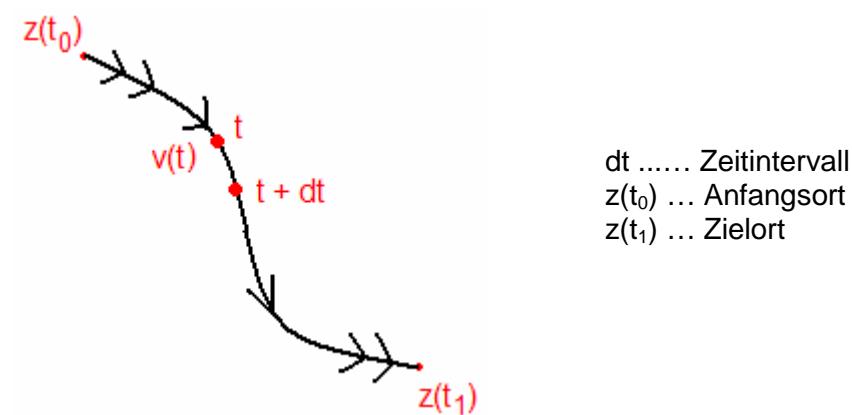
4. Idee dynamisches Modell der Bewegung einer Kugel entlang der Trommelwand ohne Reibung

Wir wollen nun eine Kugel modellieren, die sich in der Trommel hin- und herbewegt. Die Reibung lassen wir außer Acht, daher hört sie nie auf zu gleiten (ebenso vernachlässigen wir die Rollbewegung – die Kugel rutscht).



Zeichnen wir ein Zeit-Geschwindigkeit – Diagramm, ergibt sich etwa eine Sinuskurve.

A.) Zum allgemeinen Verständnis nehmen wir zuerst ein Objekt an, welches sich im Raum mit variierender Geschwindigkeit und wechselnder Richtung bewegt.



Die mittlere Geschwindigkeit zwischen den Zeitpunkten t und $t+dt$ ist:

$$z(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{dt} [x(t+dt) - x(t)] \\ \frac{1}{dt} [y(t+dt) - y(t)] \end{pmatrix}$$

Differenzieren wir $z(t)$ 2-mal, haben wir die Beschleunigung $a(t)$ $\rightarrow a(t) = z''(t)$

B.) Nun gehen wir zurück zum ursprünglichen Modell. Zunächst wollen wir die Position $z(t)$ der Kugel durch α ausdrücken.

$$z(t) = (R - r) \begin{pmatrix} \sin \alpha \\ -\cos \alpha \end{pmatrix}$$

Durch das Newton'sche Gesetz wissen wir: $f(t) = M \cdot a(t) = M \cdot z''(t)$

Wir differenzieren:

$$z'(t) = (R - r) \cdot \alpha'(t) \cdot \begin{pmatrix} \cos \alpha(t) \\ \sin \alpha(t) \end{pmatrix}$$

$$z''(t) = (R - r) \left(\alpha'^2 \cdot \begin{pmatrix} -\sin \alpha \\ \cos \alpha \end{pmatrix} + \alpha'' \cdot \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix} \right)$$

Auf die Kugel wirkt die Schwerkraft (Mg) und eine zunächst unbekannte Gegenkraft K von der Wand, welche die radiale Komponente der Schwerkraft und die Fliehkraft aufhebt:

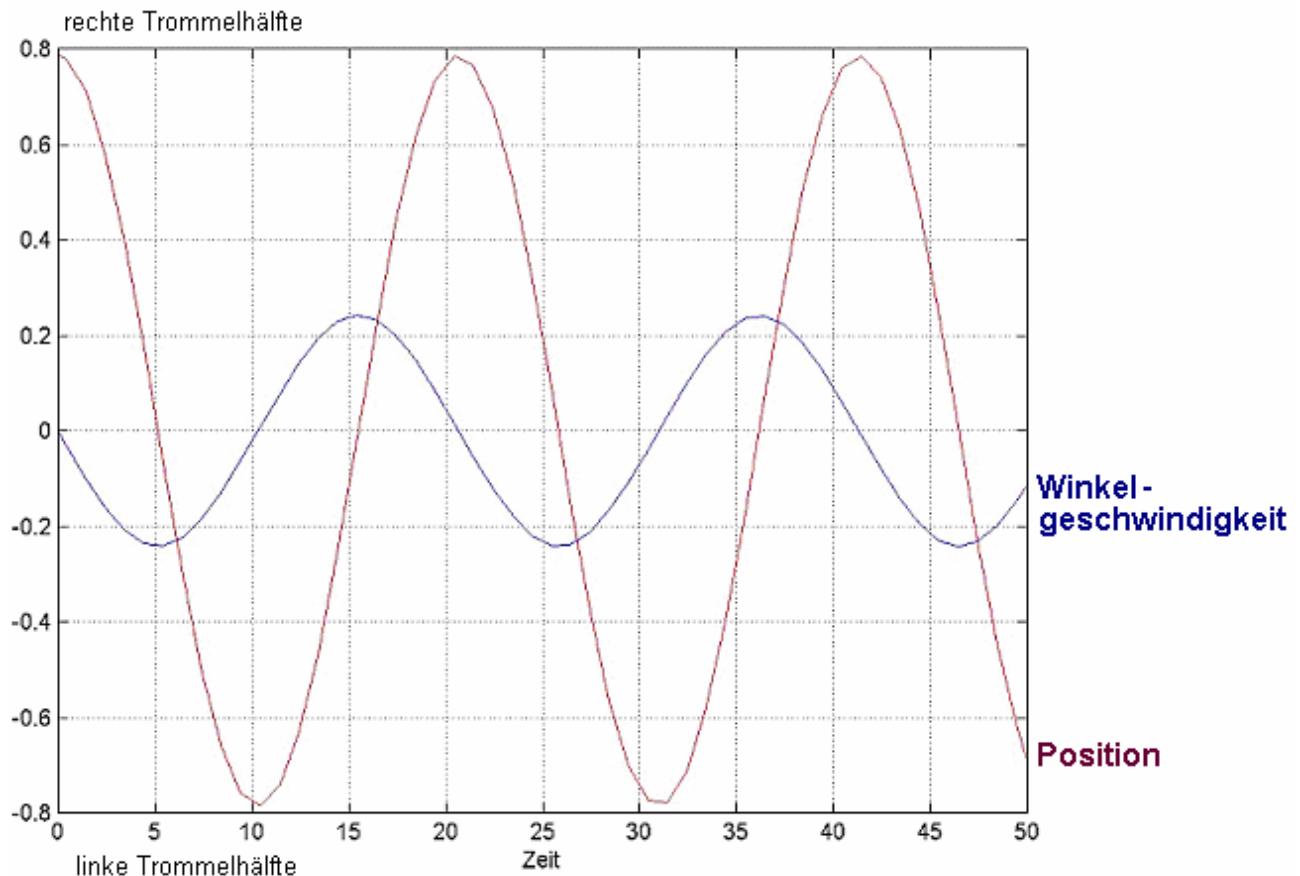
$$M \cdot z''(t) = M \cdot (R - r) \left(\alpha'^2 \cdot \begin{pmatrix} -\sin \alpha \\ \cos \alpha \end{pmatrix} + \alpha'' \cdot \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix} \right) = f = M \cdot g \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} + K \cdot \begin{pmatrix} -\cos \alpha \\ -\sin \alpha \end{pmatrix}$$

Zerlegung in radiale und tangentiale Komponenten ergibt für die tangentiale Komponente

$$M \cdot (R - r) \cdot \alpha'' = -M \cdot g \cdot \sin \alpha(t)$$

Diese Gleichung lässt sich nur unter Verwendung des Computers lösen, wir zeigen die Lösung grafisch an:

Hier lässt sich die Ähnlichkeit zu einer Sinuskurve deutlich erkennen.



Eigene Meinung

Mathematische Modellierung klingt interessant. Zumindest dachten wir das, als wir uns für die Mathematische Modellierungswoche angemeldet haben. Und wir wurden nicht enttäuscht.

Gleich zu Beginn wurden wir vor unser erstes Problem gestellt: Eines von fünf verschiedenen Projekten war zu wählen. Nach reiflicher Überlegung und sorgfältigem Abwägen entschieden wir uns für eines der spannendsten: Mechanik – Bewegung von Schüttgut in einer rotierenden Trommel.

So interessant das Thema auch ist, es ist wirklich komplex. Man kann damit einen Ingenieur monatelang beschäftigen, also durften wir nicht mit einer vollständigen Lösung rechnen.

Deshalb arbeiteten wir mit Vereinfachungen. Aber auch das war sehr informativ. Alleine die Anwendung der in der Schule gelernten Mathematiktheorie auf praxisnahe Problemstellungen brachte uns viel.

Auch unsere Gruppendynamik war hervorragend. Motiviertes Arbeiten mit Beteiligung aller Mitglieder machte die Stunden zu Höhepunkten des Tages. Die Hilfe unseres Professors war unverzichtbar.

Wir können mit Recht behaupten, dass wir in dieser Woche für unser Leben gelernt haben.

Nachhaltige Bewirtschaftung nachwachsender Ressourcen

Gruppe Ökologie

1 Einleitung

Wir alle kennen alarmierende Berichte über Raubbau an Ressourcen. Zum Beispiel ist die Existenz des Walfisches ernsthaft bedroht. Die Rodung großer Walbestände könnte zum Kollaps riesiger Ökosysteme führen. In diesem Projekt haben wir untersucht, was einfache mathematische Modelle von Erntestrategien in nachwachsenden Beständen zu deren nachhaltiger Bewirtschaftung beitragen können. Nachhaltigkeit bedeutet dabei, trotz Entnahme den Bestand der Ressource nicht zu gefährden. Gleichzeitig sollte nicht unnötigerweise auf Erträge verzichtet werden. Die zentralen Fragen waren folgende:

- Welche Strategien sind riskant, welche sind stabil?
- Was geschieht in altersstrukturierten Populationen oder in Räuber-Beute-Modellen?
- Können - im Prinzip - mathematische Modelle den Zusammenbruch der Ressource rechtzeitig voraussagen oder die Wahl der Erntestrategie beeinflussen?

Die Teilnehmer am Projekt waren:

Florian Bloder	BG/BRG Gleisdorf, 7.B
Anton Reiter	BG/BRG Gleisdorf, 8.A
Susanne Kerndle	BRG Kepler, 7.C
Bernhard Fuchs	BRG Kepler, 8.C
Elias Karabelas	BRG Kepler, 8.A
Dr. Georg Propst	Institut für Mathematik und Wissenschaftliches Rechnen KFU Graz

2 Einführung in die Populationsdynamik

Die **Populationsdynamik** ist ein Teilgebiet der Biologie, speziell der Ökologie, das die Veränderungen der Größe einer Population von Lebewesen beschreibt. Der Begriff wird auch für die Entwicklung der Anzahl der Individuen einer Population selbst, also den Gegenstand der Populationsdynamik als Wissenschaftsgebiet, benutzt. Die Populationsdynamik von Arten wird nicht zuletzt durch unterschiedliche Vermehrungsstrategien(zb. Fibonacci-Reihe) beeinflusst. Dabei geht es um die Frage, wie die begrenzte Ressource an Energie und Stoffen einer Generation für die nächste Generation verfügbar gemacht werden. Dies lässt sich in zu zwei wichtigen Strategien zusammenfassen:

r-Strategie:

Arten mit dieser Strategie produzieren viele Nachkommen, an die jeweils nur geringe Ressourcen weitergegeben werden. Ein Beispiel dafür sind Grasfrösche. Jedes Weibchen legt 3000-4000 Eier mit geringem Nahrungsvorrat im Dottersack, eine Brutpflege findet nicht statt. Die meisten Kaulquappen erreichen nicht das Erwachsenenalter. Diese Arten sind in der Lage, neue Lebensräume rasch zu besiedeln. Bei hoher intraspezifischer Konkurrenz und großen Druck an Räubern hat diese Strategie jedoch Nachteile.

K-Strategie:

Arten mit dieser Strategie produzieren nur wenige Nachkommen, die jedoch durch fortgeschrittene Entwicklung und insbesondere durch Brutfürsorge und Brutpflege häufig erwachsen und fortpflanzungsfähig werden. Beispiele hierfür sind Elefanten, Menschen, Wale. Arten mit dieser Strategie können auch in stark strukturierten Lebensräumen und lang entwickelten Ökosystemen die jeweilige Kapazitätsgrenze ausschöpfen.

3 Modelle zur Beschreibung der Populationsdynamik

Im Laufe der Modellierungswoche haben wir uns mit vielen Populationsmodellen beschäftigt, teils realistisch teils sehr unrealistisch.

3.1 Die Fibonacci-Folge

Die Fibonacci-Folge ist eine berühmte mathematische Folge von positiven ganzen Zahlen, den Fibonacci-Zahlen. Der Mathematiker Leonardo Fibonacci (Leonardo von Pisa) entwickelte sie, um das Wachstum einer Population von Kaninchen zu beschreiben, und publizierte sie in seinem Buch *Liber Abaci* aus dem Jahre 1202. Sie ist eine der ersten Versuche das Vermehrungsverhalten von Tieren mathematisch festzulegen. Die Folge selbst ist rekursiv definiert durch:

$$\begin{aligned}f_0 &= 1 \\f_1 &= 1 \\f_n &= f_{n-1} + f_{n-2}\end{aligned}$$

Das bedeutet in Worten:

- für die beiden ersten Zahlen werden die Werte Eins und Eins vorgegeben
- jede weitere Zahl ist die Summe ihrer beiden Vorgänger

Daraus ergibt sich die Folge zu 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, ...

Fibonacci's Modell einer Kaninchenpopulation

Fibonacci stieß auf diese Folge bei der einfachen mathematischen Modellierung des Wachstums einer Kaninchenpopulation nach folgender Vorschrift:

1. Zu Beginn gibt es ein Paar neugeborener Kaninchen.
2. Jedes neugeborene Kaninchenpaar wirft nach 2 Monaten ein weiteres Paar.
3. Anschließend wirft jedes Kaninchenpaar jeden Monat ein weiteres.
4. Kaninchen leben ewig und haben einen unbegrenzten Lebensraum.

Jedoch ergibt sich aus dieser Theorie folgendes Problem:

Die Folge strebt ins Unendliche, das ist jedoch unrealistisch, dass sich irgendeine Spezies so reproduziert das sich ihre Anzahl derart explosionsartig vermehrt.

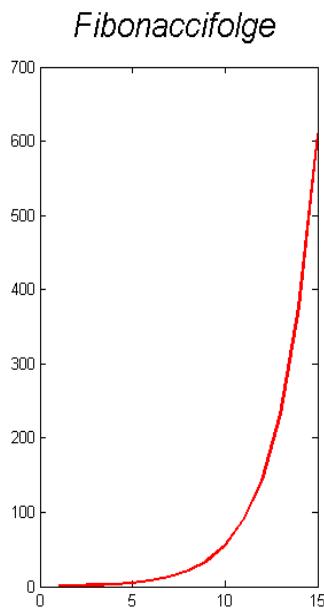


Abbildung 1: Verlauf der Fibonacci-Folge

3.2 Verbessertes Fibonacci-Modell

Aufgrund dieser Probleme stellten wir einige Überlegungen an wie man die Folge verbessern könnte um das explosionsartige Wachstum zu bremsen. Wir kamen zu dem Schluss, dass es realistischer wäre, wenn man die Glieder der Folge mit zwei Parametern multiplizieren würde, um eine Entnahme zu simulieren.

Unser neues Modell auf Basis der Fibonacci-Folge sah nun so aus:

$$\begin{aligned}f_0 &= 1 \\f_1 &= 1 \\f_n &= u f_{n-1} + v f_{n-2} \quad \text{wobei } u, v \in [0; 1]\end{aligned}$$

Für $u + v < 1$ oder $u + v > 1$ strebt die Folge gegen Null bzw. ∞ . Wenn $u + v = 1$ der Fall ist, konvergiert die Folge gegen $\frac{1}{3} f_0 + \frac{2}{3} f_1$ (nur experimentell festgestellt). Der Vorteil dieses Modells, ist, dass man die Population auf einem konstanten Niveau halten kann. Folglich ist es ein weit realistischeres Modell.

regulierte Fibonacci-Folge

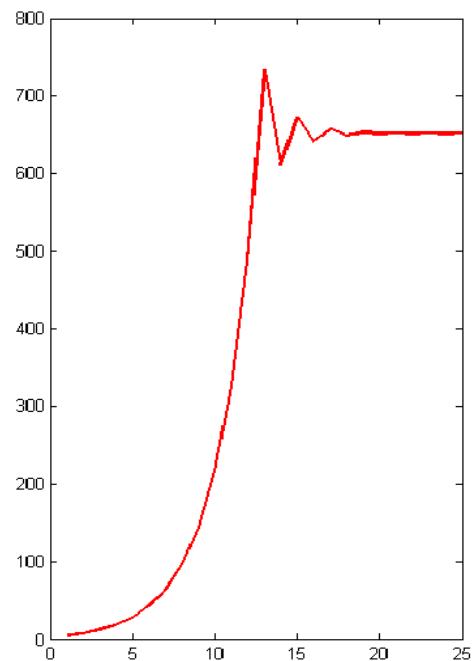


Abbildung 2: Verlauf der angepassten Fibonacci-Folge

Lineares Modell

Wir kamen zu dem Schluss, dass beide Modelle die Realität nicht ausreichend wiederspiegeln konnten, und so begaben wir uns auf die Suche nach anderen möglichen Modellen, dabei stießen wir das sogenannte 34Lineare Modell34. Der Name ist jedoch irreführend da es sich um ein exponentielles Wachstum handelt. Es setzt sich folgendermaßen zusammen:

$$P_0 \in [2; \infty]$$

$$P_1 = RP_0 \quad \text{wobei } R \text{ die Wachstumsrate ist und } R \geq 0$$

$$P_n = R^n P_0$$

In diesem Modell gibt es drei mögliche Fälle:

$0 \leq R \leq 1$: Population stirbt aus, da die Folge gegen Null konvertiert.

$R = 1$: kein Populationswachstum vorhanden.

$R > 1$: starkes Populationswachstum.

Wieder einmal fanden ein unrealistisches Modell, da die Folge zum wiederholten Male gegen ∞ konvergierte. Um dies zu verhindern könnte man R auf 1 setzen wenn sich die Population der Kapazitätsgrenze K , nähert um weiteres Wachstum zu verhindern. Auch diesen Verbesserung brachte nicht viel mehr Realitätsbezug, es ähnelten dem verbesserten Fibonacci-Modell.

Kapazitätsgrenze K:

Die Kapazitätsgrenze ist die Anzahl von Lebewesen die ein bestimmter Lebensraum aufnehmen kann.

Wurzel-Modell

Um die ruckartige Rücknahme der beiden vorherigen Modelle auszugleichen entwarfen wir das sogenannte 34 Wurzel-Modell 34. Ziel war es den Wachstumsfaktor R von der Populationszahl P abhängig zu machen. Dieses neue Modell baute sich folgendermaßen auf:

- $R = \sqrt{\frac{K}{P_n}}$
- $P_0 \in [2; \infty]$
- K sei gegeben
- $P_1 = \sqrt{\frac{K}{P_0}} * P_0$
- $P_1 = \sqrt{\frac{K}{P_n}} * P_n$

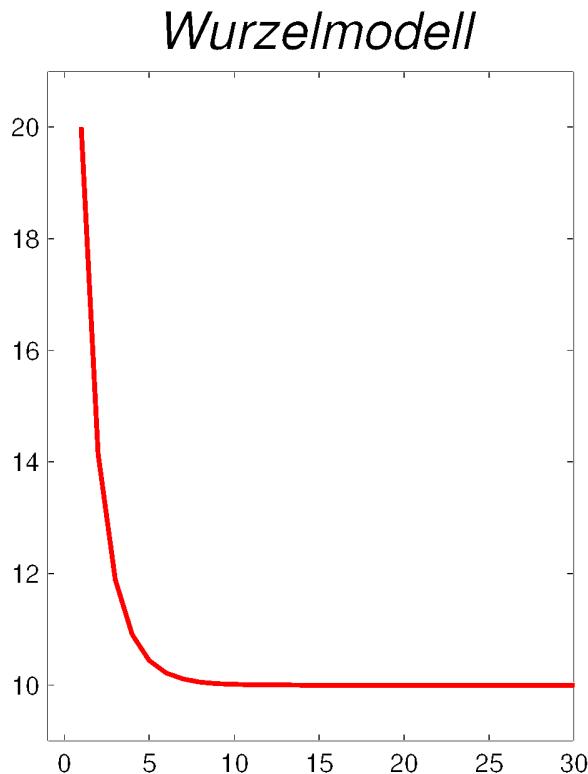


Abbildung 3: Verlauf des Wurzel-Modells

4 Logistische Modell

Aus allen Modellen die wir im Laufe der Modellierungswoche behandelten kristallisierten sich langsam gewisse Bedingungen die uns schlussendlich auf das Logistische Modell führten. Um eine Populationsentwicklung annähernd realistisch beschreiben zu können müssen folgende Bedingungen vom Parameter R erfüllt werden:

$$R=1+R(P) \text{ sodass}$$

- $R(K)=0$ für $P=K$
- $R(P)>0$ für $P<K$
- $R(P)<0$ für $P>K$

Dieses wurden von zwei Modellen erfüllt:

$$R(P) = R * \left(1 - \sqrt[2n]{\frac{K}{P_n}}\right)$$

Das Wurzelmodell:

und dem logistischen Modell, ausgehend von der logistischen Gleichung.

Logistische Gleichung

Die **logistische Gleichung** ist ein Beispiel dafür, wie komplexes, chaotisches Verhalten aus einfachen nichtlinearen Gleichungen entstehen kann. Diese Gleichung wurde bekannt durch eine Seminararbeit des Biologen Robert May aus dem Jahr 1976. Das logistische Modell wurde ursprünglich als demographisches Modell von Verhulst 1837 eingeführt. Es enthält zwei Faktoren, die die Größe einer Population beeinflussen:

- Durch Fortpflanzung vermehrt sich die Population um einen Faktor, der proportional zur aktuellen Populationsgröße ist.
- Durch Verhungern verringert sich die Population um einen Faktor, der proportional zur Differenz der theoretischen Maximalgröße der Population und der aktuellen Größe ist.

Mathematisch konnten wir diese Bedingungen durch folgende Gleichung ausdrücken

$$\Phi(P_n) = P_{n+1} = P_n * \left(1 + R * \left(1 - \frac{P_n}{K}\right)\right)$$

K ... Kapazitätsgrenze

R ... Wachstumsrate und $R < 2$ da sonst chaotisches Verhalten auftritt

Der Startwert dieser Folge ist nun die Population zum Jahr 0. Diese Folge fassten wir nun als Funktion auf, und diskutierten sie um auf ihre Charakteristika schließen zu können.

Diskussion unserer logistischen Gleichung

Finden der Nullstellen:

$$\frac{R}{K} P_n^2 + (1+R) * P_n = 0$$

$$P_n \left(\frac{-R}{K} * P_n + 1 + R \right) = 0$$

$$\rightarrow P_1 = 0 \rightarrow N_1(0/0)$$

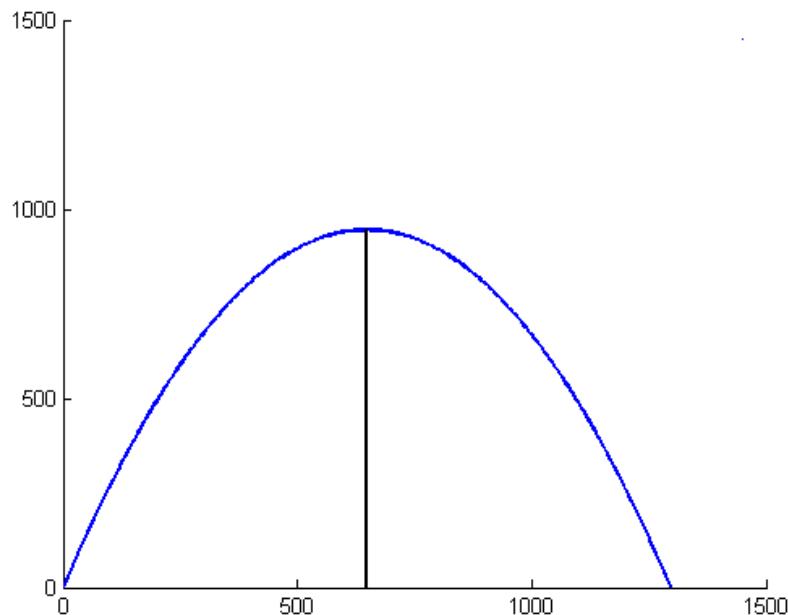
$$\rightarrow P_2 = \frac{K(R+1)}{R} \rightarrow N_2\left(0 / \frac{K(R+1)}{R}\right)$$

Finden des Extremwertes:

$$\Phi'(P_n) = \frac{-2R}{K} P_n + 1 + R$$

$$\Phi'(P_n) = 0 \rightarrow P_n = \frac{K(R+1)}{2R}$$

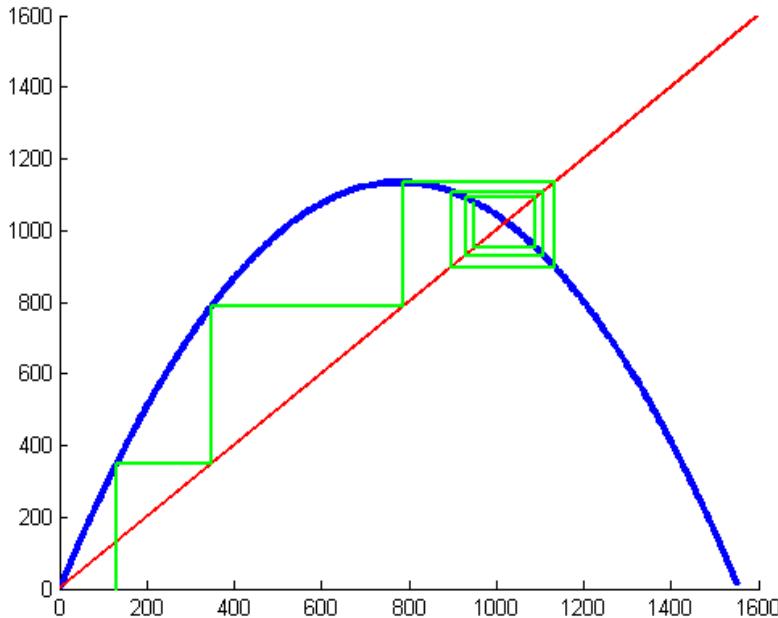
aus der Lage des Extremwertes und der Nullstellen schlossen und bewiesen wir, dass die Funktion symmetrisch um die Ordinate des Extremwertes ist.



Um nun auf ein Verhalten dieser Folge schließen zu können muss man die Folge iterieren. Iterieren bedeutet einen Funktion immer wieder auf sich selbst abbildet also $f(f(f(\dots(x))))$. Dabei gibt es drei mögliche Fälle von auftretendem Verhalten.

- **Konvergenz:** Die Folge strebt gegen einen Fixpunkt $f(x_\infty)$ wenn der Betrag der Ableitung $f'(x_\infty)$ kleiner als eins ist. Dieser Fixpunkt ist also stabil
- **Periodizität:** Die Folge kann zwischen einer gewissen Anzahl von Werten hin und her springen. Dies ist ein Spezialfall und für die Populationsdynamik nicht relevant.
- **Divergenz:** Wenn der Betrag der Ableitung bei einem Fixpunkt $f'(x_\infty)$ größer als eins ist dann ist dieser Fixpunkt instabil, demzufolge verlässt die Iteration die Gleichgewichtslage x_∞ .
- **Chaotisch:** In unserem Modell haben wir dieses Verhalten durch setzen von $R < 2$ ausgeschlossen.

Um dies nun anschaulich darstellen zu können führten wir nun eine graphische Iteration der Logistischen Gleichung durch. Hierbei wählt man einen Startwert auf der X-Achse und zeichnet eine Linie zum zugehörigen Funktionswert ein. Danach zieht man eine horizontale Linie von diesem neuen Punkt zur ersten Mediane ($y=x$). von diesem neuen Punkt zieht man wieder eine Linie zum zugehörigen Funktionswert, usw.



In unserem Modell ist der Anstieg der Kurve im Ursprung immer größer als eins daher gibt es genau einen Schnittpunkt mit der 1. Mediane, weil es eine quadratische Funktion ist.

Modelle mit Entnahme

Wenn f ein Populationmodell ist, dann ist $P_{n+1} = f(P_n) - E_n$, ein Entnahmemodell, wobei E_n ein Modell für die Entnahme repräsentiert. Wir diskutierten folgende Strategien für die Entnahme.

1. $E_n = \text{const}$: Es wird eine konstante Anzahl an Individuen entnommen.
2. $E_n = eP_n$: Hier ist e die Entnahmerate oder der Aufwand, und E_n ist proportional zur Population.
3. $E_n = eP_{n+1}$: Die Entnahme ist proportional zum Ende des Beobachtungszeitraums.
4. $E_n = \frac{e}{2}(P_n + P_{n+1})$: Die Entnahme ist proportional zum arithmetischen Mittel des Beobachtungszeitraums.
5. $E_n = e\sqrt{P_n P_{n+1}}$: Die Entnahme ist proportional zum geometrischen Mittel des Beobachtungszeitraums.
6. $E_n = ef(P_n)$: Die Entnahme ist proportional zur Population wie sie vom Modell ohne Entnahme vorausgesagt wird.

Eigentlich wollten wir uns für das Modell 5 entscheiden aber selbst nach aufwendigen Umformungen der Gleichung war die Iterationsvorschrift noch nicht explizit.

$$P_{n+1} = \frac{\frac{-R^2}{K^2} P_n^4 + 2 \frac{(1+R) P_n^3 R}{K}}{P_{n+1} + \frac{R}{K} P_n^2 - 2(1+R) P_n + \frac{R}{K} P_n^2}$$

Daraufhin entschieden wir uns für das weitaus einfacher 4. Modell. Nach einigen Umformungen hatten wir eine neue Gleichung der Form

$$\Phi(P_n) = P_{n+1} = \frac{P_n}{1 + \frac{e}{2}} * \left(1 - \frac{e}{2} + R * \left(1 - \frac{P_n}{K} \right) \right)$$

Diskussion der neuen Gleichung:

Finden der Nullstellen:

$$P_{n+1} = \frac{P_n}{1 + \frac{e}{2}} * \left(1 - \frac{e}{2} + R * \left(1 - \frac{P_n}{K} \right) \right) = 0$$

$$\rightarrow P_1 = 0 \rightarrow N_1(0/0)$$

$$\rightarrow P_2 = \frac{K(R + 1 - \frac{e}{2})}{R} \rightarrow N_2 \left(0 / \frac{K(R + 1 - \frac{e}{2})}{R} \right)$$

Finden des Extremwertes:

$$\Phi' = \frac{1}{1 + \frac{e}{2}} * \left(1 - \frac{e}{2} + R * \left(1 - \frac{2P_n}{K} \right) \right)$$

$$\Phi'(P_n) = 0 \rightarrow = \frac{K(R+1-\frac{e}{2})}{2R}$$

$$\text{Max: } \left(\frac{K(R+1-\frac{e}{2})}{2R} / \frac{1}{1 + \frac{e}{2}} \frac{K}{4R} \left(1 + R - \frac{e}{2} \right)^2 \right)$$

$$\Phi'(0) = \frac{1}{1 + \frac{e}{2}} \left(1 - \frac{e}{2} + R \right) > 1 \rightarrow R > 1 + e$$

Auch diese Funktion ist symmetrisch zur Ordinate des Extrempunktes. Ebenso wie beim Modell ohne Entnahme führten wir hier alle Untersuchungen, wie graphische Iteration und Realitätsbezug.

5 Quadratisches Modell

5.1 Quadratisches – Modell ohne Entnahme

Nachdem wir mit dem logistischen Modell ein relativ stabiles und nachhaltiges Modell gefunden hatten, suchten wir nach einem Modell, welches auch zusammenbrechen kann, wenn eine gewisse Populationsgröße unterschritten wird.

Dieses Modell kann durch folgende Gleichung mathematisch beschrieben werden:

$$\psi_{(n+1)} = \frac{r}{1 + \left(\frac{\psi_n}{k}\right)^2} * (\psi_n)^2$$

Es weist ein Wachstum von r und eine Kapazität von rk^2 auf, die nur im Grenzwert $\psi \rightarrow \infty$ monoton steigend angenähert wird. ψ_n drückt die Population aus, die nach dem vorhergegangenen Vermehrungszyklus bestanden hat, ψ_{n+1} die Population, die nach diesem Vermehrungszyklus bestehen wird.

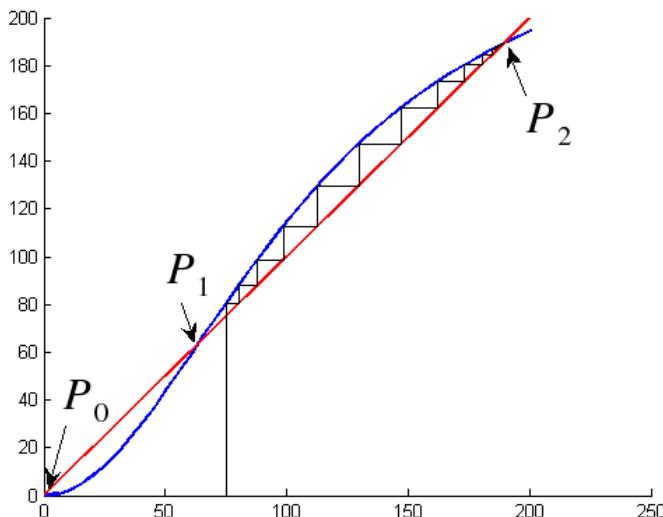
Aus dieser Gleichung lassen sich nun 3 Fixpunkte finden:

$$P_o = 0$$

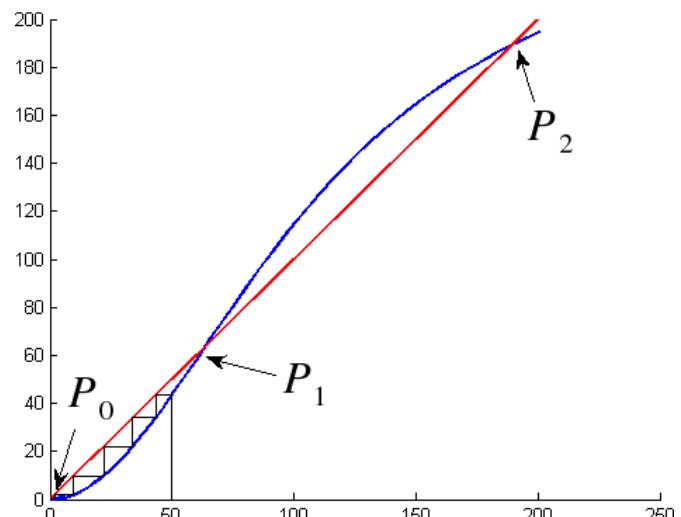
$$P_1 = \frac{rk^2}{2} - \sqrt{\left(\frac{r^2k^4}{4} - k^2\right)}$$

$$P_2 = \frac{rk^2}{2} + \sqrt{\left(\frac{r^2k^4}{4} - k^2\right)}$$

konvergent gegen P_2



konvergent gegen P_0



In der Iteration ist zu sehen, dass der Fixpunkt P_1 instabil ist und dass die Fixpunkte P_o und P_2 stabil sind. Wird der Wert von P_1 unterschritten, wird die Population aussterben. Wird dieser Wert überschritten, wird die Population gegen P_2 gehen.

5.2 Quadratisches – Modell mit Entnahme

Bei diesem Modell wollen wir eine Entnahme simulieren, die nach dem gleichen Schema wie beim logistischen Entnahmemodell abläuft.

Nach jedem Vermehrungszyklus wollen wir $\frac{e}{2} * (\psi_n + \psi_{n+1})$ Individuen, den Ertrag, aus der

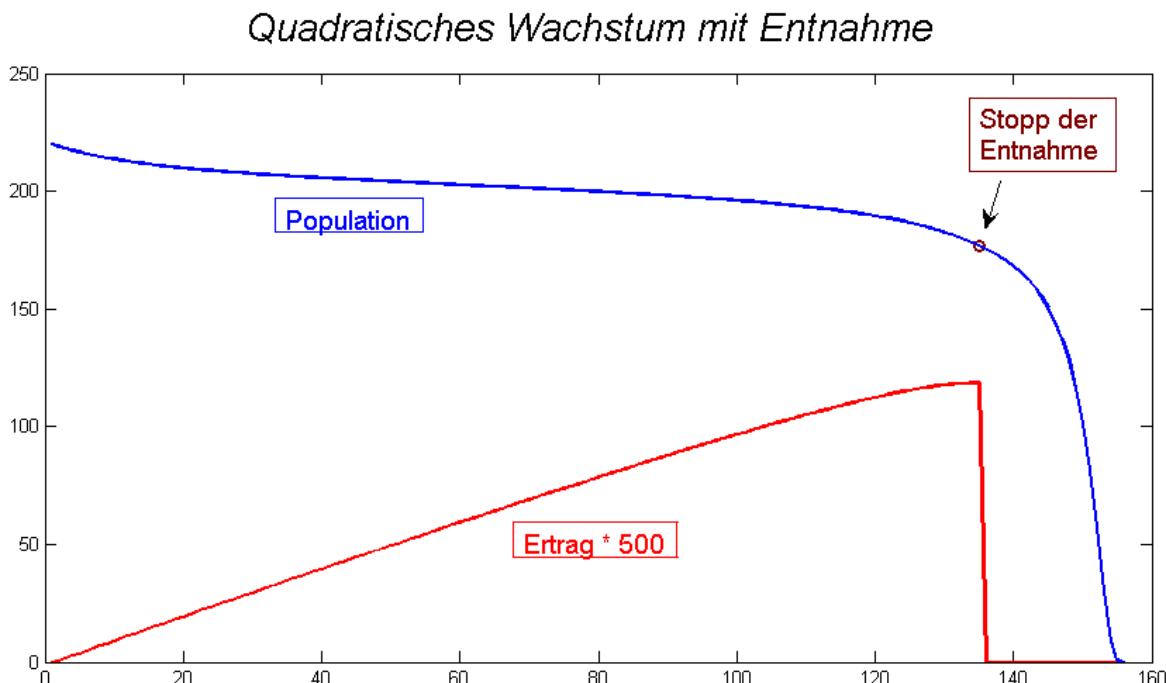
Population entnehmen. e bedeutet hier den Aufwand, der aufgebracht werden muss um den Ertrag zu erzielen.

Ein derartiges Modell kann nun mit folgender mathematischer Gleichung beschrieben werden:

$$\psi_{(n+1)} = \frac{1}{1 + \frac{e}{2}} * \frac{r}{1 + \left(\frac{\psi_n}{k}\right)^2} * (\psi_n)^2 - \frac{e}{2} * \psi_n$$

e wird nach jedem Vermehrungszyklus erhöht. Vor jedem neuen Vermehrungszyklus wird überprüft, ob sich der Ertrag verglichen mit dem vorhergegangen vergrößert oder vermindert hat. Wurde der Ertrag vermindert wird sofort danach der ganze Fischfang gestoppt, aber

trotzdem bricht die Population zusammen, wenn der Wert von $P_1 = \frac{rk^2}{2} - \sqrt{\left(\frac{r^2k^4}{4} - k^2\right)}$ unterschritten wurde.



6 Resümee

Wir testeten ein und dieselbe Strategie mit zwei verschiedenen Populationsmodellen. Als Strategie erhöht man die Entnahmerate (=Aufwand) solange bis der Ertrag zurückgeht und hält die Entnahmerate dann konstant. Es werden dabei also nur in der Wirklichkeit beobachtbare Größen verwendet, die vom mathematischen Modell unabhängig sind. Angewendet auf eine Population, die von einem logistischen Modell beschrieben wird, nähert sich diese Strategie dem maximalen nachhaltig erzielbaren Ertrag. Die zugehörige Population befindet sich in einem Gleichgewicht, das auf Störungen stabil reagiert. Aber angewendet auf eine Population, die von einem quadratischen Modell beschrieben wird, kann diese Strategie zur Auslöschung der Population führen, selbst dann wenn bei Rückgang des Ertrages die Entnahme sofort gestoppt wird.

7 Anhang

%Quellsode von Quadratisches - Modell, mit Zusammenbruch trotz %Fischereistopp

```
clear all
wertAkt = 220;
e = 0.000005;
hoechstW = 200;
psi(1) = wertAkt;
erhoehung = 0.00001;
y = 0.0000000001;
r = 0.01;
y1 = 0. ;
k =2;
MSY(1) =0;

while y > y1
    psi(k)=(1/(1+e/2))*r/(1+(psi(k-1)/hoechstW)^2)*((psi(k-1))^2)-(e/2*(psi(k-1)));
    if psi(k) < 0
        break;
    end
    y1 = y;
    y = e/2*(psi(k-1)+psi(k));
    MSY(k) = y;
    e = e + erhoebung;
    k = k+1;
end

plot(k-1,psi(k-1), 'or');
e = 0;

for i = k:k+20 % 20 iterationen zum zeigen der Stabilität
    psi(i)=(1/(1+e/2))*r/(1+(psi(i-1)/hoechstW)^2)*((psi(i-1))^2)-(e/2*(psi(i-1)));
    if psi(k) < 0
        break;
    end
    y1 = y;
    y = e/2*(psi(i-1)+psi(i));
    MSY(i) = y;
end

KS = r*(hoechstW^2)/2;
KS = sqrt(KS^2 - hoechstW^2);

hold on;
plot(MSY*500, 'r'); %plot des Ertrages
plot(psi); %plot der Population
```

%Quellcode für die grafische Iterierung

```
function literation(var)
%Variablen
e=0.15; %Entnahme
K=110; %Kapazität
```

```

R=2.3;    %Netto Wachstum
stop=200;
%generell
func(1)=1;
clf;
hold on;
plot(stop,stop);
parx=1:5:K*(R+1-e/2)/R+50;
pary=f4(parx,e,R,K);
plot(parx,pary,'b','LineWidth',2); % Parabel zeichnen
plot([0 stop], [0 stop],'r','LineWidth',2); % Erste Mediane
halb=(K*(R+1-e/2)/R)/2;
%Hier beginnt die graphische Iteration
oldy=0;
oldx=var; %Startwert
x_P=oldx;
y_P=0;

for i=1:40
    if(rem(i,2)~=0)
        oldx=x_P;
        oldy=y_P;
        y_P=f4(x_P,e,R,K);
    else
        oldx=x_P;
        oldy=y_P;
        x_P=y_P;
    end
    plot([oldx x_P], [oldy y_P], 'k','LineWidth',1);
    pause(0.05);
end
end

function returnn = f1 (P,e,R,K); %Logistisch mit e als Entname
returnn=1;
returnn=1/(1+e/2)*(1-e/2+R*(1-P/K)).*P; %formel
end

function returnn = f2 (P,e,R,K); % Predator
returnn=1;
returnn=(1+R*(1-exp(P/K-1))).*P; %formel
end

function returnn = f3 (P,e,R,K); % Nr2
returnn=1;
returnn=(R/40*P.^2.*exp(-2*P/K))/2; %formel
end

function returnn = f4 (P,e,R,K); % Nr3
returnn=1;
R=R/110;
returnn=R*P.^2./(1+(P/K).^2); %formel
end

function returnn = f5 (P,e,R,K); % sinus
returnn=1;
returnn=exp(sin(P/20))*300; %formel
end

```

```
function returnn = f6 (P,e,R,K); % predator2
returnn=1;
returnn=R/(1+(P/K).^2)*P.^2; %formel
end
```

Woche der Modellierung mit Mathematik im Schloss Seggau, 6. – 11. März 2005



Projekt: Sozialwissenschaft

Wie können die demokratische Freiheit und der Reichtum eines Landes gleichmäßig verteilt werden?

Teilnehmer: Rudolf Griss, Michael Hsieh, Georg Michelitsch, Christoph Planitzer, Stefan Raminger, Jan Schifko, Christoph Triebel, Markus Weger

Unter der Leitung von: Dr. Stephen Keeling

Inhalt

1. AUFGABENSTELLUNG.....	3
1.1. VORGEGEBENE AUFGABENSTELLUNG	3
1.2. AUSLEGUNG	3
2. VERWENDETE PROGRAMME.....	5
2.1. NETLOGO.....	5
2.2. SUGARSCAPE	5
3. ÜBERLEGUNGEN	6
3.1. SOZIALWISSENSCHAFTLICHE ÜBERLEGUNGEN	6
3.2. WIRTSCHAFTLICHE ÜBERLEGUNGEN.....	6
3.3. MATHEMATISCHE ÜBERLEGUNGEN.....	6
3.4. SUCHE NACH DEM RICHTIGEN ZUGANG	7
4. UNSER MODELL.....	8
4.1. GRUNDSTRUKTUR.....	8
4.1.1. <i>Breeds, Ressourcen</i>	8
4.1.2. <i>Tauschhandel</i>	8
4.1.3. <i>Entscheidungskraft</i>	8
4.1.4. <i>FEE-System</i>	9
4.1.5. <i>Vererbung</i>	9
4.1.6. <i>Social Security</i>	10
4.2. BEOBACHTUNGEN, ERKENNTNISSE	11
4.2.1. <i>Prozessverarbeitung</i>	11
4.2.2. <i>Resultate und ein Ausblick</i>	11
4.2.3. <i>System I</i>	12
4.2.4. <i>System II</i>	12
4.2.5. <i>System III</i>	13
5. NACHWORT	14
6. ANHANG	15

1. Aufgabenstellung

1.1. Vorgegebene Aufgabenstellung

Ein Weg in die Modellierung heißt *von oben nach unten*, und er hat mit der *Beschreibung* von makroskopischen oder durchschnittlichen Eigenschaften eines Systems zu tun. Ein anderer Weg in die Modellierung heißt *von unten nach oben*. Bei dieser Methode werden die grundlegenden oder mikroskopischen Eigenschaften eines Systems aufgestellt, und die makroskopische Komplexität des Systems entsteht indirekt durch *Emergenz*.

Komplexität wird durch Simulierung immer mehr mathematisch erforscht. In dieser Problemstellung wird Multi-Agenten Simulation verwendet, um soziales Verhalten von interagierenden Individuen zu untersuchen. Also hat das Projekt teilweise mit Programmierung zu tun. Das verwendete Werkzeug heißt NetLogo, und es hat eine Lisp-ähnliche eigene Programmiersprache.

Es wird empfohlen, dass das Projekt mit einer bekannten Multi-Agenten Simulation beginnt, die *Sugarscape*¹ genannt wird. Eine eigene Simulation lässt sich leicht davon entwickeln. Mit Sugarscape bekommt man schon Hinweise, wie der Reichtum sich verteilt. Andererseits gibt es in Sugarscape keinen Tausch zwischen Agenten und fast keine Entscheidungen, die von den Agenten getroffen werden sollen. Vom Tauschen erwartet man eine emergierende Wirtschaft. Von Gruppenentscheidungen erwartet man eine emergierende Regierung. Anhand eines solchen Modells werden Parameter gesucht, die zur gleichmäßigen Verteilung des Reichtums und der Entscheidungskraft führen.

1.2. Auslegung

Als erstes stellte sich die Frage nach der Wichtigkeit von angeborenen Eigenschaften und Diversität. Kann eine Gesellschaft mit identischen Individuen unter fairen Konditionen überleben? Wo ist der Zusammenhang zwischen Wirtschaft und Demokratie und wie groß ist der jeweilige Einfluss?

¹ Vordefiniertes Modell einer einfachen Wirtschaftssimulation

Der Beantwortung dieser und anderer grundlegender Fragen widmeten wir die ersten Stunden unseres Projektes. Schließlich kamen wir zu dem Schluss, dass Abhängigkeit zwischen den Individuen ein Schlüsselfaktor für ein stabiles und gerechtes System ist. Ohne diesen Faktor entstünde eine Rivalität um die vorhandenen Ressourcen und Tauschen wäre nicht möglich. Außerdem verlöre ein solches System den Bezug zur Realität, in der auch Abhängigkeit ein Grundbestandteil ist. Weiters empfanden wir es wichtig Demokratie in die Wirtschaft einfließen zu lassen. Dem entsprechend musste eine neue Eigenschaft der Individuen eingeführt werden. Unserer Auslegung zufolge sollte sie einen möglichst realen Bezug besitzen und einen fairen Tausch ermöglichen.

Wir machten anfangs den Fehler, selbst eine faire Verteilung der Ressourcen und Macht erschaffen zu wollen. Bald erkannten, dass dieser Schritt nur von den Individuen selbst getätigt werden kann, sonst hätten wir bereits ein zwar „perfektes“ und faires aber realitätsfremdes System konstruiert. Um dies zu erreichen, dürfen wir ihnen lediglich die Grundlagen liefern, das Ergebnis müssen sie selbst bestimmen. Wie müssen diese Voraussetzungen gewählt werden, damit demokratische Freiheit und Reichtum gleichmäßig verteilt werden?

2. Verwendete Programme

2.1. Netlogo

Als zu verwendendes Programm wurde uns Netlogo zur Verfügung gestellt. Netlogo ist ein „public domain“ Programm, das zur grafischen Simulation von Interaktionen zwischen Individuen benutzt wird. Es besitzt eine eigene Programmiersprache, die simpel und benutzerfreundlich ist. Einzelne *Turtles*² bewegen sich auf *Patches*³, und können miteinander oder mit den Feldern interagieren. Die verschiedenen Auswirkungen der Umjustierungen von Parametern können mit Graphen und Tabellen beobachtet, und Schlüsse daraus gezogen werden. So können sowohl geografische und naturwissenschaftliche als auch sozialwissenschaftliche Modelle erstellt werden. Netlogo kam unserem Projekt auf Grund der einfach zu erlernenden Handhabung und der Anschaulichkeit von Modellen sehr entgegen.

Speziell für unser Projekt war Netlogo besonders gut verwendbar, weil es bereits eine Basissimulation, genannt Sugarscape gab, auf die wir unser erweitertes Modell aufbauen konnten. Wir machten uns mit der Syntax vertraut und spielten einige, bereits vorhandene Szenarien durch.

2.2. Sugarscape

Die Idee zu unserer Simulation lieferte uns Sugarscape, eine in Netlogo generierte Simulation die Reichtum durch Abbau von Ressourcen simuliert. Die Reichen sind die, die am meisten abbauen. In diesem Modell existiert jedoch keine Art von Entscheidungskraft, keine angeborenen Unterschiede und auch keine Interaktion zwischen den Individuen. Damit fehlt dem Programm die Realitätsnähe.

² turtle: einzelne, unabhängige Individuen

³ patches: Felder in einem Raster

3. Überlegungen

3.1. Sozialwissenschaftliche Überlegungen

Reichtum zu definieren ist einfach, aber Demokratie (demokratische Freiheit) zu messen erweist sich als wesentlich komplizierter. Erstens hat jeder eine andere Vorstellung von Demokratie und wir waren uns nicht einmal sicher, ob es messbare Werte dafür gibt. Wir erkannten, dass wir uns zu sehr auf Wirtschaft fixiert hatten und der Demokratie eine zu kleine Beachtung schenkten. Also versuchten wir unser Modell durch demokratische Strukturen zu erweitern, die die Macht anfangs nach Zufallsprinzip verteilen und im Laufe der Simulation durch faire Änderungsroutinen beeinflussten.

Ein weiterer Punkt, der uns wichtig erschien, war die Frage ob eine Vererbung in unser System eingebaut werden sollte, und ob sie Auswirkungen auf die Entwicklung unserer Gesellschaft habe. Nach einigen Testläufen ohne Vererbung erkannten wir, dass das Modell so nicht funktionieren konnte. Die Turtles wurden arm geboren, was dazu führte, dass die Statistik stark durch den Tod des Reichen beeinflusst wurde.

Auch ist es sehr schwer eine Demokratie zu erstellen, denn man kann sie nicht vorgeben.

Demokratie kommt dann zustande, wenn viele verschiedene Individuen zusammen einen Freiheitswillen teilen und auch andere politische und moralische Faktoren zusammenspielen. Es wäre falsch, wenn wir versuchten die Demokratie zu erzwingen bzw. sie vorzuprogrammieren. Deshalb mussten wir ein Konzept dazu entwickeln, ohne dass Demokratie zu etwas Künstlichem wird.

3.2. Wirtschaftliche Überlegungen

Wir begannen mit einer Wirtschaftssimulation einer freien Marktwirtschaft und versuchten im Nachhinein eine demokratische Komponente miteinzubeziehen. Anhand unserer ersten Vorschläge drifteten wir eher in eine Art von *Timokratie*⁴ ab, in der Reichtum Entscheidungskraft bedeutete.

3.3. Mathematische Überlegungen

Neben den wirtschaftlichen und sozialen Überlegungen, durften wir natürlich die mathematische Komponente nicht außer Acht lassen. Einige Gebiete der Mathematik waren selbstverständlich

⁴ bei Aristoteles: ein System, in dem Vermögen über Macht entscheidet

eher anwendbar als andere, wie beispielsweise das Nash-Equilibrium und andere Aspekte der Spieltheorie, die jedoch aus programmiertechnischen Gründen nicht in dieser kurzen Zeit implementiert werden konnten.

Ein Grundkonzept unseres Modells war das von uns entwickelte *FEE-System*⁵, eine Abwandlung des „Taube-Falke Prinzips“. Das Ziel dieses Systems war es, allen gleiche Chancen einzuräumen, in Anlehnung an demokratische Überlegungen. Eine detaillierte Beschreibung ist in Kapitel „4.1.4 FEE-System“ zu finden.

3.4. *Suche nach dem richtigen Zugang*

Unser anfänglicher Fehler war es, eine faire und ausgeglichene Gesellschaft direkt erschaffen zu wollen. Wir versuchten Eigenschaften so zu vergeben, um genau zu diesem Endergebnis zu gelangen. Bald erkannten wir, dass dieser Zugang der falsche war. Anstatt eine solche Verteilung entstehen zu lassen, versuchten wir diese zu erzwingen. Der richtige Weg war es, nicht vom Ergebnis auszugehen, sondern durch Justierung von grundlegenden Faktoren das Ergebnis von einer realistischen Simulation abzuleiten, und so die Individuen über ihr eigenes Schicksal entscheiden zu lassen.

⁵ Fair EK Exchange System

4. Unser Modell

4.1. Grundstruktur

4.1.1. Breeds, Ressourcen

Um die Realität näher zu rücken, erstellten wir drei *Breeds*⁶, die jeweils eine von drei Ressourcen ernten können. Jedes Individuum benötigte für das Überleben eine gewisse Anzahl an Ressourcen pro *Tick*⁷, konnte jedoch nur eine Ressource selbst abernten. So erreichten wir eine Abhängigkeit zwischen den Individuen, die eine Interaktion in Form eines Tauschhandels forcierte.

4.1.2. Tauschhandel

Wir führten einen selektiven Tauschhandel ein, bei dem sich jeder Turtle den für ihn am besten geeigneten Partner in seiner nahen Umgebung aussucht und mit diesem tauscht. Um die Elemente der freien Marktwirtschaft nicht zu verlieren, gestalteten wir zunächst einen Markt, der die Regeln des *Supply and Demand*⁸ Modells befolgte. Wurde mehr an den Markt verkauft, stieg das Angebot und sank der Preis; wurde mehr gekauft, stieg sowohl die Nachfrage als auch der Preis. Wenn ein Turtle keinen Tauschpartner gefunden hatte, hatte es die Möglichkeit, den Markt aufzusuchen und die fehlenden Rohstoffe im Tausch zu erwerben – eine Art Sozialhilfesystem. Doch während den ersten Testläufen zeigte sich die Tendenz zur „Städtebildung“, große Ansammlungen von Turtles, die untereinander tauschten. Dies machte das Vorhandensein eines Marktes unnötig. Um dennoch eine soziale Gerechtigkeit zu garantieren, führten wir die von uns entwickelte SS Sonderregelung⁹ ein, eine Art Sozialsteuer die ab einem bestimmten Anteil von sich in Armut befindlichen Turtles, von reichen Turtles zu entrichten ist.

4.1.3. Entscheidungskraft

Um auch auf die demokratische Freiheit eines Systems Bezug zu nehmen, schufen wir den Faktor „*Entscheidungskraft*“¹⁰ und unser damit zusammenhängendes FEE-System. Der Faktor dient zur Bestimmung des Einflusses auf andere Turtles bei Tauschgeschäften. Wie auch in der Realität spielen zur Determination dieses Wertes Faktoren wie Charisma, Aggressionsbereitschaft und Herkunft eine entscheidende Rolle. Bei einem Tauschgeschäft wirken die beiden EK-Werte der Handelspartner antagonistisch und bilden so die für beide Partner fairen Tauschkonditionen.

⁶ breeds: verschiedene “Rassen”, andere Berufssparten

⁷ ticks: Zeit-, Veränderungseinheit

⁸ supply and demand: Angebot und Nachfrage bestimmt den Preis

⁹ Social Security Sonderregelung, siehe Kapitel 4.1.6

¹⁰ kurz: EK

4.1.4. FEE-System

Das FEE-System beschreibt die Auswirkungen auf den EK-Wert eines Turtles bei Tauschgeschäften. Ein Turtle mit hohem EK hat eine höhere Wahrscheinlichkeit seinen EK-Wert zu verringern als bei einem Turtle mit niedrigem EK:

Wahrscheinlichkeit für Verlust von A = $EK(A) / 100$

Wahrscheinlichkeit für Gewinn von A = $[100 - EK(A)] / 100$

Auch die Höhe ihres Gewinnes bzw. Verlusts hängt von ihrem derzeitigen EK ab:

Max. Zuwachs = $[100 - EK(A)] / 10 \Rightarrow EK_{neu} = EK_{alt} + [100 - EK(A)] / 10$

Max. Verlust = $EK(A) / 10 \Rightarrow EK_{neu} = EK_{alt} - EK(A) / 10$

Die eigentliche Veränderung wird mit Hilfe eines Zufallgenerators zwischen 0 und dem Maximum generiert.

4.1.5. Vererbung

Wir befanden es für wichtig, ein Vererbungssystem in unser Modell zu integrieren. Ohne eine sinnvolle Verteilung von Ressourcen an die „neugeborenen“ Turtles, zeigte sich das System als nicht ausreichend funktional. Sowohl die Orientierung am Reichsten als auch am Durchschnitt des Gesamtreichthums warf viele Probleme auf.

Also entwickelten wir ein System, das wie folgt funktioniert:

Wir führten vier *Pots*¹¹ ein: je einer pro Ressource und einen *Deathpot*¹².

Wenn ein Turtle sein aktives Dasein beendet, so gehen seine Besitztümer in die jeweiligen Pots über, und er erhöht den Wert des Deathpots um eins. Ein „neugeborenes“ Turtle erhält seine Anfangsressourcen in prozentueller Abhängigkeit vom Deathpot aus den drei Ressourcepots.

Die Anfangswerte der Pots bestimmten wir nach folgenden Formeln:

Für Ressourcepots:

$100 * [\text{birthrate} / 100] * \text{num-people} * [(\text{life-expectancy-min} + \text{life-expectancy-max}) / 2]$

Für Deathpot:

$[\text{birthrate} / 100] * \text{num-people} * [(\text{life-expectancy-min} + \text{life-expectancy-max}) / 2]$

Für Startressourcen eines Neugeborenen:

Ressourcepot / Deathpot

¹¹ zu dt.: Topf, Kessel

¹² zu dt.: Totentopf

4.1.6. Social Security

Die SS Sonderregelung ist ein optional zuschaltbarer Parameter, der das soziale Auffangnetz eines Staates symbolisiert. Sobald die ärmeren Bevölkerungsschichten einen zu großen Anteil der Gesamtbevölkerung ausmachen, tritt die SS Sonderregelung in Kraft: Eine Steuer wird bei den Reichen eingehoben und unter den Armen verteilt. Somit wird ab einem bestimmten Zeitpunkt versucht, das soziale Ungleichgewicht zu minimieren.

Die Bestimmung der SS richtet sich nach folgenden Formeln:

Nötige Umstände für Aktivierung: $(\text{poor_turtles} + \text{middlepoor_turtles}) * 1.5 > \text{all_turtles}$

→ Wenn die sehr armen und armen Turtles mehr als 2/3 der Gesamtbevölkerung ausmachen tritt die SS Sonderregelung in Kraft.

Auswirkungen:

Sehr arm: Ressourcen + tax

Arm: Ressourcen + (tax / 2)

Mittelschicht: Ressourcen +- 0

Reich: Ressourcen – (tax / 2)

Sehr reich: Ressourcen – tax

4.2. Beobachtungen, Erkenntnisse

4.2.1. Prozessverarbeitung

Während unseres Arbeits- und Programmierungsprozesses stießen wir natürlich immer wieder auf interessante Ergebnisse. Wir ließen das von uns geschriebene Modell mit verschiedenen Parametern einige Zeit lang laufen und analysierten die Resultate: Manchmal waren diese für uns befriedigend bezüglich der erwarteten Verteilung und des Wachstums, manchmal nicht. Aber diese Methode entsprach unserer Vorstellung eines nicht vorkonstruierten Systems, das sich selbst entwickelt.

Natürlich wurden unsere Simulation immer realitätsnäher und deswegen komplizierter zu stabilisieren. Wir fanden sehr stabile Systeme, wenn wir mit unseren simpleren Versionen arbeiteten, jedoch war es sehr schwer stabile Systeme in der Endversion zu finden.

4.2.2. Resultate und ein Ausblick

Um eine Antwort auf die Problemstellung zu finden verbrachten wir etliche Stunden mit Testläufen, Konzeptentwicklungen und analytischen Grundsatzdiskussionen. Wir sind uns nicht sicher, ob wir wirklich das Problem gelöst haben, da die Demokratie in unserer Simulation nicht freiwillig passiert sondern vorsätzlich. Es ist vielleicht nicht möglich, einem Computer Demokratiewillen einzuhauen, aber die Wirtschaftsfrage haben wir zweifelsohne sehr gut simuliert und anschließend analysiert. Die Verteilung des Reichtums ist oftmals unfair und einseitig und nur mit sehr speziellen Parametern konnten wir eine faire Balance erreichen¹³. Wir glauben ein zum Teil realitätsnahes, aber natürlich stark eingeschränktes und minimalisiertes Modell gefunden zu haben, dass die Wohlstandsverteilung gut simuliert.

Leider war die Zeit zu kurz um unser Konzept wirklich auszuarbeiten und alle Fehler zu beheben. Es wäre wichtig gewesen den Faktor der Demokratie zu verbessern, doch kamen wir einigten wir uns schlussendlich darauf, dass man in einem Computer keine Demokratie simulieren kann, da ein Computer niemals eine künstliche Intelligenz besitzen könnte, weil

¹³ siehe Beispielsysteme im Anhang

das eine Eigenheit des menschlichen Geistes ist. Auch sollte die Interaktion zwischen den Turtels noch verbessert und präziser kalibriert werden, da uns Fehlermeldungen durch den gesamten Verlauf begleiteten.

4.2.3. System I

amount-of-food:	7
amount-of-wood:	7
amount-of-water:	7
num-people:	211
regrowth-rate:	47
max-vision:	10
life-expectancy-min:	80
life-expectancy-max:	100
birthrate:	1.3
tax:	10
metabolism-max:	6

Ergebnis:

Ausgeglichenes, faires System

Stabile Population von 80

Fast ideale, gerade Lorenzkurve

Upper-middle-class: reichste, größte Klasse

Gesamtpopulation wird immer reicher

Screenshot 1 (früher) & 2 (am Ende)

im Anhang

4.2.4. System II

amount-of-food:	10
amount-of-wood:	10
amount-of-water:	10
num-people:	200
regrowth-rate:	25
max-vision:	8
life-expectancy-min:	95
life-expectancy-max:	100
birthrate:	3,3
tax:	0
metabolism-max:	14

Ergebnis:

Unfares, ausbeutendes System

Stabile Bevölkerung

Sehr viele Arme, nur wenig Reiche

Arme haben nichts, Reiche extrem viel

Sehr große Fläche in Lorenzkurve

(fast L-förmig)

Screenshot 3 im Anhang

4.2.5. System III

amount-of-food:	10
amount-of-wood:	6
amount-of-water:	2
num-people:	224
regrowth-rate:	59
max-vision:	10
life-expectancy-min:	70
life-expectancy-max:	80
birthrate:	2,0
tax:	10
metabolism-max:	5
strength-min	0
strength-max	50
election-interval	6

Ergebnis:

Solides, wachsendes System

Steigende Bevölkerung

Ausgeglichene Verteilung der Kästen und des Reichtums

Beinahe ideale Lorenzkurve für Reichtum

Extrem unfaire Verteilung der Entscheidungskraft

Screenshot 4 im Anhang

Anmerkung:

Die Systeme I und II simulieren eine rein auf Handel und Reichtum ausgerichtete Gesellschaft. System III beinhaltet bereits eine Art von Demokratie, die an dem Wert Entscheidungskraft gemessen wird. Die Turtles führen Abstimmungen über die Verwendung von Feldern durch und verändern ihren EK-Wert durch interaktives Handeln. Dieses Beispiel folgt nicht dem FEE-System, sondern verwendet ein eigenes Konzept, in dem die reichen Gesellschaftsschichten bezüglich Entscheidungskraftverteilung deutlich bevorzugt werden. So stellt dies zwar kein faires System dar, kommt der Realität jedoch näher.

5. Nachwort

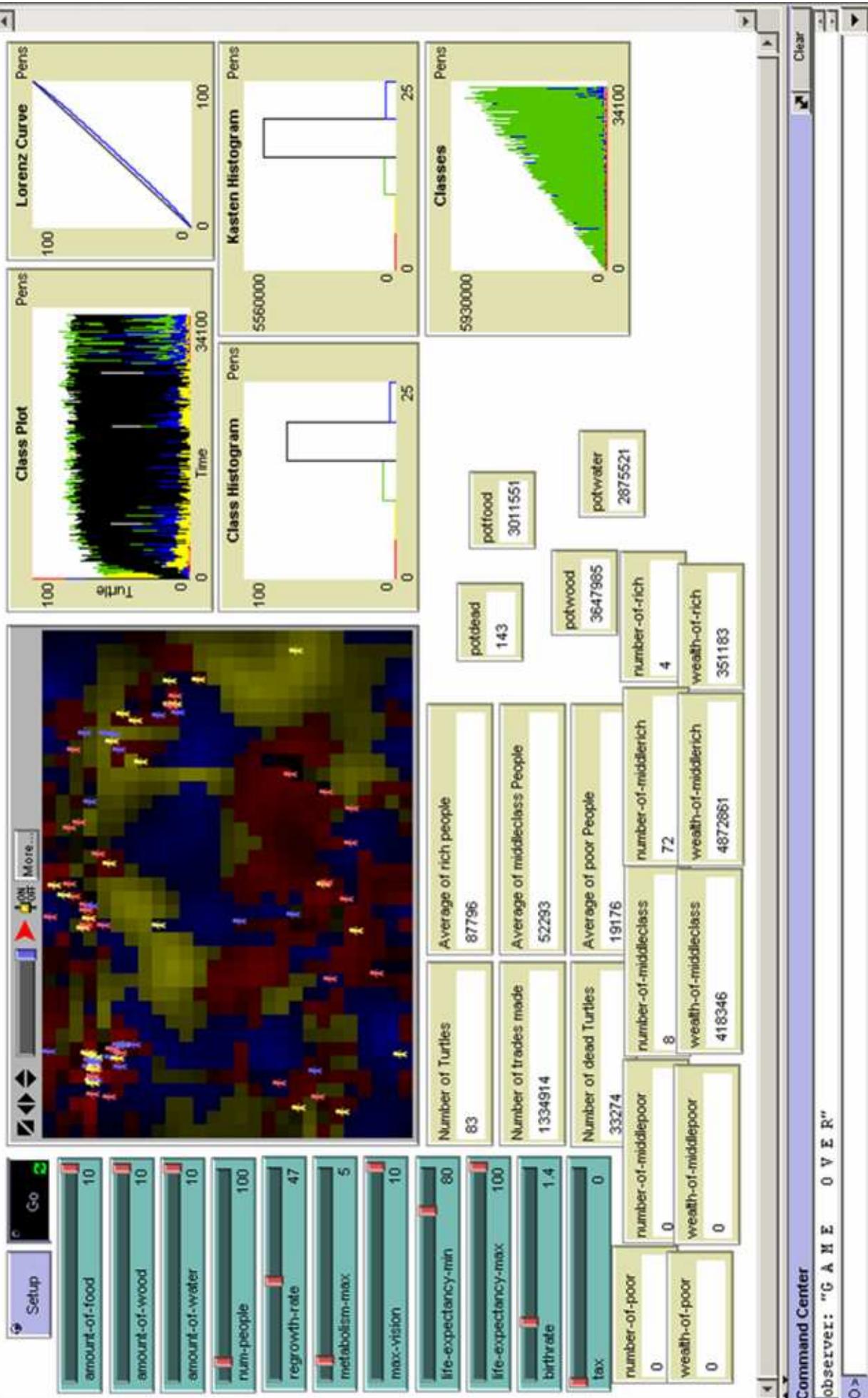
Das Projekt war mit Sicherheit ein sehr zeitaufwändiges und anstrengendes, aber auch ein sehr lehrreiches, anspruchsvolles und interessantes. Wir haben unsere Teamfähigkeit verbessert und unser Interesse in angewandter Mathematik im speziellen in Modellierung von nicht naturwissenschaftlichen Problemstellungen, die auf den ersten Blick nur wenig Bezug zur Mathematik haben, gesteigert. Es gestaltete sich anfangs schwer, das Programm nach unseren Wünschen zu modifizieren, doch nach und nach wurden unsere Simulationen immer besser und präziser. Unser Betreuer Stephen Keeling hat uns tatkräftig unterstützt, uns immer wieder zu neuen Ideen angeregt und uns auch in ihrer Bewerkstelligung geholfen. Auch war unsere Gruppeneinteilung eine sehr effiziente, da jeder seine Talente positiv einbringen und wir uns die Arbeit fair und produktiv aufteilen konnten. Obwohl es natürlich einige Meinungsverschiedenheiten bezüglich des Konzeptes und seiner Ausführung gab, haben wir uns immer konstruktive und demokratisch auf Kompromisse geeinigt.

Allen hat die Arbeit sehr gut gefallen und wir haben davon profitiert. Wahrscheinlich sind wir jetzt noch begeisterter und enthusiastischer an weiteren Mathematikprojekten teilzunehmen.

An dieser Stelle noch einmal herzlichen Dank an die Betreuer, die Lehrer und die Sponsoren, die uns eine unvergessliche Woche ermöglicht haben, sowie an die ca. **~ 1 328 947 Turtles**, die während unserer Versuche ums Leben kamen ☺☺☺

6. Anhang

- Screenshot 1 (System I)
- Screenshot 2 (System I)
- Screenshot 3 (System II)
- Screenshot 4 (System III)
- Vollständiger Quelltext



NetLogo: trade-thx-withoutEK

File Edit Tools Zoom Tabs Help

Interface Information Procedures Errors

Setup Go

amount-of-food 10

amount-of-wood 10

amount-of-water 10

num-people 100

regrowth-rate 47

metabolism-max 5

max-vision 10

life-expectancy-min 80

Number of Turtles 87

Average of rich people 3136396

life-expectancy-max 100

Number of trades made 13148174

birthrate 1.4

tax 0

number-of-poor 0

number-of-middlepoor 0

wealth-of-poor 0

number-of-middleclass 4

wealth-of-middlepoor 0

number-of-rich 70

wealth-of-middlerich 7487385

number-of-middlerich 13

wealth-of-rich 187514976

wealth-of-middlerich 40773149

Setup Go

abc Button Slider On/Off Switch Chooser Monitor Plot Output Text

More...

Class Plot Pens

Turtle Pens

Time 327000

Class Histogram Pens

potdead 139

potfood 118136377

clock 323944

potwood 144148680

potwater 119578024

Classes Pens

2.39E8

0 0 327000

Kasten Histogram Pens

0 0 100

Lorenz Curve Pens

0 0 100

Clear

Command Center

0 > inspect one-of turtles with [wealth = max values-from turtles[wealth]]

0 >

NetLogo: trade-thx-withoutEK

File Edit Tools Zoom Tabs Help

Interface | Information | Procedures | Errors |

Setup Go 2

amount-of-food 10
amount-of-wood 10
amount-of-water 10
num-people 200
regrowth-rate 25
metabolism-max 14
max-vision 8

life-expectancy-min 95
life-expectancy-max 100
birth-rate 3.3
tax 0

number-of-poor 406
wealth-of-poor 4258

Average of rich people 310
Number of trades made 3227472
Number of dead Turtles 125540
number-of-middlepoor 66
wealth-of-middlepoor 9793

Average of middle-class People 148
Number of dead turtles 10
number-of-middleclass 21
wealth-of-middleclass 4169

Average of poor People 148
Number of dead turtles 10
number-of-rich 1
wealth-of-rich 310

Pens

Lorenz Curve

Class Plot

Class Histogram

Kasten Histogram

Kasten

Classes

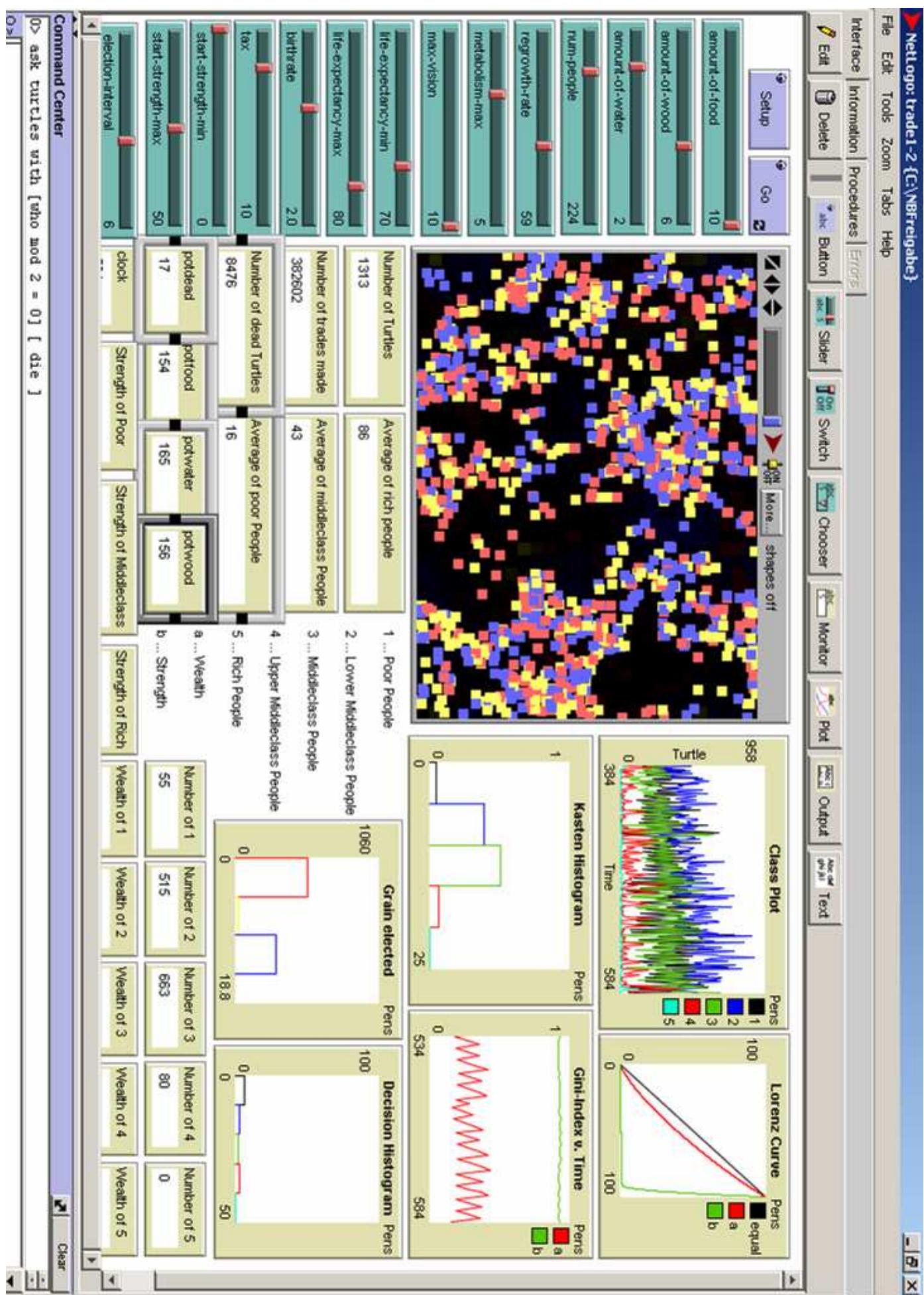
Clear

Command Center

0> inspect one-of turtles with [wealth < 3]

0>

18



```

;; Modellierungwoche mit Mathematik
;; Projekt 5: Sozialwissenschaften
;; Rudolf Griss, Michael Hsieh, Georg Michelitsch, Christoph Planitzer,
Stefan Raminger, Jan Schifko, Christoph Triebel, Markus Weger
;; unter der Leitung: Dr. Stephen Keeling

globals
[
  clock      ; keeps track of the time through the 'go' procedure
  max-ress   ; the maximum amount of whatever each patch can hold

  average-EK ; average strength of decision
  turtle-to-trade-with

  gfood      ; some constants
  gwood
  gwater

  potfood
  potwood
  potwater
  potdead

  rich
  middlerich
  middleclass
  middlepoor
  poor

  avg-of-poor
  avg-of-rich
  avg-of-middle

  trades-made
  dead-turtles

  mcolor

  wealth-of-rich ;; Wealth of rich People (monitor)
  wealth-of-middlerich
  wealth-of-middleclass
  wealth-of-middlepoor
  wealth-of-poor

  number-of-rich
  number-of-middlerich
  number-of-middleclass
  number-of-middlepoor
  number-of-poor

  strength-of-poor
  strength-of-middleclass
  strength-of-rich

  mgn
  ygn
  mygn
  ymgn
  geb
]

```

```

patches-own
[
  food-here      ; the current amount of food on this patch
  water-here    ; the current amount of water on this patch
  wood-here     ; the current amount of wood on this patch

  max-food-here ; the maximum amount of food this patch can hold
  max-wood-here ; the maximum amount of wood this patch can hold
  max-water-here ; the maximum amount of water this patch can hold

  elected        ; election constants
  has-elected

]

turtles-own
[
  wealth-step      ; each agent is classified in one of three wealth-step
(poor, middle, rich)
  wealth          ; sum-up of all goods
  food            ; how much food they have
  water           ; how much water they have
  wood            ; how much wood they have
  credits         ; how much credits (money) they have

  age             ; how old the agent is
  life-expectancy ; a random amount of time (calculated with minimum
expectancy and maximum expectancy) they can live
  metabolism      ; amount of ressources they use each tick

  vision          ; how many patches ahead a turtle can see
  strength        ; decision strength

  aggr-char       ; aggressivity variable

]

::::::::::::::::::
::::::

to setup
  ca ; clear all
;; set constants
  set poor 0      ; key number of poor people
  set middlepoor 1
  set middleclass 2 ; key number of middleclass people
  set middlerich 3
  set rich 4      ; key number of rich people
;; New Turtles get a certain amount of ressources from the pot
  set geb 0
  set potfood (birthrate / 100) * num-people * ((life-expectancy-max +
life-expectancy-min)/ 2)* 100
  set potwood (birthrate / 100) * num-people * ((life-expectancy-max +
life-expectancy-min)/ 2)* 100
  set potwater (birthrate / 100) * num-people * ((life-expectancy-max +
life-expectancy-min)/ 2)* 100
  set potdead round ((birthrate / 100) * num-people * ((life-expectancy-max +
life-expectancy-min)/ 2)) + 1

  set gwater 0
  set gfood 1
  set gwood 2

  set max-ress 500 ; amount of ressources that can be on a patch

```

```

set clock 0      ; clock is set to zero
set dead-turtles 0 ; dead turtles are set zero

set trades-made 0
; call other procedures to set up various parts of the world
setup-patches
setup-turtles
setup-plots
; plot the initial state of the world
update-plots
end
;;;;;;;;;;;;;;;
;;;;;;;;;;;

to setup-patches
; give some patches the highest amount of grain possible --
; these patches are the "best land"

ask patches
[ set max-food-here 0
  if (random-float 100.0) <= amount-of-food
  [ set max-food-here max-ress
    set food-here max-food-here
  ]
]
; spread that grain around the window a little and put a little back
; into the patches that are the "best land" found above

ask patches with [ food-here = 0 ]
[ set max-wood-here 0
  if (random-float 100.0) <= amount-of-wood
  [ set max-wood-here max-ress
    set wood-here max-wood-here ] ]

ask patches with [ (food-here = 0) and (wood-here = 0) ]
[ set max-water-here 0
  if (random-float 100.0) <= amount-of-water
  [ set max-water-here max-ress
    set water-here max-water-here ] ]

repeat 5
[ ask patches with [wood-here != 0]
  [ set wood-here max-wood-here ]
ask patches with [food-here != 0]
  [ set food-here max-food-here ]
ask patches with [water-here != 0]
  [ set water-here max-water-here ]
diffuse wood-here 0.25
diffuse food-here 0.25
diffuse water-here 0.25
]
repeat 15 ; spread the grain around some more
[ diffuse wood-here 0.25
diffuse food-here 0.25
diffuse water-here 0.25]
ask patches
[
  set food-here floor food-here
  set wood-here floor wood-here
  set water-here floor water-here

  set max-food-here food-here ; initial grain level is also maximum
  set max-wood-here wood-here

```

```

    set max-water-here water-here
    recolor-patch ]

end
;::::::::::::::::::::::::::;
;::::::::::::::::::;

to recolor-patch ; patch procedure -- use color to indicate the good
; the color depends on the ressource which is on the patch with the
highest value
  if ( wood-here > water-here and wood-here > food-here ) [
    set pcolor scale-color yellow wood-here 0 max-ress ]
  if ( food-here > water-here and food-here >= wood-here ) [
    set pcolor scale-color red food-here 0 max-ress ]

  if ( water-here >= food-here and water-here >= wood-here ) [
    set pcolor scale-color blue water-here 0 max-ress ]
;  if (food-here = 0) or (wood-here = 0) or (water-here = 0) [ set pcolor
green ]
end
;::::::::::::::::::::::::::;
;::::::::::::::::::;

to regrow
  ; makes ressources regrow

  if elected = gfood
  [
    set food-here food-here + max-food-here * (regrowth-rate / 1000)
    if food-here > max-food-here
    [ set food-here max-food-here ]
  ]
  if elected = gwood
  [
    set wood-here wood-here + max-wood-here * (regrowth-rate / 1000)
    if wood-here > max-wood-here
    [ set wood-here max-wood-here ]
  ]
  if elected = gwater
  [
    set water-here water-here + max-water-here * (regrowth-rate / 1000)
    if water-here > max-water-here
    [ set water-here max-water-here ]
  ]
end

to-report election
; tell patches the result of the election
  let electing-turtles turtles in-radius max-vision with [aggr-char < 0]

  let food-elected sum values-from electing-turtles with [color = red +
2][strength]
  let wood-elected sum values-from electing-turtles with [color = yellow +
2][strength]
  let water-elected sum values-from electing-turtles with [color = blue +
2][strength]

  set electing-turtles turtles in-radius max-vision with [aggr-char >= 0 ]
  set food-elected food-elected + sum values-from electing-turtles with
[(grain-needed turtle who) = gfood][strength]

```

```

set wood-elected wood-elected + sum values-from electing-turtles with
[(grain-needed turtle who) = gwood][strength]
set water-elected water-elected + sum values-from electing-turtles with
[(grain-needed turtle who) = gwater][strength]

if gfood = gwood and gwood = gwater [ report random 3 ]
if food-elected >= wood-elected and food-elected > water-elected
[
  ifelse max-food-here > 0
  [ report gfood ]
  [ ifelse max-wood-here > max-water-here
    [ report wood ]
    [ report water ]
  ]
]
if wood-elected > food-elected and wood-elected > water-elected
[
  ifelse max-wood-here > 0
  [ report gwood ]
  [ ifelse max-food-here > max-water-here
    [ report food ]
    [ report water ]
  ]
]
if water-elected >= wood-elected and water-elected >= food-elected
[
  ifelse max-water-here > 0
  [ report gwater ]
  [ ifelse max-wood-here > max-food-here
    [ report wood ]
    [ report food ]
  ]
]
]
end
;;;;;;;;;;;;;;
;;;;;;;;;;;;;;
to setup-turtles
  set-default-shape turtles "person"
  no-display ; so we don't see the turtles until they're recolored
  ; attributes of people
  repeat num-people [ setup-one-turtle ]
  color-turtles
  display
end
;;;;;;;;;;;;;;
;;;;;;;;;;;;;;
to setup-one-turtle
  cct 1
  [ setxy (random screen-size-x)
    (random screen-size-y)
    set-initial-turtle-vars
    set age 0
;    set food start-ressources + random-float start-ressources ; each
;    turtle has 100 food when it starts
;    set water start-ressources + random-float start-ressources ; each
;    turtle has 100 water when it starts
;    set wood start-ressources + random-float start-ressources ; each
;    turtle has 100 wood when it starts
    set strength start-strength-min + random-float (start-strength-max -
start-strength-min)
    set wealth food + water + wood ; defines wealth of each turtle

```

```

        set aggr-char (random-float 10) - 5
    ]
end
;;;;;;;;;;;;;;
;

to color-turtles
  ask turtles
  [
    if color != blue + 2 and color != red + 2 and color != yellow + 2
    [
      let temp random 3
      ifelse temp = 0           ;; if the "dice" returns 0 ...
      [ set color blue + 2 ]    ;; ... color of the turtle is blue+2
      [ ifelse temp = 1          ;; if the dice returns 1
        [ set color red + 2 ]    ;; color of turtle is red
        [ set color yellow + 2 ]  ;; if it's another value, color of turtle
is yellow
      ]
    ]
  ]
end
;;;;;;;;;;;;;;
;

to set-initial-turtle-vars
  set age 0           ;; each turtle is 0 years old
  set heading random-float 360 ;; they look in any direction
  set life-expectancy life-expectancy-min + random-float (life-expectancy-
max - life-expectancy-min + 1) ;; calculates life expectancy
  set metabolism random-float metabolism-max ;; set value of metabolism of
each turtle

  set food round (potfood / potdead)    ;; each turtle has 100 food when
it starts
  set potfood potfood - (potfood / potdead)
  set wood round (potwood / potdead)   ;; each turtle has 100 wood when it
starts
  set potwood potwood - (potwood / potdead)
  set water round (potwater / potdead) ;; each turtle has 100 water when
it starts
  set potwater potwater - (potwater / potdead)
  if potdead > 1
  [ set potdead potdead - 1 ]

  set vision 1 + random max-vision ;; each turtle has a sightrange of 1
end
;;;;;;;;;;;;;;
;

to go
  if count turtles <= 0
  [
    set wealth-of-rich 0
    set wealth-of-middleclass 0
    set wealth-of-poor 0

    set number-of-rich 0
    set number-of-middleclass 0
    set number-of-poor 0
  ]

```

```

show "G A M E      O V E R" ;; if every turtle is dead, the Game is Over
>:-]
  stop
]

set clock clock + 1 ;; clock is running!

social-security ;; taxes

ask turtles
[
  without-interruption
  [
    rebirth
    turn-towards-ressources
    fd 1
    move-eat-age-die
    get-ressources
    set-wealth
  ]
]
ask patches [ set has-elected 0 ]
ask turtles
[
  if clock mod election-interval = 0
  [
    set elected election
  ]
]
if clock mod election-interval = 0 [ update-election-bars ]
ask patches
[
  regrow
  recolor-patch
]
update-plots
end
;;;;;;;;;;;;;;
;;;;;;;;;;;;;;
;

to get-ressources
let profession 0
ifelse color = blue + 2
[ set profession gwater ]
[ ifelse color = red + 2
  [ set profession gfood ]
  [ set profession gwood ]
]

ifelse turtle-to-trade-with = nobody ;; if no matching turtle is in the
near, turtle harvests
[ harvest-grain profession ]
[ let nix trade (turtle who) (turtle-to-trade-with) true]
end
;;;;;;;;;;;;;;
;;;;;;;;;;;;;;
;

to-report grain-needed [this-turtle]
  if water-of this-turtle <= food-of this-turtle and water-of this-turtle
  <= wood-of this-turtle [ report gwater ]
  if food-of this-turtle < water-of this-turtle and food-of this-turtle <=
  wood-of this-turtle [ report gfood ]

```

```

if wood-of this-turtle < water-of this-turtle and wood-of this-turtle <
food-of this-turtle      [ report gwood ]
end
;;;;;;;;;;;;;;
;;;;;;;;;;;;;;
to turn-towards-ressources
  let profession 0
  ifelse color = blue + 2
  [ set profession gwater ]
  [ ifelse color = red + 2
    [ set profession gfood ]
    [ set profession gwood ]
  ]
  ifelse grain-needed turtle who = profession
  [ turn-towards-grain profession
    set turtle-to-trade-with nobody ]
  [ set turtle-to-trade-with find-other-turtle turtle who
    ;show turtle-to-trade-with
    ifelse turtle-to-trade-with = nobody
    [ turn-towards-grain profession ]
    [ if xcor-of turtle-to-trade-with != xcor and ycor-of turtle-to-trade-
with != ycor [set heading towards turtle-to-trade-with ] ]
  ]
end
;;;;;;;;;;;;;;
;;;;;;;;;;;;;;
to turn-towards-grain [this-color]
  set heading random-float 360
  let best-direction 0
  let best-amount 0
  foreach n-values 8 [?]
  [ set heading 360 / 8 * ?
    if (grain-ahead this-color > best-amount)
    [ set best-direction heading
      set best-amount grain-ahead this-color ]
  ]
  set heading best-direction
end
;;;;;;;;;;;;;;
;;;;;;;;;;;;;;
to-report grain-ahead [this-color]
  let best-amount 0
  ifelse this-color = gfood
  [ foreach n-values vision [?]
    [ set best-amount best-amount + food-here-of patch-ahead ? ] ]
  [ ifelse this-color = gwood
    [ foreach n-values vision [?]
      [ set best-amount best-amount + wood-here-of patch-ahead ? ] ]
    [ foreach n-values vision [?]
      [ set best-amount best-amount + water-here-of patch-ahead ? ] ]
  ]
  report best-amount
end
;;;;;;;;;;;;;;
;;;;;;;;;;;;;;
to harvest-grain [this-color]
  if ( this-color = gfood)
  [ harvest-food ]

```

```

if ( this-color = gwater)
[ harvest-water ]
if ( this-color = gwood)
[ harvest-wood ]
end
;::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::
;::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::

to-report find-other-turtle [ this-turtle ]
let best-turtle nobody
let best-amount 0
let temp-amount 0
let this-grain-needed grain-needed this-turtle
let temp-heading heading-of this-turtle
set heading-of this-turtle 0
let index 0
foreach n-values 8 [?]
[
  set index ?
  set heading (index * 360 / 8)
  foreach n-values vision-of this-turtle [?1]
  [
    let temp-turtle one-of turtles-on patch-ahead ?1
    if temp-turtle != nobody and temp-turtle != this-turtle
    [ ifelse best-turtle != nobody
    [
      set temp-amount trade this-turtle temp-turtle false / ( ?1 +
0.001 )

      if temp-amount > best-amount
      [
        set best-turtle temp-turtle
        set best-amount temp-amount
      ]
    ]
    [ set best-turtle temp-turtle
      set best-amount trade this-turtle best-turtle false / ( ?1 +
0.001 ) ]
    ]
  ]
; show list best-turtle best-amount
set heading-of this-turtle temp-heading
ifelse best-amount > 0
[ report best-turtle ]
[ report nobody ]
end
;::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::
;::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::::

to-report trade [ first-turtle second-turtle do-trade]
let wmgm grain-needed first-turtle
let wygn grain-needed second-turtle
let amount-of-trade 0
let temp 0

ifelse wmgm = wygn
[
]
[
if wmgm = 0
[set mgn water-of first-turtle

```

```

set ymgn water-of second-turtle]
if wmgm = 1
[set mgn food-of first-turtle
set ymgn food-of second-turtle]
if wmgm = 2
[set mgn wood-of first-turtle
set ymgn wood-of second-turtle]

if wygn = 0
[set ygn water-of second-turtle
set mygn water-of first-turtle]
if wygn = 1
[set ygn food-of second-turtle
set mygn food-of first-turtle]
if wygn = 2
[set ygn wood-of second-turtle
set mygn wood-of first-turtle]

ifelse (mgn - mygn) * (ymgn - ygn) > 0
[ set amount-of-trade 0 ]
[
ifelse ((abs(mgn - mygn)) / 2) > ((abs(ymgn - ygn)) / 2)
[set amount-of-trade ((abs(ymgn - ygn)) / 2)]
[set amount-of-trade ((abs(mgn - mygn)) / 2)]
; show list "trade" list amount-of-trade do-trade

if amount-of-trade > 0 and do-trade
[ if (strength-of first-turtle + strength-of second-turtle) = 0
  [set strength-of first-turtle 1]
  let EK-first (strength-of first-turtle) / (strength-of first-turtle +
strength-of second-turtle)
  let EK-second (strength-of second-turtle) / (strength-of first-turtle +
strength-of second-turtle)

  ifelse mgn < mygn
  [ set mgn mgn + amount-of-trade * EK-first
    set ymgn ymgn - amount-of-trade * EK-first
    set mygn mygn - amount-of-trade * EK-second
    set ygn ygn + amount-of-trade * EK-second

    set temp mygn - mgn
    ifelse temp > 100
    [ set temp temp / 500 ]
    [ set temp temp / 20 ]
  ]
  [ set mgn mgn - amount-of-trade * EK-second
    set ymgn ymgn + amount-of-trade * EK-second
    set mygn mygn + amount-of-trade * EK-first
    set ygn ygn - amount-of-trade * EK-first

    set temp mgn - mygn

    ifelse temp > 100
    [ set temp temp / 500 ]
    [ set temp temp / 20 ]
  ]
  set trades-made trades-made + 1

  set strength-of first-turtle ( strength-of first-turtle + value-from
first-turtle [wealth] ) / (1000)
  if strength-of first-turtle > 100 [ set strength-of first-turtle 100 ]

```

```

]]]
if wmgm = 0
[set water-of first-turtle mgn
set water-of second-turtle ymgn]
if wmgm = 1
[set food-of first-turtle mgn
set food-of second-turtle ymgn]
if wmgm = 2
[set wood-of first-turtle mgn
set wood-of second-turtle ymgn]

if wygn = 0
[set water-of second-turtle ygn
set water-of first-turtle mygn]
if wygn = 1
[set food-of second-turtle ygn
set food-of first-turtle mygn]
if wygn = 2
[set wood-of second-turtle ygn
set wood-of first-turtle mygn]
]

;show amount-of-trade
report amount-of-trade
end
::::::::::::::::::
::::::::::::::::::

to set-wealth ; decides wealth-status of turtle (rich, upper middleclass
(middlerich), middleclass, lower middleclass (middlelow), poor)
  set wealth food + wood + water
  let max-wealth max values-from turtles [wealth]

  ifelse (wealth <= max-wealth / 5)
  [ set wealth-step poor ]
  [
    ifelse (wealth <= ((2 * max-wealth) / 5))
    [ set wealth-step middlepoor ]
    [
      ifelse (wealth <= ((3 * max-wealth) / 5))
      [ set wealth-step middleclass ]
      [
        ifelse (wealth <= ((4 * max-wealth) / 5))
        [ set wealth-step middlerich ]
        [ set wealth-step rich ]
        ]]]
end
::::::::::::::::::
::::::::::::::::::

to harvest-food ; they harvest food
; have turtles harvest before any turtle sets the patch to 0

  set food (food + (food-here / (count turtles-here with [color = red +
2])))
; now that the grain has been harvested, have the turtles make the
; patches which they are on have no grain
  set food-here 0
end
::::::::::::::::::
::::::::::::::::::

to harvest-wood ; they harvest wood

```

```

; have turtles harvest before any turtle sets the patch to 0
  set wood (wood + (wood-here / (count turtles-here with [color = yellow +
2])))
  ; now that the grain has been harvested, have the turtles make the
  ; patches which they are on have no grain
  set wood-here 0
end
;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;
;

to harvest-water ;; they harvest water
  ; have turtles harvest before any turtle sets the patch to 0

  set water (water + (water-here / (count turtles-here with [color = blue
+ 2])))
  ; now that the grain has been harvested, have the turtles make the
  ; patches which they are on have no grain
  set water-here 0

end
;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;
;

to social-security ; Rich turtles pay more than poor turtles
  if count turtles with [wealth-step = poor] * 3 > count turtles
  [
    ask turtles with [wealth-step = poor]
    [
      set water water + tax
      set food food + tax
      set wood wood + tax
    ]
    ask turtles with [wealth-step = rich]
    [
      set water water - round ((count turtles with [wealth-step = poor])
/ (count turtles with [wealth-step = rich]))
      set food food - round ((count turtles with [wealth-step = poor]) /
(count turtles with [wealth-step = rich]))
      set wood wood - round ((count turtles with [wealth-step = poor]) /
(count turtles with [wealth-step = rich]))
    ]
    ask turtles with [wealth-step = middlepoor]
    [
      set water water + tax / 2
      set food food + tax / 2
      set wood wood + tax / 2
    ]
    ask turtles with [wealth-step = middlerich]
    [
      set water water - round ((count turtles with [wealth-step =
middlepoor]) / (count turtles with [wealth-step = middlerich]) / 2 )
      set food food - round ((count turtles with [wealth-step =
middlepoor]) / (count turtles with [wealth-step = middlerich]) / 2 )
      set wood wood - round ((count turtles with [wealth-step =
middlepoor]) / (count turtles with [wealth-step = middlerich]) / 2 )
    ]
  ]
end
;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;;
;

to rebirth

```

```

if random-float 100 < birthrate
[ set water water / 2
  set food food / 2
  set wood wood / 2
  hatch 1
  [
    set-initial-turtle-vars
    set age 0
    set strength start-strength-min + random-float (start-strength-max -
start-strength-min)
    set wealth food + water + wood ; defines wealth of each turtle

    let temp random 3
    ifelse temp = 0 ; if the "dice" returns 0 ...

    [ set color blue + 2 ] ; ... color of the turtle is blue+2
    [ ifelse temp = 1 ; if the dice returns 1
      [ set color red + 2 ] ; color of turtle is red
      [ set color yellow + 2 ] ; if it's another value, color of turtle
is yellow
    ]
  ]
end
::::::::::::::::::
::::::::::

to move-eat-age-die ; turtle procedure

; consume some grain according to metabolism
set food (food - metabolism)
set wood (wood - metabolism)
set water (water - metabolism)
; grow older
set age (age + 1)
; check for death conditions: if you have no grain or
; you're older than the life expectancy or if some random factor
; holds, then you "die" and are "reborn" (in fact, your variables
; are just reset to new random values)
if (food < 0)
[
  set age (age - food)
  set food 0
]
if (water < 0)
[
  set age (age - water)
  set water 0
]
if (wood < 0)
[
  set age (age - wood)
  set wood 0
]
if (age > life-expectancy)
[
  ; Pots get filled
  set dead-turtles dead-turtles + 1
  set potdead potdead + 1
  set potfood potfood + food
  set potwood potwood + wood
  set potwater potwater + water
  die
]

```

```

        ]
end

;;
;; PLOTTING
;;

to setup-plots
  set-current-plot "Class Plot"
  set-plot-y-range 0 num-people
  set-current-plot "Kasten Histogram"
  set-plot-y-range 0 1

  set-current-plot "Decision Histogram"
  set-plot-y-range 0 100

end
;;;;;;;;;;;;;;
;;;

to update-plots
  update-class-plot
  update-lorenz-and-gini-plots
  update-kasten-histogram

  update-decision-power-histogram
end
;;;;;;;;;;;;;;
;;;

to update-decision-power-histogram

  set-current-plot "Decision Histogram"
  if clock = 2 [ set-plot-y-range 0 100 ]
  plot-pen-reset
  set-plot-pen-color black
  plot sum values-from turtles with [wealth-step = poor] [ strength ] /
  (number-of-poor + 1)
  set-plot-pen-color blue
  plot sum values-from turtles with [wealth-step = middlepoor] [ strength ] /
  (number-of-middlepoor + 1)
  set-plot-pen-color green
  plot sum values-from turtles with [wealth-step = middleclass] [ strength ] /
  (number-of-middleclass + 1)
  set-plot-pen-color red
  plot sum values-from turtles with [wealth-step = middlerich] [ strength ] /
  (number-of-middlerich + 1)
  set-plot-pen-color turquoise
  plot sum values-from turtles with [wealth-step = rich] [ strength ] /
  (number-of-rich + 1)

  set strength-of-poor sum values-from turtles with [wealth-step = poor] [
  strength ]
  set strength-of-middleclass sum values-from turtles with [wealth-step =
  middleclass] [ strength ]
  set strength-of-rich sum values-from turtles with [wealth-step = rich] [
  strength ]
end
;;;;;;;;;;;;;;
;;;
```

```

to update-class-histogram
  set-current-plot "Class Histogram"
  plot-pen-reset
  set-plot-pen-color black
  plot sum values-from turtles with [wealth-step = poor] [wealth]
  set-plot-pen-color blue
  plot sum values-from turtles with [wealth-step = middlepoor] [wealth]
  set-plot-pen-color green
  plot sum values-from turtles with [wealth-step = middleclass][wealth]
  set-plot-pen-color red
  plot sum values-from turtles with [wealth-step = middlerich][wealth]
  set-plot-pen-color turquoise
  plot sum values-from turtles with [wealth-step = rich][wealth]
end
;;;;;;;;;;;;;;;
;;;;;;;

to update-class-plot ;; this does a line plot of the number of people of
each class
  set-current-plot "Class Plot"
  if ( clock > 200 ) [
    set-plot-x-range (clock - 200) clock
  ]
  if ( clock = 2 ) [ set-plot-y-range 0 1 ]
  set-current-plot-pen "1"
  plot count turtles with [wealth-step = poor]
  set-current-plot-pen "2"
  plot count turtles with [wealth-step = middlepoor]
  set-current-plot-pen "3"
  plot count turtles with [wealth-step = middleclass]
  set-current-plot-pen "4"
  plot count turtles with [wealth-step = middlerich]
  set-current-plot-pen "5"
  plot count turtles with [wealth-step = rich]
  ;;;;;;; set variables for
  ;;; wealth and numbers
  set wealth-of-rich sum (values-from turtles with [wealth-step = rich]
  [wealth])
  set wealth-of-middlerich sum (values-from turtles with [wealth-step =
  middlerich] [wealth])
  set wealth-of-middleclass sum (values-from turtles with [wealth-step =
  middleclass] [wealth])
  set wealth-of-middlepoor sum (values-from turtles with [wealth-step =
  middlepoor] [wealth])
  set wealth-of-poor sum (values-from turtles with [wealth-step = poor ]
  [wealth])

  set number-of-rich count turtles with [wealth-step = rich ]
  set number-of-middlerich count turtles with [wealth-step = middlerich ]
  set number-of-middleclass count turtles with [wealth-step = middleclass ]
  set number-of-middlepoor count turtles with [ wealth-step = middlepoor ]
  set number-of-poor count turtles with [ wealth-step = poor ]
  ;;;;;;;
  if number-of-rich > 0 ;;;;;; calculates averages
  [
    set avg-of-rich wealth-of-rich / number-of-rich
  ]
  if number-of-middleclass > 0
  [
    set avg-of-middle wealth-of-middleclass / number-of-middleclass
  ]
  if number-of-poor > 0
  [

```

```

set avg-of-poor wealth-of-poor / number-of-poor
]
end
;;;;;;;;;;;;;;
;;;;;;;

to update-kasten-histogram
  set-current-plot "Kasten Histogram"
  plot-pen-reset
  set-plot-pen-color black
  plot get-wealth-class poor
  set-plot-pen-color blue
  plot get-wealth-class middlepoor
  set-plot-pen-color green
  plot get-wealth-class middleclass
  set-plot-pen-color red
  plot get-wealth-class middlerich
  set-plot-pen-color turquoise
  plot get-wealth-class rich
end
;;;;;;;;;;;;;;
;;;;;;;

to-report get-wealth-class [this-wealth-step]
  let temp count turtles
  if temp = 0 [ set temp 1 ]
  report (count turtles with [ wealth-step = this-wealth-step ]) / temp
end
;;;;;;;;;;;;;;
;;;;;;;

to-report get-average-wealth [this-wealth-step]
  let temp count turtles with [wealth-step = this-wealth-step]
  set temp temp * sum values-from turtles [wealth]
  if temp = 0 [ set temp 0.0001 ] ;;; bugfix for 0-division
  report (sum values-from turtles with [wealth-step = poor] [wealth]) /
temp
end
;;;;;;;;;;;;;;
;;;;;;;

to update-lorenz-and-gini-plots
  set-current-plot "Lorenz Curve"
  clear-plot

  ; draw a straight line from lower left to upper right
  set-current-plot-pen "equal"
  plot 0
  plot 100

  set-current-plot-pen "a"
  let num-of-people count turtles
  if num-of-people <= 0 [stop]

  set-plot-pen-interval 100 / num-of-people
  plot 0

  let sorted-wealths sort values-from turtles [wealth]
  let total-wealth sum sorted-wealths

  let wealth-sum-so-far 0
  let index 0

```

```

let gini-index-reserve 0

;; now actually plot the Lorenz curve -- along the way, we also
;; calculate the Gini index

repeat num-of-people [

if total-wealth = 0 [ set total-wealth 1 ]
  set wealth-sum-so-far (wealth-sum-so-far + item index sorted-wealths)
  plot (wealth-sum-so-far / total-wealth) * 100
  set index (index + 1)
  set gini-index-reserve
    gini-index-reserve +
    (index / num-of-people) -
    (wealth-sum-so-far / total-wealth)
]

set-current-plot-pen "b"
set-plot-pen-interval 100 / num-of-people
plot 0

let sorted-strengths sort values-from turtles [strength]
let total-strength sum sorted-strengths
let strength-sum-so-far 0
let strengthindex 0
let strength-gini-index-reserve 0

repeat num-of-people [

if total-strength = 0 [ set total-strength 1 ]
  set strength-sum-so-far (strength-sum-so-far + item strengthindex
sorted-strengths)
  plot (strength-sum-so-far / total-strength) * 100
  set strengthindex (strengthindex + 1)
  set strength-gini-index-reserve
    strength-gini-index-reserve + (strengthindex / num-of-people ) -
  (strength-sum-so-far / total-strength)
]

;; plot Gini Index
set-current-plot "Gini-Index v. Time"
if ( clock > 50 ) [
set-plot-x-range (clock - 50) clock ]
set num-of-people count turtles
set-current-plot-pen "a"
plot (gini-index-reserve / num-of-people) / area-of-equality-triangle
set-current-plot-pen "b"
plot (strength-gini-index-reserve / num-of-people) / area-of-equality-
triangle
end
;;;;;;;;;;;;;;
;;;;;;
to-report area-of-equality-triangle
  ; not really necessary to compute this when num-people is large;
  ; if num-people is large, could just use estimate of 0.5
  report (num-people * (num-people - 1) / 2) / (num-people ^ 2)
end
;;;;;;;;;;;;;;
;;;;;;
to update-election-bars
  set-current-plot "Grain Elected"

```

```
plot-pen-reset
set-plot-pen-color red
plot count patches with [elected = gfood]
set-plot-pen-color yellow
plot count patches with [elected = gwood]
set-plot-pen-color blue
plot count patches with [elected = gwater]
end
;;;;;;
;; BETAVERSION 2.0.0
;; 2005
```