

1. Finden Sie das Eisenstein'sche Irreduzibilitätskriterium in einem geeigneten Lehrbuch und formulieren Sie es.
2. Bestimmen Sie das Minimalpolynom von $\alpha = \sqrt{5} + \sqrt{7} \in \mathbb{R}$ über \mathbb{Q} . Finden Sie weiters ein Polynom $f \in \mathbb{Q}[X]$ mit $f(\alpha) = \alpha^{-1}$.
3. Es bezeichne $\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$ den endlichen Körper mit zwei Elementen (wird manchmal auch als die Boolesche Algebra **2** bezeichnet).
 - (i) Zeigen Sie, dass $f = X^3 + X + 1 \in \mathbb{Z}_2[X]$ irreduzibel ist.
 - (ii) Es sei K eine Körpererweiterung von \mathbb{Z}_2 mit $K = \mathbb{Z}_2(u)$, so dass $f(u) = 0$ gilt. Zeigen Sie, dass $\{1, u, u^2\}$ eine \mathbb{Z}_2 -Basis von K ist, und bestimmen Sie die multiplikative Verknüpfungstafel von K .
- 4 (**Quadratische Körpererweiterung**). Es sei K ein Körper mit $\text{char}(K) \neq 2$. Eine Körpererweiterung $K \subset L$ mit $[L : K] = 2$ heißt *quadratische Körpererweiterung*. Zeigen Sie:
 - (i) Ist $K \subset L$ eine quadratische Körpererweiterung, so gibt es ein $\alpha \in L$ mit $L = K(\alpha)$ und $\alpha^2 = d \in K^\times$. (Man schreibt dann $L = K(\sqrt{d})$.)
 - (ii) Die Nebenklasse dK^\times in $K^\times / (K^\times)^2$ ist durch L eindeutig bestimmt. (Hierbei bezeichnet $(K^\times)^2 = \{a^2 \mid a \in K^\times\}$ die Menge aller von Null verschiedenen Quadrate in K .)
 - (iii) Zu jedem $d \in K^\times \setminus (K^\times)^2$ gibt es eine quadratische Körpererweiterung wie oben.