1. Zeigen Sie: A_4 besitzt keine Untergruppe der Ordnung 6.

Die folgenden Beispiele behandeln *Gruppenoperationen.*
Definition: Es sei G eine Gruppe und $M \neq \varnothing$ eine Menge. Eine *(Links-)Operation von G auf M* ist eine Abbildung

$$* : G \times M, (g, m) \mapsto g * m,$$

so dass für alle $g, g' \in G$ und $m \in M$ gilt:

(i) $(g'g) * m = g' * (g * m)$,

(ii) $e * m = m$.

Für $m \in M$ nennt man $Gm = \{g * m | g \in G\} \subset M$ die *Bahn (auch Orbit) von m* unter der Operation von G, und $G_m = \{g \in G | g * m = m\} \subset G$ den *Stabilisator von m* (auch *Isotropiegruppe, Fixgruppe*). Der *Bahnenraum* ist $G \setminus M = \{Gm | m \in M\}$. Die Bahnen sind die Äquivalenzklassen der folgenden Äquivalenzrelation auf M: für $m, m' \in M$ gilt $m \sim m'$ genau dann, wenn ein $g \in G$ mit $g * m = m'$ existiert. Eine Familie $(m_i)_{i \in I}$ in M für die gilt, dass $G \setminus M$ disjunkte Vereinigung der Gm_i ist, heißt Repräsentantentsystem des Bahnenraums.

2 (Bahnengleichung). Es sei G eine Gruppe, $M \neq \varnothing$ eine Menge und $* : G \times M \to M$ eine Operation von G auf M. Zeigen Sie:

(i) Für alle $m \in M$ ist G_m eine Untergruppe von G und

$$(G : G_m) = |Gm|.$$

(ii) Es sei $(m_i)_{i \in I}$ ein Repräsentantensystem des Bahnenraums. Dann gilt

$$|M| = \sum_{i \in I} (G : G_{m_i}).$$

3. Geben Sie (kurze) Beweise für die Sätze 2.9 und 2.13 aus dem Vorlesungsskript, indem Sie geeignete Gruppenoperationen verwenden.

4. Es sei G eine Gruppe, $M \neq \varnothing$ eine Menge und $* : G \times M \to M$ eine Operation von G auf M. Für $g \in G$ sei $\sigma_g : M \to M$ definiert durch $\sigma_g(m) = g * m$. Zeigen sie: es gibt einen Homomorphismus

$$\sigma : G \to \mathrm{Perm}(M)$$

mit $\sigma(g) = \sigma_g$.

5* (Ein Normalteilerkriterium). Es sei G eine endliche Gruppe und p der kleinste Primteiler von $|G|$. Zeigen Sie: ist $H \leq G$ eine Untergruppe mit $(G : H) = p$, so ist H ein Normalteiler von G. (*Hinweis*: lassen Sie G mittels $G * (xH) = gxH$ für alle $g, x \in G$ auf dem Nebenklassenraum G/H operieren.)