1. Es sei K eine endlich-dimensionale Körpererweiterung von F. Zeigen Sie: ist $|\mathrm{Gal}_F(K)| = [K : F]$, so ist die Erweiterung $K \supset F$ galoissich.

In den folgenden Übungen 2 und 3 sind jeweils alle Zwischenkörper einer Körpererweiterung zu bestimmen. Das ist durchaus mit einigem Aufwand verbunden. Vermutlich werden Sie 2 als arbeitsaufwendiger, 3 als kniffliger empfinden. Versuchen Sie zumindest eine Übung möglichst vollständig zu lösen.

2. Es sei K ein Zerfällungskörper von $X^4 - 2$ über $\mathbb{Q}$.

(i) Bestimmen Sie alle Elemente von $\mathrm{Gal}_{\mathbb{Q}}K$ und zeigen Sie

$$\mathrm{Gal}_{\mathbb{Q}}K \cong D_4.$$

(ii) Bestimmen Sie alle Zwischenkörper von $K \supset \mathbb{Q}$. Stellen Sie die Zwischenkörper, sowie die Untergruppen von $\mathrm{Gal}_{\mathbb{Q}}K$, jeweils in einem Diagramm dar.

3 (p-ter Kreisteilungskörper). Es sei $p \in \mathbb{P}$ und

$$\Phi_p = \frac{X^p - 1}{X - 1} = \sum_{i=0}^{p-1} X^i \in \mathbb{Q}[X]$$

(i) Zeigen Sie, dass Φ_p irreduzibel ist. (*Hinweis*: man betrachte $\Phi_p(X+1)$.)

(ii) Es sei K eine Körpererweiterung von $\mathbb{Q}$ mit $K = \mathbb{Q}(\zeta)$ für ein $\zeta \in L$ und $\Phi_p(\zeta) = 0$. Zeigen Sie, dass K bereits Zerfällungskörper von Φ_p über $\mathbb{Q}$ ist.

(iii) Bestimmen Sie $\mathrm{Gal}_{\mathbb{Q}}K$ und zeigen Sie $\mathrm{Gal}_{\mathbb{Q}}K \cong \mathbb{Z}_p^{\times}$.

(iv) Im Fall $p = 7$, bestimmen Sie alle Zwischenkörper von $K \supset \mathbb{Q}$. Stellen Sie die Zwischenkörper, sowie die Untergruppen von $\mathrm{Gal}_{\mathbb{Q}}K$, jeweils in einem Diagramm dar.

4. Es sei L eine Galoiserweiterung eines Körpers K, wobei L Zerfällungkörper eines irreduziblen Polynom $f \in K[X]$ sei. Es sei weiters $\mathrm{Gal}_K L$ abelsch. Zeigen Sie: für jede Nullstelle $a \in L$ von f ist $L = K(a)$.