Quaterniongruppe

Wir definieren

$$\mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \ \mathbf{i} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \ \mathbf{j} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \ \mathbf{k} = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

als Matrizen über $\mathbb{C}$. Zeigen Sie:

(i) Die Menge $Q = \{\pm\mathbf{1}, \pm\mathbf{i}, \pm\mathbf{j}, \pm\mathbf{k}\}$ bildet bezüglich der Matrizenmultiplikation eine Gruppe, die sogenannte *Quaterniongruppe*. (*Hinweis*: Bestimmen Sie die Verknüpfungstafel.)

(ii) Das Zentrum von Q ist $Z(Q) = \{\pm 1\}$.

(iii) Es gibt einen Isomorphismus $Q/Z(Q) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. (*Hinweis*: Welche Gruppen der Ordnung 4 gibt es? Warum kann es nicht $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ sein?)

(iv) Die Untergruppenstruktur von Q sieht wie folgt aus:

$$\begin{tikzcd}[arrows=dash]
 & Q \arrow[dl] \arrow[d] \arrow[dr] & \\
\{\pm\mathbf{1}, \pm\mathbf{i}\} \arrow[dr] & \{\pm\mathbf{1}, \pm\mathbf{j}\} \arrow[d] & \{\pm\mathbf{1}, \pm\mathbf{k}\} \arrow[dl] \\
 & \{\pm\mathbf{1}\} \arrow[d] & \\
 & \{\mathbf{1}\} &
\end{tikzcd}$$

(*Hinweis*: Überlegen Sie zuerst, dass jede nicht-triviale Untergruppe von Q bereits $Z(Q)$ enthält. Benutzen Sie dann, dass die Untergruppen von Q die $Z(Q)$ enthalten in Bijektion zu den Untergruppen von $Q/Z(Q)$ stehen.)

Welche der Untergruppen von Q sind zyklisch? Welche Untergruppen sind Normalteiler? (*Hinweis*: Zeigen Sie zuerst, dass jede Untergruppe vom Index 2 Normalteiler ist).