

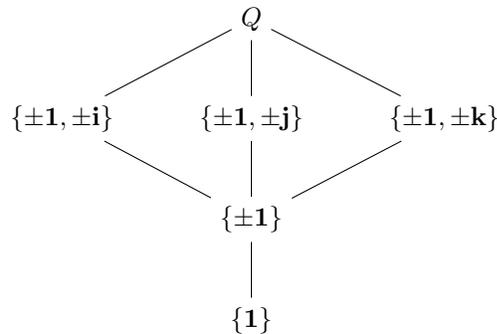
Quaternionengruppe

Wir definieren

$$\mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{i} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \mathbf{j} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{k} = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

als Matrizen über \mathbb{C} . Zeigen Sie:

- (i) Die Menge $Q = \{\pm\mathbf{1}, \pm\mathbf{i}, \pm\mathbf{j}, \pm\mathbf{k}\}$ bildet bezüglich der Matrizenmultiplikation eine Gruppe, die sogenannte *Quaternionengruppe*. (*Hinweis*: Bestimmen Sie die Verknüpfungstafel.)
- (ii) Das Zentrum von Q ist $Z(Q) = \{\pm\mathbf{1}\}$.
- (iii) Es gibt einen Isomorphismus $Q/Z(Q) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. (*Hinweis*: Welche Gruppen der Ordnung 4 gibt es? Warum kann es nicht $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ sein?)
- (iv) Die Untergruppenstruktur von Q sieht wie folgt aus:



(*Hinweis*: Überlegen Sie zuerst, dass jede nicht-triviale Untergruppe von Q bereits $Z(Q)$ enthält. Benutzen Sie dann, dass die Untergruppen von Q die $Z(Q)$ enthalten in Bijektion zu den Untergruppen von $Q/Z(Q)$ stehen.)

Welche der Untergruppen von Q sind zyklisch? Welche Untergruppen sind Normalteiler? (*Hinweis*: Zeigen Sie zuerst, dass jede Untergruppe vom Index 2 Normalteiler ist).