Übungsblatt 12

Aufgabe 1 [Fehlende Kompaktheit der Einheitskugel im Unendlichdimensionalen]

Es sei Ω eine nichtleere Menge und V der Vektorraum der reellwertigen Funktionen mit endlichem Träger, d.h.

$$V := \left\{ f : \Omega \to \mathbb{R} \;\middle|\; \text{Die Menge } \left\{ x \in \Omega \,|\, f(x) \neq 0 \right\} \text{ ist endlich} \right\}.$$

Wir versehen V mit der Norm

$$\left\| f \right\|_\infty := \sup \left\{ |f(x)| \;\middle|\; x \in \Omega \right\}.$$

Ferner sei die Menge $B \subset V$ gegeben durch

$$B := \left\{ f \in V \;\middle|\; \|f\|_\infty \leq 1 \right\}.$$

(a) Zeigen Sie, dass B beschränkt ist, d.h. es gibt eine Konstante $C > 0$, so dass für alle $f, g \in B$ gilt $\|f - g\|_\infty \leq C$.

(b) Zeigen Sie, dass B abgeschlossen ist, d.h. für jede konvergente Folge $(f_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset B$ gilt $\lim_{k \to \infty} f_k \in B$.

(c) Nun setzen wir voraus, dass es sich bei Ω um eine unendliche Menge handelt. Es sei $(x_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \Omega$ eine Folge mit $x_j \neq x_k$ für alle $j, k \in \mathbb{N}$ mit $j \neq k$. Wir definieren die Folge $(f_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset B$ gemäß

$$f_k : \Omega \to \mathbb{R}, \qquad f_k(x) := \begin{cases} 1 & \text{falls } x = x_k, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ keine konvergente Teilfolge besitzt.
Hinweis: Angenommen, $(f_{k_n})_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert gegen $f \in V$. Dann gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit $\|f_{k_N} - f\|_\infty < \frac{1}{2}$ und $\|f_{k_{N+1}} - f\|_\infty < \frac{1}{2}$. Welchen Wert hat $f(x_{k_N})$?

Aufgabe 2 [Das Hauptkriterium für Differenzierbarkeit]

Zeigen Sie, dass die folgenden Funktionen differenzierbar sind und bestimmen Sie die zugehörige Jacobi-Matrix:

(a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^4, \quad f(x) := \begin{pmatrix} 3x^2 \\ \sin(3x) \\ 42 \\ \cos(x^2) \end{pmatrix}$

(b) $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \quad g(x,y,z) := \begin{pmatrix} 4x^2y^3 \\ xye^z + e^x y \end{pmatrix}$

(c) $h : (0,\infty) \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad h(x,y,z) := \sin(zx)\ln(x+y^2)$

Aufgabe 3 [Stetigkeit in $\mathbb{R}^n$]

(a) Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ und $z = (z_1, z_2, \dots, z_n) \in \mathbb{R}^n$. Seien $y, \hat{y} : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$ Funktionen und $(x^k)_{k\in\mathbb{N}}, (\hat{x}^k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^{n-1}$ Folgen, die

$$\lim_{k\to\infty} x^k = \lim_{k\to\infty} \hat{x}^k = (z_1, z_2, \dots, z_{n-1}) \qquad \text{und} \qquad \lim_{k\to\infty} y(x^k) = \lim_{k\to\infty} \hat{y}(\hat{x}^k) = z_n$$

genügen. Zeigen Sie: Wenn es $L, \hat{L} \in \mathbb{R}$ mit $L \neq \hat{L}$ gibt, so dass

$$\lim_{k\to\infty} f(x_k, y(x^k)) = L \qquad \text{und} \qquad \lim_{k\to\infty} f(\hat{x}^k, \hat{y}(\hat{x}^k)) = \hat{L}$$

gilt, dann ist f im Punkt z unstetig.

(b) Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x,y) := \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{falls } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{falls } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass f in $(0,0)$ unstetig ist.
<u>Hinweis</u>: Betrachten Sie die *Funktionenfamilie*

$$y_k(x) = y_0 + k\,(x - x_0)^\beta$$

für geeignete $k \in \mathbb{Z}$, $\beta \in \mathbb{N}$ und $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$.

(c) Verwenden Sie die Ungleichung $|xy| \leq \frac{x^2+y^2}{2}$ um zu zeigen, dass die Funktion

$$f_\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad f_\alpha(x,y) := \begin{cases} \frac{x|y|^\alpha}{x^2+y^2} & \text{falls } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{falls } (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

für festes $\alpha > 1$ in $(0,0)$ stetig ist.

Aufgabe 4 [Partielle und stetige partielle Differenzierbarkeit]

Wir betrachten $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x,y) := \begin{cases} \frac{xy^3}{x^2+y^2} & \text{falls } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{falls } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Zeigen Sie:

(a) f ist in $\mathbb{R}^2$ stetig partiell differenzierbar.

(b) $\partial_x\partial_y f(0,0)$ und $\partial_y\partial_x f(0,0)$ existieren und es gilt $\partial_x\partial_y f(0,0) \neq \partial_y\partial_x f(0,0)$.

(c) $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$.

(d) Rechnerisch: Eine der zweiten partiellen Ableitungen von f ist in $(0,0)$ unstetig.

(e) Die Aussage aus (d) ohne Rechnung, aber unter Verwendung von (a)–(c).