Übungsblatt 11

Aufgabe 1 [Das Taylorpolynom eines Produkts von Funktionen]

(a) Sei $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ und P ein Polynom vom Grad höchstens n. Es gebe $x_0 \in \mathbb{R}$ mit

$$P(x) = R(x)\,(x - x_0)^n$$

für alle x aus einer Umgebung von x_0, wobei $R : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine im Punkt x_0 stetige Funktion mit $R(x_0) = 0$ sei. Zeigen Sie: $P \equiv 0$.

Tipp: Sie können ohne Beweis verwenden, dass im Fall $\deg(P) \geq 1$ aus $P(x_0) = 0$ die Existenz eines Polynoms Q mit $\deg(Q) = \deg(P) - 1$ folgt, für das $P(x) = (x - x_0)Q(x)$ gilt. Benutzen Sie Induktion.

(b) Sei I ein Intervall mit $x_0 \in I$. Für ein beliebiges Polynom $P(x; x_0)$ um x_0 vom Grad $k \geq 0$, d.h.

$$P(x; x_0) = \sum_{j=0}^{k} a_j\,(x - x_0)^j \qquad \text{mit} \qquad \{a_j\}_{j=0}^{k} \subset \mathbb{R},$$

definieren wir für $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $m \leq k$, die *m-te Abschneidung von P*, geschrieben $\mathrm{Trunc}_m(P)(x; x_0)$, durch

$$\mathrm{Trunc}_m(P)(x; x_0) = \sum_{j=0}^{m} a_j\,(x - x_0)^j\,.$$

Seien $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ und $f, g \in C^{n+1}(I)$. Zeigen Sie:

$$\mathrm{Trunc}_n\left(T_f^n \cdot T_g^n\right)(x; x_0) = T_{fg}^n(x; x_0).$$

Tipp: Benutzen Sie $h(x) = T_h^n(x; x_0) + R_h^{n+1}(x; x_0)$ mit R_h^{n+1} in Lagrangeform. Wenden Sie (a) an.

Bemerkung: Die n-te Abschneidung von $T_f^n \cdot T_g^n$ ist einfacher zu berechnen, falls ein $l \in \mathbb{N}$ existiert mit $l \leq n$ und

$$T_f^n(x; x_0) = (x - x_0)^l\,Q(x).$$

In diesem Fall gilt

$$\mathrm{Trunc}_n\left(T_f^n \cdot T_g^n\right)(x; x_0) = (x - x_0)^l\,\mathrm{Trunc}_{n-l}\left(Q(x) \cdot T_g^{n-l}\right)(x; x_0).$$

Diese Bemerkung können Sie ohne Beweis in (c) verwenden.

(c) Nutzen Sie (b) um $f^{(8)}(0)$ zu berechnen ohne f zu differenzieren. Dabei ist

$$f(x) := x^6 \sin(x) e^x.$$

Bemerkung: Für die *Verkettung von Funktionen* gibt es ein ähnliches Verfahren.

Aufgabe 2 [Die l'Hospitalsche Regel mittels Taylorpolynomen]

(a) Seien $f, g \in C^{n+1}(I)$, wobei I ein Intervall ist, das den Punkt x_0 enthält. Sei

$$f^{(k)}(x_0) = g^{(k)}(x_0) = 0, \quad k = 0, \ldots, n-1,$$

sowie $g^{(n)}(x_0) \neq 0$. Benutzen Sie die Taylorpolynome

$$T_f^n(x; x_0) = \sum_{j=0}^{n} a_j (x - x_0)^j \qquad \text{und} \qquad T_g^n(x; x_0) = \sum_{j=0}^{n} b_j (x - x_0)^j$$

um nachzuweisen, dass gilt

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a_n}{b_n} = \frac{f^{(n)}(x_0)}{g^{(n)}(x_0)}.$$

(b) Berechnen Sie unter Verwendung von (a) den Grenzwert

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1 - \ln(1+x)}{\sin^2(x)}.$$

Aufgabe 3 [Lösung der Schwingungsgleichung mittels Taylorentwicklung]

Die zweifach differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ genüge der Differentialgleichung

$$f''(x) + f(x) = 0 \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.^{1}$$

Wir möchten zeigen, dass für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$f(x) = f(0)\cos(x) + f'(0)\sin(x).$$

(a) Schließen Sie zunächst, dass f unendlich oft stetig differenzierbar ist und für $n \in \mathbb{N}$ die Formeln $f^{(2n)}(x) = (-1)^n f(x)$ sowie $f^{(2n+1)}(x) = (-1)^n f'(x)$ gelten.

(b) Bestimmen Sie $T_f^n(x; 0)$ für $n \geq 0$ und zeigen Sie $\lim_{n\to\infty} R_f^{n+1}(x; 0) = 0$.

(c) Folgern Sie $T_f(x; 0) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und daraus die behauptete Darstellung von f.

[1] Diese Gleichung beschreibt einen harmonischen Oszillator.

Aufgabe 4 [Eine Reihendarstellung von π]

Wir erinnern an die aus Analysis 1 bekannte *Formel für die geometrische Summe*:

$$\forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\} : \qquad \sum_{k=0}^{n} z^k = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z} \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}.$$

Zeigen Sie:

(a) Für $n \in \mathbb{N}$ und $t \in \mathbb{R}$ gilt: $\frac{1}{1+t^2} = \frac{(-t^2)^{n+1}}{1+t^2} + \sum_{k=0}^{n} (-t^2)^k$.

(b) Für $n \in \mathbb{N}$ und $x \in \mathbb{R}$ gilt: $\arctan(x) = \int_0^x \frac{(-t^2)^{n+1}}{1+t^2} \,\mathrm{d}t + \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1}$.

(c) Für $x \in [-1, 1]$ gilt: $\arctan(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1}$.

(d) Es gilt die Formel

$$\boxed{\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} \pm \dots}$$

(e) Ohne Berechnungen durchzuführen (greifen Sie auf die Vorlesung zurück):

- Der Konvergenzradius der Potenzreihe aus (c) ist mindestens 1.
- Die Reihe aus (c) ist die Taylorreihe von arctan um $x_0 = 0$.