Übungsblatt 9

Aufgabe 1 [Uneigentliche Integration und Grenzwerte am Intervallrand 1]

Sei I das halboffene Intervall $I := (0, 1]$. Wir betrachten die auf I definierte Funktion $f(x) := \sin\left(\frac{1}{x}\right)$.

(a) Zu $c \in \mathbb{R}$ definieren wir die Funktion

$$g_c(x) := \begin{cases} f(x) & \text{falls } x \in I \\ c & \text{falls } x = 0 \end{cases}$$

auf $\overline{I} = [0, 1]$. Beweisen Sie $g_c \notin \mathcal{R}[0, 1]$ und folgern Sie daraus, dass f nicht zu einer Funktion in $\mathcal{R}[0, 1]$ fortgesetzt werden kann.

(b) Zeigen Sie, dass das uneigentliche Integral $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ existiert, allerdings ohne es zu berechnen und ohne Substitution.

(c) Ist die folgende Aussage richtig? Beweisen Sie sie bzw. widerlegen Sie sie mit Hilfe eines geeigneten Gegenbeispiels.
Sei $-\infty < a < b < \infty$. Falls das uneigentliche Integral $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ existiert, so existieren auch $\lim_{x\to a^+} f(x)$ und $\lim_{x\to b^-} f(x)$.

Aufgabe 2 [Uneigentliche Integration und Grenzwerte am Intervallrand 2]

(a) Sei $a \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie: Falls $L := \lim_{x\to\infty} f(x)$ und das uneigentliche Integral $\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ existieren, so gilt $L = 0$.

(b) Für $n \in \mathbb{N}$ sei $I_n := [n - 4^{-n}, n]$ und $J_n := (n, n + 4^{-n}]$. Es sei die folgende Funktion auf $[0, \infty)$ gegeben:

$$f(x) = \begin{cases} 8^n\left(x - n + \frac{1}{4^n}\right) & \text{wenn } x \in I_n \text{ für ein } n \in \mathbb{N} \text{ gilt} \\ 8^n\left(n + \frac{1}{4^n} - x\right) & \text{wenn } x \in J_n \text{ für ein } n \in \mathbb{N} \text{ gilt} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

(1) Zeigen Sie, dass f stetig ist in $[0, \infty)$.

(2) Zeigen Sie, dass $\lim_{x\to\infty} f(x)$ nicht existiert.

(3) Zeigen Sie, dass für jedes $k \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\int_0^k f(x)\,\mathrm{d}x = \begin{cases} \frac{1}{4} & \text{wenn } k = 1, \\ \sum_{n=1}^{k-1} \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{k+1}} & \text{wenn } k \geq 2. \end{cases}$$

(4) Zeigen Sie, dass für jedes $R \geq 1$

$$\int_0^{\lfloor R \rfloor} f(x)\, \mathrm{d}x \leq \int_0^R f(x)\, \mathrm{d}x \leq \int_0^{\lfloor R \rfloor + 1} f(x)\, \mathrm{d}x$$

gilt, wobei $\lfloor R \rfloor$ der ganzzahlige Anteil von R ist[1], und verwenden Sie (3), um zu der Schlussfolgerung $\int_0^\infty f(x)\, \mathrm{d}x = 1$ zu gelangen.

(c) Ist die folgende Aussage richtig? Beweisen Sie sie bzw. widerlegen Sie sie mit Hilfe eines geeigneten Gegenbeispiels.
Sei $a \in \mathbb{R}$. Falls das uneigentliche Integral $\int_a^\infty f(x)\, \mathrm{d}x$ existiert, so existiert auch $L := \lim_{x \to \infty} f(x)$ und es gilt $L = 0$.

Aufgabe 3 [L^p-Räume]

In dieser Aufgabe geht es um die L^p-Räume, die in der Vorlesung eingeführt wurden.

(a) Geben Sie an, für welche $s \in \mathbb{R}$ und $p \geq 1$ die Funktion x^s zu $L^p\left((0,1)\right)$ gehört.

(b) Geben Sie an, für welche $s \in \mathbb{R}$ und $p \geq 1$ die Funktion x^s zu $L^p\left((1,\infty)\right)$ gehört.

(c) Für welche $p \geq 1$ gilt $\frac{\sin(x)}{x} \in L^p\left((1,\infty)\right)$?

(d) Es seien $-\infty < a < b < \infty$. Verwenden Sie die Höldersche Ungleichung, um zu zeigen, dass für beliebige $p_2 > p_1 \geq 1$ die Inklusion $L^{p_2}\left([a,b]\right) \subset L^{p_1}\left([a,b]\right)$ besteht. Zeigen Sie durch ein geeignetes Beispiel, dass die umgekehrte Inklusion falsch ist, dass also $L^{p_1}\left([a,b]\right) \not\subset L^{p_2}\left([a,b]\right)$ für $p_2 > p_1 \geq 1$.

(e) Ist die Inklusion aus (d) noch richtig, wenn das zugrundeliegende Intervall unbeschränkt ist? Beweisen Sie bzw. widerlegen Sie mit Hilfe eines geeigneten Beispiels.

Aufgabe 4 [Trigonometrische Reihen]

Trigonometrische Reihen sind z.B. in den Ingenieurswissenschaften von großer Bedeutung. Ein Beispiel für trigonometrische Reihen sind die sogenannten *Fourierreihen*, um die es in dieser Aufgabe geht.
Seien $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}}$, $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ zwei Folgen reeller Zahlen. Für $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ betrachten wir die k-te Partialsummenfunktion

$$S_k(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{k} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx).$$

Für $k = 0$ verstehen wir die angeschriebene Summe dabei als Null.

[1] $\lfloor x \rfloor$ ist die größte ganze Zahl, die kleiner ist als x oder gleich groß.

(a) Zeigen Sie: Ist $\sum_{n=1}^{\infty} (|a_n| + |b_n|) < \infty$, so konvergiert S_k in $I := [0, 2\pi]$ gleichmäßig gegen eine Funktion S, und S lässt sich für alle $x \in I$ durch

$$S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$$

darstellen. Begründen Sie außerdem, dass S stetig in I ist.

(b) Zeigen Sie: Ist $\sum_{n=1}^{\infty} n(|a_n| + |b_n|) < \infty$, so konvergiert S_k' in I gleichmäßig.

(c) Beweisen Sie, dass die Funktion

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^3}$$

in I stetig differenzierbar ist.