Übungsblatt 4

Aufgabe 1 [Integration nichtnegativer Funktionen]

Sei $f : [a, b] \to [0, \infty)$ eine nichtnegative stetige Funktion.

(a) Zeigen Sie: Gibt es ein $x_0 \in [a, b]$ mit $f(x_0) > 0$, dann existiert eine nichtnegative Treppenfunktion $g \in \mathcal{T}[a, b]$ mit $g \leq f$ und ein $\epsilon > 0$ mit

$$g\big|_{(\max(x_0-\epsilon,a),\min(x_0+\epsilon,b))} > 0.$$

(b) Zeigen Sie, dass $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = 0$ dann und nur dann gilt, wenn $f \equiv 0$.

Aufgabe 2 [Charakterisierung stetiger charakteristischer Funktionen via Integral]

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion.

(a) Zeigen Sie: Wenn es ein $x_0 \in [a, b]$ gibt mit $f(x_0) > 1$, dann existiert $\epsilon > 0$ mit

$$\int_{\max(x_0-\epsilon,a)}^{\min(x_0+\epsilon,b)} f(x)\,(f(x) - 1)\;\mathrm{d}x > 0.$$

(b) Was gilt im Falle $0 < f(x_0) < 1$ bzw. $f(x_0) < 0$?

(c) Zeigen Sie: $\int_\alpha^\beta f(x)^2\,\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta f(x)\,\mathrm{d}x$ gilt genau dann für *alle* $\alpha, \beta \in [a, b]$ mit $\alpha < \beta$, wenn f nur den Wert 0 oder 1 annimmt (d.h., f ist eine charakteristische Funktion).

Aufgabe 3 [Einseitige Ableitungen]

Sei I ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ eine Funktion.

(a) Beweisen Sie: Wenn die links- und rechtsseitige Ableitung in $x_0 \in I$ existieren (bzw. die entsprechende einseitige Ableitung im Falle eines Randpunkts), dann ist f in x_0 stetig.

(b) Zeigen Sie: Wenn f konvex ist, dann existieren die links- und rechtsseitige Ableitung von f in jedem *inneren* Punkt von I.[1] Folgern Sie daraus, dass eine konvexe Funktion auf einem offenen Intervall stetig ist.
Tipp: Weisen Sie eine geeignete Monotonieeigenschaft des Differenzenquotienten nach.

(c) Ist jede konvexe Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig?

[1] Wir bezeichnen $x_0 \in I$ als inneren Punkt von I, wenn ein $\epsilon > 0$ existiert mit $(x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon) \subset I$.

Aufgabe 4 [Mittelwertsatz der Integralrechnung]

(a) Es sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und $F : [a, b] \to \mathbb{R}$, $F(x) := \int_a^x f(t)\, \mathrm{d}t$. Beweisen Sie mit Hilfe des Mittelwertsatzes der Integralrechnung, dass für alle $x \in [a, b]$ gilt:

$$F'(x) = f(x).$$

Dabei ist $F'(x)$ als einseitige Ableitung zu verstehen, falls $x = a$ oder $x = b$ ist.

Tipp: Verwenden Sie die Definition der Ableitung.

(b) Es sei $G : [0, 1] \to \mathbb{R}$, $G(x) := 1 - \int_0^x (1 - t)^7 \cos t \, \mathrm{d}t$. Zeigen Sie mittels (a), dass für alle $x \in [0, 1]$ gilt $G'(x) \leq 0$.