Übungsblatt 3

Aufgabe 1 [Das Integral vektorwertiger Regelfunktionen]

Sei $\Psi : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ eine *vektorwertige Regelfunktion*. Damit ist gemeint, dass jede Komponentenfunktion Ψ_j, $1 \leq j \leq n$, eine Regelfunktion im Sinne der VO ist. Für eine vektorwertige Regelfunktion Ψ definieren wir

$$\int_a^b \Psi \, \mathrm{d}x := \begin{pmatrix} \int_a^b \Psi_1 \, \mathrm{d}x \\ \vdots \\ \int_a^b \Psi_n \, \mathrm{d}x \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n.$$

Zeigen Sie: Die Funktion $\|\Psi\|$ ist eine Regelfunktion im Sinne der VO und es gilt

$$\left\| \int_a^b \Psi \, \mathrm{d}x \right\| \leq \int_a^b \|\Psi\| \, \mathrm{d}x.$$

Dabei ist $\|\cdot\|$ eine beliebige Norm des $\mathbb{R}^n$.

Aufgabe 2 [Rechenregeln für Integranden mit spezieller Struktur]

Es sei $f \in \mathcal{R}[a,b]$, $p := \frac{b-a}{2}$ und $m := \frac{a+b}{2}$. Zeigen Sie mit Hilfe der Definition des Integrals (und nicht anders!):

(a) Ist f *p–periodisch*, d.h. es gilt $f(x) = f(x+p)$ für alle $x \in [a,m]$, so ist $\int_a^b f \, \mathrm{d}x = 2\int_a^m f \, \mathrm{d}x$.

(b) Ist f *symmetrisch zu m*, d.h. es gilt $f(m-x) = f(m+x)$ für alle $x \in [0,p]$, so ist $\int_a^b f \, \mathrm{d}x = 2\int_a^m f \, \mathrm{d}x$.

(c) Ist f *c–antisymmetrisch zu m*, d.h. es gibt $c \in \mathbb{R}$ mit $f(m-x)-c = -f(m+x)+c$ für alle $x \in [0,p]$, so ist $\int_a^b f \, \mathrm{d}x = c(b-a)$.

Aufgabe 3 [Integration mittels Treppenfunktionen I]

Sei $n \in \mathbb{N}$. Für $k \in \{0,1,\dots,n\}$ definieren wir $x_k := \frac{k}{n}$ und für $k \in \{1,\dots,n\}$ ferner $m_k := \frac{x_{k-1}+x_k}{2}$. Schließlich sei $T_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ die folgende Treppenfunktion:

$$T_n(x) := \begin{cases} m_k^2 : & \exists k \in \{1,\dots,n\} : x \in [x_{k-1}, x_k), \\ 1 : & x = 1. \end{cases}$$

(a) Zeigen Sie: Zu $\varepsilon > 0$ gibt es $N \in \mathbb{N}$ mit $\| T_n(x) - x^2\|_\infty < \varepsilon$ für alle $n \geq N$.

(b) Bestimmen Sie $\int_0^1 x^2 \,\mathrm{d}x$ mit Hilfe der Folge $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Aufgabe 4 [Integration mittels Treppenfunktionen II]

Es sei $a > 1$ und $n \in \mathbb{N}$. Für $k \in \{0, 1, \dots, n\}$ definieren wir $x_k := a^{\frac{k}{n}}$. Wir betrachten die Treppenfunktion

$$T_n : [1, a] \to \mathbb{R}, \qquad T_n(x) := \begin{cases} \ln x_{k-1} : & \exists k \in \{1, \dots, n\} : x \in [x_{k-1}, x_k), \\ \ln a : & x = a. \end{cases}$$

(a) Zeigen Sie: Zu $\varepsilon > 0$ gibt es $N \in \mathbb{N}$ mit $\| T_n(x) - \ln x\|_\infty < \varepsilon$ für alle $n \geq N$.

(b) Bestimmen Sie $\int_1^a \ln x \,\mathrm{d}x$ mit Hilfe der Folge $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Zeigen Sie dazu zunächst

$$\int_1^a T_n \,\mathrm{d}x = \frac{n-1}{n} a \ln a - \frac{(a^{\frac{1}{n}} - a)\ln a}{n(1 - a^{\frac{1}{n}})}$$

und bilden Sie anschließend den Grenzwert für $n \to \infty$.

Hinweise für (b): Teleskopsumme, geometrische Summenformel, l'Hospital