Übungsblatt 2

Aufgabe 1 [Das Integral vektorwertiger Treppenfunktionen]

Sei $\Phi : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ eine *vektorwertige Treppenfunktion*. Damit ist gemeint, dass jede Komponentenfunktion Φ_j, $1 \le j \le n$, eine Treppenfunktion im Sinne der VO ist. Für eine vektorwertige Treppenfunktion Φ definieren wir

$$\int_a^b \Phi \, \mathrm{d}x := \begin{pmatrix} \int_a^b \Phi_1 \, \mathrm{d}x \\ \vdots \\ \int_a^b \Phi_n \, \mathrm{d}x \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n.$$

Zeigen Sie: Die Funktion $\|\Phi\|$ ist eine Treppenfunktion im Sinne der VO und es gilt

$$\left\| \int_a^b \Phi \, \mathrm{d}x \right\| \le \int_a^b \|\Phi\| \, \mathrm{d}x.$$

Dabei ist $\|\cdot\|$ eine beliebige Norm des $\mathbb{R}^n$.

Aufgabe 2 [Regelfunktionen I]

Es bezeichne $\mathcal{R}[a, b]$ die Regelfunktionen und $\mathcal{M}[a, b]$ die monotonen Funktionen auf $[a, b] \subset \mathbb{R}$. Ferner seien $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ die auf $\mathbb{R}$ stetigen reellwertigen Funktionen. Zeigen Sie:

(a) $f, g \in \mathcal{R}[a, b] \quad \Longrightarrow \quad h \in \mathcal{R}[a, b]$; wobei $h(x) := \max\{f(x), g(x)\}$, $x \in [a, b]$

(b) $f \in \mathcal{M}[a, b] \quad \Longrightarrow \quad f \in \mathcal{R}[a, b]$

(c) $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}), g \in \mathcal{R}[a, b] \quad \Longrightarrow \quad f \circ g \in \mathcal{R}[a, b]$

(d) Belegen Sie durch ein Beispiel, dass die Implikation in (c) nicht richtig ist, wenn statt $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ nur $f \in \mathcal{R}[c, d]$ vorausgesetzt wird, wobei $g([a, b]) \subset [c, d]$.

Aufgabe 3 [Regelfunktionen II]

Es bezeichne $\mathcal{T}[a, b]$ die Treppenfunktionen auf $[a, b] \subset \mathbb{R}$. Wie in der VO sei $\|\cdot\|_\infty$ die Supremumsnorm. Zeigen Sie:

(a) Es gibt eine Folge $(\phi_n) \subset \mathcal{T}[a, b]$ mit $\|\phi_n\|_\infty \le 1$ für alle n und $\|\phi_n - \phi_k\|_\infty = 1$ für $n \ne k$.

(b) Die abgeschlossene Einheitskugel in $(\mathcal{T}[a, b], \|\cdot\|_\infty)$, d.h. die Menge

$$K := \left\{ f \in \mathcal{T}[a, b] \;\middle|\; \|f\|_\infty \le 1 \right\},$$

ist nicht folgenkompakt, d.h., es gibt eine Folge $(f_n) \subset K$, die keine konvergente Teilfolge mit Grenzwert in K enthält.

(c) Wie (b) aber für die Regelfunktionen auf $[a, b]$.

Aufgabe 4 [Abgeschlossenheit des Raums der Regelfunktionen]

Seien wieder $\mathcal{R}[a, b]$ die Regelfunktionen auf $[a, b] \subset \mathbb{R}$. Weiter sei $(\phi_n) \subset \mathcal{R}[a, b]$ und $\phi : [a, b] \to \mathbb{R}$ mit $\lim_{n\to\infty} \|\phi_n - \phi\|_\infty = 0$. Weisen Sie mit Hilfe des Approximationssatzes aus der VO nach, dass $\phi \in \mathcal{R}[a, b]$ gilt.