Übungsblatt 1

Aufgabe 1 [Der Schrankensatz]

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $f : I \to \mathbb{R}$ und $L \in [0, \infty)$. Wir nennen f *Lipschitz-stetig mit Konstante* L, wenn gilt:

$$\forall x, y \in I : \quad |f(y) - f(x)| \leq L|y - x|. \qquad (*)$$

(a) Geben Sie eine nichtdifferenzierbare Funktion an, die $(*)$ erfüllt.

(b) Sei $f : I \to \mathbb{R}$ differenzierbar und $L := \sup_{x \in I} |f'(x)| < \infty$. Beweisen Sie $(*)$.

(c) Sei $I = [a, b]$ und $f : I \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Zeigen Sie, dass $(*)$ gilt.

(d) Weisen Sie nach, dass $(*)$ für $I := [0, \frac{\pi}{2}]$ und $f(x) := \frac{1+x}{4} \cos x$ mit $L := \frac{11}{16}$ gilt.

Aufgabe 2 [Regel von l'Hospital]

Wir setzen in dieser Aufgabe die Regel von l'Hospital in der folgenden Form voraus[1]:

Es seien $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar und $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in (a, b)$. Weiters sei entweder $\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^+} g(x) = 0$ oder $\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^+} g(x) = \infty$ erfüllt. Dann gilt: Existiert $\lim_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, so existiert auch $\lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)}$, und es ist

$$\lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Analog für $\lim_{x \to b^-}$. Diese Aussage gilt auch im Fall $a = -\infty$ oder $b = \infty$.

Berechnen Sie, falls möglich mit der Regel von l'Hospital, die Grenzwerte

(a) $\displaystyle \lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{\sinh x} - \frac{1}{x} \right)$

(b) $\displaystyle \lim_{x \to \infty} \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}$

(c) $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{\cos x - 1}{x^2}$

(d) $\displaystyle \lim_{x \to \infty} \frac{\sin x + 2x}{\cos x + 3x}$

(e) $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{1 - x - \sqrt[3]{1 - 3x}}{x^2}$

<u>Hinweis</u>: *Die Funktion* $\sinh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *ist definiert durch* $\sinh x := \frac{e^x - e^{-x}}{2}$.

Aufgabe 3 [Konvexität/Konkavität]

Überprüfen Sie, ob $f : I \to \mathbb{R}$ konvex oder konkav ist.

(a) $f(x) = \sin x, \quad I = [0, \pi]$

(b) $f(x) = \sin x, \quad I = [\pi, 2\pi]$

(c) $f(x) = x^n, n \in \mathbb{N}, \quad I = \mathbb{R}$

(d) $f(x) = |x|, \quad I = \mathbb{R}$

[1] siehe Königsberger, Analysis 1

Aufgabe 4 [Minima konvexer Funktionen]

(a) Es sei $f : I \to \mathbb{R}$ konvex und differenzierbar, I ein Intervall. Beweisen Sie, dass jeder Punkt $x^* \in I$ mit $f'(x^*) = 0$ ein globales Minimum von f ist, d.h., es gilt $f(x^*) \leq f(x)$ für alle $x \in I$.

(b) Zeigen Sie, dass eine stetige und strikt konvexe (aber nicht notwendig differenzierbare) Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ein eindeutiges globales Minimum besitzt, d.h., es gibt genau ein $x^* \in [a, b]$ mit $f(x^*) < f(x)$ für alle $x \in [a, b]$, $x \neq x^*$.

(c) Gilt die Aussage aus (b) auch, wenn f lediglich stetig und konvex ist?

(d) Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := e^x$. Weisen Sie nach, dass f strikt konvex ist, aber kein globales Minimum besitzt. Warum ist (b) hier nicht anwendbar?

Hinweis: Sie können ohne Beweis verwenden, dass eine zweifach differenzierbare Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ auf einem Intervall I strikt konvex ist, wenn $f''(x) > 0$ für alle $x \in I$ gilt.