Wo sind die Häufungspunkte?

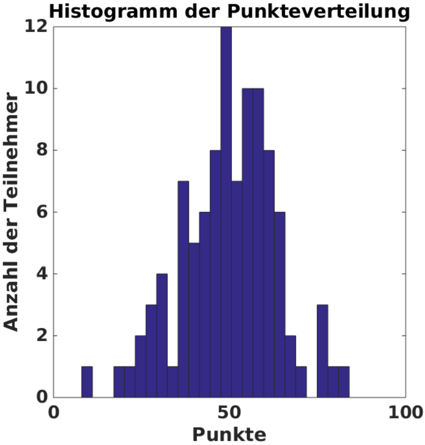
Stephen Keeling
Institut für Mathematik und Wissenschaftliches Rechnen
Karl-Franzens-Universität Graz

Tag der Mathematik

4. Februar, 2016

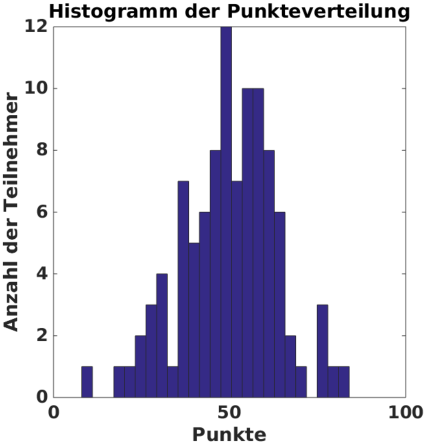
Motivierendes Beispiel

Die einfachste (und die lästigste...) Problemstellung:
Noten zu bearbeiten !



Motivierendes Beispiel

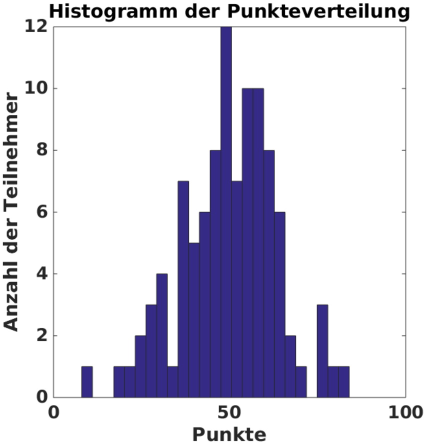
Die einfachste (und die lästigste...) Problemstellung:
Noten zu bearbeiten !



Was ist die Gesamtnote für die Gruppe?

Motivierendes Beispiel

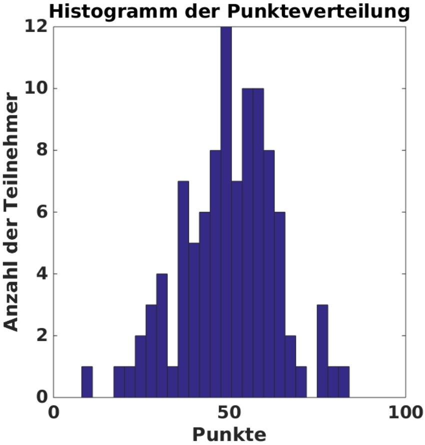
Die einfachste (und die lästigste...) Problemstellung:
Noten zu bearbeiten !



Was ist die Gesamtnote für die Gruppe? Mittelwert?

Motivierendes Beispiel

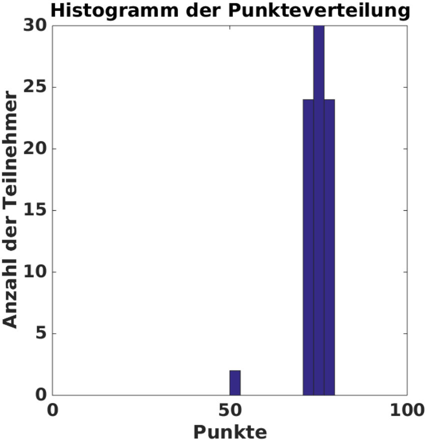
Die einfachste (und die lästigste...) Problemstellung:
Noten zu bearbeiten !



Was ist die Gesamtnote für die Gruppe? Mittelwert? Hier ≈ 50.

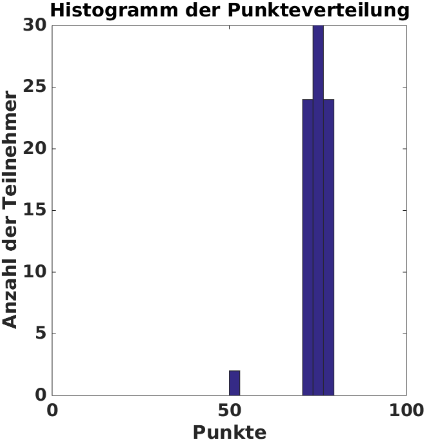
Robustheit des Zentrums

Wegen Ausreißer ist hier der Mittelwert < 75 !



Robustheit des Zentrums

Wegen Ausreißer ist hier der Mittelwert < 75 !



Wie definiert man das Zentrum *robust* ?

Konzepte eines Zentrums – in $\mathbb{R}^1$

- Der *Mittelwert* für $\{x_i\}_{i=1}^n \subset \mathbb{R}^1$:

$$\mu_2 \leftarrow \min_{\mu} \sum_{i=1}^{n} |\mu - x_i|^2$$

Konzepte eines Zentrums – in $\mathbb{R}^1$

- Der *Mittelwert* für $\{x_i\}_{i=1}^n \subset \mathbb{R}^1$:

$$\mu_2 \leftarrow \min_{\mu} \sum_{i=1}^{n} |\mu - x_i|^2 \quad \text{(zweite Potenz!)}$$

Konzepte eines Zentrums – in $\mathbb{R}^1$

- Der *Mittelwert* für $\{x_i\}_{i=1}^n \subset \mathbb{R}^1$:

$$\mu_2 \leftarrow \min_{\mu} \sum_{i=1}^{n} |\mu - x_i|^2 \quad \text{(zweite Potenz!)}$$

$$D_\mu \sum_{i=1}^{n} (\mu - x_i)^2 = 2 \sum_{i=1}^{n} (\mu - x_i)$$

Konzepte eines Zentrums – in $\mathbb{R}^1$

- Der *Mittelwert* für $\{x_i\}_{i=1}^n \subset \mathbb{R}^1$:

$$\mu_2 \leftarrow \min_{\mu} \sum_{i=1}^{n} |\mu - x_i|^2 \quad \text{(zweite Potenz!)}$$

$$D_\mu \sum_{i=1}^{n} (\mu - x_i)^2 = 2 \sum_{i=1}^{n} (\mu - x_i) \to 0 \text{ in } \mu_2 = \sum_{i=1}^{n} x_i \Big/ \underbrace{\sum_{i=1}^{n} 1}_{n}$$

Konzepte eines Zentrums – in $\mathbb{R}^1$

- Der *Mittelwert* für $\{x_i\}_{i=1}^n \subset \mathbb{R}^1$:

$$\mu_2 \leftarrow \min_{\mu} \sum_{i=1}^{n} |\mu - x_i|^2 \quad \text{(zweite Potenz!)}$$

$$D_\mu \sum_{i=1}^{n} (\mu - x_i)^2 = 2 \sum_{i=1}^{n} (\mu - x_i) \to 0 \text{ in } \mu_2 = \sum_{i=1}^{n} x_i \Big/ \underbrace{\sum_{i=1}^{n} 1}_{n}$$

- Der *Median* für $\{x_i\}_{i=1}^n \subset \mathbb{R}^1$:

Konzepte eines Zentrums – in $\mathbb{R}^1$

- Der *Mittelwert* für $\{x_i\}_{i=1}^n \subset \mathbb{R}^1$:

$$\mu_2 \leftarrow \min_{\mu} \sum_{i=1}^{n} |\mu - x_i|^2 \quad \text{(zweite Potenz!)}$$

$$D_\mu \sum_{i=1}^{n} (\mu - x_i)^2 = 2 \sum_{i=1}^{n} (\mu - x_i) \to 0 \text{ in } \mu_2 = \sum_{i=1}^{n} x_i \Big/ \underbrace{\sum_{i=1}^{n} 1}_{n}$$

- Der *Median* für $\{x_i\}_{i=1}^n \subset \mathbb{R}^1$:

$$\mu_1 \leftarrow \min_{\mu} \sum_{i=1}^{n} |\mu - x_i|$$

Konzepte eines Zentrums – in $\mathbb{R}^1$

- Der *Mittelwert* für $\{x_i\}_{i=1}^n \subset \mathbb{R}^1$:

$$\mu_2 \leftarrow \min_\mu \sum_{i=1}^n |\mu - x_i|^2 \quad (\text{zweite Potenz!})$$

$$D_\mu \sum_{i=1}^n (\mu - x_i)^2 = 2 \sum_{i=1}^n (\mu - x_i) \to 0 \text{ in } \mu_2 = \sum_{i=1}^n x_i / \underbrace{\sum_{i=1}^n 1}_{n}$$

- Der *Median* für $\{x_i\}_{i=1}^n \subset \mathbb{R}^1$:

$$\mu_1 \leftarrow \min_\mu \sum_{i=1}^n |\mu - x_i| \quad (\text{erste Potenz!})$$

Konzepte eines Zentrums – in $\mathbb{R}^1$

- Der *Mittelwert* für $\{x_i\}_{i=1}^n \subset \mathbb{R}^1$:

$$\mu_2 \leftarrow \min_{\mu} \sum_{i=1}^{n} |\mu - x_i|^2 \quad \text{(zweite Potenz!)}$$

$$D_\mu \sum_{i=1}^{n} (\mu - x_i)^2 = 2 \sum_{i=1}^{n} (\mu - x_i) \to 0 \text{ in } \mu_2 = \sum_{i=1}^{n} x_i \Big/ \underbrace{\sum_{i=1}^{n} 1}_{n}$$

- Der *Median* für $\{x_i\}_{i=1}^n \subset \mathbb{R}^1$:

$$\mu_1 \leftarrow \min_{\mu} \sum_{i=1}^{n} |\mu - x_i| \quad \text{(erste Potenz!)}$$

$$D_\mu \sum_{i=1}^{n} |\mu - x_i| = \sum_{i=1}^{n} \frac{\mu - x_i}{|\mu - x_i|}$$

Konzepte eines Zentrums – in $\mathbb{R}^1$

- Der *Mittelwert* für $\{x_i\}_{i=1}^n \subset \mathbb{R}^1$:

$$\mu_2 \leftarrow \min_\mu \sum_{i=1}^n |\mu - x_i|^2 \quad (\text{zweite Potenz!})$$

$$D_\mu \sum_{i=1}^n (\mu - x_i)^2 = 2 \sum_{i=1}^n (\mu - x_i) \to 0 \text{ in } \mu_2 = \sum_{i=1}^n x_i \Big/ \underbrace{\sum_{i=1}^n 1}_{n}$$

- Der *Median* für $\{x_i\}_{i=1}^n \subset \mathbb{R}^1$:

$$\mu_1 \leftarrow \min_\mu \sum_{i=1}^n |\mu - x_i| \quad (\text{erste Potenz!})$$

$$D_\mu \sum_{i=1}^n |\mu - x_i| = \sum_{i=1}^n \frac{\mu - x_i}{|\mu - x_i|} \to 0 \text{ in } \mu_1 = ?$$

Konzepte eines Zentrums – in $\mathbb{R}^1$

- Der *Mittelwert* für $\{x_i\}_{i=1}^n \subset \mathbb{R}^1$:

$$\mu_2 \leftarrow \min_{\mu} \sum_{i=1}^{n} |\mu - x_i|^2 \quad \text{(zweite Potenz!)}$$

$$D_\mu \sum_{i=1}^{n} (\mu - x_i)^2 = 2 \sum_{i=1}^{n} (\mu - x_i) \to 0 \text{ in } \mu_2 = \sum_{i=1}^{n} x_i \Big/ \underbrace{\sum_{i=1}^{n} 1}_{n}$$

- Der *Median* für $\{x_i\}_{i=1}^n \subset \mathbb{R}^1$:

$$\mu_1 \leftarrow \min_{\mu} \sum_{i=1}^{n} |\mu - x_i| \quad \text{(erste Potenz!)}$$

$$D_\mu \sum_{i=1}^{n} |\mu - x_i| = \sum_{i=1}^{n} \frac{\mu - x_i}{|\mu - x_i|} \to 0 \text{ in } \mu_1 = ?$$

(Für $\{x_i\}_{i=1}^n \subset \mathbb{R}^1$, $\mu_1 =$ Mitte der sortierten Werte)

Konzepte eines Zentrums – Beispiel in $\mathbb{R}^1$

- Der Mittelwert für $\{x_i\}_{i=1}^n = \{0, 1, 1, \ldots, 1\}$:

Konzepte eines Zentrums – Beispiel in $\mathbb{R}^1$

- Der Mittelwert für $\{x_i\}_{i=1}^n = \{0, 1, 1, \ldots, 1\}$:

$$\sum_{i=1}^{n} |\mu - x_i|^2 = (\mu - 0)^2 + (n-1)(\mu - 1)^2$$

Konzepte eines Zentrums – Beispiel in $\mathbb{R}^1$

- Der Mittelwert für $\{x_i\}_{i=1}^n = \{0, 1, 1, \ldots, 1\}$:

$$\sum_{i=1}^{n} |\mu - x_i|^2 = (\mu - 0)^2 + (n-1)(\mu - 1)^2 = f_2(\mu), \quad \mu \in [0, 1]$$

Konzepte eines Zentrums – Beispiel in $\mathbb{R}^1$

- Der Mittelwert für $\{x_i\}_{i=1}^n = \{0, 1, 1, \ldots, 1\}$:

$$\sum_{i=1}^{n} |\mu - x_i|^2 = (\mu - 0)^2 + (n-1)(\mu - 1)^2 = f_2(\mu), \quad \mu \in [0, 1]$$

$$f_2'(\mu) = 2\mu + 2(n-1)(\mu - 1)$$

Konzepte eines Zentrums – Beispiel in $\mathbb{R}^1$

- Der Mittelwert für $\{x_i\}_{i=1}^n = \{0, 1, 1, \ldots, 1\}$:

$$\sum_{i=1}^{n} |\mu - x_i|^2 = (\mu - 0)^2 + (n-1)(\mu - 1)^2 = f_2(\mu), \quad \mu \in [0, 1]$$

$$f_2'(\mu) = 2\mu + 2(n-1)(\mu - 1) \to 0 \text{ in } \mu_2 = 1 - 1/n \in (0, 1)$$

Konzepte eines Zentrums – Beispiel in $\mathbb{R}^1$

- Der Mittelwert für $\{x_i\}_{i=1}^n = \{0, 1, 1, \ldots, 1\}$:

$$\sum_{i=1}^{n} |\mu - x_i|^2 = (\mu - 0)^2 + (n-1)(\mu - 1)^2 = f_2(\mu), \quad \mu \in [0, 1]$$

$$f_2'(\mu) = 2\mu + 2(n-1)(\mu - 1) \to 0 \text{ in } \mu_2 = 1 - 1/n \in (0, 1)$$

$$f_2(0) = (n-1), \quad f_2(1) = 1,$$

Konzepte eines Zentrums – Beispiel in $\mathbb{R}^1$

- Der Mittelwert für $\{x_i\}_{i=1}^n = \{0, 1, 1, \ldots, 1\}$:

$$\sum_{i=1}^{n} |\mu - x_i|^2 = (\mu - 0)^2 + (n-1)(\mu - 1)^2 = f_2(\mu), \quad \mu \in [0, 1]$$

$$f_2'(\mu) = 2\mu + 2(n-1)(\mu - 1) \to 0 \text{ in } \mu_2 = 1 - 1/n \in (0, 1)$$

$$f_2(0) = (n-1), \quad f_2(1) = 1, \quad f_2(\mu_2) = 1 - 1/n \quad \text{(gl. Min.)}$$

Konzepte eines Zentrums – Beispiel in $\mathbb{R}^1$

- Der Mittelwert für $\{x_i\}_{i=1}^n = \{0, 1, 1, \dots, 1\}$:

$$\sum_{i=1}^n |\mu - x_i|^2 = (\mu - 0)^2 + (n-1)(\mu - 1)^2 = f_2(\mu), \quad \mu \in [0, 1]$$

$$f_2'(\mu) = 2\mu + 2(n-1)(\mu - 1) \to 0 \text{ in } \mu_2 = 1 - 1/n \in (0, 1)$$

$$f_2(0) = (n-1), \quad f_2(1) = 1, \quad f_2(\mu_2) = 1 - 1/n \quad \text{(gl. Min.)}$$

- Der Median für $\{x_i\}_{i=1}^n = \{0, 1, 1, \dots, 1\}$:

Konzepte eines Zentrums – Beispiel in $\mathbb{R}^1$

- Der Mittelwert für $\{x_i\}_{i=1}^n = \{0, 1, 1, \ldots, 1\}$:

$$\sum_{i=1}^{n} |\mu - x_i|^2 = (\mu - 0)^2 + (n-1)(\mu - 1)^2 = f_2(\mu), \quad \mu \in [0, 1]$$

$$f_2'(\mu) = 2\mu + 2(n-1)(\mu - 1) \to 0 \text{ in } \mu_2 = 1 - 1/n \in (0, 1)$$

$$f_2(0) = (n-1), \quad f_2(1) = 1, \quad f_2(\mu_2) = 1 - 1/n \quad \text{(gl. Min.)}$$

- Der Median für $\{x_i\}_{i=1}^n = \{0, 1, 1, \ldots, 1\}$:

$$\sum_{i=1}^{n} |\mu - x_i| = |\mu - 0| + (n-1)|\mu - 1|$$

Konzepte eines Zentrums – Beispiel in $\mathbb{R}^1$

- Der Mittelwert für $\{x_i\}_{i=1}^n = \{0, 1, 1, \dots, 1\}$:

$$\sum_{i=1}^{n} |\mu - x_i|^2 = (\mu - 0)^2 + (n-1)(\mu - 1)^2 = f_2(\mu), \quad \mu \in [0, 1]$$

$$f_2'(\mu) = 2\mu + 2(n-1)(\mu - 1) \to 0 \text{ in } \mu_2 = 1 - 1/n \in (0, 1)$$

$$f_2(0) = (n-1), \quad f_2(1) = 1, \quad f_2(\mu_2) = 1 - 1/n \quad \text{(gl. Min.)}$$

- Der Median für $\{x_i\}_{i=1}^n = \{0, 1, 1, \dots, 1\}$:

$$\sum_{i=1}^{n} |\mu - x_i| = |\mu - 0| + (n-1)|\mu - 1| = f_1(\mu), \quad \mu \in [0, 1]$$

Konzepte eines Zentrums – Beispiel in $\mathbb{R}^1$

- Der Mittelwert für $\{x_i\}_{i=1}^n = \{0, 1, 1, \ldots, 1\}$:

$$\sum_{i=1}^{n} |\mu - x_i|^2 = (\mu - 0)^2 + (n-1)(\mu - 1)^2 = f_2(\mu), \quad \mu \in [0, 1]$$

$$f_2'(\mu) = 2\mu + 2(n-1)(\mu - 1) \to 0 \text{ in } \mu_2 = 1 - 1/n \in (0, 1)$$

$$f_2(0) = (n-1), \quad f_2(1) = 1, \quad f_2(\mu_2) = 1 - 1/n \quad \text{(gl. Min.)}$$

- Der Median für $\{x_i\}_{i=1}^n = \{0, 1, 1, \ldots, 1\}$:

$$\sum_{i=1}^{n} |\mu - x_i| = |\mu - 0| + (n-1)|\mu - 1| = f_1(\mu), \quad \mu \in [0, 1]$$

$$f_1(\mu) = \mu + (n-1)(1-\mu),$$

Konzepte eines Zentrums – Beispiel in $\mathbb{R}^1$

- Der Mittelwert für $\{x_i\}_{i=1}^n = \{0, 1, 1, \ldots, 1\}$:

$$\sum_{i=1}^n |\mu - x_i|^2 = (\mu - 0)^2 + (n-1)(\mu - 1)^2 = f_2(\mu), \quad \mu \in [0,1]$$

$$f_2'(\mu) = 2\mu + 2(n-1)(\mu - 1) \to 0 \text{ in } \mu_2 = 1 - 1/n \in (0,1)$$

$$f_2(0) = (n-1), \quad f_2(1) = 1, \quad f_2(\mu_2) = 1 - 1/n \quad \text{(gl. Min.)}$$

- Der Median für $\{x_i\}_{i=1}^n = \{0, 1, 1, \ldots, 1\}$:

$$\sum_{i=1}^n |\mu - x_i| = |\mu - 0| + (n-1)|\mu - 1| = f_1(\mu), \quad \mu \in [0,1]$$

$$f_1(\mu) = \mu + (n-1)(1-\mu), \quad f_1'(\mu) = 2 - n \neq 0$$

Konzepte eines Zentrums – Beispiel in $\mathbb{R}^1$

- Der Mittelwert für $\{x_i\}_{i=1}^n = \{0, 1, 1, \dots, 1\}$:

$$\sum_{i=1}^n |\mu - x_i|^2 = (\mu - 0)^2 + (n-1)(\mu - 1)^2 = f_2(\mu), \quad \mu \in [0, 1]$$

$$f_2'(\mu) = 2\mu + 2(n-1)(\mu - 1) \to 0 \text{ in } \mu_2 = 1 - 1/n \in (0, 1)$$

$$f_2(0) = (n-1), \quad f_2(1) = 1, \quad f_2(\mu_2) = 1 - 1/n \quad \text{(gl. Min.)}$$

- Der Median für $\{x_i\}_{i=1}^n = \{0, 1, 1, \dots, 1\}$:

$$\sum_{i=1}^n |\mu - x_i| = |\mu - 0| + (n-1)|\mu - 1| = f_1(\mu), \quad \mu \in [0, 1]$$

$$f_1(\mu) = \mu + (n-1)(1 - \mu), \quad f_1'(\mu) = 2 - n \neq 0$$

$$f_1(0) = n - 1, \quad f_1(1) = 1$$

Konzepte eines Zentrums – Beispiel in $\mathbb{R}^1$

- Der Mittelwert für $\{x_i\}_{i=1}^n = \{0, 1, 1, \dots, 1\}$:

$$\sum_{i=1}^n |\mu - x_i|^2 = (\mu - 0)^2 + (n-1)(\mu - 1)^2 = f_2(\mu), \quad \mu \in [0, 1]$$

$$f_2'(\mu) = 2\mu + 2(n-1)(\mu - 1) \to 0 \text{ in } \mu_2 = 1 - 1/n \in (0, 1)$$

$$f_2(0) = (n-1), \quad f_2(1) = 1, \quad f_2(\mu_2) = 1 - 1/n \quad \text{(gl. Min.)}$$

- Der Median für $\{x_i\}_{i=1}^n = \{0, 1, 1, \dots, 1\}$:

$$\sum_{i=1}^n |\mu - x_i| = |\mu - 0| + (n-1)|\mu - 1| = f_1(\mu), \quad \mu \in [0, 1]$$

$$f_1(\mu) = \mu + (n-1)(1-\mu), \quad f_1'(\mu) = 2 - n \neq 0$$

$$f_1(0) = n - 1, \quad f_1(1) = 1 \quad \text{(gl. Min.)} \quad \mu_1 = 1$$

Konzepte eines Zentrums – in $\mathbb{R}^m$

- Der *Mittelwert* für $\{\boldsymbol{x}_i\}_{i=1}^n \subset \mathbb{R}^m$:

Konzepte eines Zentrums – in $\mathbb{R}^m$

- Der *Mittelwert* für $\{\boldsymbol{x}_i\}_{i=1}^n \subset \mathbb{R}^m$:

$$\boldsymbol{\mu}_2 \leftarrow \min_{\boldsymbol{\mu}} \sum_{i=1}^{n} \|\boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{x}_i\|^2$$

Konzepte eines Zentrums – in $\mathbb{R}^m$

- Der *Mittelwert* für $\{\boldsymbol{x}_i\}_{i=1}^n \subset \mathbb{R}^m$:

$$\boldsymbol{\mu}_2 \leftarrow \min_{\boldsymbol{\mu}} \sum_{i=1}^{n} \|\boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{x}_i\|^2 \quad \text{(zweite Potenz!)}$$

Konzepte eines Zentrums – in $\mathbb{R}^m$

- Der *Mittelwert* für $\{\boldsymbol{x}_i\}_{i=1}^n \subset \mathbb{R}^m$:

$$\boldsymbol{\mu}_2 \leftarrow \min_{\boldsymbol{\mu}} \sum_{i=1}^{n} \|\boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{x}_i\|^2 \quad \text{(zweite Potenz!)}$$

$$\nabla_{\boldsymbol{\mu}} \sum_{i=1}^{n} \|\boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{x}_i\|^2 = 2 \sum_{i=1}^{n} (\boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{x}_i)$$

Konzepte eines Zentrums – in $\mathbb{R}^m$

- Der *Mittelwert* für $\{\boldsymbol{x}_i\}_{i=1}^n \subset \mathbb{R}^m$:

$$\boldsymbol{\mu}_2 \leftarrow \min_{\boldsymbol{\mu}} \sum_{i=1}^{n} \|\boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{x}_i\|^2 \quad \text{(zweite Potenz!)}$$

$$\nabla_{\boldsymbol{\mu}} \sum_{i=1}^{n} \|\boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{x}_i\|^2 = 2 \sum_{i=1}^{n} (\boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{x}_i) \to 0 \text{ in } \boldsymbol{\mu}_2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{x}_i$$

Konzepte eines Zentrums – in $\mathbb{R}^m$

- Der *Mittelwert* für $\{\boldsymbol{x}_i\}_{i=1}^n \subset \mathbb{R}^m$:

$$\boldsymbol{\mu}_2 \leftarrow \min_{\boldsymbol{\mu}} \sum_{i=1}^n \|\boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{x}_i\|^2 \quad \text{(zweite Potenz!)}$$

$$\nabla_{\boldsymbol{\mu}} \sum_{i=1}^n \|\boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{x}_i\|^2 = 2 \sum_{i=1}^n (\boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{x}_i) \to 0 \text{ in } \boldsymbol{\mu}_2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \boldsymbol{x}_i$$

- Der *Geometrische Median* für $\{\boldsymbol{x}_i\}_{i=1}^n \subset \mathbb{R}^m$:

Konzepte eines Zentrums – in $\mathbb{R}^m$

- Der *Mittelwert* für $\{\boldsymbol{x}_i\}_{i=1}^n \subset \mathbb{R}^m$:

$$\boldsymbol{\mu}_2 \leftarrow \min_{\boldsymbol{\mu}} \sum_{i=1}^{n} \|\boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{x}_i\|^2 \quad \text{(zweite Potenz!)}$$

$$\nabla_{\boldsymbol{\mu}} \sum_{i=1}^{n} \|\boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{x}_i\|^2 = 2 \sum_{i=1}^{n} (\boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{x}_i) \rightarrow 0 \text{ in } \boldsymbol{\mu}_2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{x}_i$$

- Der *Geometrische Median* für $\{\boldsymbol{x}_i\}_{i=1}^n \subset \mathbb{R}^m$:

$$\boldsymbol{\mu}_1 \leftarrow \min_{\boldsymbol{\mu}} \sum_{i=1}^{n} \|\boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{x}_i\|$$

Konzepte eines Zentrums – in $\mathbb{R}^m$

- Der *Mittelwert* für $\{\boldsymbol{x}_i\}_{i=1}^n \subset \mathbb{R}^m$:

$$\boldsymbol{\mu}_2 \leftarrow \min_{\boldsymbol{\mu}} \sum_{i=1}^n \|\boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{x}_i\|^2 \quad \text{(zweite Potenz!)}$$

$$\nabla_{\boldsymbol{\mu}} \sum_{i=1}^n \|\boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{x}_i\|^2 = 2 \sum_{i=1}^n (\boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{x}_i) \to 0 \text{ in } \boldsymbol{\mu}_2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \boldsymbol{x}_i$$

- Der *Geometrische Median* für $\{\boldsymbol{x}_i\}_{i=1}^n \subset \mathbb{R}^m$:

$$\boldsymbol{\mu}_1 \leftarrow \min_{\boldsymbol{\mu}} \sum_{i=1}^n \|\boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{x}_i\| \quad \text{(erste Potenz!)}$$

Konzepte eines Zentrums – in $\mathbb{R}^m$

- Der *Mittelwert* für $\{\boldsymbol{x}_i\}_{i=1}^n \subset \mathbb{R}^m$:

$$\boldsymbol{\mu}_2 \leftarrow \min_{\boldsymbol{\mu}} \sum_{i=1}^n \|\boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{x}_i\|^2 \quad \text{(zweite Potenz!)}$$

$$\nabla_{\boldsymbol{\mu}} \sum_{i=1}^n \|\boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{x}_i\|^2 = 2 \sum_{i=1}^n (\boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{x}_i) \rightarrow 0 \text{ in } \boldsymbol{\mu}_2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \boldsymbol{x}_i$$

- Der *Geometrische Median* für $\{\boldsymbol{x}_i\}_{i=1}^n \subset \mathbb{R}^m$:

$$\boldsymbol{\mu}_1 \leftarrow \min_{\boldsymbol{\mu}} \sum_{i=1}^n \|\boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{x}_i\| \quad \text{(erste Potenz!)}$$

$$\nabla_{\boldsymbol{\mu}} \sum_{i=1}^n \|\boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{x}_i\| = \sum_{i=1}^n \frac{\boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{x}_i}{\|\boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{x}_i\|}$$

Konzepte eines Zentrums – in $\mathbb{R}^m$

- Der *Mittelwert* für $\{\boldsymbol{x}_i\}_{i=1}^n \subset \mathbb{R}^m$:

$$\boldsymbol{\mu}_2 \leftarrow \min_{\boldsymbol{\mu}} \sum_{i=1}^n \|\boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{x}_i\|^2 \quad \text{(zweite Potenz!)}$$

$$\nabla_{\boldsymbol{\mu}} \sum_{i=1}^n \|\boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{x}_i\|^2 = 2 \sum_{i=1}^n (\boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{x}_i) \to 0 \text{ in } \boldsymbol{\mu}_2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \boldsymbol{x}_i$$

- Der *Geometrische Median* für $\{\boldsymbol{x}_i\}_{i=1}^n \subset \mathbb{R}^m$:

$$\boldsymbol{\mu}_1 \leftarrow \min_{\boldsymbol{\mu}} \sum_{i=1}^n \|\boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{x}_i\| \quad \text{(erste Potenz!)}$$

$$\nabla_{\boldsymbol{\mu}} \sum_{i=1}^n \|\boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{x}_i\| = \sum_{i=1}^n \frac{\boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{x}_i}{\|\boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{x}_i\|} \to 0 \text{ für} \ldots$$

Konzepte eines Zentrums – in $\mathbb{R}^m$

- Der *Mittelwert* für $\{\boldsymbol{x}_i\}_{i=1}^n \subset \mathbb{R}^m$:

$$\boldsymbol{\mu}_2 \leftarrow \min_{\boldsymbol{\mu}} \sum_{i=1}^n \|\boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{x}_i\|^2 \quad \text{(zweite Potenz!)}$$

$$\nabla_{\boldsymbol{\mu}} \sum_{i=1}^n \|\boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{x}_i\|^2 = 2 \sum_{i=1}^n (\boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{x}_i) \to 0 \text{ in } \boldsymbol{\mu}_2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \boldsymbol{x}_i$$

- Der *Geometrische Median* für $\{\boldsymbol{x}_i\}_{i=1}^n \subset \mathbb{R}^m$:

$$\boldsymbol{\mu}_1 \leftarrow \min_{\boldsymbol{\mu}} \sum_{i=1}^n \|\boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{x}_i\| \quad \text{(erste Potenz!)}$$

$$\nabla_{\boldsymbol{\mu}} \sum_{i=1}^n \|\boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{x}_i\| = \sum_{i=1}^n \frac{\boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{x}_i}{\|\boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{x}_i\|} \to 0 \text{ für} \ldots$$

$$\sum_{i=1}^n \frac{\boldsymbol{x}_i}{\|\boldsymbol{\mu}^{l-1} - \boldsymbol{x}_i\|} \Big/ \frac{1}{\|\boldsymbol{\mu}^{l-1} - \boldsymbol{x}_i\|} = \boldsymbol{\mu}^l$$

Konzepte eines Zentrums – in $\mathbb{R}^m$

- Der *Mittelwert* für $\{\boldsymbol{x}_i\}_{i=1}^n \subset \mathbb{R}^m$:

$$\boldsymbol{\mu}_2 \leftarrow \min_{\boldsymbol{\mu}} \sum_{i=1}^n \|\boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{x}_i\|^2 \quad \text{(zweite Potenz!)}$$

$$\nabla_{\boldsymbol{\mu}} \sum_{i=1}^n \|\boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{x}_i\|^2 = 2 \sum_{i=1}^n (\boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{x}_i) \to 0 \text{ in } \boldsymbol{\mu}_2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \boldsymbol{x}_i$$

- Der *Geometrische Median* für $\{\boldsymbol{x}_i\}_{i=1}^n \subset \mathbb{R}^m$:

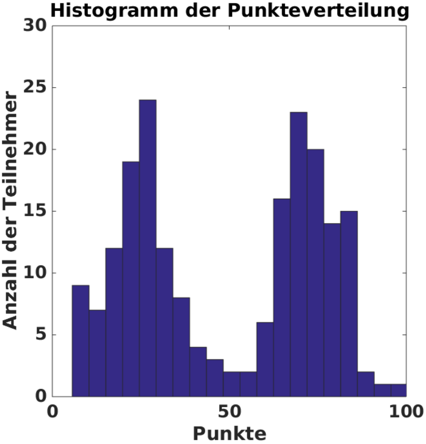
$$\boldsymbol{\mu}_1 \leftarrow \min_{\boldsymbol{\mu}} \sum_{i=1}^n \|\boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{x}_i\| \quad \text{(erste Potenz!)}$$

$$\nabla_{\boldsymbol{\mu}} \sum_{i=1}^n \|\boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{x}_i\| = \sum_{i=1}^n \frac{\boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{x}_i}{\|\boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{x}_i\|} \to 0 \text{ für} \ldots$$

$$\sum_{i=1}^n \frac{\boldsymbol{x}_i}{\|\boldsymbol{\mu}^{l-1} - \boldsymbol{x}_i\|} \Big/ \frac{1}{\|\boldsymbol{\mu}^{l-1} - \boldsymbol{x}_i\|} = \boldsymbol{\mu}^l \quad \xrightarrow{l \to \infty} \quad \boldsymbol{\mu}_1$$

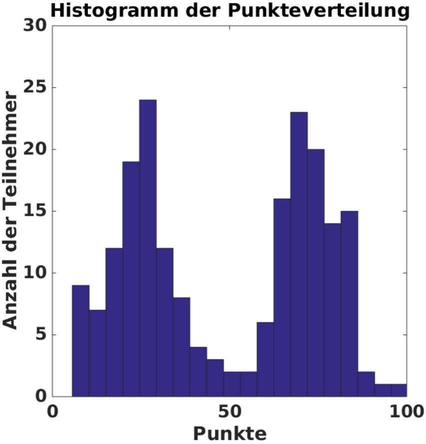
Bestimmung Zweier Zentren

Wie bestimmt man getrennte Zentren?



Bestimmung Zweier Zentren

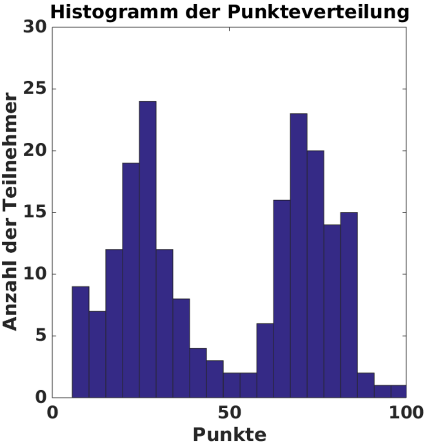
Wie bestimmt man getrennte Zentren?



Ansatz: $$\min_{\mu,\nu} \sum_{i \in I_\mu} |\mu - x_i|^p + \sum_{i \in I_\nu} |\nu - x_i|^p,$$

Bestimmung Zweier Zentren

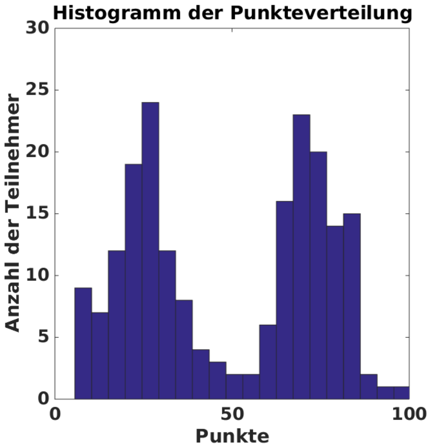
Wie bestimmt man getrennte Zentren?



Ansatz: $$\min_{\mu,\nu} \sum_{i \in I_\mu} |\mu - x_i|^p + \sum_{i \in I_\nu} |\nu - x_i|^p, \quad p = 2?,$$

Bestimmung Zweier Zentren

Wie bestimmt man getrennte Zentren?



Ansatz: $$\min_{\mu,\nu} \sum_{i \in I_\mu} |\mu - x_i|^p + \sum_{i \in I_\nu} |\nu - x_i|^p, \quad p = 2?, \quad I_\mu, I_\nu = ?$$

Bestimmung Zweier Zentren

- Der Ansatz für zwei Zentren:

$$\min_{\mu,\nu} \sum_{i \in I_\mu} |\mu - x_i|^2 + \sum_{i \in I_\nu} |\nu - x_i|^2$$

Bestimmung Zweier Zentren

- Der Ansatz für zwei Zentren:

$$\min_{\mu,\nu} \sum_{i \in I_\mu} |\mu - x_i|^2 + \sum_{i \in I_\nu} |\nu - x_i|^2$$

- Bestimmung der Index-Mengen I_μ, I_ν

$$\begin{aligned} I(\mu) &= \{i : |\mu - x_i| < |\nu - x_i|\} \\ I(\nu) &= \{i : |\nu - x_i| < |\mu - x_i|\} \end{aligned}$$

Bestimmung Zweier Zentren

- Der Ansatz für zwei Zentren:

$$\min_{\mu,\nu} \sum_{i \in I_\mu} |\mu - x_i|^2 + \sum_{i \in I_\nu} |\nu - x_i|^2$$

- Bestimmung der Index-Mengen I_μ, I_ν

$$\begin{aligned} I(\mu) &= \{i : |\mu - x_i| < |\nu - x_i|\} \\ I(\nu) &= \{i : |\nu - x_i| < |\mu - x_i|\} \end{aligned}$$

- Die zu minimierende Ziel-Funktion:

$$J(\mu, \nu) = \sum_{i \in I(\mu)} |\mu - x_i|^2 + \sum_{i \in I(\nu)} |\nu - x_i|^2$$

Bestimmung Zweier Zentren

- Der Ansatz für zwei Zentren:

$$\min_{\mu,\nu} \sum_{i \in I_\mu} |\mu - x_i|^2 + \sum_{i \in I_\nu} |\nu - x_i|^2$$

- Bestimmung der Index-Mengen I_μ, I_ν

$$\begin{aligned} I(\mu) &= \{ i : |\mu - x_i| < |\nu - x_i| \} \\ I(\nu) &= \{ i : |\nu - x_i| < |\mu - x_i| \} \end{aligned}$$

- Die zu minimierende Ziel-Funktion:

$$J(\mu, \nu) = \sum_{i \in I(\mu)} |\mu - x_i|^2 + \sum_{i \in I(\nu)} |\nu - x_i|^2$$

- Lösung: bis Konvergenz,

Bestimmung Zweier Zentren

- Der Ansatz für zwei Zentren:

$$\min_{\mu,\nu} \sum_{i \in I_\mu} |\mu - x_i|^2 + \sum_{i \in I_\nu} |\nu - x_i|^2$$

- Bestimmung der Index-Mengen I_μ, I_ν

$$\begin{aligned} I(\mu) &= \{i : |\mu - x_i| < |\nu - x_i|\} \\ I(\nu) &= \{i : |\nu - x_i| < |\mu - x_i|\} \end{aligned}$$

- Die zu minimierende Ziel-Funktion:

$$J(\mu,\nu) = \sum_{i \in I(\mu)} |\mu - x_i|^2 + \sum_{i \in I(\nu)} |\nu - x_i|^2$$

- Lösung: bis Konvergenz,
  - Aktualisiere μ^l, ν^l mit Mittelwerten über $I(\mu^{l-1}), I(\nu^{l-1})$,

Bestimmung Zweier Zentren

- Der Ansatz für zwei Zentren:

$$\min_{\mu,\nu} \sum_{i \in I_\mu} |\mu - x_i|^2 + \sum_{i \in I_\nu} |\nu - x_i|^2$$

- Bestimmung der Index-Mengen I_μ, I_ν

$$\begin{aligned} I(\mu) &= \{i : |\mu - x_i| < |\nu - x_i|\} \\ I(\nu) &= \{i : |\nu - x_i| < |\mu - x_i|\} \end{aligned}$$

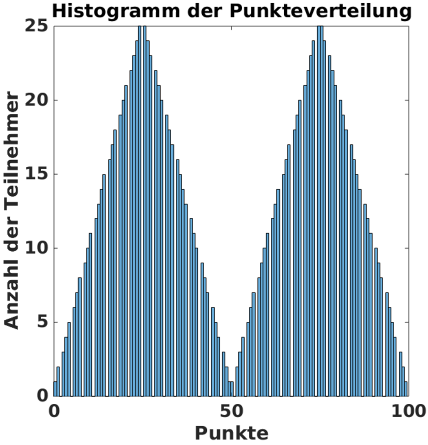
- Die zu minimierende Ziel-Funktion:

$$J(\mu,\nu) = \sum_{i \in I(\mu)} |\mu - x_i|^2 + \sum_{i \in I(\nu)} |\nu - x_i|^2$$

- Lösung: bis Konvergenz,
  - Aktualisiere μ^l, ν^l mit Mittelwerten über $I(\mu^{l-1}), I(\nu^{l-1})$,
  - Aktualisiere $I(\mu^l), I(\nu^l)$ laut Definition.

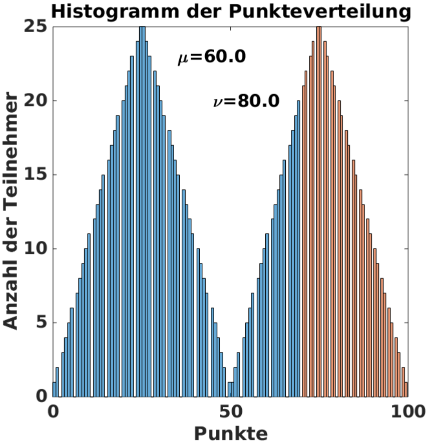
Bestimmung Zweier Zentren – Beispiel mit Noten

Gegebene Daten – das Auge sieht $\mu = 25$, $\nu = 75$:



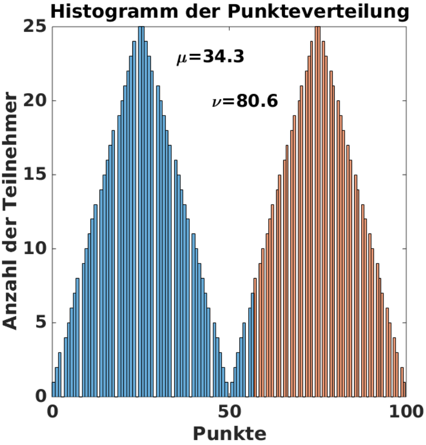
Bestimmung Zweier Zentren – Beispiel mit Noten

Startwerte: $\mu = 60$, $\nu = 80$, $I(\mu)$ blau, $I(\nu)$ braun



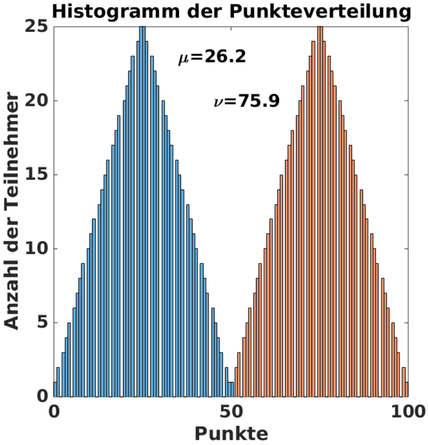
Bestimmung Zweier Zentren – Beispiel mit Noten

Aktualisierte μ, ν, $I(\mu)$, $I(\nu)$



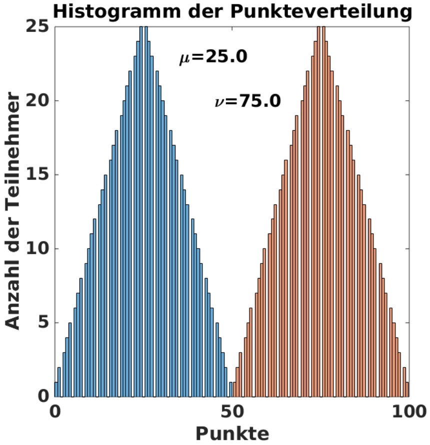
Bestimmung Zweier Zentren – Beispiel mit Noten

Aktualisierte μ, ν, $I(\mu)$, $I(\nu)$



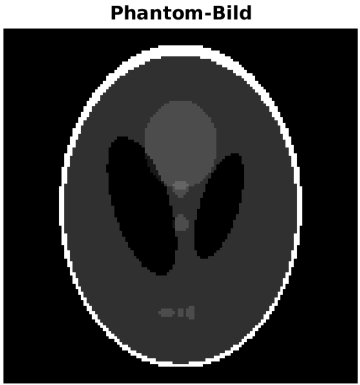
Bestimmung Zweier Zentren – Beispiel mit Noten

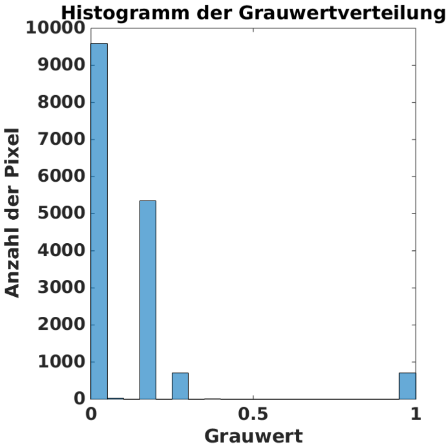
Konvergierte μ, ν, $I(\mu)$, $I(\nu)$



Bestimmung Zweier Zentren – Beispiel mit Bildern

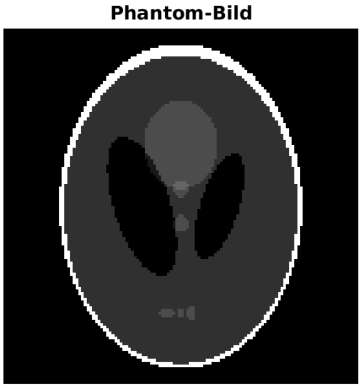
Das Bild $B = \{b_{i,j}\}_{i,j=1}^{N}$ hat Grauwert $b_{i,j} \in [0, 1]$ im Pixel $P_{i,j}$

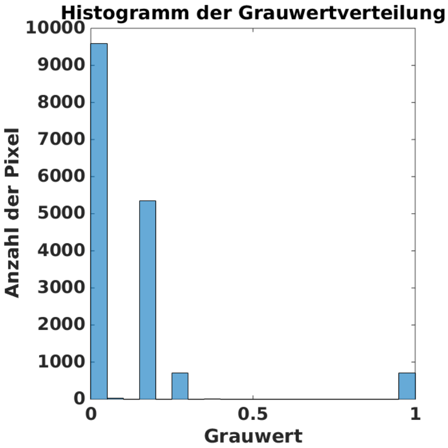




Bestimmung Zweier Zentren – Beispiel mit Bildern

Das Bild $B = \{b_{i,j}\}_{i,j=1}^{N}$ hat Grauwert $b_{i,j} \in [0,1]$ im Pixel $P_{i,j}$



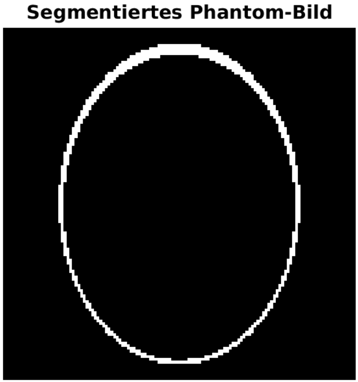


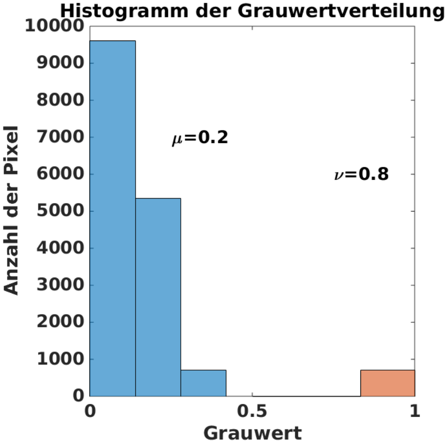
Das Histogramm verrät was im Bild fast ersichtlich ist:

Es gibt nur 6 Grauwerte.

Bestimmung Zweier Zentren – Beispiel mit Bildern

Mit nur *zwei* Zentren: $I(\mu)$ blau, $I(\nu)$ braun
Startwerte: $\mu = 0.2$, $\nu = 0.8$



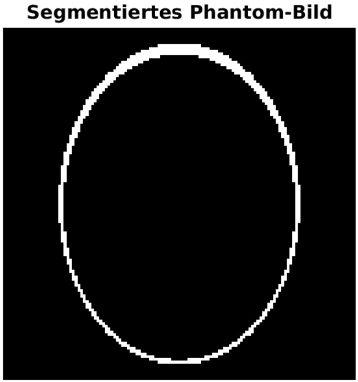


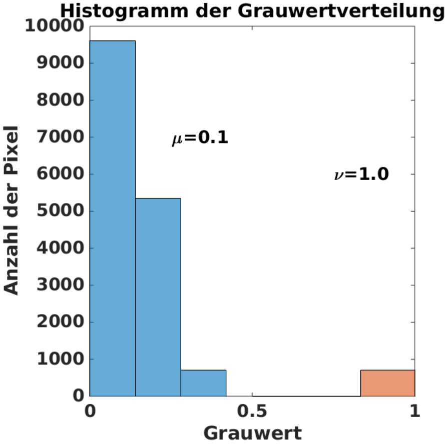
Das segmentierte Bild hat nur die Grauwerte μ und ν !

Bestimmung Zweier Zentren – Beispiel mit Bildern

Mit nur *zwei* Zentren: $I(\mu)$ blau, $I(\nu)$ braun

Konvergiert: $\mu = 0.1$, $\nu = 1.0$



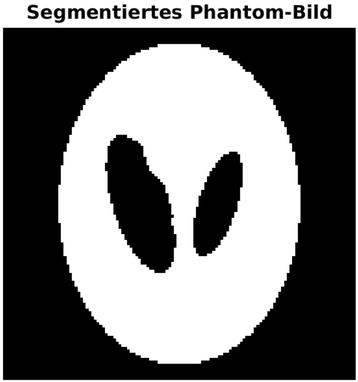


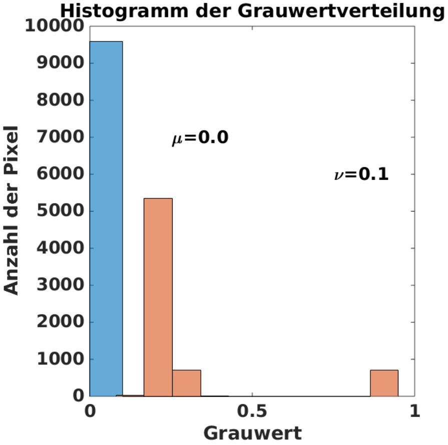
Das segmentierte Bild hat nur die Grauwerte μ und ν !

Bestimmung Zweier Zentren – Beispiel mit Bildern

Mit nur *zwei* Zentren: $I(\mu)$ blau, $I(\nu)$ braun

Startwerte: $\mu = 0.0$, $\nu = 0.1$



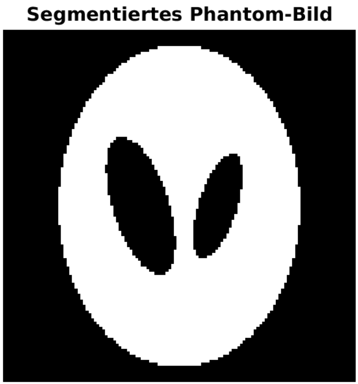


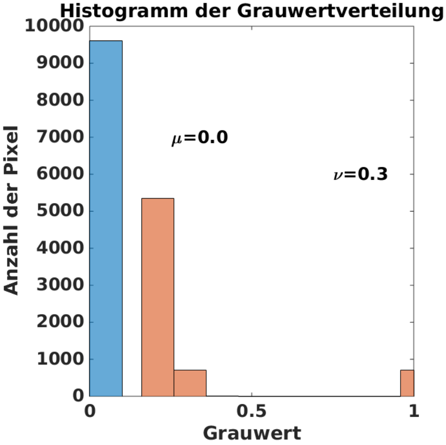
Das segmentierte Bild hat nur die Grauwerte μ und ν !

Bestimmung Zweier Zentren – Beispiel mit Bildern

Mit nur *zwei* Zentren: $I(\mu)$ blau, $I(\nu)$ braun

Konvergiert: $\mu = 0.0$, $\nu = 0.3$

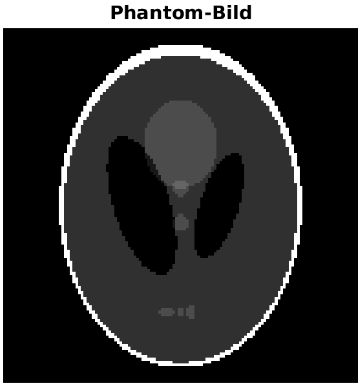




Das segmentierte Bild hat nur die Grauwerte μ und ν !

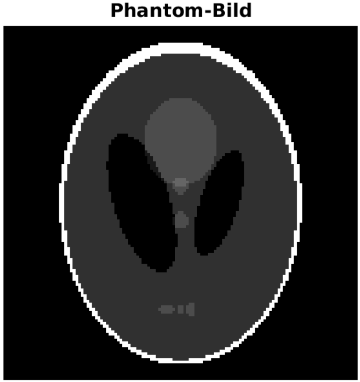
Bestimmung Zweier Zentren – Mehrere Minima

Warum gibt es zwei Lösungen in Abhängigkeit der Startwerte?



Bestimmung Zweier Zentren – Mehrere Minima

Warum gibt es zwei Lösungen in Abhängigkeit der Startwerte?

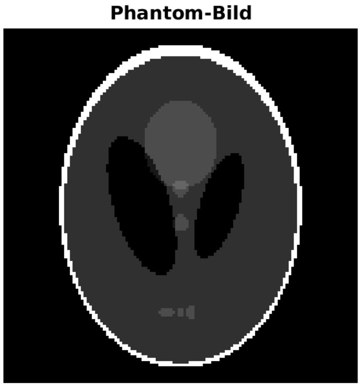


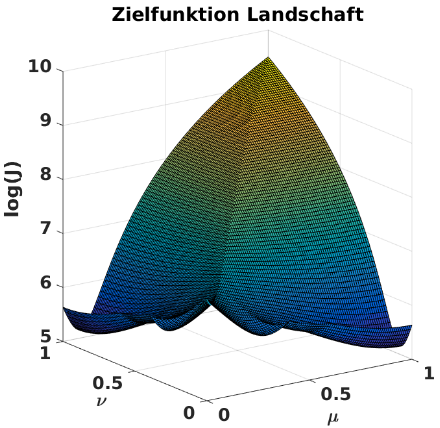
Zielfunktion: $\{x_i\} = \{b_{1,1}, \ldots, b_{N,N}\}$

$$J(\mu, \nu) = \sum_{i \in I(\mu)} |\mu - x_i|^2 + \sum_{i \in I(\nu)} |\nu - x_i|^2$$

Bestimmung Zweier Zentren – Mehrere Minima

Warum gibt es zwei Lösungen in Abhängigkeit der Startwerte?





Lokale Extreme der Zielfunktion: $\{x_i\} = \{b_{1,1}, \ldots, b_{N,N}\}$

$$J(\mu,\nu) = \sum_{i \in I(\mu)} |\mu - x_i|^2 + \sum_{i \in I(\nu)} |\nu - x_i|^2$$

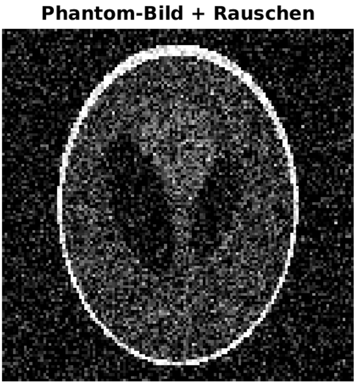
Bestimmung Zweier Zentren – Mehrere Minima

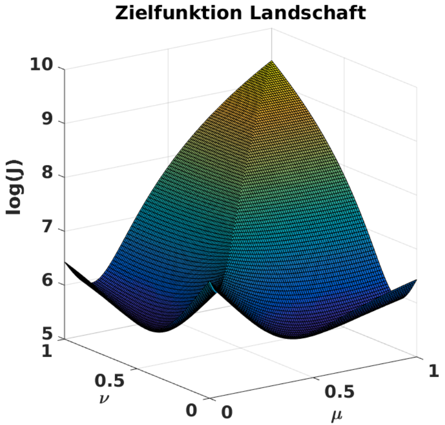
Der Effekt des Rauschens!

Phantom-Bild + Rauschen

Bestimmung Zweier Zentren – Mehrere Minima

Der Effekt des Rauschens!





Zielfunktion wird geglättet:

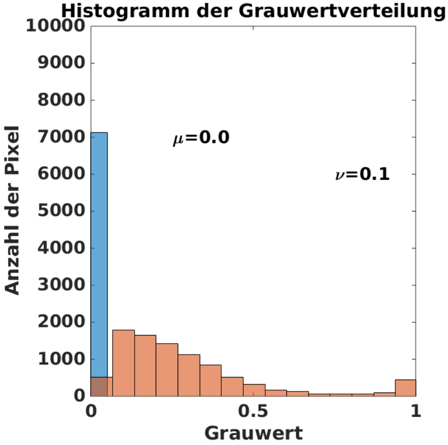
$$\{\tilde{x}_i\} = \{\tilde{b}_{1,1}, \ldots, \tilde{b}_{N,N}\}$$

$$J(\mu,\nu) = \sum_{i \in I(\mu)} |\mu - \tilde{x}_i|^2 + \sum_{i \in I(\nu)} |\nu - \tilde{x}_i|^2$$

Bestimmung Zweier Zentren – Rauschen und Glättung

Mit nur *zwei* Zentren: $I(\mu)$ blau, $I(\nu)$ braun

Startwerte: $\mu = 0.0$, $\nu = 0.1$

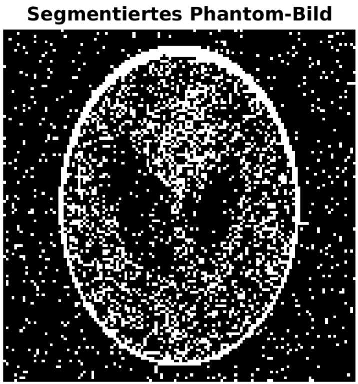


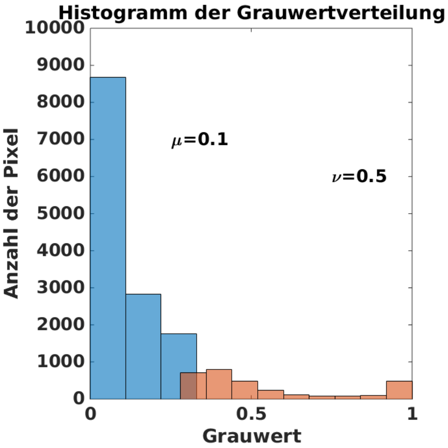
Das segmentierte Bild hat nur die Grauwerte μ und ν !

Bestimmung Zweier Zentren – Rauschen und Glättung

Mit nur *zwei* Zentren: $I(\mu)$ blau, $I(\nu)$ braun

Konvergiert: $\mu = 0.1$, $\nu = 0.5$

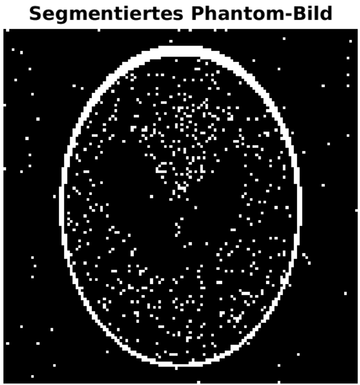


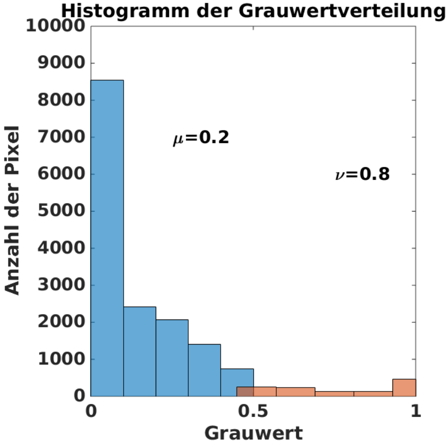


Das segmentierte Bild hat nur die Grauwerte μ und ν !

Bestimmung Zweier Zentren – Rauschen und Glättung

Mit nur *zwei* Zentren: $I(\mu)$ blau, $I(\nu)$ braun
Startwerte: $\mu = 0.2$, $\nu = 0.8$



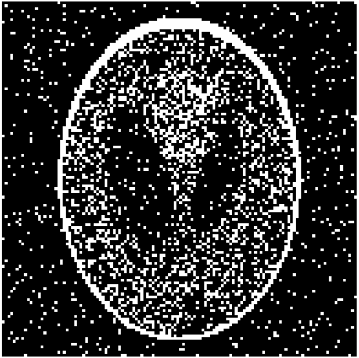


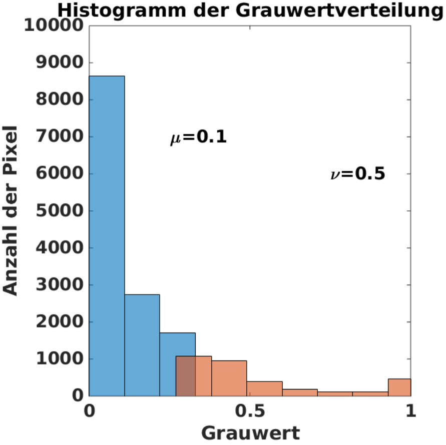
Das segmentierte Bild hat nur die Grauwerte μ und ν !

Bestimmung Zweier Zentren – Rauschen und Glättung

Mit nur *zwei* Zentren: *I*(μ) blau, *I*(ν) braun

Konvergiert: $\mu = 0.1$, $\nu = 0.5$ (gleich wie vorher!)





Das segmentierte Bild hat nur die Grauwerte μ und ν !

Bestimmung Mehrerer Zentren: *K-Means*

- Der Ansatz für mehrere Zentren $\{\mu_k\}_{k=1}^K$:

Bestimmung Mehrerer Zentren: *K-Means*

- Der Ansatz für mehrere Zentren $\{\mu_k\}_{k=1}^K$:

$$\min_{\{\mu_k\}} \sum_{i \in I_{\mu_1}} |\mu_1 - x_i|^2 + \cdots + \sum_{i \in I_{\mu_K}} |\mu_K - x_i|^2$$

Bestimmung Mehrerer Zentren: *K-Means*

- Der Ansatz für mehrere Zentren $\{\mu_k\}_{k=1}^K$:

$$\min_{\{\mu_k\}} \sum_{i \in I_{\mu_1}} |\mu_1 - x_i|^2 + \cdots + \sum_{i \in I_{\mu_K}} |\mu_K - x_i|^2$$

- Bestimmung der Index-Mengen $I(\mu_k)$,

$$I(\mu_k) = \{i : |\mu_k - x_i| < |\mu_l - x_i|, l \neq k\}$$

Bestimmung Mehrerer Zentren: *K-Means*

- Der Ansatz für mehrere Zentren $\{\mu_k\}_{k=1}^K$:

$$\min_{\{\mu_k\}} \sum_{i \in I_{\mu_1}} |\mu_1 - x_i|^2 + \cdots + \sum_{i \in I_{\mu_K}} |\mu_K - x_i|^2$$

- Bestimmung der Index-Mengen $I(\mu_k)$,

$$I(\mu_k) = \{i : |\mu_k - x_i| < |\mu_l - x_i|, l \neq k\}$$

- Die zu minimierende Ziel-Funktion:

$$J(\{\mu_k\}_{k=1}^K) = \sum_{k=1}^K \sum_{i \in I(\mu_k)} |\mu_k - x_i|^2$$

Bestimmung Mehrerer Zentren: *K-Means*

- Der Ansatz für mehrere Zentren $\{\mu_k\}_{k=1}^K$:

$$\min_{\{\mu_k\}} \sum_{i \in I_{\mu_1}} |\mu_1 - x_i|^2 + \cdots + \sum_{i \in I_{\mu_K}} |\mu_K - x_i|^2$$

- Bestimmung der Index-Mengen $I(\mu_k)$,

$$I(\mu_k) = \{i : |\mu_k - x_i| < |\mu_l - x_i|, l \neq k\}$$

- Die zu minimierende Ziel-Funktion:

$$J(\{\mu_k\}_{k=1}^K) = \sum_{k=1}^K \sum_{i \in I(\mu_k)} |\mu_k - x_i|^2$$

- Lösung: bis Konvergenz,

Bestimmung Mehrerer Zentren: *K-Means*

- Der Ansatz für mehrere Zentren $\{\mu_k\}_{k=1}^K$:

$$\min_{\{\mu_k\}} \sum_{i\in I_{\mu_1}} |\mu_1 - x_i|^2 + \cdots + \sum_{i\in I_{\mu_K}} |\mu_K - x_i|^2$$

- Bestimmung der Index-Mengen $I(\mu_k)$,

$$I(\mu_k) = \{i : |\mu_k - x_i| < |\mu_l - x_i|, l \neq k\}$$

- Die zu minimierende Ziel-Funktion:

$$J(\{\mu_k\}_{k=1}^K) = \sum_{k=1}^K \sum_{i\in I(\mu_k)} |\mu_k - x_i|^2$$

- Lösung: bis Konvergenz,
  - Aktualisiere μ_k^l mit Mittelwerten über $I(\mu_k^{l-1})$,

Bestimmung Mehrerer Zentren: *K-Means*

- Der Ansatz für mehrere Zentren $\{\mu_k\}_{k=1}^K$:

$$\min_{\{\mu_k\}} \sum_{i \in I_{\mu_1}} |\mu_1 - x_i|^2 + \cdots + \sum_{i \in I_{\mu_K}} |\mu_K - x_i|^2$$

- Bestimmung der Index-Mengen $I(\mu_k)$,

$$I(\mu_k) = \{i : |\mu_k - x_i| < |\mu_l - x_i|, l \neq k\}$$

- Die zu minimierende Ziel-Funktion:

$$J(\{\mu_k\}_{k=1}^K) = \sum_{k=1}^{K} \sum_{i \in I(\mu_k)} |\mu_k - x_i|^2$$

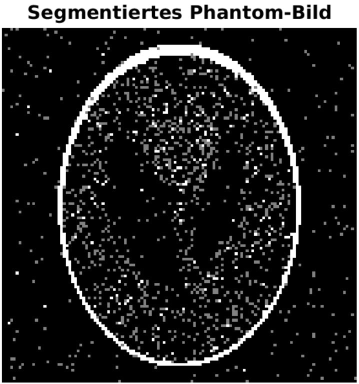
- Lösung: bis Konvergenz,
  - Aktualisiere μ_k^l mit Mittelwerten über $I(\mu_k^{l-1})$,
  - Aktualisiere $I(\mu_k^l)$ laut Definition.

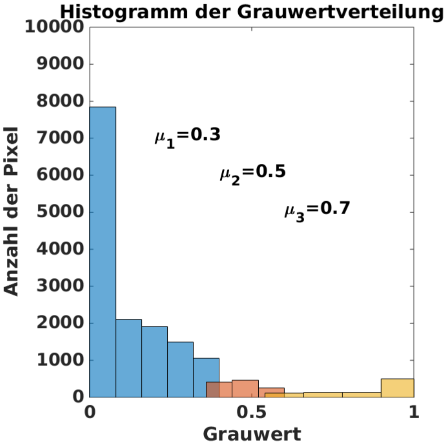
Bestimmung Dreier Zentren – Rauschen und Glättung

Nun mit *drei* Zentren: $I(\mu_1)$ blau, $I(\mu_2)$ braun, $I(\mu_2)$ gelb

Rauschen wird ausgenutzt!

Startwerte: $\mu_1 = 0.3$, $\mu_2 = 0.5$, $\mu_3 = 0.7$ (egal!)





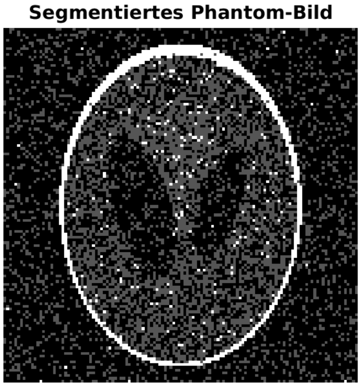
Das segmentierte Bild hat nur die Grauwerte μ_1, μ_2 und μ_3 !

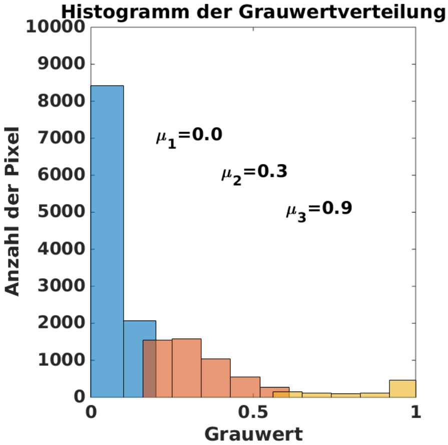
Bestimmung Dreier Zentren – Rauschen und Glättung

Nun mit *drei* Zentren: $I(\mu_1)$ blau, $I(\mu_2)$ braun, $I(\mu_2)$ gelb

Rauschen wird ausgenutzt!

Konvergiert: $\mu_1 = 0.0$, $\mu_2 = 0.3$, $\mu_3 = 0.9$





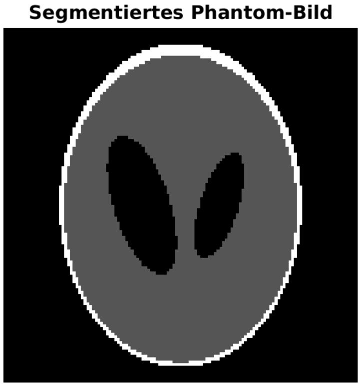
Das segmentierte Bild hat nur die Grauwerte μ_1, μ_2 und μ_3 !

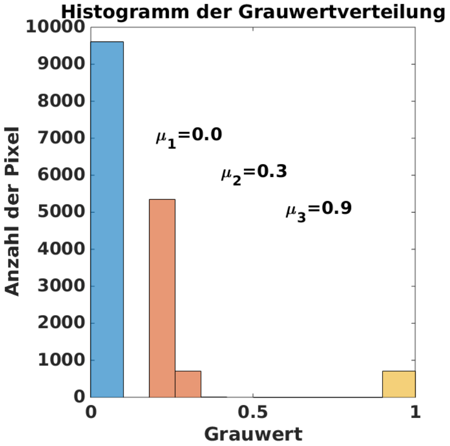
Bestimmung Dreier Zentren – Rauschen und Glättung

Nun mit *drei* Zentren: $I(\mu_1)$ blau, $I(\mu_2)$ braun, $I(\mu_2)$ gelb

Kein Rauschen, aber man verwendet die letzten Ergebnisse!

Startwerte: $\mu_1 = 0.0$, $\mu_2 = 0.3$, $\mu_3 = 0.9$





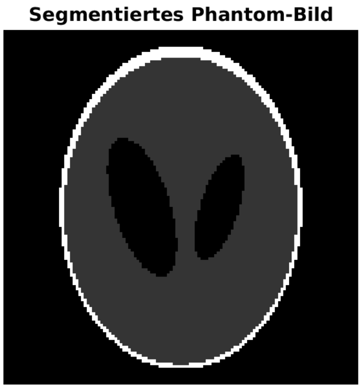
Das segmentierte Bild hat nur die Grauwerte μ_1, μ_2 und μ_3 !

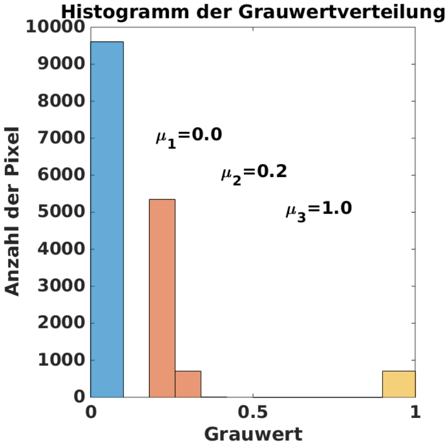
Bestimmung Dreier Zentren – Rauschen und Glättung

Nun mit *drei* Zentren: $I(\mu_1)$ blau, $I(\mu_2)$ braun, $I(\mu_2)$ gelb

Kein Rauschen, aber man verwendet die letzten Ergebnisse!

Konvergiert: $\mu_1 = 0.0$, $\mu_2 = 0.2$, $\mu_3 = 1.0$





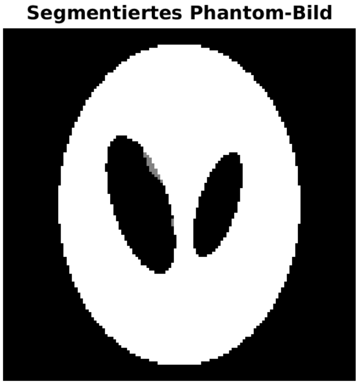
Das segmentierte Bild hat nur die Grauwerte μ_1, μ_2 und μ_3 !

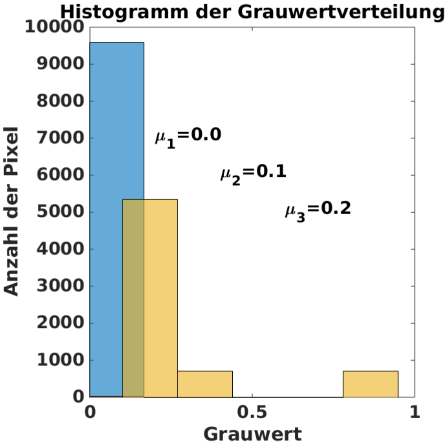
Bestimmung Dreier Zentren – Rauschen und Glättung

Nun mit *drei* Zentren: $I(\mu_1)$ blau, $I(\mu_2)$ braun, $I(\mu_2)$ gelb

Kein Rauschen, und Startwerte werden anders ausgewählt!

Startwerte: $\mu_1 = 0.0$, $\mu_2 = 0.1$, $\mu_3 = 0.2$





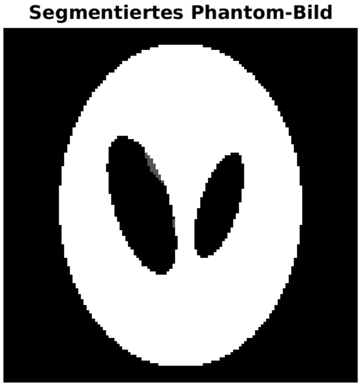
Das segmentierte Bild hat nur die Grauwerte μ_1, μ_2 und μ_3 !

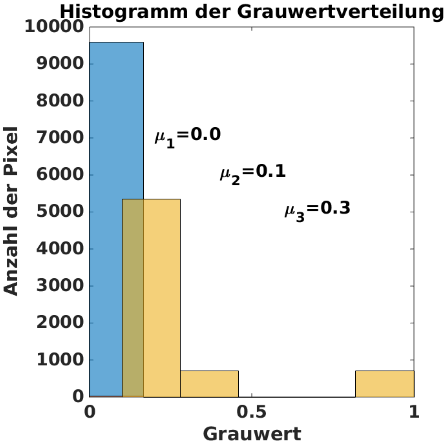
Bestimmung Dreier Zentren – Rauschen und Glättung

Nun mit *drei* Zentren: $I(\mu_1)$ blau, $I(\mu_2)$ braun, $I(\mu_2)$ gelb

Kein Rauschen, und Startwerte werden anders ausgewählt!

Konvergiert: $\mu_1 = 0.0$, $\mu_2 = 0.1$, $\mu_3 = 0.3$ (schlechtes Bild!)





Das segmentierte Bild hat nur die Grauwerte μ_1, μ_2 und μ_3 !

Bestimmung Mehrerer Zentren in $\mathbb{R}^3$

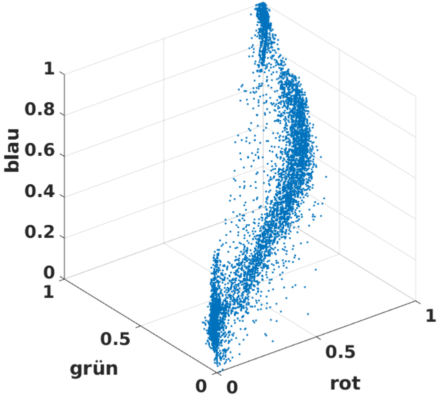
Das Bild $R = \{(r_{i,j}, g_{i,j}, b_{i,j})\}_{i,j=1}^{N}$

Bestimmung Mehrerer Zentren in $\mathbb{R}^3$

Das Bild $R = \{(r_{i,j}, g_{i,j}, b_{i,j})\}_{i,j=1}^{N}$

Natürliches Bild

Verteilung der RGB-Werte

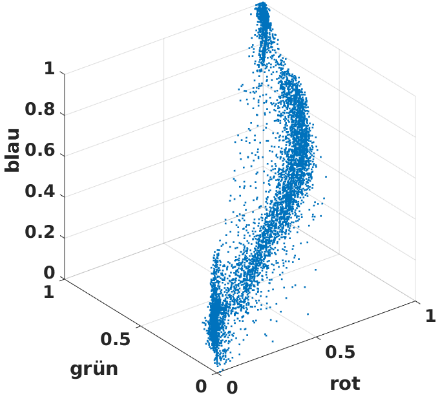


Bestimmung Mehrerer Zentren in $\mathbb{R}^3$

Das Bild $R = \{(r_{i,j}, g_{i,j}, b_{i,j})\}_{i,j=1}^{N}$ hat für jedes $(r_{i,j}, g_{i,j}, b_{i,j}) \in \mathbb{R}^3$

Natürliches Bild

Verteilung der RGB-Werte



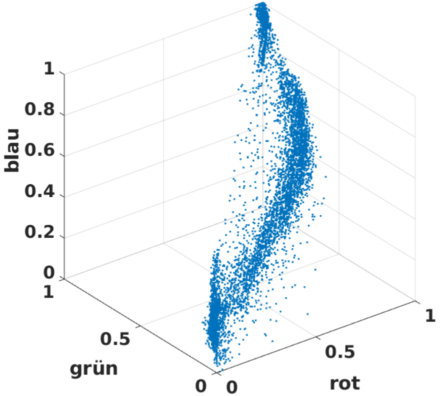
Bestimmung Mehrerer Zentren in $\mathbb{R}^3$

Das Bild $R = \{(r_{i,j}, g_{i,j}, b_{i,j})\}_{i,j=1}^{N}$ hat für jedes $(r_{i,j}, g_{i,j}, b_{i,j}) \in \mathbb{R}^3$

rot-Wert $r_{i,j} \in [0, 1]$,

Natürliches Bild

Verteilung der RGB-Werte

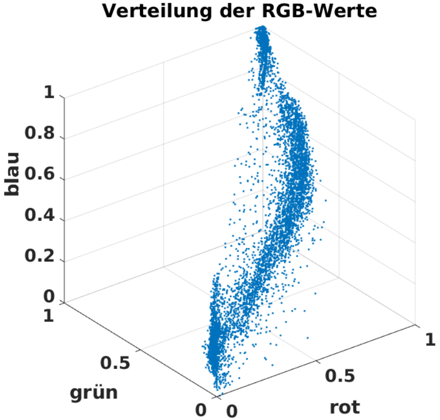


Bestimmung Mehrerer Zentren in $\mathbb{R}^3$

Das Bild $R = \{(r_{i,j}, g_{i,j}, b_{i,j})\}_{i,j=1}^{N}$ hat für jedes $(r_{i,j}, g_{i,j}, b_{i,j}) \in \mathbb{R}^3$

rot-Wert $r_{i,j} \in [0, 1]$,

grün-Wert $g_{i,j} \in [0, 1]$ und



Bestimmung Mehrerer Zentren in $\mathbb{R}^3$

Das Bild $R = \{(r_{i,j}, g_{i,j}, b_{i,j})\}_{i,j=1}^{N}$ hat für jedes $(r_{i,j}, g_{i,j}, b_{i,j}) \in \mathbb{R}^3$

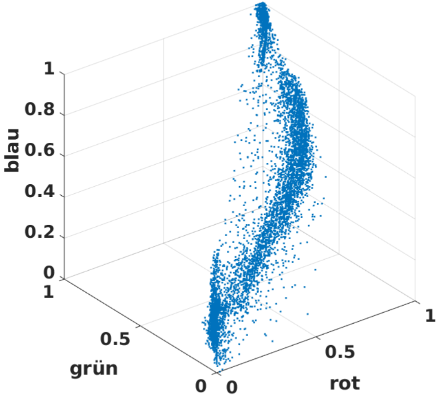
rot-Wert $r_{i,j} \in [0, 1]$,

grün-Wert $g_{i,j} \in [0, 1]$ und

blau-Wert $b_{i,j} \in [0, 1]$

Natürliches Bild

Verteilung der RGB-Werte



Bestimmung Mehrerer Zentren in $\mathbb{R}^3$

Das Bild $R = \{(r_{i,j}, g_{i,j}, b_{i,j})\}_{i,j=1}^{N}$ hat für jedes $(r_{i,j}, g_{i,j}, b_{i,j}) \in \mathbb{R}^3$

rot-Wert $r_{i,j} \in [0, 1]$,

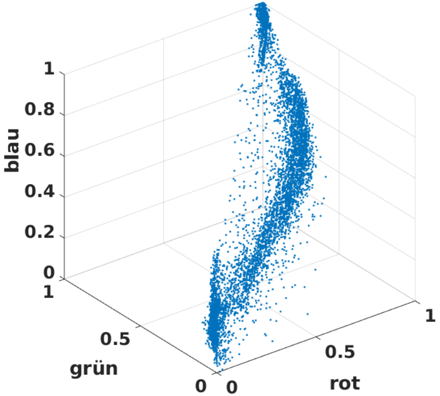
grün-Wert $g_{i,j} \in [0, 1]$ und

blau-Wert $b_{i,j} \in [0, 1]$

im Pixel $P_{i,j}$

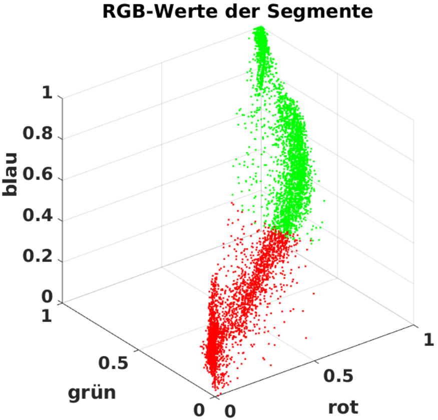
Natürliches Bild

Verteilung der RGB-Werte



Bestimmung Mehrerer Zentren in $\mathbb{R}^3$

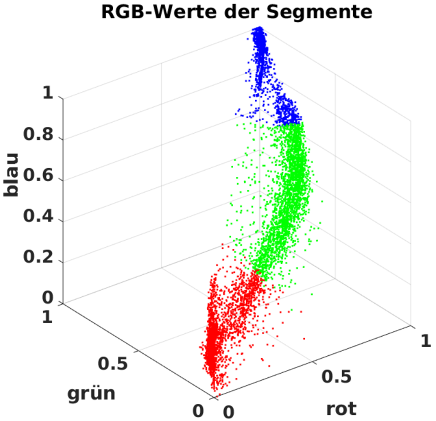
Mit 2 Zentren:



Das segmentierte Bild hat nur die RGB-Werte $\{\boldsymbol{\mu}_k\}_{k=1}^{2}$!

Bestimmung Mehrerer Zentren in $\mathbb{R}^3$

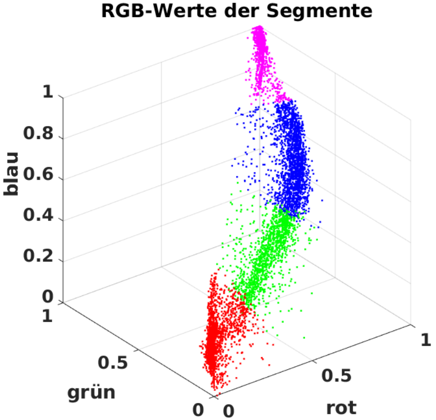
Mit 3 Zentren:



Das segmentierte Bild hat nur die RGB-Werte $\{\mu_k\}_{k=1}^{3}$!

Bestimmung Mehrerer Zentren in $\mathbb{R}^3$

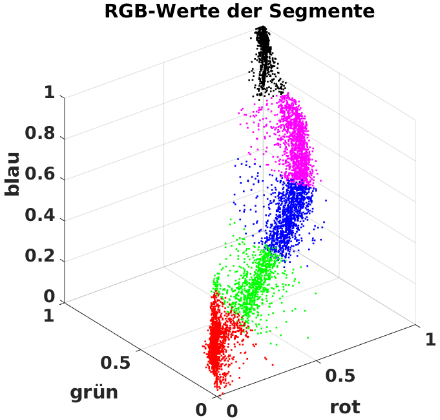
Mit 4 Zentren:



Das segmentierte Bild hat nur die RGB-Werte $\{\mu_k\}_{k=1}^{4}$!

Bestimmung Mehrerer Zentren in $\mathbb{R}^3$

Mit 5 Zentren:



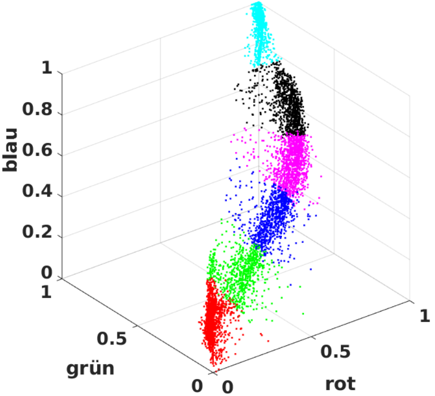
Das segmentierte Bild hat nur die RGB-Werte $\{\boldsymbol{\mu}_k\}_{k=1}^{5}$!

Bestimmung Mehrerer Zentren in $\mathbb{R}^3$

Mit 6 Zentren:

Segmentiertes Bild

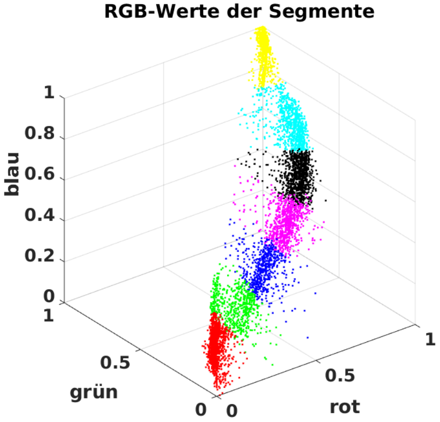
RGB-Werte der Segmente



Das segmentierte Bild hat nur die RGB-Werte $\{\boldsymbol{\mu}_k\}_{k=1}^6$!

Bestimmung Mehrerer Zentren in $\mathbb{R}^3$

Mit 7 Zentren:



Das segmentierte Bild hat nur die RGB-Werte $\{\mu_k\}_{k=1}^{7}$!

Danke für die Einladung !

Danke für die Einladung !

Danke für die Aufmerksamkeit !

Danke für die Einladung !

Danke für die Aufmerksamkeit !

Vortrag zum Herunterladen:

http://math.uni-graz.at/keeling/vortraege/TagDerMath2016.pdf