Mathematik Fachkoordinatorentag
Landesschulrat für die Steiermark

Stephen Keeling
Institut für Mathematik und Wissenschaftliches Rechnen

Über die Modellierungswoche für SchülerInnen:

http://math.uni-graz.at/modellwoche/

und den Modellierungsworkshop für LehrerInnen:

http://math.uni-graz.at/modellworkshop/

Die Modellierungswoche in der Steiermark

- **2005, 2006, 2007 und das vierte Mal im Jahr 2008!**

Die Modellierungswoche in der Steiermark

- **2005, 2006, 2007 und das vierte Mal im Jahr 2008!**
- **Findet vom 13.-19.Jan 2008 im Schloss Seggau statt.**





Die Modellierungswoche in der Steiermark

- 2005, 2006, 2007 und das vierte Mal im Jahr 2008!
- Findet vom 13.-19.Jan 2008 im Schloss Seggau statt.





- Anmeldungsfrist läuft bis zum 14.Dez 2007.

Die Modellierungswoche in der Steiermark

- 2005, 2006, 2007 und das vierte Mal im Jahr 2008!
- Findet vom 13.-19.Jan 2008 im Schloss Seggau statt.

- Anmeldungsfrist läuft bis zum 14.Dez 2007.
- Anmeldung elektronisch und 30 Plätze werden verlost.

Die Modellierungswoche in der Steiermark

- 2005, 2006, 2007 und das vierte Mal im Jahr 2008!
- Findet vom 13.-19.Jan 2008 im Schloss Seggau statt.





- Anmeldungsfrist läuft bis zum 14.Dez 2007.
- Anmeldung elektronisch und 30 Plätze werden verlost.
- Das Team:







Wogrin S.Thaller Schöpf B.Thaller Lettl Keeling Propst

Der Modellierungsworkshop in der Steiermark

- (Modellierungstag: 2005). 2007 und 2008 (zweites Mal!)

Der Modellierungsworkshop in der Steiermark

- (Modellierungstag: 2005). 2007 und 2008 (zweites Mal!)
- Findet vom 4.-6.Feb 2008 im Schloss Seggau statt.





Der Modellierungsworkshop in der Steiermark

- (Modellierungstag: 2005). 2007 und 2008 (zweites Mal!)
- Findet vom 4.-6.Feb 2008 im Schloss Seggau statt.

- Anmeldung beim PI bis zum Ende des Sommersemesters.

Der Modellierungsworkshop in der Steiermark

- (Modellierungstag: 2005). 2007 und 2008 (zweites Mal!)
- Findet vom 4.-6.Feb 2008 im Schloss Seggau statt.





- Anmeldung beim PI bis zum Ende des Sommersemesters.
- Einführung in Modellierung und Softwares.

Der Modellierungsworkshop in der Steiermark

- (Modellierungstag: 2005). 2007 und 2008 (zweites Mal!)
- Findet vom 4.-6.Feb 2008 im Schloss Seggau statt.

- Anmeldung beim PI bis zum Ende des Sommersemesters.
- Einführung in Modellierung und Softwares.
- Zwei Gruppen mit eigenen Problemstellungen und kurzen Präsentationen am Ende.

Der Modellierungsworkshop in der Steiermark

- (Modellierungstag: 2005). 2007 und 2008 (zweites Mal!)
- Findet vom 4.-6.Feb 2008 im Schloss Seggau statt.





- Anmeldung beim PI bis zum Ende des Sommersemesters.
- Einführung in Modellierung und Softwares.
- Zwei Gruppen mit eigenen Problemstellungen und kurzen Präsentationen am Ende.
- Vorträge am Abend über Beispiele.

Der Modellierungsworkshop in der Steiermark

- (Modellierungstag: 2005). 2007 und 2008 (zweites Mal!)
- Findet vom 4.-6.Feb 2008 im Schloss Seggau statt.





- Anmeldung beim PI bis zum Ende des Sommersemesters.
- Einführung in Modellierung und Softwares.
- Zwei Gruppen mit eigenen Problemstellungen und kurzen Präsentationen am Ende.
- Vorträge am Abend über Beispiele.
- Das Team:

Windischbacher

Desch

Keeling

Nun Einige Beispiele!

Einführung in Wärmetransport:

Nun Einige Beispiele!

Einführung in Wärmetransport:

- **Die Heizung wird ausgeschaltet in $t_0 = 0$.**

Nun Einige Beispiele!

Einführung in Wärmetransport:

- **Die Heizung wird ausgeschaltet in $t_0 = 0$.**
- **Die Innentemperatur ist $T(t)$ und**

Nun Einige Beispiele!

Einführung in Wärmetransport:

- **Die Heizung wird ausgeschaltet in** $t_0 = 0$.
- **Die Innentemperatur ist** $T(t)$ **und**
- **die Aussentemperatur ist** $T_\infty < T(t_0) = T_0$.

Nun Einige Beispiele!

Einführung in Wärmetransport:

- **Die Heizung wird ausgeschaltet in** $t_0 = 0$.
- **Die Innentemperatur ist** $T(t)$ **und**
- **die Aussentemperatur ist** $T_\infty < T(t_0) = T_0$.
- **Zeitdauer** t_1 **bis** $T(t_1) = T_\infty + p[T_0 - T_\infty]$ **?**

Nun Einige Beispiele!

Einführung in Wärmetransport:

- **Die Heizung wird ausgeschaltet in $t_0 = 0$.**
- **Die Innentemperatur ist $T(t)$ und**
- **die Aussentemperatur ist $T_\infty < T(t_0) = T_0$.**
- **Zeitdauer t_1 bis $T(t_1) = T_\infty + p[T_0 - T_\infty]$?**

Das Newtonsche Kühlungsgesetz beschreibt Diffusion so:

$$E'(t) \propto [T_\infty - T(t)]$$

Nun Einige Beispiele!

Einführung in Wärmetransport:

- **Die Heizung wird ausgeschaltet in** $t_0 = 0$.
- **Die Innentemperatur ist** $T(t)$ **und**
- **die Aussentemperatur ist** $T_\infty < T(t_0) = T_0$.
- **Zeitdauer** t_1 **bis** $T(t_1) = T_\infty + p[T_0 - T_\infty]$ **?**

Das Newtonsche Kühlungsgesetz beschreibt Diffusion so:

$$E'(t) \propto [T_\infty - T(t)]$$

oder mit $E(t) = \rho c V T(t)$**,**

$$\rho c V T'(t) = hS[T_\infty - T(t)], \quad T(t_0) = T_0$$

Nun Einige Beispiele!

Einführung in Wärmetransport:

- **Die Heizung wird ausgeschaltet in $t_0 = 0$.**
- **Die Innentemperatur ist $T(t)$ und**
- **die Aussentemperatur ist $T_\infty < T(t_0) = T_0$.**
- **Zeitdauer t_1 bis $T(t_1) = T_\infty + p[T_0 - T_\infty]$?**

Das Newtonsche Kühlungsgesetz beschreibt Diffusion so:

$$E'(t) \propto [T_\infty - T(t)]$$

oder mit $E(t) = \rho c V T(t)$,

$$\rho c V T'(t) = hS[T_\infty - T(t)], \quad T(t_0) = T_0$$

Lösung ist $T(t) = T_\infty + [T_0 - T_\infty] \exp[-hSt/(\rho c V)]$, und

$$t_1 = \frac{\rho c V}{hS} \ln \frac{1}{p}.$$

Nun Einige Beispiele!

Einführung in Wärmetransport:

- **Die Heizung wird ausgeschaltet in $t_0 = 0$.**
- **Die Innentemperatur ist $T(t)$ und**
- **die Aussentemperatur ist $T_\infty < T(t_0) = T_0$.**
- **Zeitdauer t_1 bis $T(t_1) = T_\infty + p[T_0 - T_\infty]$?**

Das Newtonsche Kühlungsgesetz beschreibt Diffusion so:

$$E'(t) \propto [T_\infty - T(t)]$$

oder mit $E(t) = \rho c V T(t)$,

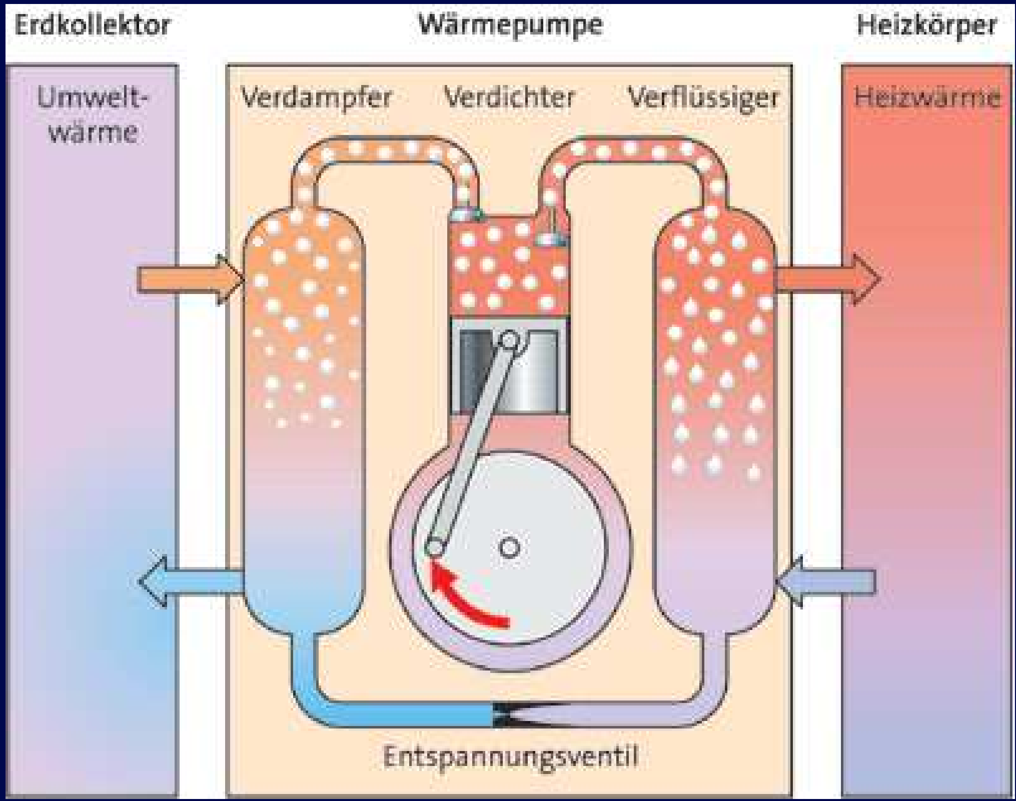
$$\rho c V T'(t) = hS[T_\infty - T(t)], \quad T(t_0) = T_0$$

Lösung ist $T(t) = T_\infty + [T_0 - T_\infty] \exp[-hSt/(\rho c V)]$, und

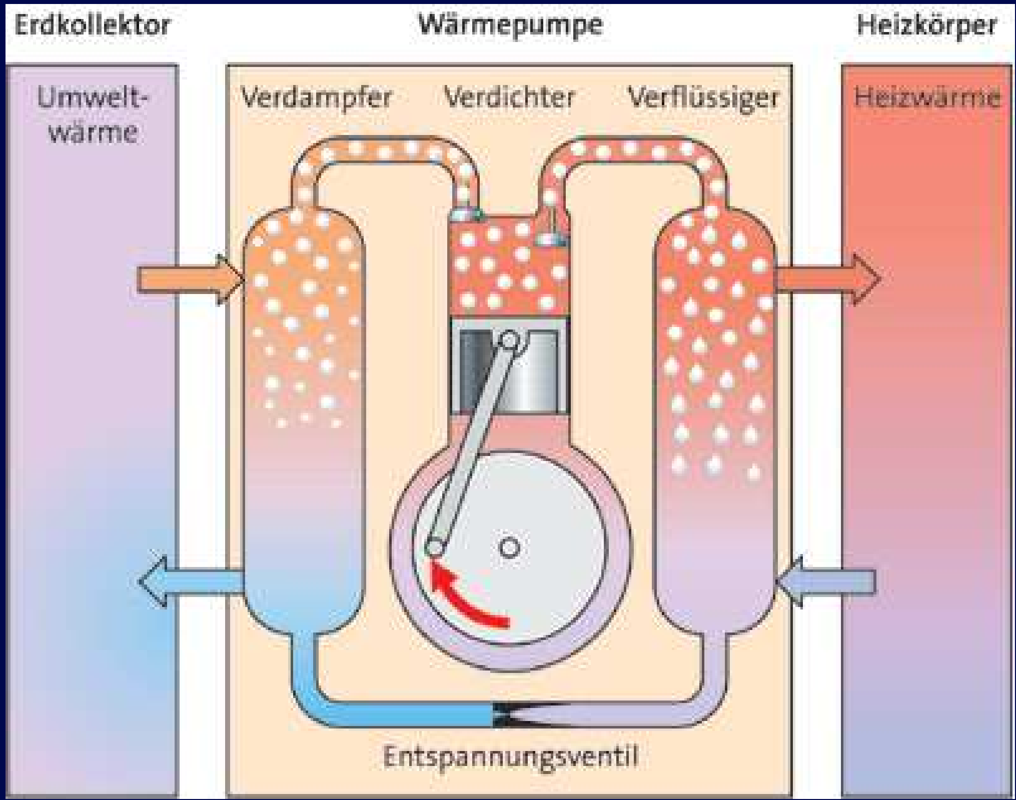
$$t_1 = \frac{\rho c V}{hS} \ln \frac{1}{p}.$$

Weitere Frage: Soll man über einen Urlaub heizen?

Wie funktioniert eine Erdwärmeheizung?

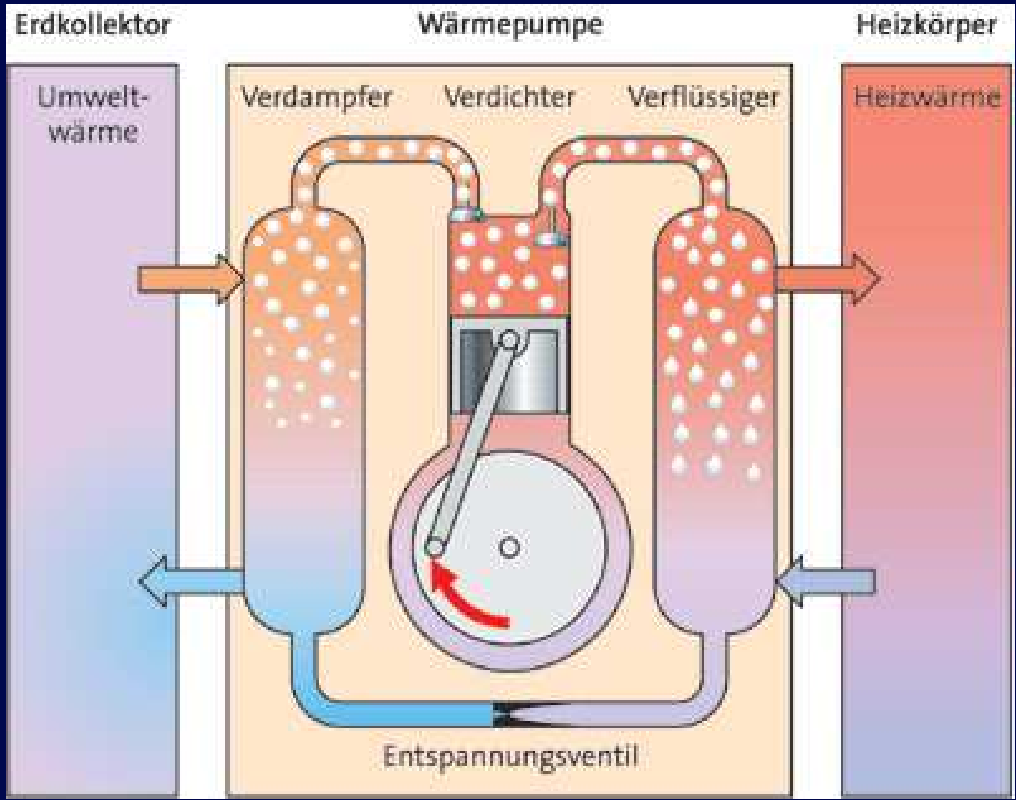


Wie funktioniert eine Erdwärmeheizung?



Unser System ist falsch installiert worden!

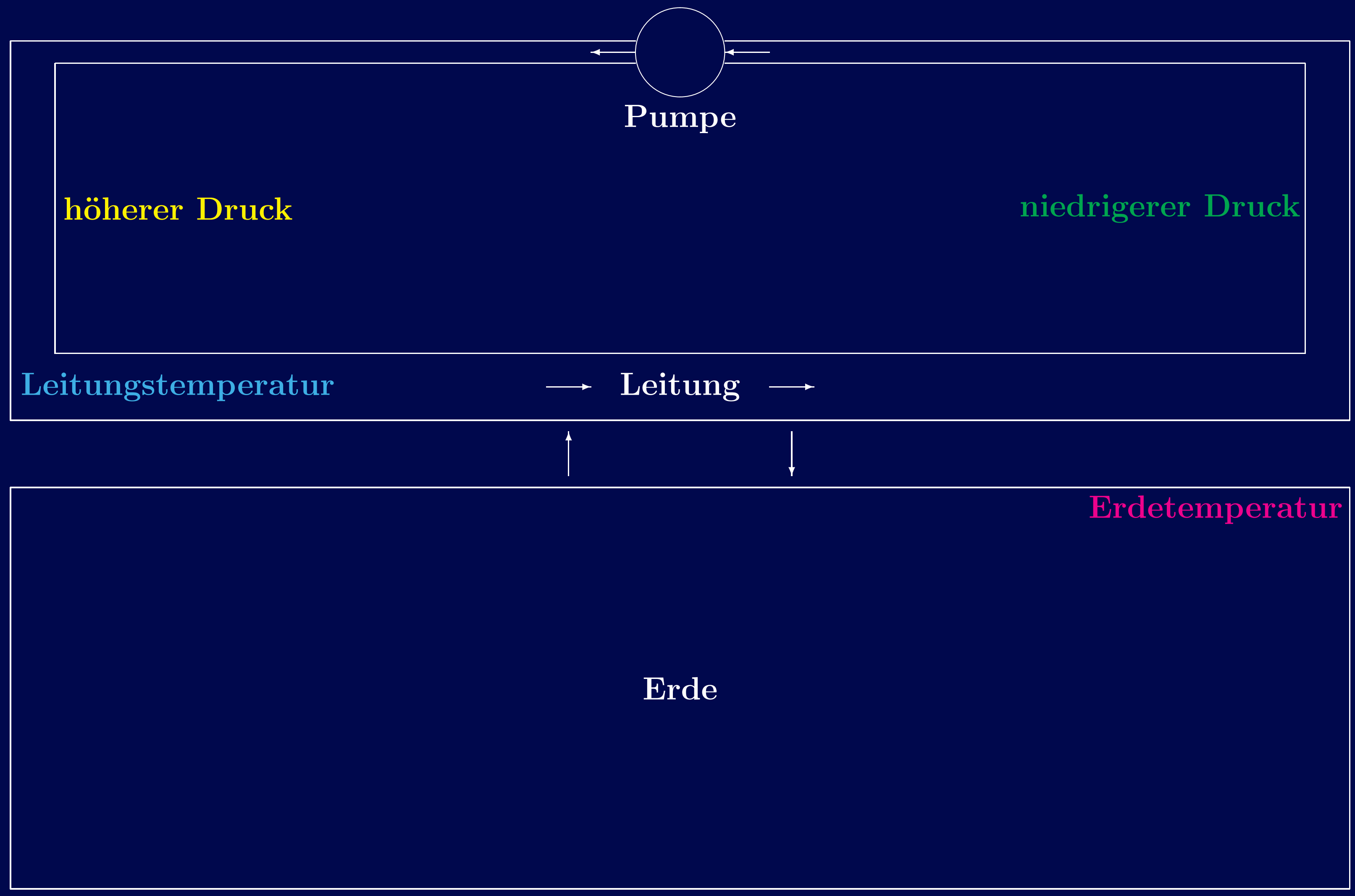
Wie funktioniert eine Erdwärmeheizung?



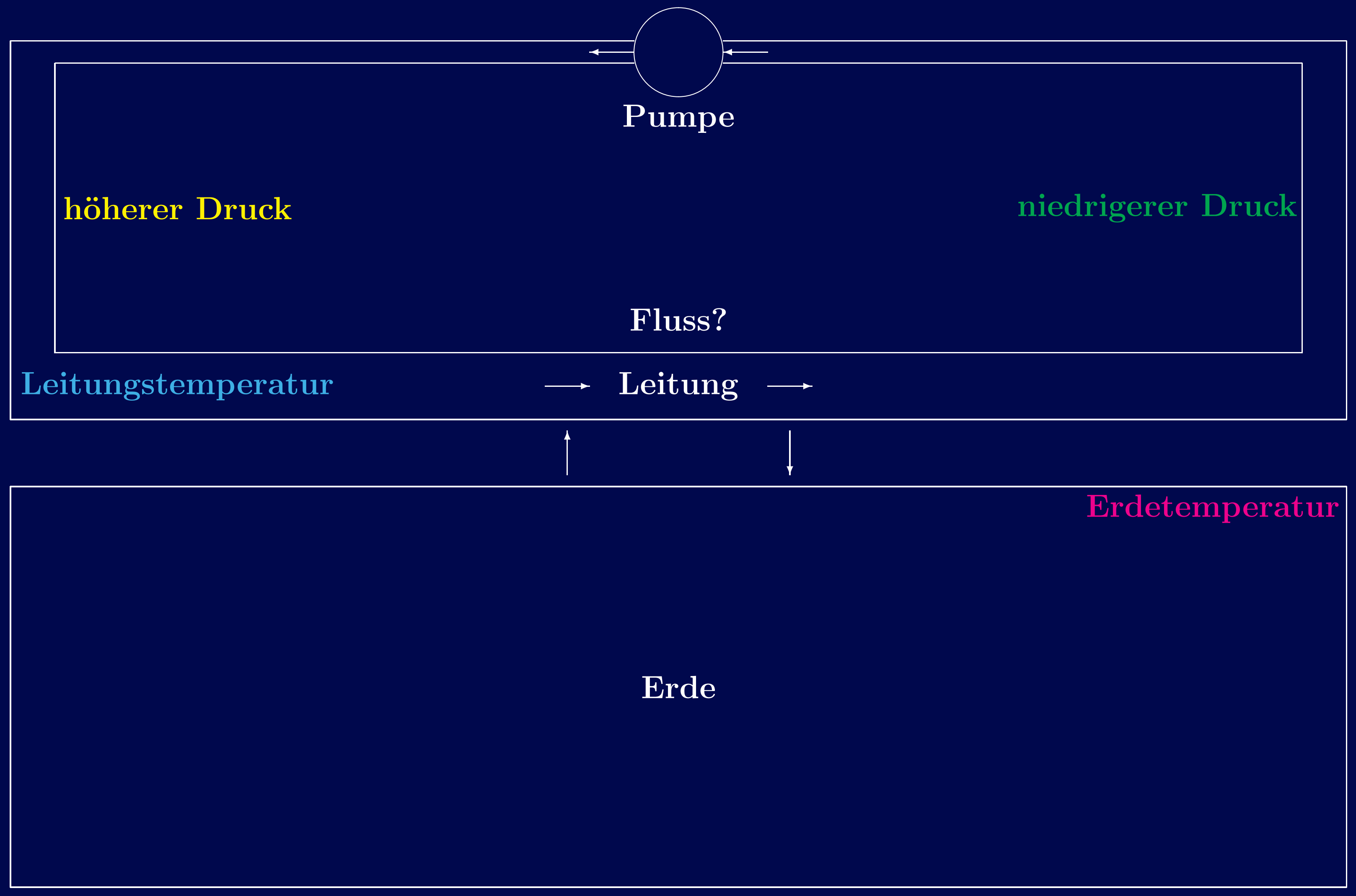
Unser System ist falsch installiert worden!

Wo liegt das Problem? Baufirma? Erdwärmefirma?

Wärmetransport: Diffusion *und* Konvektion



Wärmetransport: Diffusion *und* Konvektion



Grundfragen für eine Fehlersuche

- **Ist der Wärmetransport (*Wärme pro Zeiteinheit*) höher, wenn der Fluss höher oder niedriger ist?**

Grundfragen für eine Fehlersuche

- **Ist der Wärmetransport (*Wärme pro Zeiteinheit*) höher, wenn der Fluss höher oder niedriger ist?**
  Ohne Mathematik: Eiskaltes Wasser strömt aus dem Duschkopf. Hält die Körperwärme länger aus, wenn der Fluss höher oder niedriger ist?

Grundfragen für eine Fehlersuche

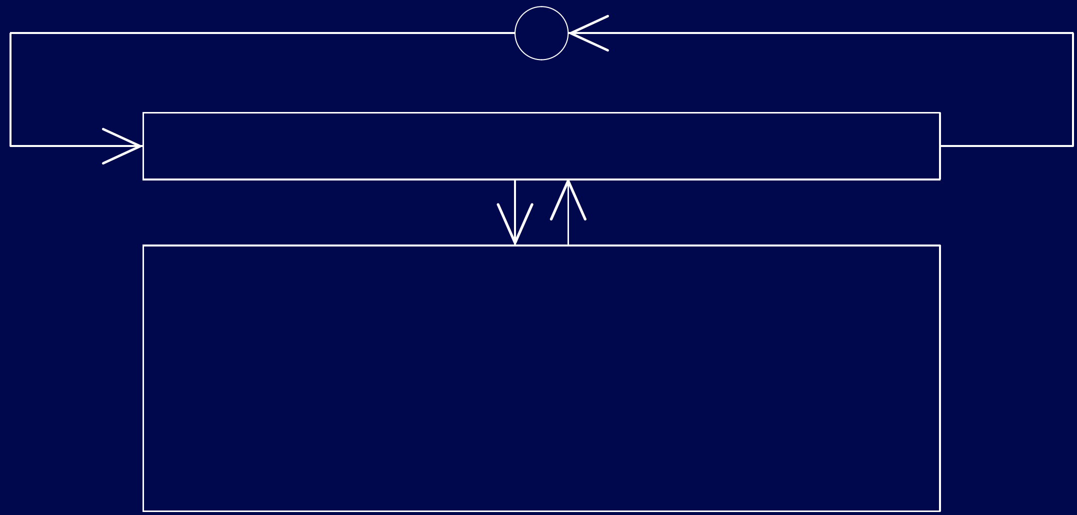
- **Ist der Wärmetransport (*Wärme pro Zeiteinheit*) höher, wenn der Fluss höher oder niedriger ist?**
  Ohne Mathematik: Eiskaltes Wasser strömt aus dem Duschkopf. Hält die Körperwärme länger aus, wenn der Fluss höher oder niedriger ist?
- **Ist der Fluss höher (*oder Widerstand niedriger*, $\Delta P = F \cdot W$), wenn die Erdkollektoren konfiguriert sind mit: 1 $\times$ 600m, 3 $\times$ 200m oder 6 $\times$ 100m?**

Grundfragen für eine Fehlersuche

- **Ist der Wärmetransport (*Wärme pro Zeiteinheit*) höher, wenn der Fluss höher oder niedriger ist?**
  Ohne Mathematik: Eiskaltes Wasser strömt aus dem Duschkopf. Hält die Körperwärme länger aus, wenn der Fluss höher oder niedriger ist?
- **Ist der Fluss höher (*oder Widerstand niedriger*, $\Delta P = F \cdot W$), wenn die Erdkollektoren konfiguriert sind mit: 1 $\times$ 600m, 3 $\times$ 200m oder 6 $\times$ 100m?**
  Ohne Mathematik: Sie fahren durch Graz mit einem offenen Lastwagen, um Güter zu sammeln. Fahren Sie schneller (sammeln Sie mehr pro Zeiteinheit) mit: 1 6km Strasse, 3 2km Strassen oder 6 1km Strassen?

Wärmetransport steigt mit dem Fluss

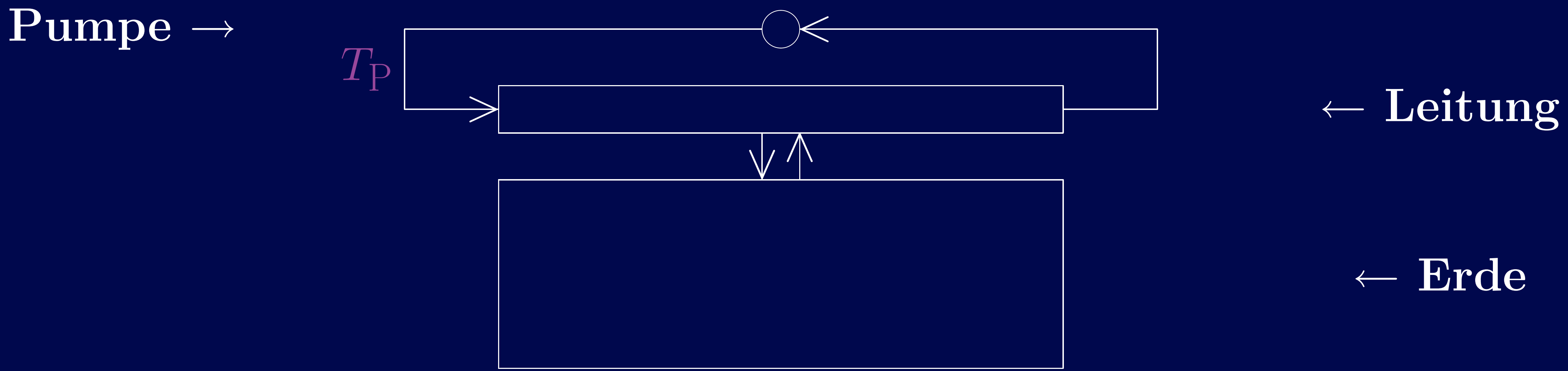
Pumpe →



← Leitung

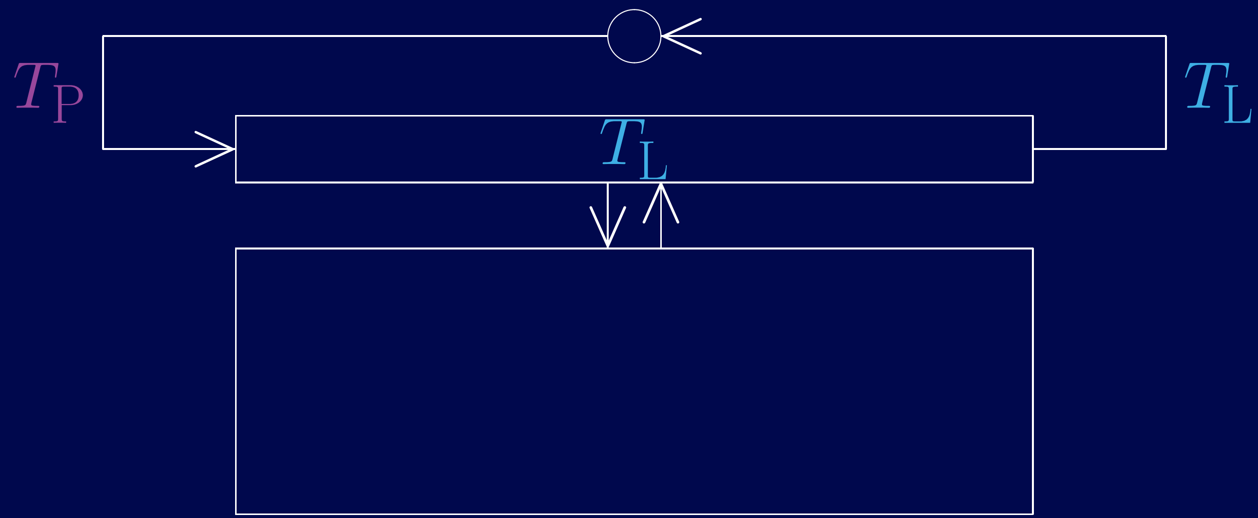
← Erde

Wärmetransport steigt mit dem Fluss



Wärmetransport steigt mit dem Fluss

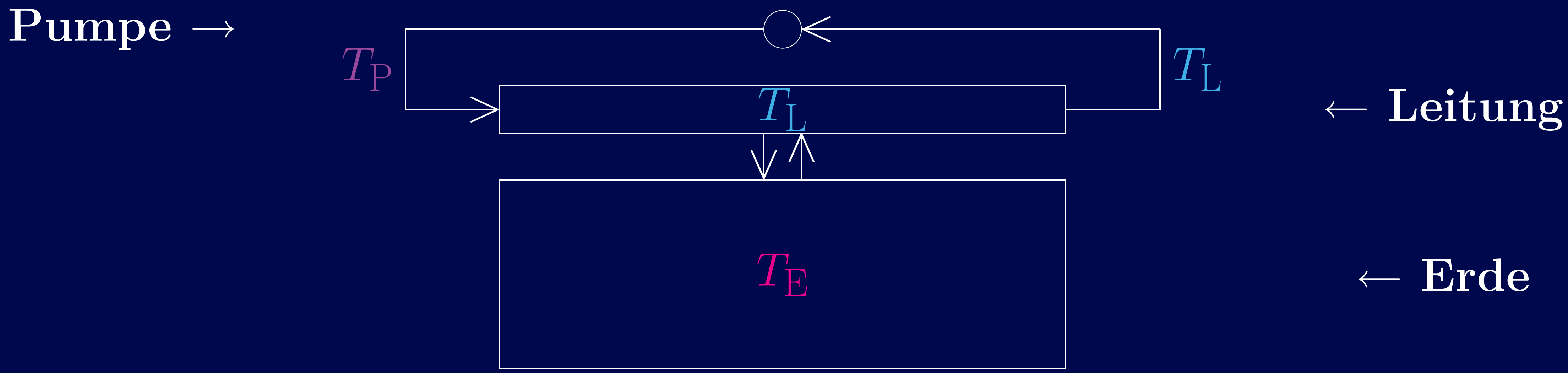
Pumpe $\longrightarrow$



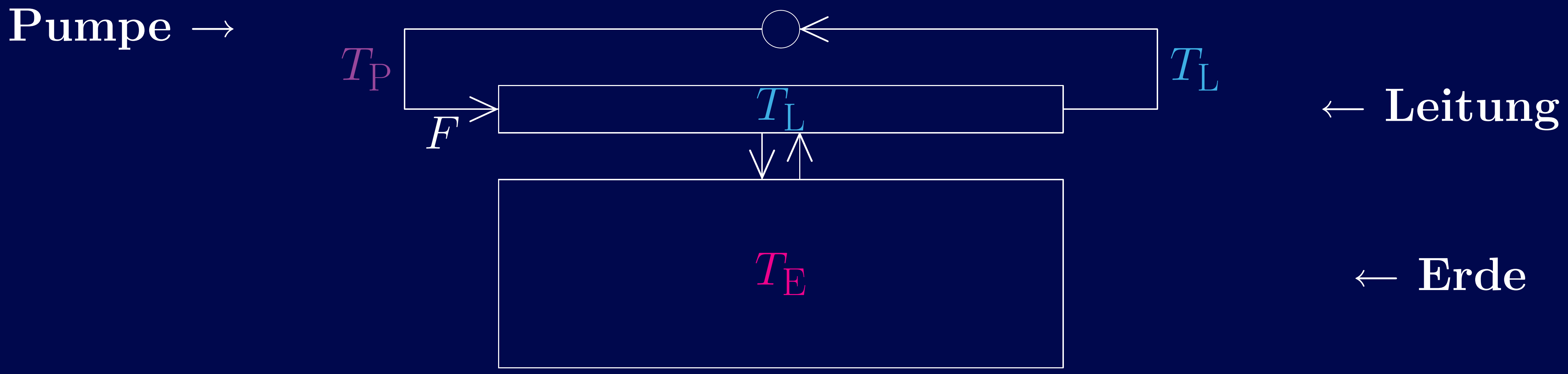
$\longleftarrow$ **Leitung**

$\longleftarrow$ **Erde**

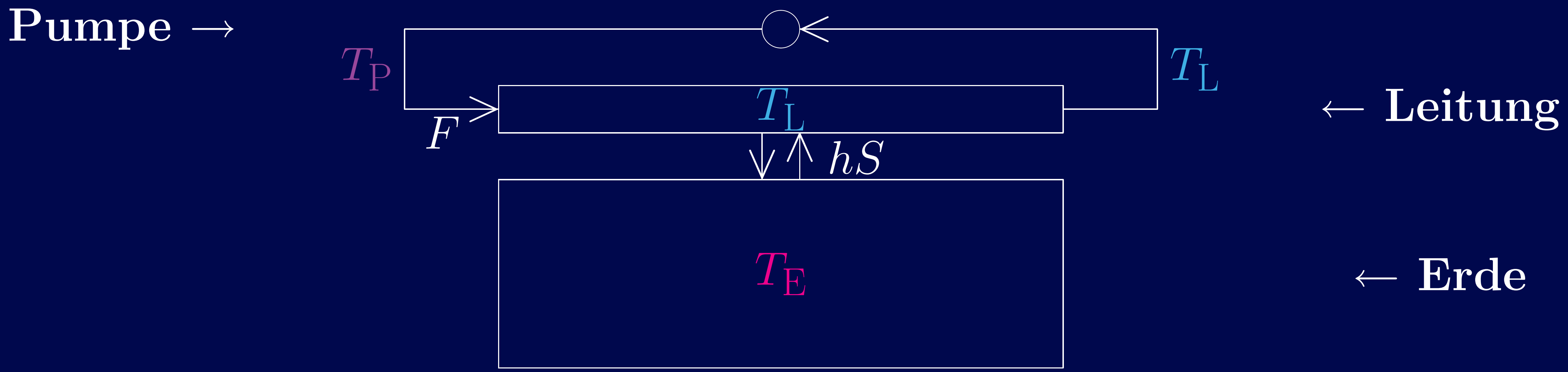
Wärmetransport steigt mit dem Fluss



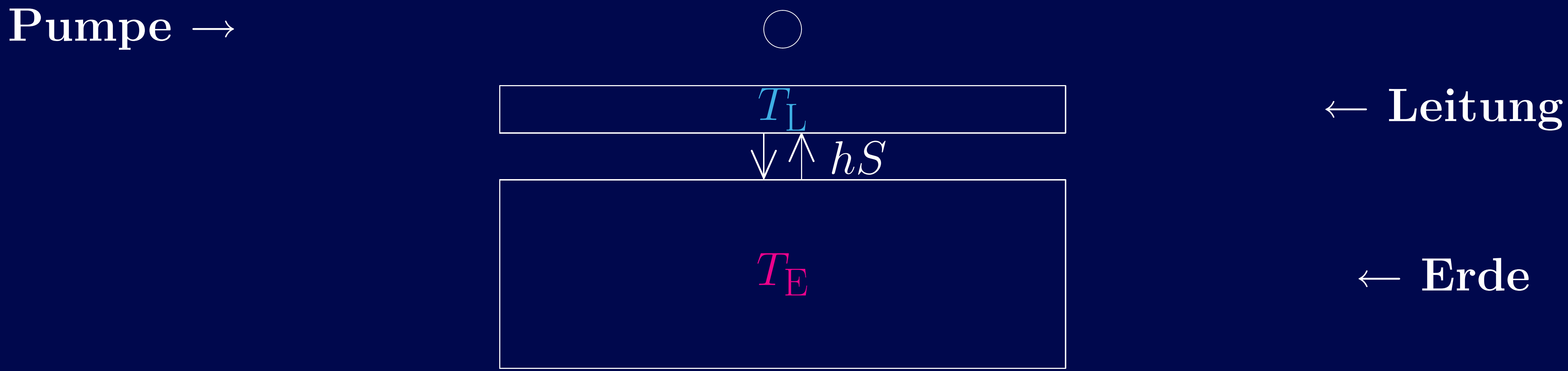
Wärmetransport steigt mit dem Fluss



Wärmetransport steigt mit dem Fluss



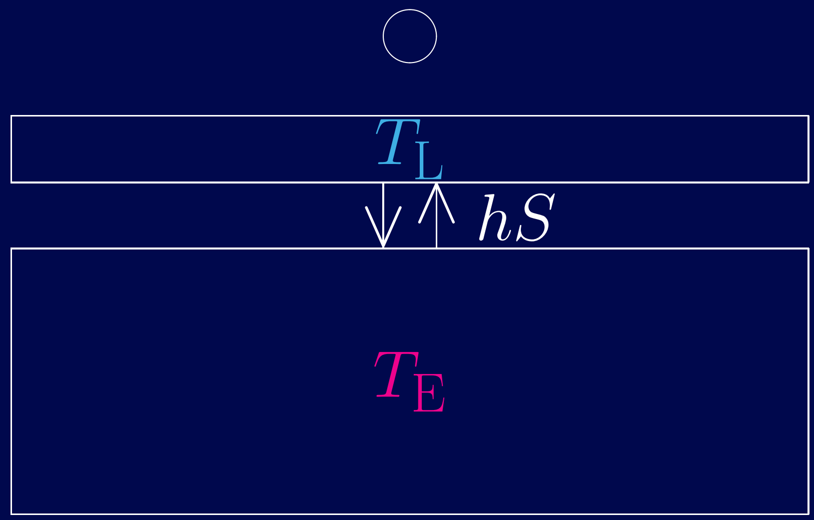
Wärmetransport steigt mit dem Fluss



Einfachster Fall: Fluss $F = 0$, Newtonsches Kühlungsgesetz ist

Wärmetransport steigt mit dem Fluss

Pumpe $\longrightarrow$



$\longleftarrow$ Leitung

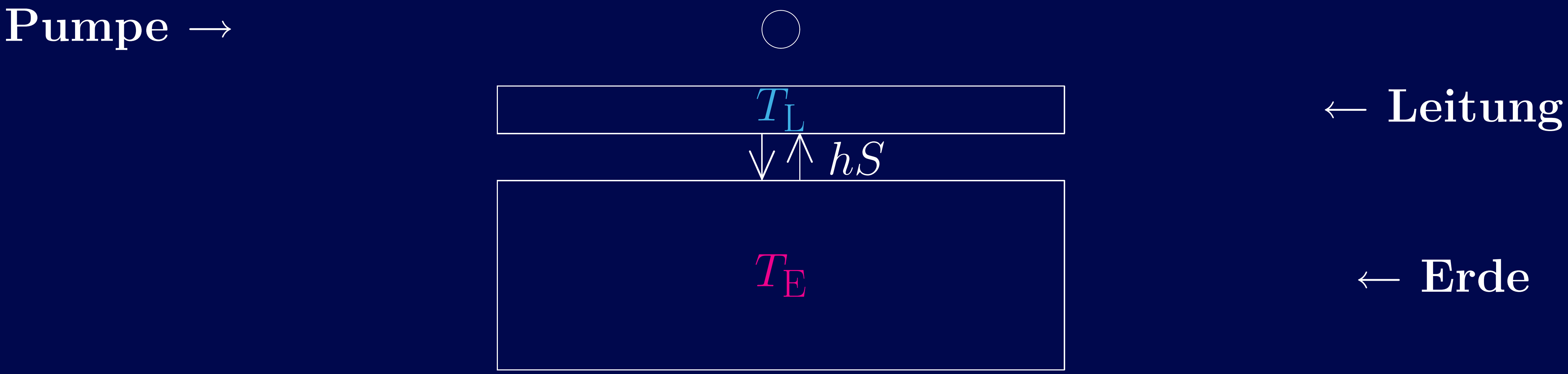
$\longleftarrow$ Erde

Einfachster Fall: Fluss $F = 0$, Newtonsches Kühlungsgesetz ist

$$E'_{\mathrm{L}} = hS(T_{\mathrm{E}} - T_{\mathrm{L}})$$

$$E'_{\mathrm{E}} = hS(T_{\mathrm{L}} - T_{\mathrm{E}})$$

Wärmetransport steigt mit dem Fluss



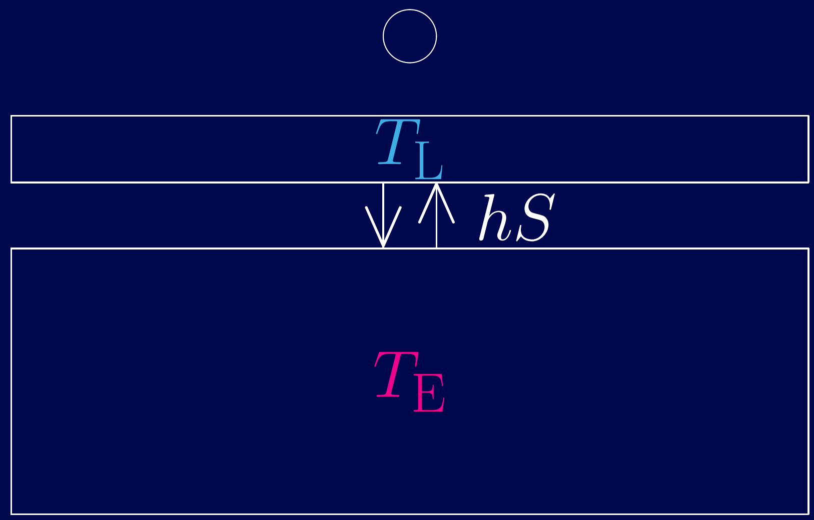
Einfachster Fall: Fluss $F = 0$, Newtonsches Kühlungsgesetz ist

$$\rho_{\mathrm{L}} c_{\mathrm{L}} V_{\mathrm{L}} T'_{\mathrm{L}} = E'_{\mathrm{L}} = hS(T_{\mathrm{E}} - T_{\mathrm{L}})$$

$$\rho_{\mathrm{E}} c_{\mathrm{E}} V_{\mathrm{E}} T'_{\mathrm{E}} = E'_{\mathrm{E}} = hS(T_{\mathrm{L}} - T_{\mathrm{E}})$$

Wärmetransport steigt mit dem Fluss

Pumpe $\longrightarrow$



$\longleftarrow$ **Leitung**

$\longleftarrow$ **Erde**

Einfachster Fall: Fluss $F = 0$, Newtonsches Kühlungsgesetz ist

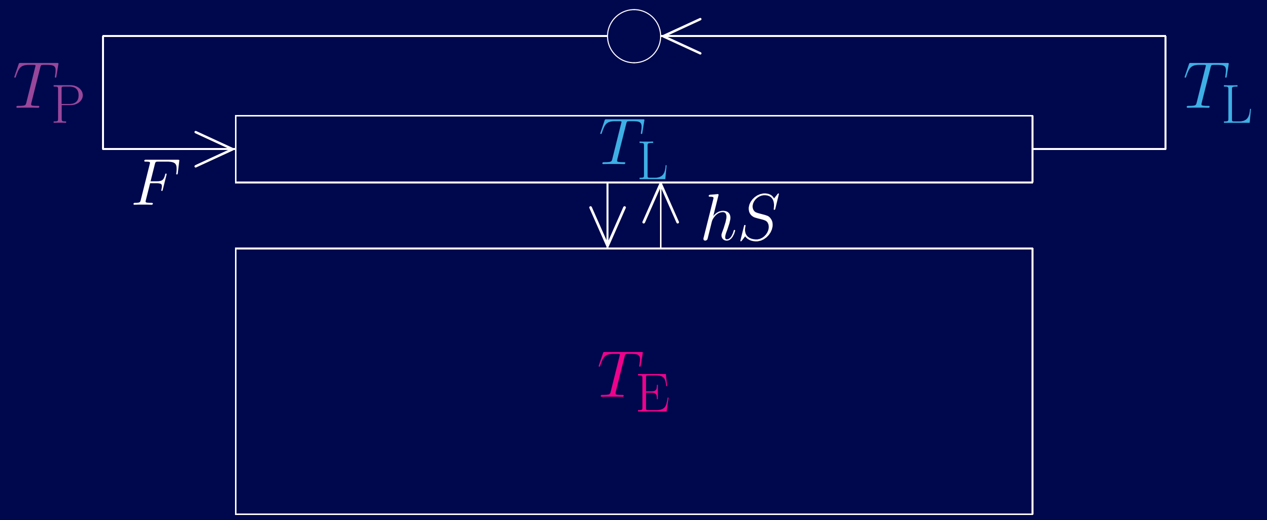
$$\rho_{\mathrm{L}} c_{\mathrm{L}} V_{\mathrm{L}} T'_{\mathrm{L}} \; = \; E'_{\mathrm{L}} \; = \; hS(T_{\mathrm{E}} - T_{\mathrm{L}})$$

$$\rho_{\mathrm{E}} c_{\mathrm{E}} V_{\mathrm{E}} T'_{\mathrm{E}} \; = \; E'_{\mathrm{E}} \; = \; hS(T_{\mathrm{L}} - T_{\mathrm{E}})$$

Ergebnis: $T_{\mathrm{L}}, T_{\mathrm{E}} \rightarrow T_\infty$ **zwischen** T_{L} **und** T_{E}**.**

Wärmetransport steigt mit dem Fluss

Pumpe →



← Leitung

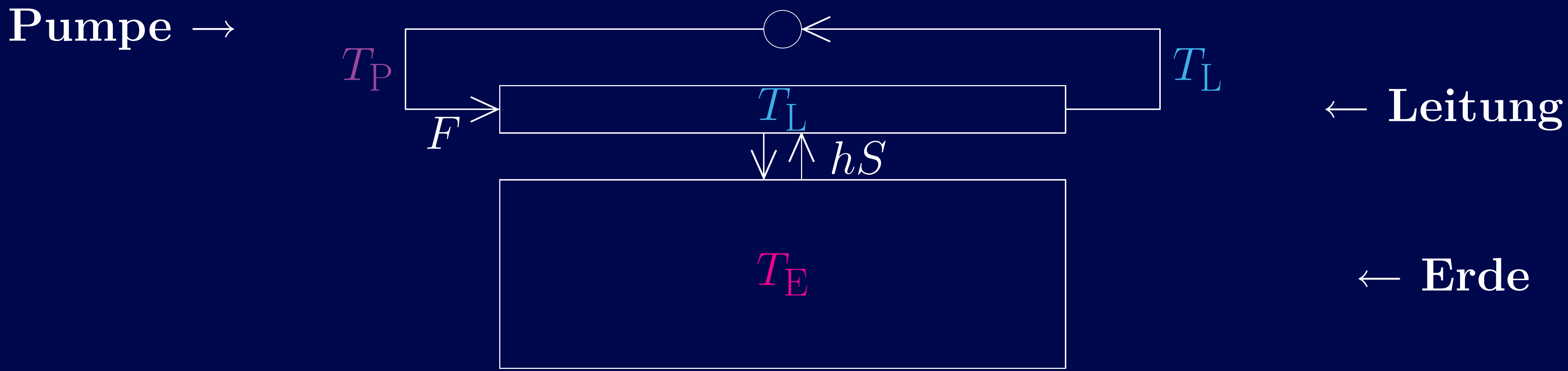
← Erde

Vollständiger Fall: Fluss $F > 0$, Energiebilanz ist

$$\rho_L c_L V_L T_L' = E_L' = hS(T_E - T_L) + \rho_L c_L F(T_P - T_L)$$

$$\rho_E c_E V_E T_E' = E_E' = hS(T_L - T_E)$$

Wärmetransport steigt mit dem Fluss



Vollständiger Fall: Fluss $F > 0$, Energiebilanz ist

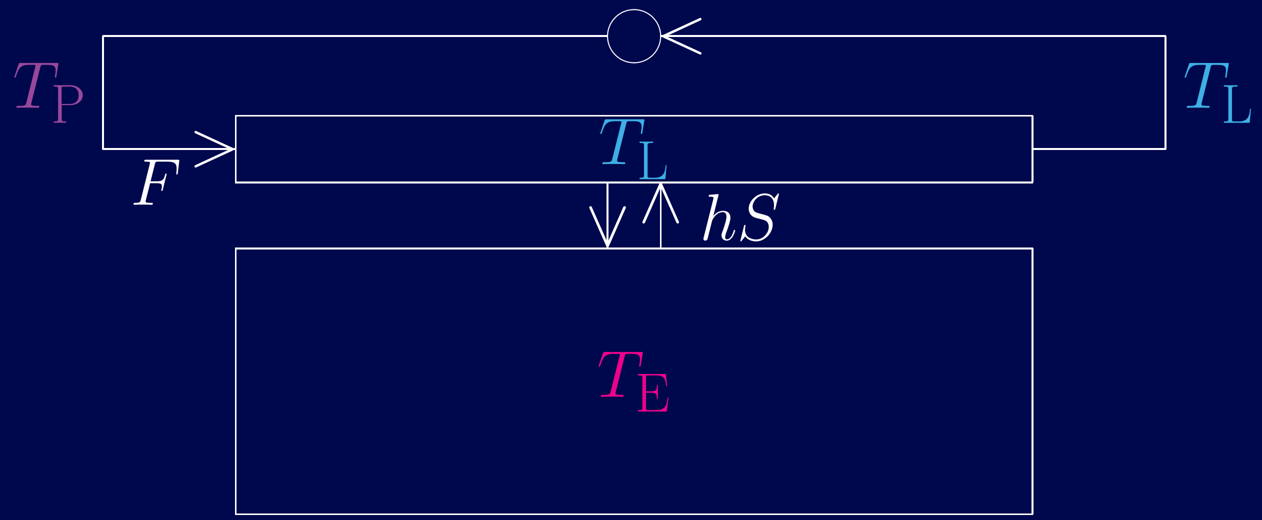
$$\rho_\mathrm{L} c_\mathrm{L} V_\mathrm{L} T'_\mathrm{L} = E'_\mathrm{L} = hS(T_\mathrm{E} - T_\mathrm{L}) + \rho_\mathrm{L} c_\mathrm{L} F (T_\mathrm{P} - T_\mathrm{L})$$

$$\rho_\mathrm{E} c_\mathrm{E} V_\mathrm{E} T'_\mathrm{E} = E'_\mathrm{E} = hS(T_\mathrm{L} - T_\mathrm{E})$$

Ergebnis: $T_\mathrm{L}, T_\mathrm{E} \to T_\mathrm{P}$ **letztendlich.**

Wärmetransport steigt mit dem Fluss

Pumpe $\longrightarrow$



$\longleftarrow$ **Leitung**

$\longleftarrow$ **Erde**

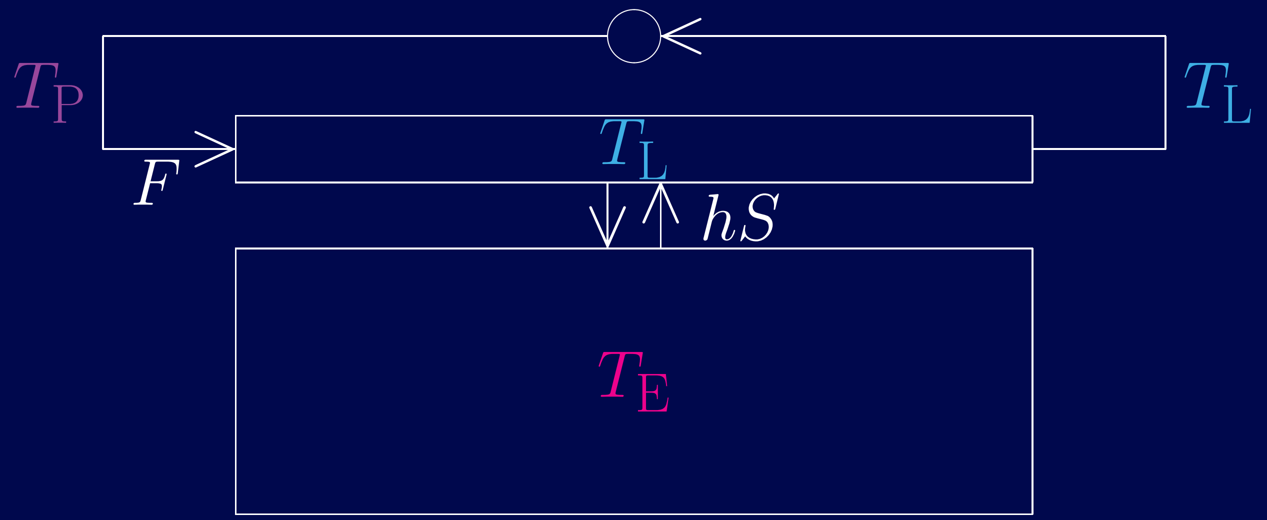
Extremer Fall: Fluss $F \rightarrow \infty$, Energiebilanz wird

$$\rho_\mathrm{L} c_\mathrm{L} V_\mathrm{L} T_\mathrm{L}' \;=\; E_\mathrm{L}' \;=\; hS(T_\mathrm{E} - T_\mathrm{L}) \;+\; \underset{(\rightarrow\infty)}{\rho_\mathrm{L} c_\mathrm{L} F}\underset{(\rightarrow 0)}{(T_\mathrm{P} - T_\mathrm{L})}$$

$$\rho_\mathrm{E} c_\mathrm{E} V_\mathrm{E} T_\mathrm{E}' \;=\; E_\mathrm{E}' \;=\; hS(T_\mathrm{L} - T_\mathrm{E})$$

Wärmetransport steigt mit dem Fluss

Pumpe $\longrightarrow$



$\longleftarrow$ **Leitung**

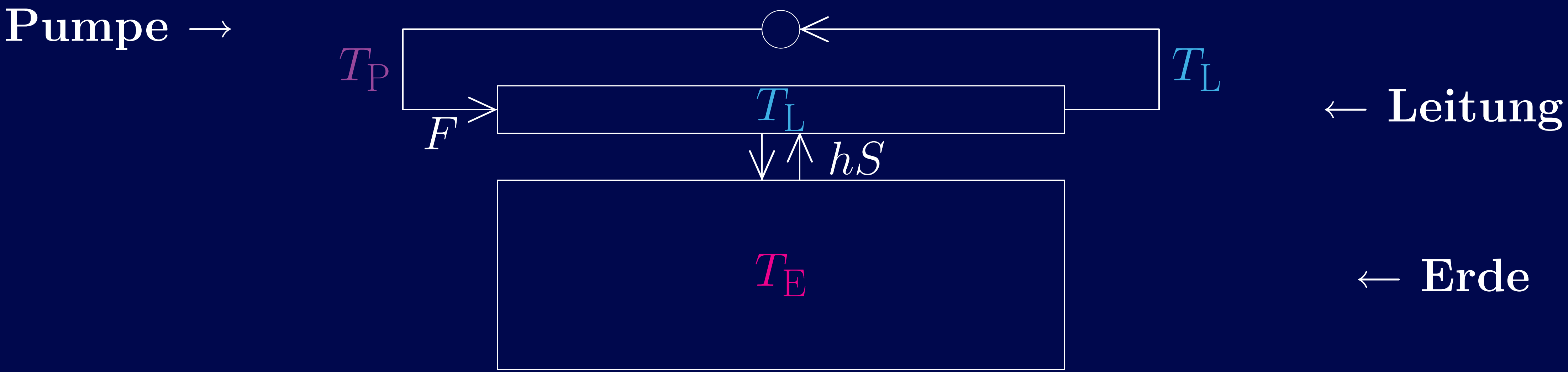
$\longleftarrow$ **Erde**

Extremer Fall: Fluss $F \to \infty$, Energiebilanz wird

$$\rho_{\mathrm{L}} c_{\mathrm{L}} V_{\mathrm{L}} T_{\mathrm{L}}' = E_{\mathrm{L}}' = hS(T_{\mathrm{E}} - T_{\mathrm{L}}) + \underset{(\to\infty)}{\rho_{\mathrm{L}} c_{\mathrm{L}} F} \underset{(\to 0)}{(T_{\mathrm{P}} - T_{\mathrm{L}})}$$

$$\rho_{\mathrm{E}} c_{\mathrm{E}} V_{\mathrm{E}} T_{\mathrm{E}}' = E_{\mathrm{E}}' = hS(T_{\mathrm{L}} - T_{\mathrm{E}}) \longrightarrow hS(T_{\mathrm{P}} - T_{\mathrm{E}})$$

Wärmetransport steigt mit dem Fluss



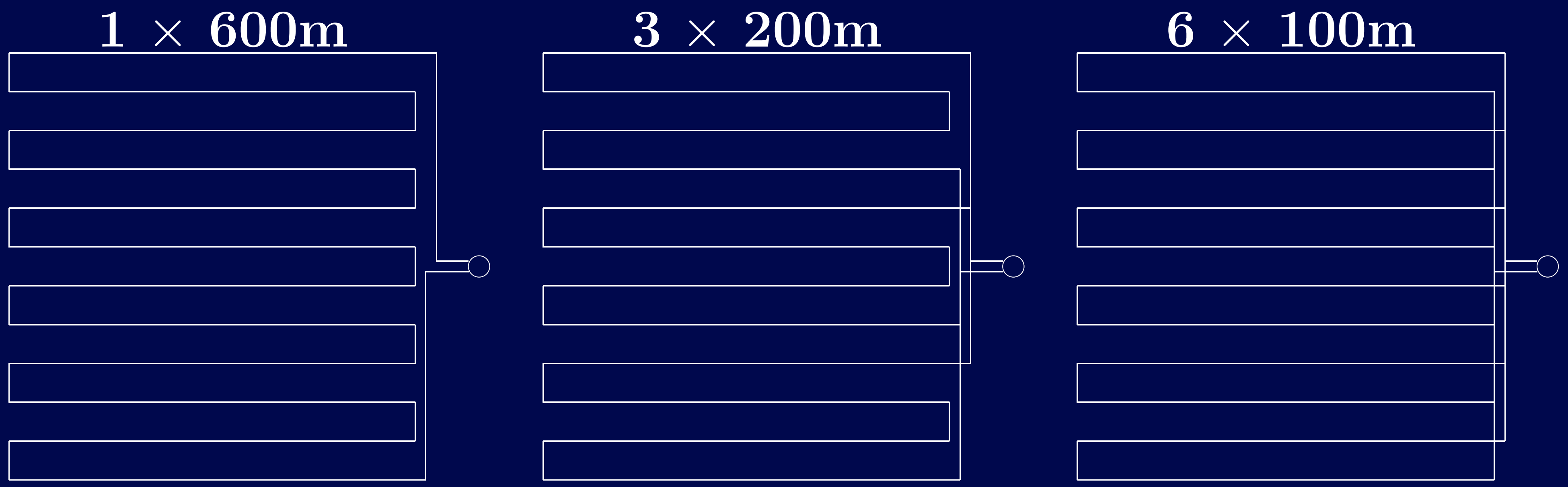
Extremer Fall: Fluss $F \to \infty$, Energiebilanz wird

$$\rho_\mathrm{L} c_\mathrm{L} V_\mathrm{L} T'_\mathrm{L} = E'_\mathrm{L} = hS(T_\mathrm{E} - T_\mathrm{L}) + \underbrace{\rho_\mathrm{L} c_\mathrm{L} F}_{(\to\infty)} \underbrace{(T_\mathrm{P} - T_\mathrm{L})}_{(\to 0)}$$

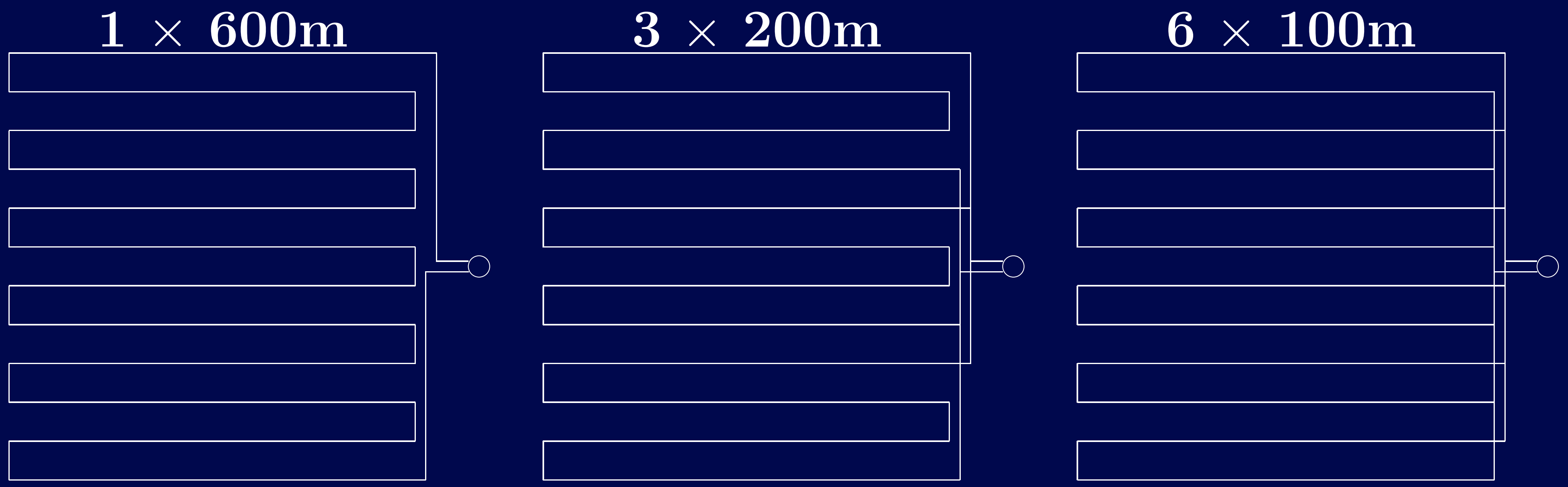
$$\rho_\mathrm{E} c_\mathrm{E} V_\mathrm{E} T'_\mathrm{E} = E'_\mathrm{E} = hS(T_\mathrm{L} - T_\mathrm{E}) \to hS(T_\mathrm{P} - T_\mathrm{E})$$

Ergebnis: $T_\mathrm{E} \to T_\mathrm{P} = T_\mathrm{L}$ am schnellsten und Transport $E'_\mathrm{E} = \max$.

Fluss steigt mit der Anzahl von parallelen Erdkollektoren

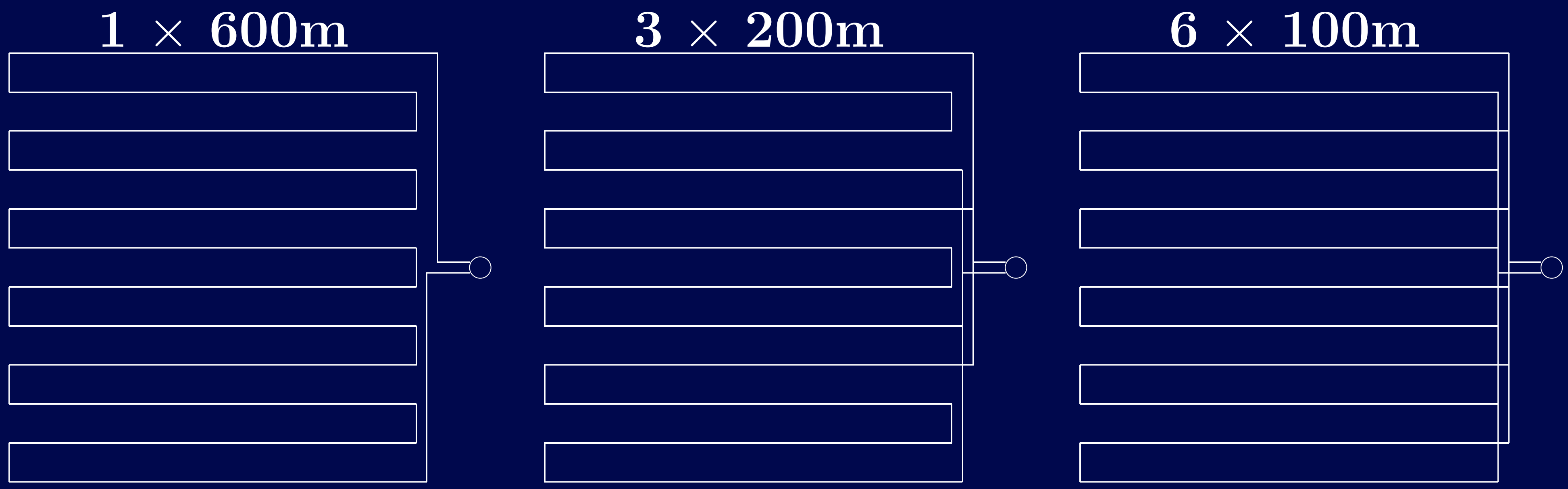


Fluss steigt mit der Anzahl von parallelen Erdkollektoren



Das Ohmsche Gesetz: $\Delta P = F_n \cdot W_n = f_i \cdot w_i$.

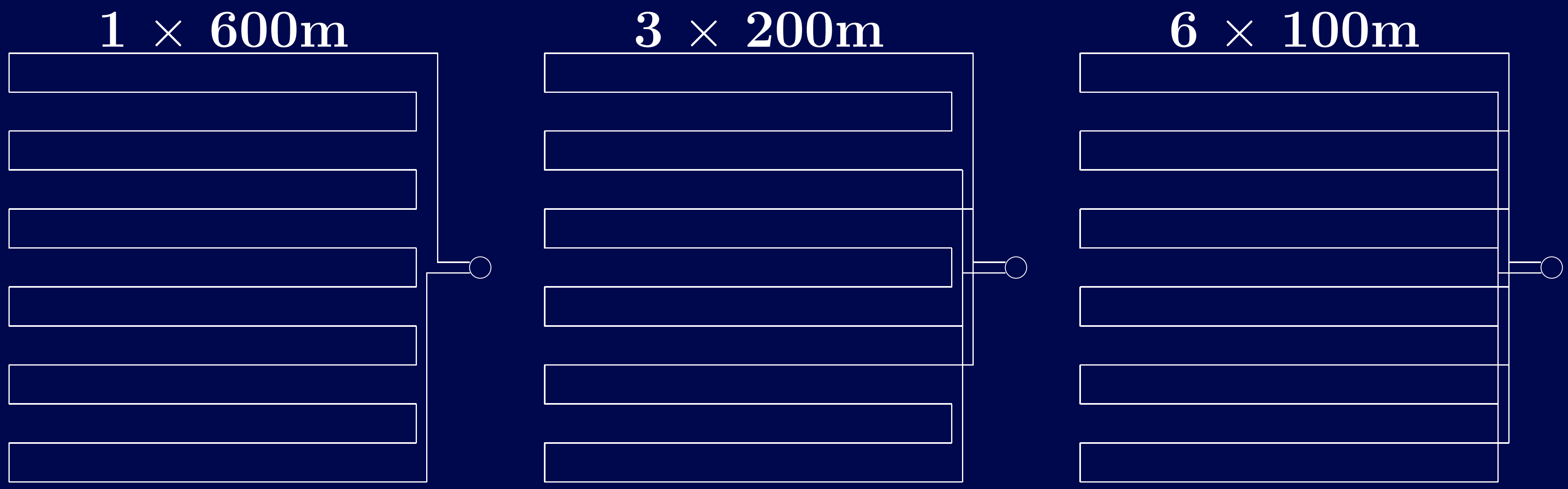
Fluss steigt mit der Anzahl von parallelen Erdkollektoren



Das Ohmsche Gesetz: $\Delta P = F_n \cdot W_n = f_i \cdot w_i$.

Das Kirchhoffsche Gesetz: $F_n = f_1 + f_2 + \cdots f_n$.

Fluss steigt mit der Anzahl von parallelen Erdkollektoren



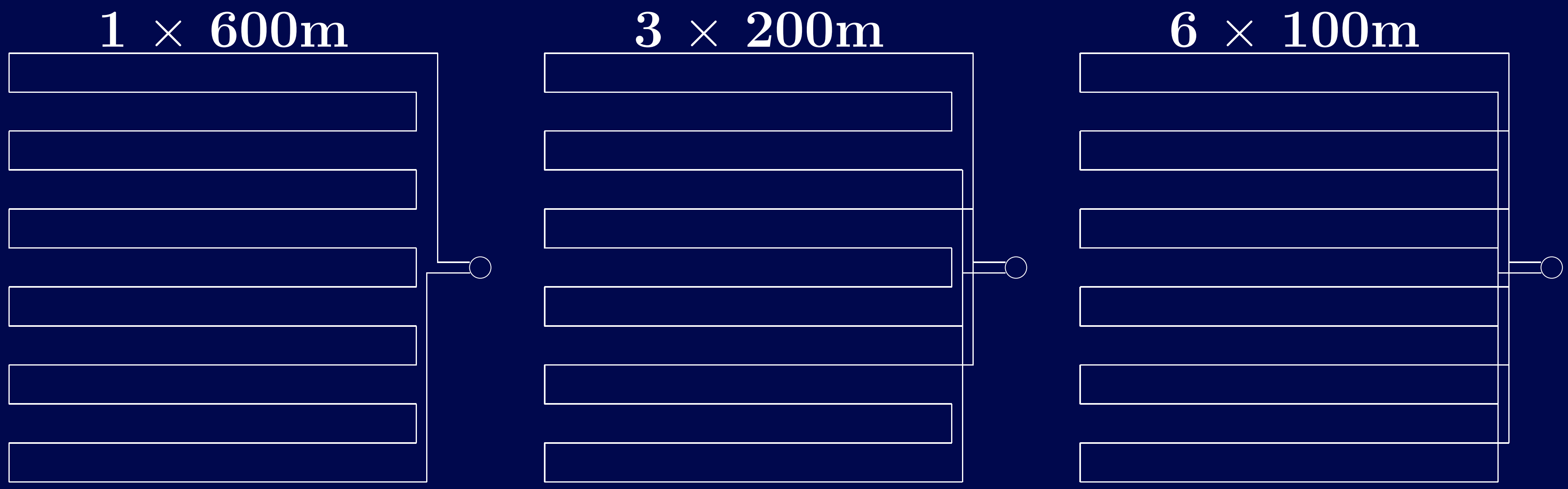
Das Ohmsche Gesetz: $\Delta P = F_n \cdot W_n = f_i \cdot w_i$.

Das Kirchhoffsche Gesetz: $F_n = f_1 + f_2 + \cdots f_n$.

Folglich:

$$\frac{1}{W_n} = \frac{F_n}{\Delta P} = \frac{f_1}{\Delta P} + \frac{f_2}{\Delta P} + \cdots \frac{f_n}{\Delta P} = \frac{1}{w_1} + \frac{1}{w_2} + \cdots \frac{1}{w_n}$$

Fluss steigt mit der Anzahl von parallelen Erdkollektoren



Das Ohmsche Gesetz: $\Delta P = F_n \cdot W_n = f_i \cdot w_i$.

Das Kirchhoffsche Gesetz: $F_n = f_1 + f_2 + \cdots f_n$.

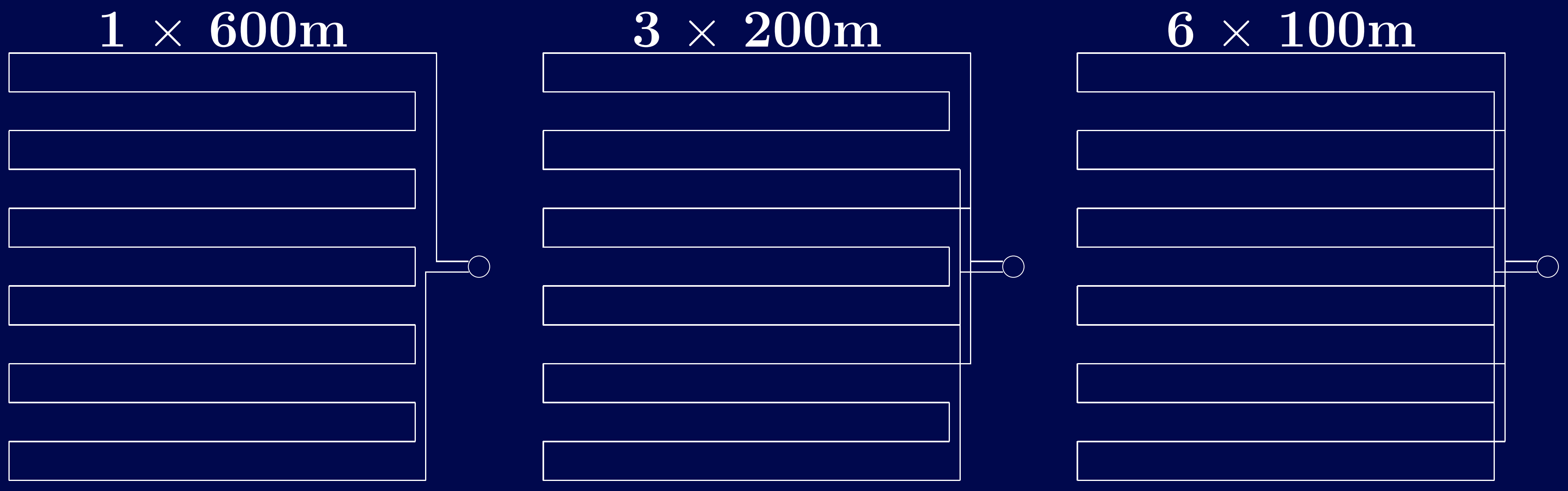
Folglich:

$$\frac{1}{W_n} = \frac{F_n}{\Delta P} = \frac{f_1}{\Delta P} + \frac{f_2}{\Delta P} + \cdots \frac{f_n}{\Delta P} = \frac{1}{w_1} + \frac{1}{w_2} + \cdots \frac{1}{w_n}$$

Mit n gleich langen parallelen Erdkollektoren, $w_1 = W_1/n$ **und:**

$$\frac{1}{W_n} = n \times \frac{1}{W_1/n}$$

Fluss steigt mit der Anzahl von parallelen Erdkollektoren



Das Ohmsche Gesetz: $\Delta P = F_n \cdot W_n = f_i \cdot w_i$.

Das Kirchhoffsche Gesetz: $F_n = f_1 + f_2 + \cdots f_n$.

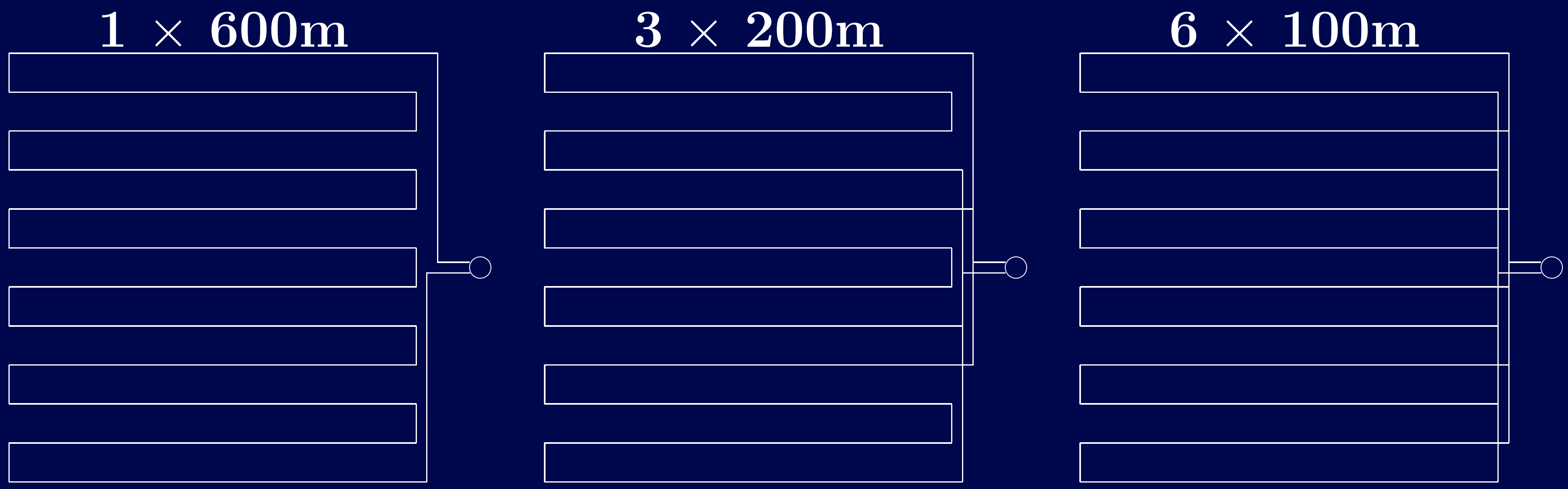
Folglich:

$$\frac{1}{W_n} = \frac{F_n}{\Delta P} = \frac{f_1}{\Delta P} + \frac{f_2}{\Delta P} + \cdots \frac{f_n}{\Delta P} = \frac{1}{w_1} + \frac{1}{w_2} + \cdots \frac{1}{w_n}$$

Mit n gleich langen parallelen Erdkollektoren, $w_1 = W_1/n$ **und:**

$$\frac{1}{W_n} = n \times \frac{1}{W_1/n} \quad \Rightarrow \quad W_n = \frac{W_1}{n^2},$$

Fluss steigt mit der Anzahl von parallelen Erdkollektoren



Das Ohmsche Gesetz: $\Delta P = F_n \cdot W_n = f_i \cdot w_i$.

Das Kirchhoffsche Gesetz: $F_n = f_1 + f_2 + \cdots f_n$.

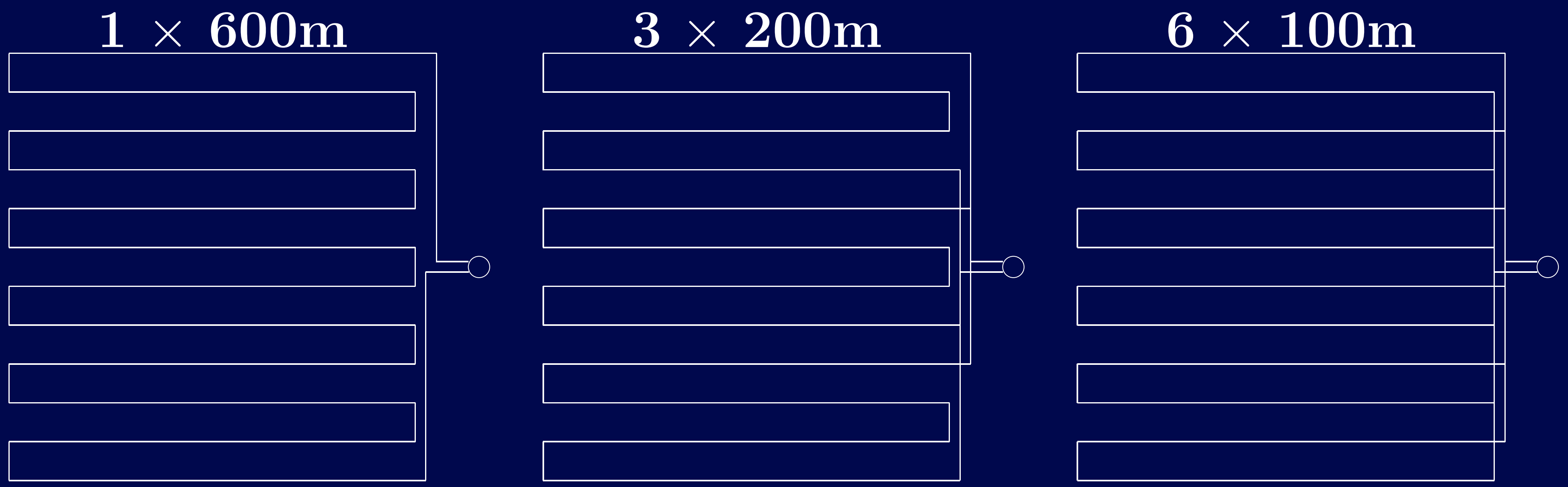
Folglich:

$$\frac{1}{W_n} = \frac{F_n}{\Delta P} = \frac{f_1}{\Delta P} + \frac{f_2}{\Delta P} + \cdots \frac{f_n}{\Delta P} = \frac{1}{w_1} + \frac{1}{w_2} + \cdots \frac{1}{w_n}$$

Mit n gleich langen parallelen Erdkollektoren, $w_1 = W_1/n$ **und:**

$$\frac{1}{W_n} = n \times \frac{1}{W_1/n} \quad \Rightarrow \quad W_n = \frac{W_1}{n^2}, \quad F_n = \frac{\Delta P}{W_n} = \frac{n^2 \Delta P}{W_1} = n^2 F_1$$

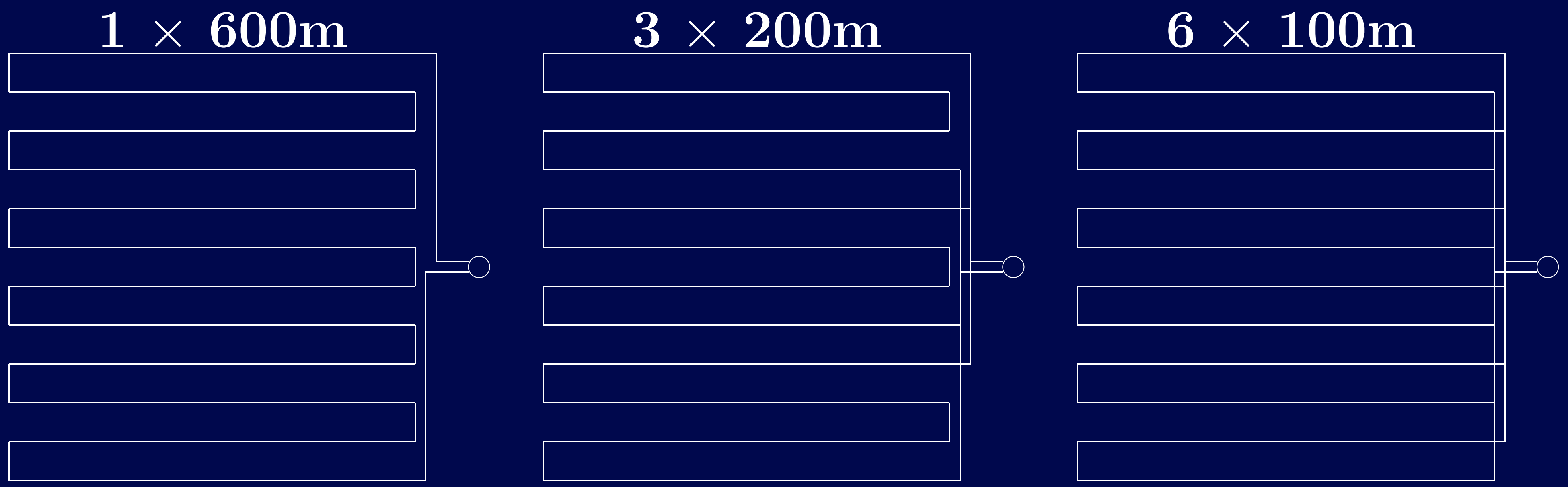
Fluss steigt mit der Anzahl von parallelen Erdkollektoren



Mit n gleich langen parallelen Erdkollektoren:

$$W_n = \frac{W_1}{n^2}, \qquad F_n = n^2 F_1$$

Fluss steigt mit der Anzahl von parallelen Erdkollektoren



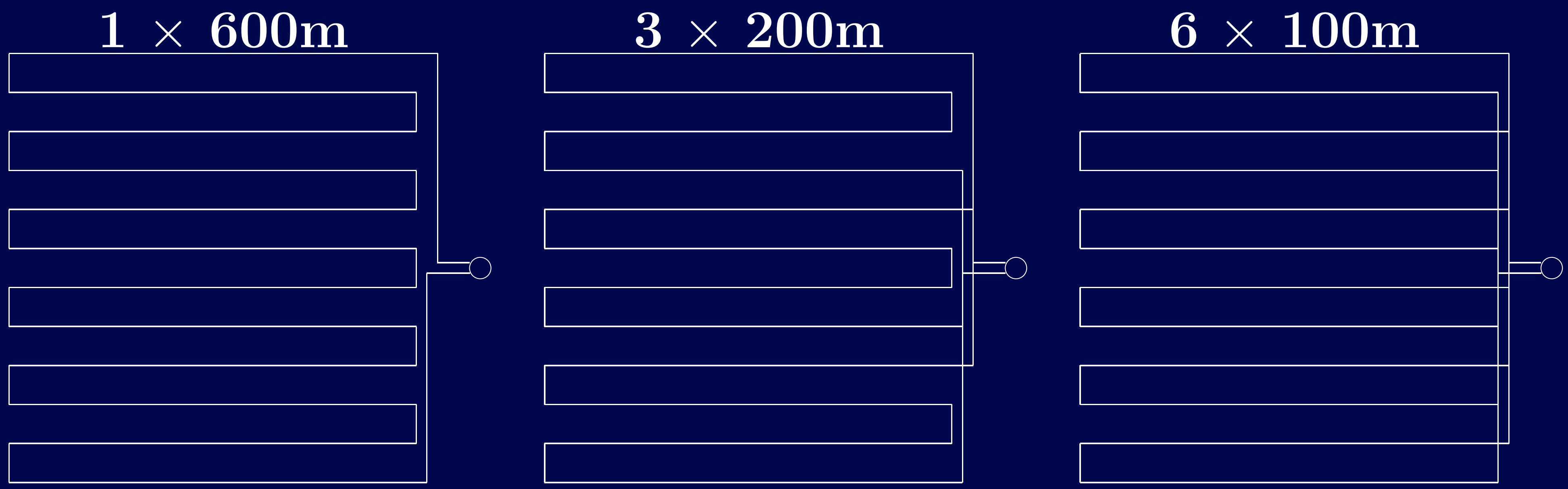
Mit n gleich langen parallelen Erdkollektoren:

$$W_n = \frac{W_1}{n^2}, \qquad F_n = n^2 F_1$$

Also gelten:

$$W_1 = W_1$$
$$F_1 = F_1$$

Fluss steigt mit der Anzahl von parallelen Erdkollektoren



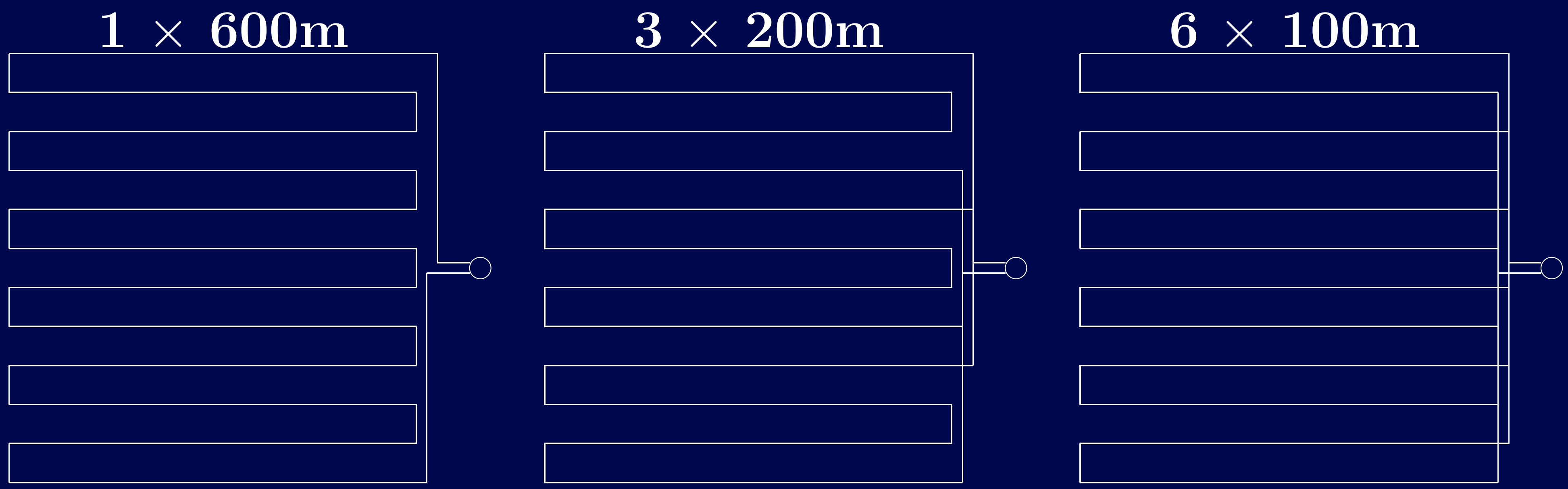
Mit n gleich langen parallelen Erdkollektoren:

$$W_n = \frac{W_1}{n^2}, \qquad F_n = n^2 F_1$$

Also gelten:

$$W_1 = W_1 \qquad\qquad W_3 = W_1/9$$
$$F_1 = F_1 \qquad\qquad F_3 = 9F_1$$

Fluss steigt mit der Anzahl von parallelen Erdkollektoren



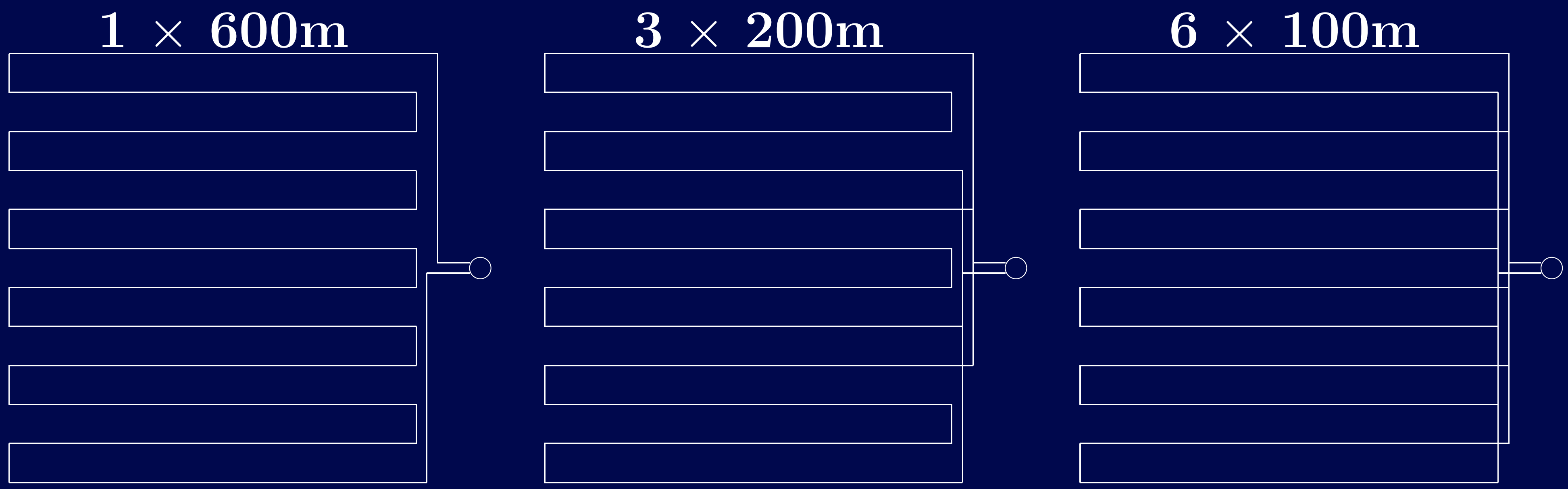
Mit n gleich langen parallelen Erdkollektoren:

$$W_n = \frac{W_1}{n^2}, \qquad F_n = n^2 F_1$$

Also gelten:

$W_1 = W_1$	$W_3 = W_1/9$	$W_6 = W_1/36$
$F_1 = F_1$	$F_3 = 9F_1$	$F_6 = 36F_1$

Fluss steigt mit der Anzahl von parallelen Erdkollektoren



Mit n gleich langen parallelen Erdkollektoren:

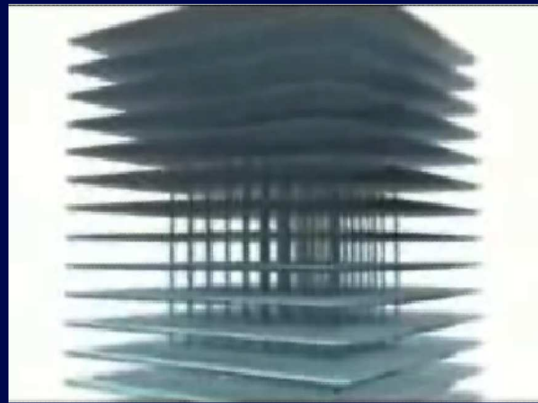
$$W_n = \frac{W_1}{n^2}, \qquad F_n = n^2 F_1$$

Also gelten:

$$W_1 = W_1 \qquad W_3 = W_1/9 \qquad W_6 = W_1/36$$
$$F_1 = F_1 \qquad F_3 = 9F_1 \qquad F_6 = 36F_1$$

Fluss mit 6×100m ist $36 \times$ höher als mit 1×600m!

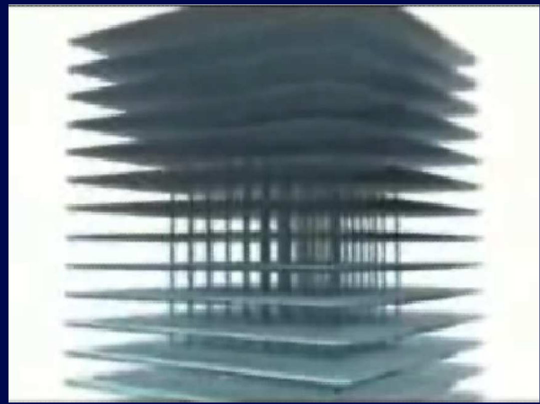
Modellierungsprojekt in einer aktuellen Vorlesung



WTC7 **WTC1/2 Pfannkuchen-Modell**

Modellierungsprojekt in einer aktuellen Vorlesung

WTC7



WTC1/2 Pfannkuchen-Modell

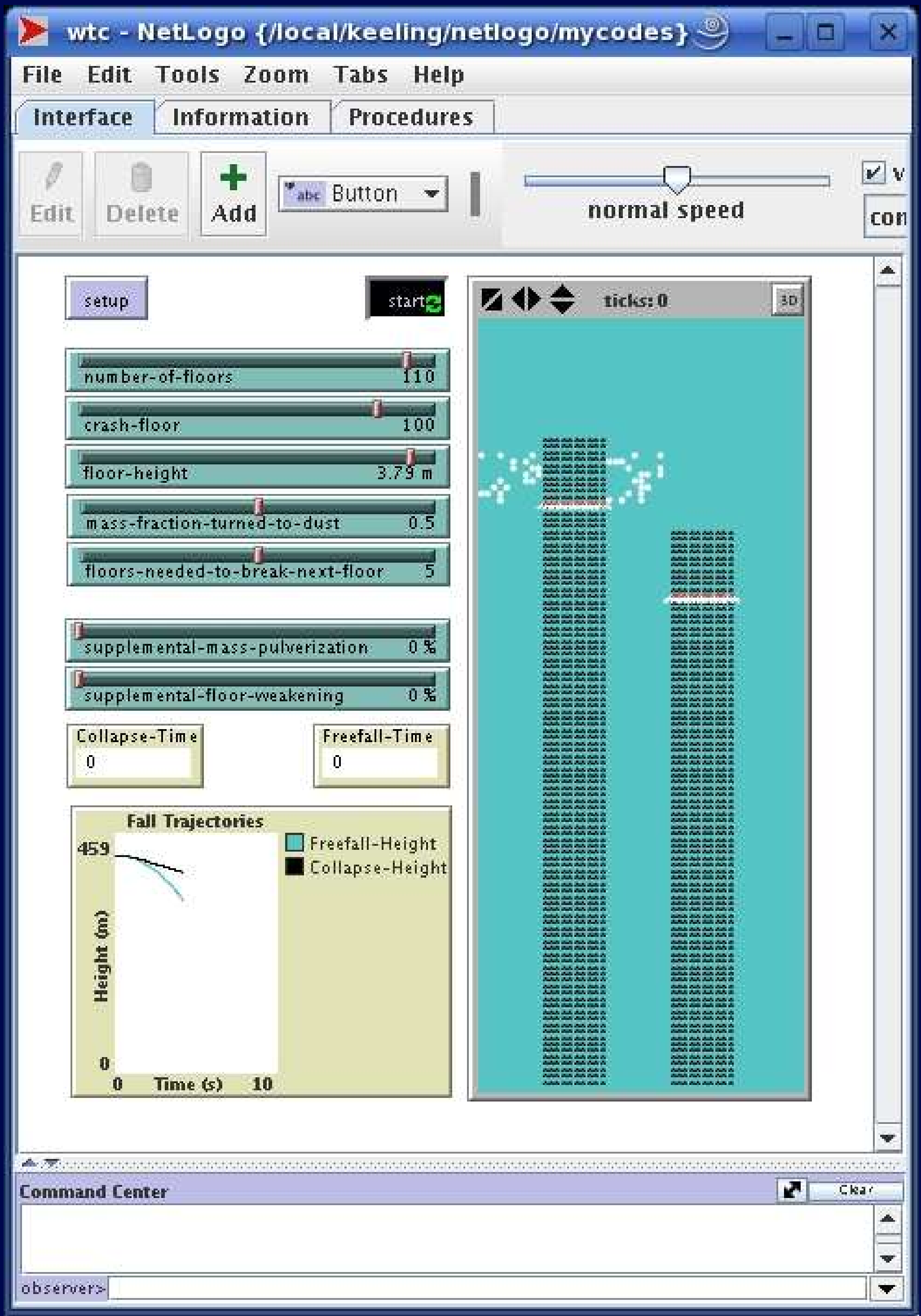
Steven Jones, BYU

Kevin Ryan, UL

http://www.journalof911studies.com/

Das Projekt-Ergebnis

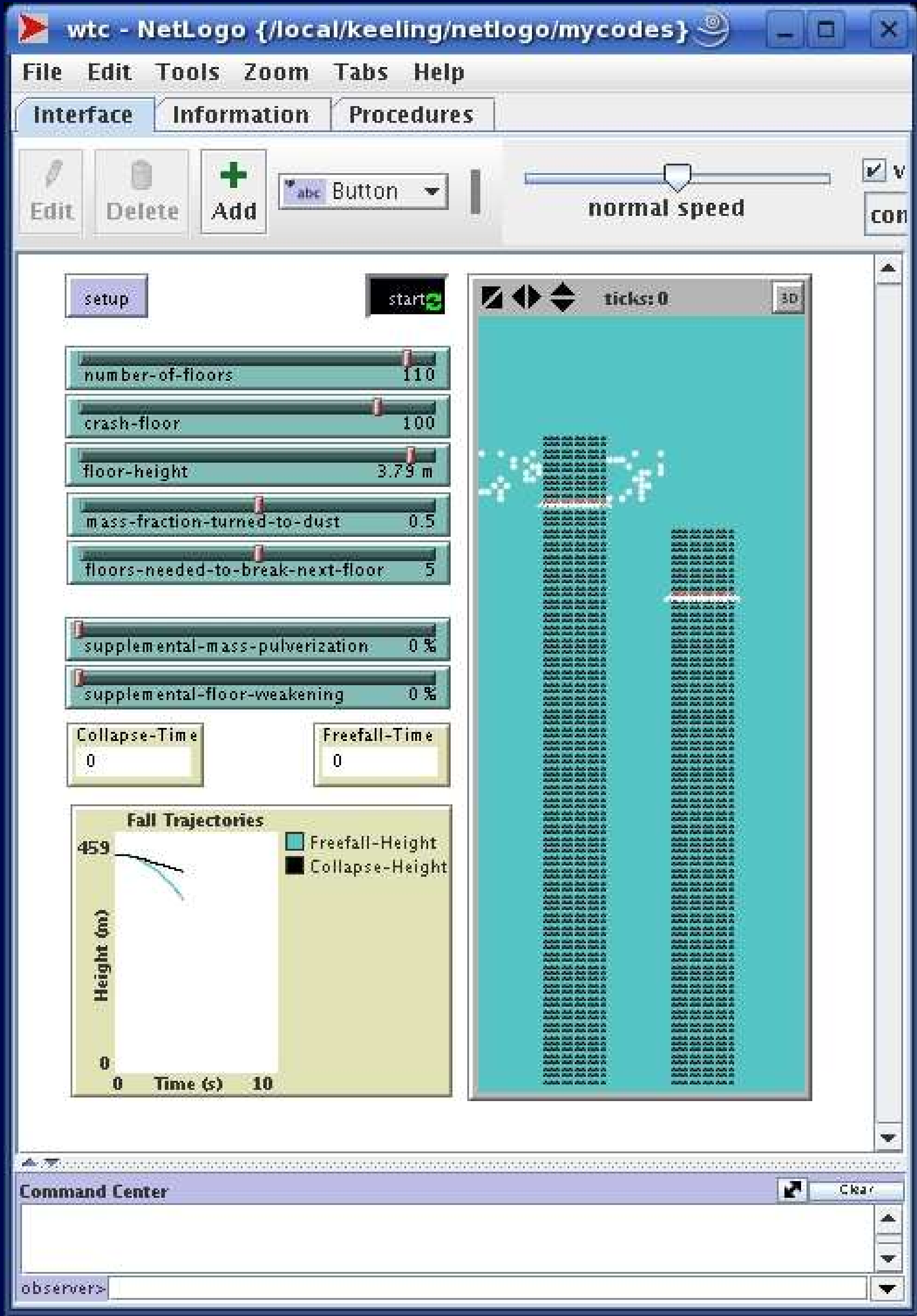
Netlogo Code: `wtc.nlogo`



Das Projekt-Ergebnis

Netlogo Code: `wtc.nlogo`

auch in MATLAB: `wtc.m`
und in EXCEL: `wtc.xls`
von Daniel Smertnig



Das Projekt-Ergebnis

Netlogo Code: `wtc.nlogo`

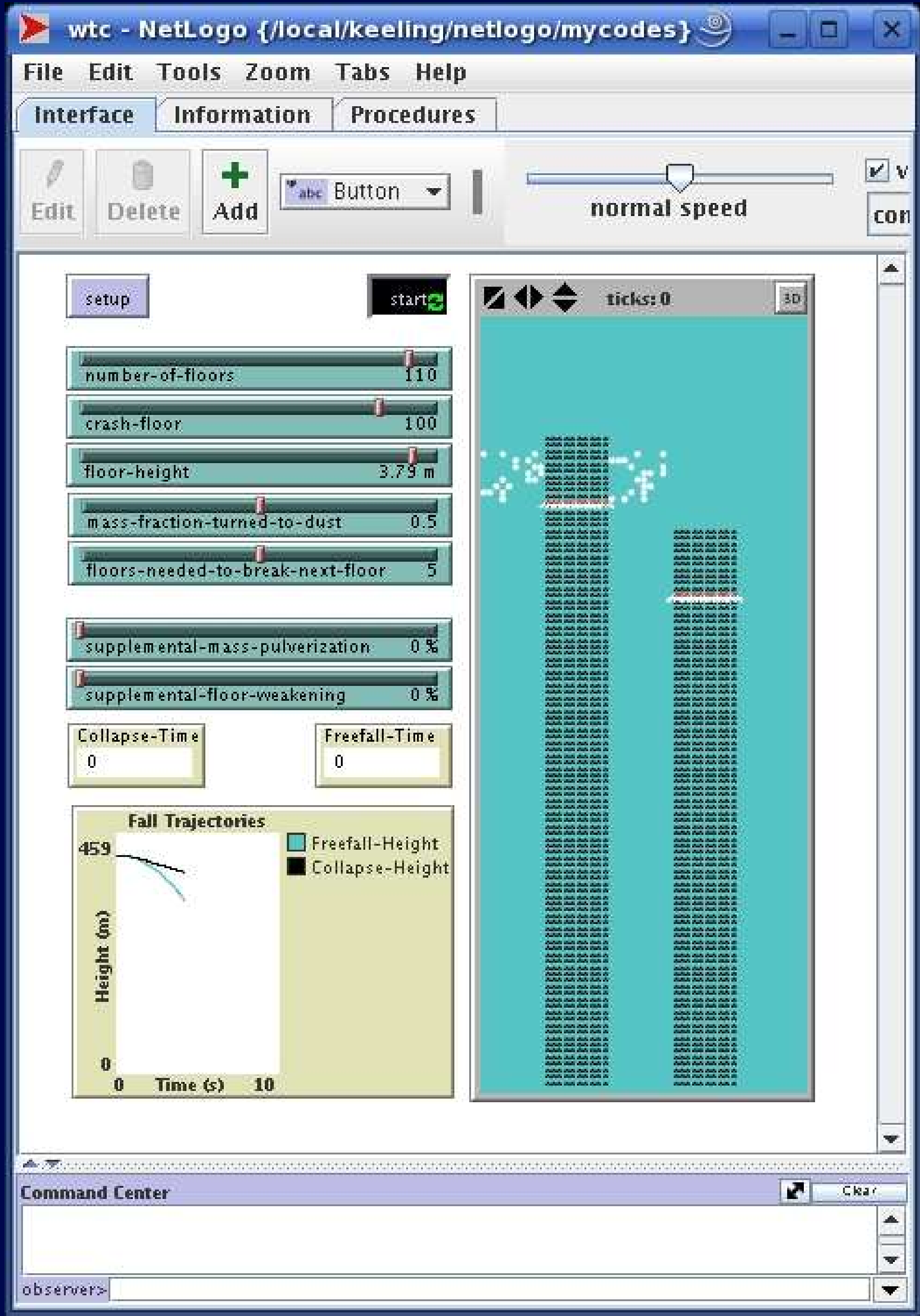
auch in MATLAB: `wtc.m`

und in EXCEL: `wtc.xls`

von Daniel Smertnig

Webseite:

`http://math.uni-graz.at/keeling/wtc.html`



Das Projekt-Ergebnis

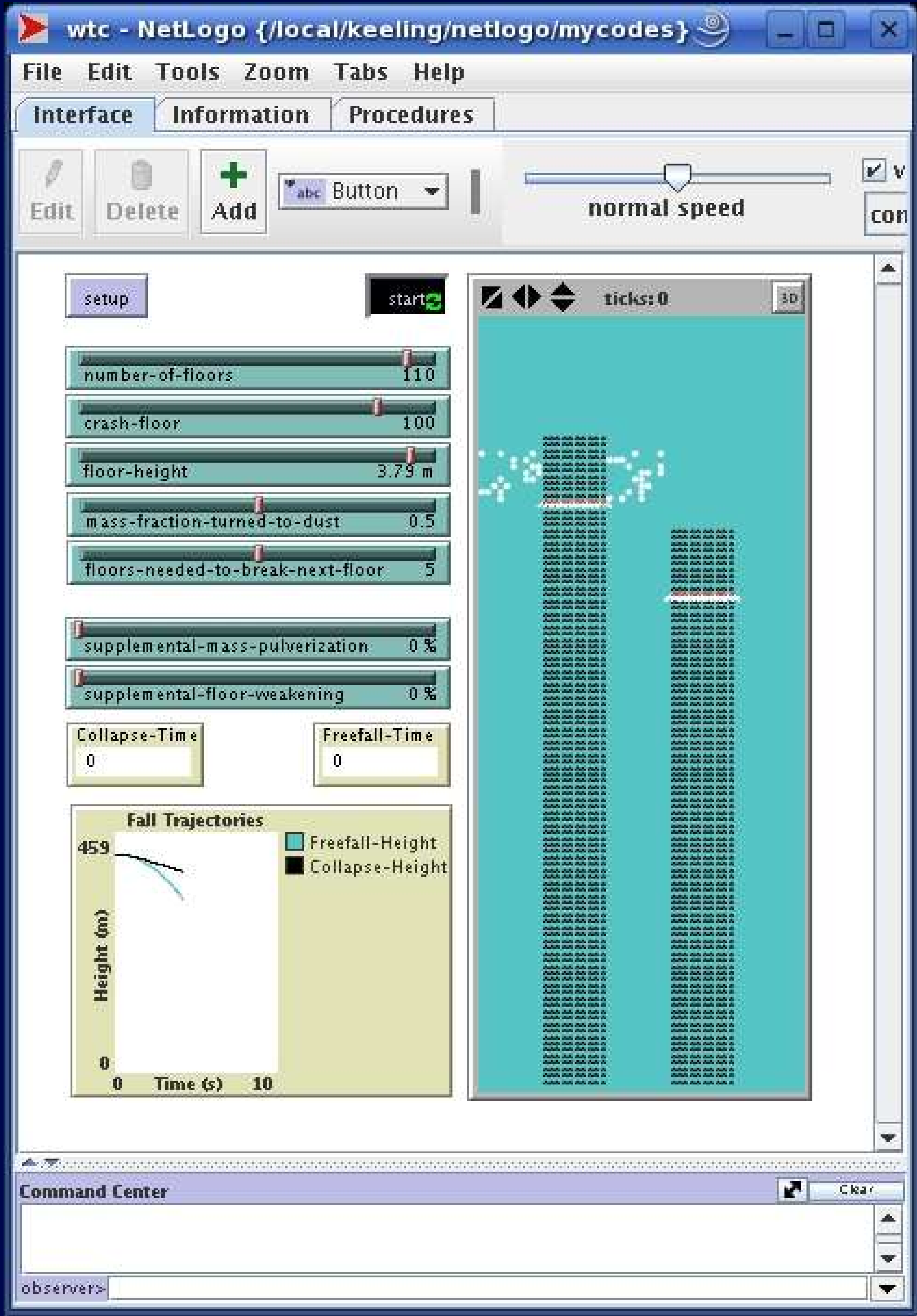
Netlogo Code: `wtc.nlogo`

auch in MATLAB: `wtc.m`
und in EXCEL: `wtc.xls`
von Daniel Smertnig

Webseite:
`http://math.uni-graz.at/keeling/wtc.html`

Beschreibung: `wtc1.html`

und Herleitung: `wtc2.html`



Das Projekt-Ergebnis

Netlogo Code: `wtc.nlogo`

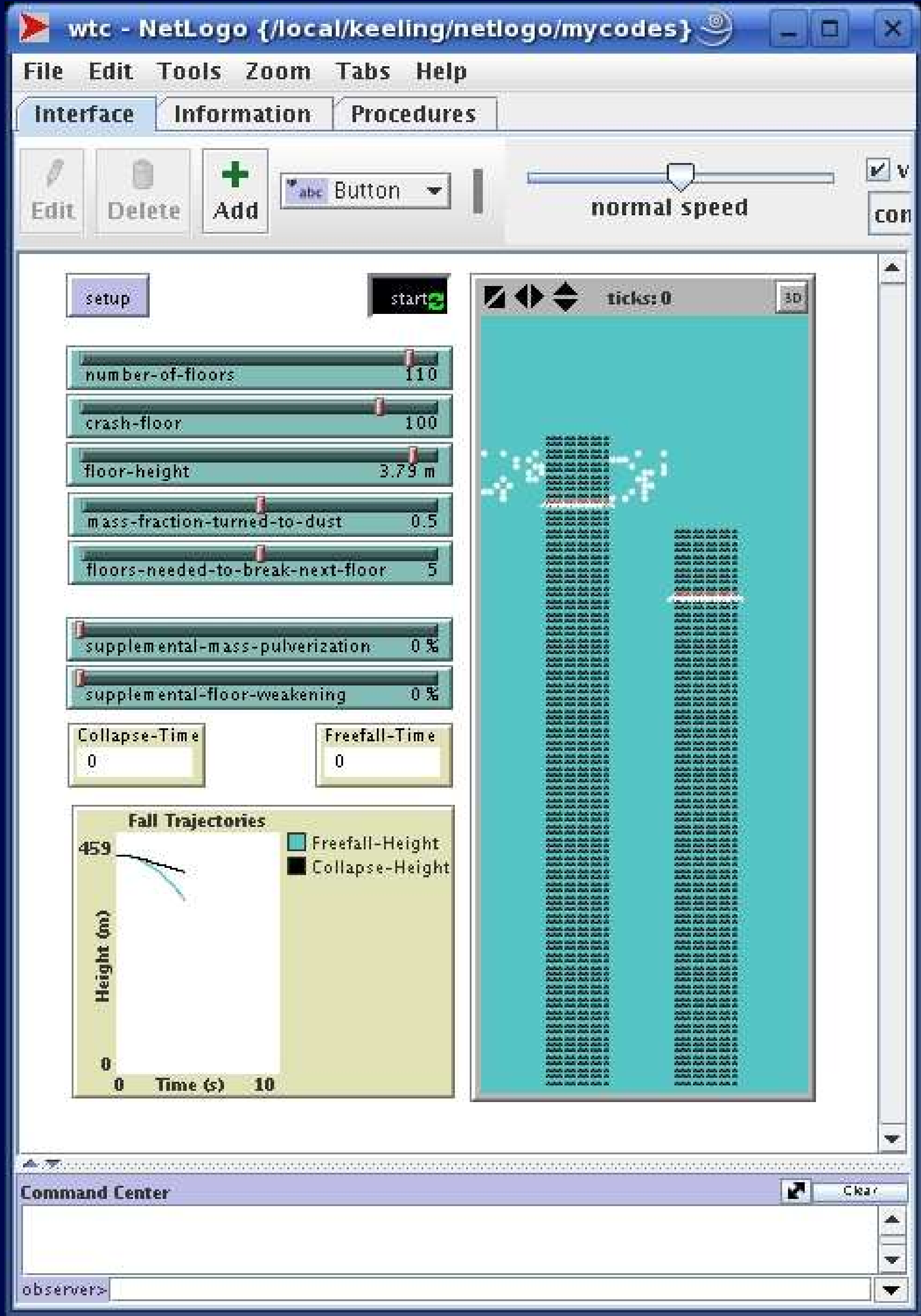
auch in MATLAB: `wtc.m`
und in EXCEL: `wtc.xls`
von Daniel Smertnig

Webseite:
`http://math.uni-graz.at/keeling/`
`wtc.html`

Beschreibung: `wtc1.html`

und Herleitung: `wtc2.html`

Einladung einzureichen beim
Journal of 911 Studies



Einführung in die Erhaltungssätze

Zwei Massen treffen einander ohne Schwerkraft.

Einführung in die Erhaltungssätze

Zwei Massen treffen einander ohne Schwerkraft.

Massenerhaltung: $$m_1 + m_2 = \tilde{m}_1 + \tilde{m}_2$$

Einführung in die Erhaltungssätze

Zwei Massen treffen einander ohne Schwerkraft.

Massenerhaltung: $$m_1 + m_2 = \tilde{m}_1 + \tilde{m}_2$$

Impulserhaltung: $$\boldsymbol{v}_1 m_1 + \boldsymbol{v}_2 m_2 = \tilde{\boldsymbol{v}}_1 \tilde{m}_1 + \tilde{\boldsymbol{v}}_2 \tilde{m}_2$$

Einführung in die Erhaltungssätze

Zwei Massen treffen einander ohne Schwerkraft.

Massenerhaltung: $$m_1 + m_2 = \tilde{m}_1 + \tilde{m}_2$$

Impulserhaltung: $$\boldsymbol{v}_1 m_1 + \boldsymbol{v}_2 m_2 = \tilde{\boldsymbol{v}}_1 \tilde{m}_1 + \tilde{\boldsymbol{v}}_2 \tilde{m}_2$$

Energieerhaltung: $$\frac{1}{2}|\boldsymbol{v}_1|^2 m_1 + \frac{1}{2}|\boldsymbol{v}_2|^2 m_2 = \frac{1}{2}|\tilde{\boldsymbol{v}}_1|^2 \tilde{m}_1 + \frac{1}{2}|\tilde{\boldsymbol{v}}_2|^2 \tilde{m}_2$$

Einführung in die Erhaltungssätze

Zwei Massen treffen einander ohne Schwerkraft.

Massenerhaltung: $$m_1 + m_2 = \tilde{m}_1 + \tilde{m}_2$$

Impulserhaltung: $$\boldsymbol{v}_1 m_1 + \boldsymbol{v}_2 m_2 = \tilde{\boldsymbol{v}}_1 \tilde{m}_1 + \tilde{\boldsymbol{v}}_2 \tilde{m}_2$$

Energieerhaltung: $$\frac{1}{2}|\boldsymbol{v}_1|^2 m_1 + \frac{1}{2}|\boldsymbol{v}_2|^2 m_2 = \frac{1}{2}|\tilde{\boldsymbol{v}}_1|^2 \tilde{m}_1 + \frac{1}{2}|\tilde{\boldsymbol{v}}_2|^2 \tilde{m}_2$$

Berechne $\tilde{\boldsymbol{v}}_i$ wenn $m_i = \tilde{m}_i$:

$$\tilde{\boldsymbol{v}}_i = \boldsymbol{v}_\mathrm{S} - (\boldsymbol{v}_i - \boldsymbol{v}_\mathrm{S})$$

wobei für den Schwerpunkt $\boldsymbol{v}_\mathrm{S} = (\boldsymbol{v}_1 m_1 + \boldsymbol{v}_2 m_2)/(m_1 + m_2)$.

Das WTC Modell

- **Zur Zeit t_1 ist Masse m_1 im freien Fall mit Geschwindigkeit $u_1 < 0$.**

Das WTC Modell

- **Zur Zeit t_1 ist Masse m_1 im freien Fall mit Geschwindigkeit $u_1 < 0$.**
- **Masse m_1 fällt von Höhe h zur Masse m_2.**

Das WTC Modell

- **Zur Zeit t_1 ist Masse m_1 im freien Fall mit Geschwindigkeit $u_1 < 0$.**
- **Masse m_1 fällt von Höhe h zur Masse m_2.**
- **Die Dauer des Falls ist:**

$$t_2 = t_1 + [u_1 + \sqrt{u_1^2 + 2gh}]/g$$

Das WTC Modell

- **Zur Zeit t_1 ist Masse m_1 im freien Fall mit Geschwindigkeit $u_1 < 0$.**
- **Masse m_1 fällt von Höhe h zur Masse m_2.**
- **Die Dauer des Falls ist:**

$$t_2 = t_1 + [u_1 + \sqrt{u_1^2 + 2gh}]/g$$

- **Die Geschwindigkeiten der Massen knapp vor der Kollision sind:**

$$v_1 = -\sqrt{u_1^2 + 2gh}, \quad v_2 = 0$$

Das WTC Modell

- **Zur Zeit t_1 ist Masse m_1 im freien Fall mit Geschwindigkeit $u_1 < 0$.**
- **Masse m_1 fällt von Höhe h zur Masse m_2.**
- **Die Dauer des Falls ist:**

$$t_2 = t_1 + [u_1 + \sqrt{u_1^2 + 2gh}]/g$$

- **Die Geschwindigkeiten der Massen knapp vor der Kollision sind:**

$$v_1 = -\sqrt{u_1^2 + 2gh}, \quad v_2 = 0$$

- **Von der Kollision wird der Bruchteil σ von der Masse m_2 verstaubt und zufällig gestreut:**

$$m_2 \longrightarrow (1-\sigma)m_2 + \sigma m_2, \quad \sigma m_2 = \sum_{l>2} m_l, \quad \sum_{l>2} \tilde{v}_l m_l = 0$$

Das WTC Modell

- **Zur Zeit t_1 ist Masse m_1 im freien Fall mit Geschwindigkeit $u_1 < 0$.**
- **Masse m_1 fällt von Höhe h zur Masse m_2.**
- **Die Dauer des Falls ist:**

$$t_2 = t_1 + [u_1 + \sqrt{u_1^2 + 2gh}]/g$$

- **Die Geschwindigkeiten der Massen knapp vor der Kollision sind:**

$$v_1 = -\sqrt{u_1^2 + 2gh}, \quad v_2 = 0$$

- **Von der Kollision wird der Bruchteil σ von der Masse m_2 verstaubt und zufällig gestreut:**

$$m_2 \to (1-\sigma)m_2 + \sigma m_2, \quad \sigma m_2 = \sum_{l>2} m_l, \quad \sum_{l>2} \tilde{v}_l m_l = 0$$

- **Von Massenerhaltung ist die neue Masse im freien Fall:**

$$m_1 + (1-\sigma)m_2$$

Das WTC Modell

- **Sei** $\Delta p_0 \delta(t - t_2)$ **die wirkende Reserve-Befestigungskraft in dem Moment** $t = t_2$ **der Kollision.**

Das WTC Modell

- **Sei $\Delta p_0 \delta(t - t_2)$ die wirkende Reserve-Befestigungskraft in dem Moment $t = t_2$ der Kollision.**
- **D.h. wenn der Impuls $m_1 v_1$ der fallenden Masse kleiner als Δp_0 ist, gibt es keine weitere Bewegung.**

Das WTC Modell

- Sei $\Delta p_0 \delta(t - t_2)$ die wirkende Reserve-Befestigungskraft in dem Moment $t = t_2$ der Kollision.
- D.h. wenn der Impuls $m_1 v_1$ der fallenden Masse kleiner als Δp_0 ist, gibt es keine weitere Bewegung.
- Von Impulserhaltung,

$$\begin{aligned}
\Delta p_0 + v_1 m_1 + v_2 m_2 &= \tilde{v}_1 \tilde{m}_1 + \tilde{v}_2 \tilde{m}_2 + \Sigma_{l>2} \tilde{v}_l \tilde{m}_l \\
\Delta p_0 + v_1 m_1 &= \tilde{v}_1 \tilde{m}_1 + \tilde{v}_1 (1 - \sigma) m_2
\end{aligned}$$

Das WTC Modell

- Sei $\Delta p_0 \delta(t - t_2)$ die wirkende Reserve-Befestigungskraft in dem Moment $t = t_2$ der Kollision.
- D.h. wenn der Impuls $m_1 v_1$ der fallenden Masse kleiner als Δp_0 ist, gibt es keine weitere Bewegung.
- Von Impulserhaltung,

$$\begin{aligned} \Delta p_0 + v_1 m_1 + v_2 m_2 &= \tilde{v}_1 \tilde{m}_1 + \tilde{v}_2 \tilde{m}_2 + \Sigma_{l>2} \tilde{v}_l \tilde{m}_l \\ \Delta p_0 + v_1 m_1 &= \tilde{v}_1 \tilde{m}_1 + \tilde{v}_1 (1 - \sigma) m_2 \end{aligned}$$

ist die neue Geschwindigkeit der Masse im freien Fall:

$$\tilde{v}_1 = [m_1 v_1 + \Delta p_0]/[m_1 + (1 - \sigma) m_2]$$

Das WTC Modell

- **Sei $\Delta p_0 \delta(t - t_2)$ die wirkende Reserve-Befestigungskraft in dem Moment $t = t_2$ der Kollision.**
- **D.h. wenn der Impuls $m_1 v_1$ der fallenden Masse kleiner als Δp_0 ist, gibt es keine weitere Bewegung.**
- **Von Impulserhaltung,**

$$\begin{aligned} \Delta p_0 + v_1 m_1 + v_2 m_2 &= \tilde{v}_1 \tilde{m}_1 + \tilde{v}_2 \tilde{m}_2 + \Sigma_{l>2} \tilde{v}_l \tilde{m}_l \\ \Delta p_0 + v_1 m_1 &= \tilde{v}_1 \tilde{m}_1 + \tilde{v}_1 (1 - \sigma) m_2 \end{aligned}$$

ist die neue Geschwindigkeit der Masse im freien Fall:

$$\tilde{v}_1 = [m_1 v_1 + \Delta p_0]/[m_1 + (1 - \sigma) m_2]$$

- **Zusammenfassung:**

Das WTC Modell

- Sei $\Delta p_0 \delta(t - t_2)$ die wirkende Reserve-Befestigungskraft in dem Moment $t = t_2$ der Kollision.
- D.h. wenn der Impuls $m_1 v_1$ der fallenden Masse kleiner als Δp_0 ist, gibt es keine weitere Bewegung.
- Von Impulserhaltung,

$$\begin{aligned} \Delta p_0 + v_1 m_1 + v_2 m_2 &= \tilde{v}_1 \tilde{m}_1 + \tilde{v}_2 \tilde{m}_2 + \Sigma_{l>2} \tilde{v}_l \tilde{m}_l \\ \Delta p_0 + v_1 m_1 &= \tilde{v}_1 \tilde{m}_1 + \tilde{v}_1 (1 - \sigma) m_2 \end{aligned}$$

  ist die neue Geschwindigkeit der Masse im freien Fall:

$$\tilde{v}_1 = [m_1 v_1 + \Delta p_0]/[m_1 + (1 - \sigma) m_2]$$

- Zusammenfassung:
  - Freier Fall: m_1 mit u_1 in t_1, dann v_1 in t_2.

Das WTC Modell

- Sei $\Delta p_0 \delta(t - t_2)$ die wirkende Reserve-Befestigungskraft in dem Moment $t = t_2$ der Kollision.
- D.h. wenn der Impuls $m_1 v_1$ der fallenden Masse kleiner als Δp_0 ist, gibt es keine weitere Bewegung.
- Von Impulserhaltung,

$$\begin{aligned} \Delta p_0 + v_1 m_1 + v_2 m_2 &= \tilde{v}_1 \tilde{m}_1 + \tilde{v}_2 \tilde{m}_2 + \Sigma_{l>2} \tilde{v}_l \tilde{m}_l \\ \Delta p_0 + v_1 m_1 &= \tilde{v}_1 \tilde{m}_1 + \tilde{v}_1 (1 - \sigma) m_2 \end{aligned}$$

ist die neue Geschwindigkeit der Masse im freien Fall:

$$\tilde{v}_1 = [m_1 v_1 + \Delta p_0]/[m_1 + (1 - \sigma) m_2]$$

- Zusammenfassung:
  - Freier Fall: m_1 mit u_1 in t_1, dann v_1 in t_2.
  - Kollision: $\tilde{m}_1 = m_1 + m_2 -$ Staub, und $\tilde{m}_1 \tilde{v}_1 = m_1 v_1 + \Delta p_0$.

Das WTC Modell

- **Sei $\Delta p_0 \delta(t - t_2)$ die wirkende Reserve-Befestigungskraft in dem Moment $t = t_2$ der Kollision.**
- **D.h. wenn der Impuls $m_1 v_1$ der fallenden Masse kleiner als Δp_0 ist, gibt es keine weitere Bewegung.**
- **Von Impulserhaltung,**

$$\begin{aligned} \Delta p_0 + v_1 m_1 + v_2 m_2 &= \tilde{v}_1 \tilde{m}_1 + \tilde{v}_2 \tilde{m}_2 + \Sigma_{l>2} \tilde{v}_l \tilde{m}_l \\ \Delta p_0 + v_1 m_1 &= \tilde{v}_1 \tilde{m}_1 + \tilde{v}_1 (1 - \sigma) m_2 \end{aligned}$$

ist die neue Geschwindigkeit der Masse im freien Fall:

$$\tilde{v}_1 = [m_1 v_1 + \Delta p_0]/[m_1 + (1 - \sigma) m_2]$$

- **Zusammenfassung:**
  - **Freier Fall: m_1 mit u_1 in t_1, dann v_1 in t_2.**
  - **Kollision: $\tilde{m}_1 = m_1 + m_2 -$ Staub, und $\tilde{m}_1 \tilde{v}_1 = m_1 v_1 + \Delta p_0$.**

werden iterativ im Code verwendet.

Danke für die Aufmerksamkeit!