Einführung in Umweltsystemwissenschaften
Quantitative Systemwissenschaften

a.o. Univ.-Prof. Stephen Keeling
Institut für Mathematik und Wissenschaftliches Rechnen

Überblick

- Einführung in Modellierung
  - Schritte der Modellbildung
  - Einfaches Beispiel: Wärmetransport
- Konkretes Beispiel: Erdwärme
  - Wie funtioniert es?
  - Grundfragen für eine Fehlersuche
  - Modelle für die Grundfragen

Schritte der Modellbildung

1. Definition eines physikalischen Systems

Schritte der Modellbildung

1. Definition eines physikalischen Systems
   (a) Innen, Aussen, Rand, Tausch, Annahmen, z.B.

Schritte der Modellbildung

1. **Definition eines physikalischen Systems**
   (a) **Innen, Aussen, Rand, Tausch, Annahmen, z.B.**
      - **Heizung in einem Haus wird in $t_0 = 0$ ausgeschaltet.**

Schritte der Modellbildung

1. **Definition eines physikalischen Systems**
   (a) **Innen, Aussen, Rand, Tausch, Annahmen, z.B.**
      - **Heizung in einem Haus wird in $t_0 = 0$ ausgeschaltet.**
      - **Ortsunabhängige Innentemperatur ist $T(t)$ und**

Schritte der Modellbildung

1. **Definition eines physikalischen Systems**
   (a) **Innen, Aussen, Rand, Tausch, Annahmen, z.B.**
   - ∘ **Heizung in einem Haus wird in $t_0 = 0$ ausgeschaltet.**
   - ∘ **Ortsunabhängige Innentemperatur ist $T(t)$ und**
   - ∘ **Konstante Aussentemperatur ist $T_\infty < T(t_0) = T_0$.**

Schritte der Modellbildung

1. **Definition eines physikalischen Systems**
   (a) **Innen, Aussen, Rand, Tausch, Annahmen, z.B.**
   - **Heizung in einem Haus wird in** $t_0 = 0$ **ausgeschaltet.**
   - **Ortsunabhängige Innentemperatur ist** $T(t)$ **und**
   - **Konstante Aussentemperatur ist** $T_\infty < T(t_0) = T_0$**.**
   - **Keine Heizquellen, keine Heizsenken.**

Schritte der Modellbildung

1. **Definition eines physikalischen Systems**

   (a) **Innen, Aussen, Rand, Tausch, Annahmen, z.B.**

   - **Heizung in einem Haus wird in $t_0 = 0$ ausgeschaltet.**
   - **Ortsunabhängige Innentemperatur ist $T(t)$ und**
   - **Konstante Aussentemperatur ist $T_\infty < T(t_0) = T_0$.**
   - **Keine Heizquellen, keine Heizsenken.**
   - **Wärmetausch am Rand des Hauses.**

Schritte der Modellbildung

1. Definition eines physikalischen Systems
   (a) Innen, Aussen, Rand, Tausch, Annahmen, z.B.
      - Heizung in einem Haus wird in $t_0 = 0$ ausgeschaltet.
      - Ortsunabhängige Innentemperatur ist $T(t)$ und
      - Konstante Aussentemperatur ist $T_\infty < T(t_0) = T_0$.
      - Keine Heizquellen, keine Heizsenken.
      - Wärmetausch am Rand des Hauses.
      - Zuerst einfach, später komplizierter, je nach Bedarf.

Schritte der Modellbildung

1. **Definition eines physikalischen Systems**
   (a) **Innen, Aussen, Rand, Tausch, Annahmen, z.B.**
      - **Heizung in einem Haus wird in** $t_0 = 0$ **ausgeschaltet.**
      - **Ortsunabhängige Innentemperatur ist** $T(t)$ **und**
      - **Konstante Aussentemperatur ist** $T_\infty < T(t_0) = T_0$**.**
      - **Keine Heizquellen, keine Heizsenken.**
      - **Wärmetausch am Rand des Hauses.**
      - **Zuerst einfach, später komplizierter, je nach Bedarf.**

   (b) **Fragestellung, z.B.**

Schritte der Modellbildung

1. **Definition eines physikalischen Systems**
   (a) **Innen, Aussen, Rand, Tausch, Annahmen, z.B.**
   - **Heizung in einem Haus wird in $t_0 = 0$ ausgeschaltet.**
   - **Ortsunabhängige Innentemperatur ist $T(t)$ und**
   - **Konstante Aussentemperatur ist $T_\infty < T(t_0) = T_0$.**
   - **Keine Heizquellen, keine Heizsenken.**
   - **Wärmetausch am Rand des Hauses.**
   - **Zuerst einfach, später komplizierter, je nach Bedarf.**

   (b) **Fragestellung, z.B.**
   Zeitdauer bis die Haustemperatur $100(1-p)\%$ ihres Wegs zur Aussentemperatur sinkt.

Schritte der Modellbildung

1. **Definition eines physikalischen Systems**
   (a) **Innen, Aussen, Rand, Tausch, Annahmen, z.B.**
      - **Heizung in einem Haus wird in $t_0 = 0$ ausgeschaltet.**
      - **Ortsunabhängige Innentemperatur ist $T(t)$ und**
      - **Konstante Aussentemperatur ist $T_\infty < T(t_0) = T_0$.**
      - **Keine Heizquellen, keine Heizsenken.**
      - **Wärmetausch am Rand des Hauses.**
      - **Zuerst einfach, später komplizierter, je nach Bedarf.**

   (b) **Fragestellung, z.B.**
   Zeitdauer bis die Haustemperatur $100(1-p)\%$ ihres Wegs zur Aussentemperatur sinkt.

(Weitere Frage: Soll man über einen Urlaub heizen?)

Schritte der Modellbildung

2. Symbolische Beschreibung des Systems

Schritte der Modellbildung

2. Symbolische Beschreibung des Systems

(a) Prinzip, z.B. Mengenbilanz, Erhaltungssatz,

$$\begin{array}{c}\textbf{innere}\\ \textbf{Änderungsrate}\end{array} = \begin{array}{c}\textbf{hinein über}\\ \textbf{den Rand}\end{array} - \begin{array}{c}\textbf{heraus über}\\ \textbf{den Rand}\end{array} + \begin{array}{c}\textbf{innere}\\ \textbf{Quellen}\end{array} - \begin{array}{c}\textbf{innere}\\ \textbf{Senken}\end{array}$$

Schritte der Modellbildung

2. Symbolische Beschreibung des Systems

(a) Prinzip, z.B. Mengenbilanz, Erhaltungssatz,

$$\begin{matrix}\textbf{innere}\\ \textbf{Änderungsrate}\end{matrix} = \begin{matrix}\textbf{hinein über}\\ \textbf{den Rand}\end{matrix} - \begin{matrix}\textbf{heraus über}\\ \textbf{den Rand}\end{matrix} + \begin{matrix}\textbf{innere}\\ \textbf{Quellen}\end{matrix} - \begin{matrix}\textbf{innere}\\ \textbf{Senken}\end{matrix}$$

Für das Haus sagt das Newtonsche Kühlungsgesetz:

$$\begin{matrix}\textbf{Energieänderung}\\ \textbf{im Haus}\end{matrix} \propto \begin{matrix}\textbf{Temperaturdifferenz}\\ \textbf{zwischen innen und aussen}\end{matrix}$$

Schritte der Modellbildung

2. Symbolische Beschreibung des Systems

(a) Prinzip, z.B. Mengenbilanz, Erhaltungssatz,

$$\begin{matrix}\text{innere}\\ \text{Änderungsrate}\end{matrix} = \begin{matrix}\text{hinein über}\\ \text{den Rand}\end{matrix} - \begin{matrix}\text{heraus über}\\ \text{den Rand}\end{matrix} + \begin{matrix}\text{innere}\\ \text{Quellen}\end{matrix} - \begin{matrix}\text{innere}\\ \text{Senken}\end{matrix}$$

Für das Haus sagt das Newtonsche Kühlungsgesetz:

$$\begin{matrix}\text{Energieänderung}\\ \text{im Haus}\end{matrix} \propto \begin{matrix}\text{Temperaturdifferenz}\\ \text{zwischen innen und aussen}\end{matrix}$$

(b) Mathematische Formulierung. Newtonsches Kühlungsgesetz beschreibt Diffusion so:

$$E'(t) \propto [T_\infty - T(t)]$$

Schritte der Modellbildung

2. Symbolische Beschreibung des Systems

(a) Prinzip, z.B. Mengenbilanz, Erhaltungssatz,

$$\begin{array}{c}\text{innere}\\ \text{Änderungsrate}\end{array} = \begin{array}{c}\text{hinein über}\\ \text{den Rand}\end{array} - \begin{array}{c}\text{heraus über}\\ \text{den Rand}\end{array} + \begin{array}{c}\text{innere}\\ \text{Quellen}\end{array} - \begin{array}{c}\text{innere}\\ \text{Senken}\end{array}$$

Für das Haus sagt das Newtonsche Kühlungsgesetz:

$$\begin{array}{c}\text{Energieänderung}\\ \text{im Haus}\end{array} \propto \begin{array}{c}\text{Temperaturdifferenz}\\ \text{zwischen innen und aussen}\end{array}$$

(b) Mathematische Formulierung. Newtonsches Kühlungsgesetz beschreibt Diffusion so:

$$E'(t) \propto [T_\infty - T(t)]$$

oder mit $E(t) = \rho c V T(t)$,

$$\rho c V T'(t) = hS[T_\infty - T(t)], \quad T(t_0) = T_0$$

Schritte der Modellbildung

2. Symbolische Beschreibung des Systems

(a) Prinzip, z.B. Mengenbilanz, Erhaltungssatz,

$$\begin{array}{c}\textbf{innere}\\ \textbf{Änderungsrate}\end{array} = \begin{array}{c}\textbf{hinein über}\\ \textbf{den Rand}\end{array} - \begin{array}{c}\textbf{heraus über}\\ \textbf{den Rand}\end{array} + \begin{array}{c}\textbf{innere}\\ \textbf{Quellen}\end{array} - \begin{array}{c}\textbf{innere}\\ \textbf{Senken}\end{array}$$

Für das Haus sagt das Newtonsche Kühlungsgesetz:

$$\begin{array}{c}\textbf{Energieänderung}\\ \textbf{im Haus}\end{array} \propto \begin{array}{c}\textbf{Temperaturdifferenz}\\ \textbf{zwischen innen und aussen}\end{array}$$

(b) Mathematische Formulierung. Newtonsches Kühlungsgesetz beschreibt Diffusion so:

$$E'(t) \propto [T_\infty - T(t)]$$

oder mit $E(t) = \rho c V T(t)$**,**

$$\rho c V T'(t) = hS[T_\infty - T(t)], \quad T(t_0) = T_0$$

(c) Antwort zur Fragestellung: $t_1 = ?$**,** $T(t_1) - T_\infty = p[T_0 - T_\infty]$**.**

Schritte der Modellbildung

3. Lösung / Untersuchung des mathematischen Modells

Schritte der Modellbildung

3. Lösung / Untersuchung des mathematischen Modells

(a) Lösung, analytisch:

$$\rho c V T'(t) = hS[T_\infty - T(t)], \quad T(0) = T_0$$

Schritte der Modellbildung

3. Lösung / Untersuchung des mathematischen Modells

(a) Lösung, analytisch:

$$\rho c V T'(t) = hS[T_\infty - T(t)], \quad T(0) = T_0$$

T**s isolieren:**

$$\frac{T'(t)}{T(t) - T_\infty} = -\frac{hS}{\rho c V} \equiv -\frac{1}{\tau}$$

3. Lösung / Untersuchung des mathematischen Modells

(a) Lösung, analytisch:

$$\rho c V T'(t) = hS[T_\infty - T(t)], \quad T(0) = T_0$$

T**s isolieren:**

$$\frac{T'(t)}{T(t) - T_\infty} = -\frac{hS}{\rho c V} \equiv -\frac{1}{\tau}$$

$u \equiv T(t) - T_\infty \Rightarrow du = T'(t)dt \Rightarrow$

Schritte der Modellbildung

3. Lösung / Untersuchung des mathematischen Modells

(a) Lösung, analytisch:

$$\rho c V T'(t) = hS[T_\infty - T(t)], \quad T(0) = T_0$$

T**s isolieren:**

$$\frac{T'(t)}{T(t) - T_\infty} = -\frac{hS}{\rho c V} \equiv -\frac{1}{\tau}$$

$u \equiv T(t) - T_\infty \Rightarrow du = T'(t)dt \Rightarrow$

$$\int \frac{T'(t)}{T(t) - T_\infty} dt = \int \frac{du}{u} = \ln|u| = \ln|T(t) - T_\infty|$$

Schritte der Modellbildung

3. Lösung / Untersuchung des mathematischen Modells

(a) Lösung, analytisch:

$$\rho c V T'(t) = hS[T_\infty - T(t)], \qquad T(0) = T_0$$

T**s isolieren:**

$$\frac{T'(t)}{T(t) - T_\infty} = -\frac{hS}{\rho c V} \equiv -\frac{1}{\tau}$$

$u \equiv T(t) - T_\infty \Rightarrow du = T'(t)dt \Rightarrow$

$$\int \frac{T'(t)}{T(t) - T_\infty} dt = \int \frac{du}{u} = \ln|u| = \ln|T(t) - T_\infty|$$

Integrieren über $[0, t]$**:**

$$\ln|T(s) - T_\infty|\Big|_0^t = \int_0^t \frac{T'(s)}{T(s) - T_\infty} ds = -\int_0^t \frac{ds}{\tau} = -\frac{s}{\tau}\Big|_0^t$$

Schritte der Modellbildung

3. Lösung / Untersuchung des mathematischen Modells

(a) Lösung, analytisch:

$$\ln|T(t)-T_\infty| - \ln|T_0 - T_\infty| = \ln|T(s) - T_\infty|\Big|_0^t = -\frac{s}{\tau}\Big|_0^t = -\frac{t-0}{\tau}$$

Schritte der Modellbildung

3. Lösung / Untersuchung des mathematischen Modells

(a) Lösung, analytisch:

$$\ln|T(t)-T_\infty| - \ln|T_0-T_\infty| = \ln|T(s)-T_\infty|\Big|_0^t = -\frac{s}{\tau}\Big|_0^t = -\frac{t-0}{\tau}$$

$\log(A) - \log(B) = \log(A/B)$, $\log(A)^r = r\log(A)$, **usw**

Schritte der Modellbildung

3. Lösung / Untersuchung des mathematischen Modells

(a) Lösung, analytisch:

$$\ln|T(t)-T_\infty|-\ln|T_0-T_\infty| = \ln|T(s)-T_\infty|\Big|_0^t = -\frac{s}{\tau}\Big|_0^t = -\frac{t-0}{\tau}$$

$\log(A)-\log(B)=\log(A/B)$, $\log(A)^r = r\log(A)$, **usw**

$$\ln\left(\frac{T(t)-T_\infty}{T_0-T_\infty}\right) = \ln\Bigg|\underbrace{\frac{T(t)-T_\infty}{T_0-T_\infty}}_{\approx 1>0,\, t\approx 0}\Bigg| = -\frac{t}{\tau}$$

Schritte der Modellbildung

3. Lösung / Untersuchung des mathematischen Modells

(a) Lösung, analytisch:

$$\ln|T(t)-T_\infty| - \ln|T_0-T_\infty| = \ln|T(s)-T_\infty|\Big|_0^t = -\frac{s}{\tau}\Big|_0^t = -\frac{t-0}{\tau}$$

$\log(A)-\log(B)=\log(A/B)$, $\log(A)^r = r\log(A)$, **usw**

$$\ln\left(\frac{T(t)-T_\infty}{T_0-T_\infty}\right) = \ln\left|\underbrace{\frac{T(t)-T_\infty}{T_0-T_\infty}}_{\approx 1>0, t\approx 0}\right| = -\frac{t}{\tau}$$

$\exp(\ln(X)) = X$,

Schritte der Modellbildung

3. Lösung / Untersuchung des mathematischen Modells

(a) Lösung, analytisch:

$$\ln|T(t)-T_\infty| - \ln|T_0-T_\infty| = \ln|T(s)-T_\infty|\Big|_0^t = -\frac{s}{\tau}\Big|_0^t = -\frac{t-0}{\tau}$$

$\log(A)-\log(B)=\log(A/B)$, $\log(A)^r = r\log(A)$, **usw**

$$\ln\left(\frac{T(t)-T_\infty}{T_0-T_\infty}\right) = \ln\Bigg|\underbrace{\frac{T(t)-T_\infty}{T_0-T_\infty}}_{\approx 1>0,\, t\approx 0}\Bigg| = -\frac{t}{\tau}$$

$\exp(\ln(X)) = X$,

$$\frac{T(t)-T_\infty}{T_0-T_\infty} = \exp(-t/\tau), \qquad \frac{1}{\tau} = \frac{hS}{\rho c V} \qquad \Rightarrow$$

Schritte der Modellbildung

3. Lösung / Untersuchung des mathematischen Modells

(a) Lösung, analytisch:

$$\ln|T(t)-T_\infty| - \ln|T_0-T_\infty| = \ln|T(s)-T_\infty|\Big|_0^t = -\frac{s}{\tau}\Big|_0^t = -\frac{t-0}{\tau}$$

$\log(A) - \log(B) = \log(A/B)$, $\log(A)^r = r\log(A)$, **usw**

$$\ln\left(\frac{T(t)-T_\infty}{T_0-T_\infty}\right) = \ln\Big|\underbrace{\frac{T(t)-T_\infty}{T_0-T_\infty}}_{\approx 1>0, t\approx 0}\Big| = -\frac{t}{\tau}$$

$\exp(\ln(X)) = X$,

$$\frac{T(t)-T_\infty}{T_0-T_\infty} = \exp(-t/\tau), \qquad \frac{1}{\tau} = \frac{hS}{\rho c V} \qquad \Rightarrow$$

Analytische Lösung (siehe Mathematica):

$$T(t) = T_\infty + (T_0 - T_\infty)\exp[-hSt/(\rho c V)]$$

Schritte der Modellbildung

3. Lösung / Untersuchung des mathematischen Modells

(b) Lösung, numerisch (wenn analytisch nicht praktisch):

$$\rho c V T'(t) = hS[T_\infty - T(t)], \quad T(0) = T_0$$

Schritte der Modellbildung

3. Lösung / Untersuchung des mathematischen Modells

(b) Lösung, numerisch (wenn analytisch nicht praktisch):

$$\rho c V T'(t) = hS[T_\infty - T(t)], \quad T(0) = T_0$$

Gitter: $t_0, t_1, \ldots$, **oder** $t_i = i\Delta t$, $i = 0, 1, \ldots$

Schritte der Modellbildung

3. Lösung / Untersuchung des mathematischen Modells

(b) Lösung, numerisch (wenn analytisch nicht praktisch):

$$\rho c V T'(t) = hS[T_\infty - T(t)], \quad T(0) = T_0$$

Gitter: $t_0, t_1, \ldots$, **oder** $t_i = i\Delta t$, $i = 0, 1, \ldots$

$$T'(t) \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \frac{T(t + \Delta t) - T(t)}{\Delta t} \quad \Rightarrow \quad T'(t_i) \approx \frac{T(t_{i+1}) - T(t_i)}{\Delta t}$$

Schritte der Modellbildung

3. Lösung / Untersuchung des mathematischen Modells

(b) Lösung, numerisch (wenn analytisch nicht praktisch):

$$\rho c V T'(t) = hS[T_\infty - T(t)], \quad T(0) = T_0$$

Gitter: $t_0, t_1, \ldots$, **oder** $t_i = i\Delta t$, $i = 0, 1, \ldots$

$$T'(t) \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \frac{T(t+\Delta t) - T(t)}{\Delta t} \quad \Rightarrow \quad T'(t_i) \approx \frac{T(t_{i+1}) - T(t_i)}{\Delta t}$$

Mit $T_i \approx T(t_i)$,

Schritte der Modellbildung

3. Lösung / Untersuchung des mathematischen Modells

(b) Lösung, numerisch (wenn analytisch nicht praktisch):

$$\rho c V T'(t) = hS[T_\infty - T(t)], \quad T(0) = T_0$$

Gitter: $t_0, t_1, \ldots$, **oder** $t_i = i\Delta t$, $i = 0, 1, \ldots$

$$T'(t) \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \frac{T(t+\Delta t) - T(t)}{\Delta t} \quad \Rightarrow \quad T'(t_i) \approx \frac{T(t_{i+1}) - T(t_i)}{\Delta t}$$

Mit $T_i \approx T(t_i)$,

$$\frac{(T_{i+1} - T_\infty) - (T_i - T_\infty)}{\Delta t} = \frac{T_{i+1} - T_i}{\Delta t} = -\frac{hS}{\rho c V}(T_i - T_\infty)$$

Schritte der Modellbildung

3. Lösung / Untersuchung des mathematischen Modells

(b) Lösung, numerisch (wenn analytisch nicht praktisch):

$$\rho c V T'(t) = hS[T_\infty - T(t)], \quad T(0) = T_0$$

Gitter: $t_0, t_1, \ldots$, **oder** $t_i = i\Delta t$, $i = 0, 1, \ldots$

$$T'(t) \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \frac{T(t+\Delta t) - T(t)}{\Delta t} \quad \Rightarrow \quad T'(t_i) \approx \frac{T(t_{i+1}) - T(t_i)}{\Delta t}$$

Mit $T_i \approx T(t_i)$,

$$\frac{(T_{i+1} - T_\infty) - (T_i - T_\infty)}{\Delta t} = \frac{T_{i+1} - T_i}{\Delta t} = -\frac{hS}{\rho c V}(T_i - T_\infty)$$

Mit $\tau = \rho c V/(hS)$,

$$T_{i+1} - T_\infty = (1 - \tau^{-1}\Delta t)(T_i - T_\infty), \quad i = 1, 2, \ldots$$

Schritte der Modellbildung

3. Lösung / Untersuchung des mathematischen Modells

(b) Lösung, numerisch (wenn analytisch nicht praktisch):

$$\rho c V T'(t) = hS[T_\infty - T(t)], \quad T(0) = T_0$$

Gitter: $t_0, t_1, \ldots$**, oder** $t_i = i\Delta t$**,** $i = 0, 1, \ldots$

$$T'(t) \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \frac{T(t+\Delta t) - T(t)}{\Delta t} \quad \Rightarrow \quad T'(t_i) \approx \frac{T(t_{i+1}) - T(t_i)}{\Delta t}$$

Mit $T_i \approx T(t_i)$**,**

$$\frac{(T_{i+1} - T_\infty) - (T_i - T_\infty)}{\Delta t} = \frac{T_{i+1} - T_i}{\Delta t} = -\frac{hS}{\rho c V}(T_i - T_\infty)$$

Mit $\tau = \rho c V/(hS)$**,**

$$T_{i+1} - T_\infty = (1 - \tau^{-1}\Delta t)(T_i - T_\infty), \quad i = 1, 2, \ldots$$

Numerische Lösung (siehe Matlab):

$$T_{i+1} = T_\infty + (1 - \tau^{-1}\Delta t)^{i+1}(T_0 - T_\infty)$$

Schritte der Modellbildung

3. Lösung / Untersuchung des mathematischen Modells

(c) Qualitative Untersuchung:

$$\rho c V T'(t) = hS[T_\infty - T(t)], \quad T(0) = T_0$$

Schritte der Modellbildung

3. Lösung / Untersuchung des mathematischen Modells

(c) Qualitative Untersuchung:

$$\rho c V T'(t) = hS[T_\infty - T(t)], \quad T(0) = T_0$$

Macht die Lösung

$$T(t) = T_\infty + (T_0 - T_\infty)\exp[-hSt/(\rho c V)]$$

überhaupt sinn? Grafik von $e^{-t/\tau}$**,** $\tau > 0$**?**

Schritte der Modellbildung

3. Lösung / Untersuchung des mathematischen Modells

(c) Qualitative Untersuchung:

$$\rho c V T'(t) = hS[T_\infty - T(t)], \quad T(0) = T_0$$

Macht die Lösung

$$T(t) = T_\infty + (T_0 - T_\infty) \exp[-hSt/(\rho c V)]$$

überhaupt sinn? Grafik von $e^{-t/\tau}$, $\tau > 0$?

Gleichgewicht?

$$0 = T' = \frac{hS}{\rho c V}[T_\infty - T] \quad \Rightarrow \quad T = T_\infty$$

Schritte der Modellbildung

3. Lösung / Untersuchung des mathematischen Modells

(c) Qualitative Untersuchung:

$$\rho c V T'(t) = hS[T_\infty - T(t)], \qquad T(0) = T_0$$

Macht die Lösung

$$T(t) = T_\infty + (T_0 - T_\infty)\exp[-hSt/(\rho c V)]$$

überhaupt sinn? Grafik von $e^{-t/\tau}$, $\tau > 0$?

Gleichgewicht?

$$0 = T' = \frac{hS}{\rho c V}[T_\infty - T] \quad \Rightarrow \quad T = T_\infty$$

Stabilität?

$$\forall T_0, \quad \lim_{t\to\infty} T(t) = T_\infty$$

Schritte der Modellbildung

4. Vergleich mit dem physikalischen System

Schritte der Modellbildung

4. Vergleich mit dem physikalischen System

(a) Antwort zur Fragestellung:

$$T(t) = T_\infty + (T_0 - T_\infty)\exp[-hSt/(\rho c V)]$$

$T(t_1) - T_\infty = p[T_0 - T_\infty]$**:**

Schritte der Modellbildung

4. Vergleich mit dem physikalischen System

(a) Antwort zur Fragestellung:

$$T(t) = T_\infty + (T_0 - T_\infty)\exp[-hSt/(\rho cV)]$$

$T(t_1) - T_\infty = p[T_0 - T_\infty]$**:**

$$p[T_0 - T_\infty] = T(t_1) - T_\infty = [T_0 - T_\infty]\exp[-hSt_1/(\rho cV)]$$

Schritte der Modellbildung

4. Vergleich mit dem physikalischen System

(a) Antwort zur Fragestellung:

$$T(t) = T_\infty + (T_0 - T_\infty)\exp[-hSt/(\rho cV)]$$

$T(t_1) - T_\infty = p[T_0 - T_\infty]$**:**

$$p[T_0 - T_\infty] = T(t_1) - T_\infty = [T_0 - T_\infty]\exp[-hSt_1/(\rho cV)]$$

$\log(\exp(X)) = X$**,** $\log(X)^r = r\log(X)$**, usw**

Schritte der Modellbildung

4. Vergleich mit dem physikalischen System

(a) Antwort zur Fragestellung:

$$T(t) = T_\infty + (T_0 - T_\infty)\exp[-hSt/(\rho c V)]$$

$T(t_1) - T_\infty = p[T_0 - T_\infty]$**:**

$$p[T_0 - T_\infty] = T(t_1) - T_\infty = [T_0 - T_\infty]\exp[-hSt_1/(\rho c V)]$$

$\log(\exp(X)) = X$**,** $\log(X)^r = r\log(X)$**, usw**

$$-\ln(p^{-1}) = \ln(p) = -\frac{hSt_1}{\rho c V} \quad \Rightarrow \quad t_1 = \frac{\rho c V}{hS}\ln\left(\frac{1}{p}\right)$$

Schritte der Modellbildung

4. **Vergleich mit dem physikalischen System**

   (a) **Antwort zur Fragestellung:**

$$T(t) = T_\infty + (T_0 - T_\infty)\exp[-hSt/(\rho cV)]$$

$T(t_1) - T_\infty = p[T_0 - T_\infty]$**:**

$$p[T_0 - T_\infty] = T(t_1) - T_\infty = [T_0 - T_\infty]\exp[-hSt_1/(\rho cV)]$$

$\log(\exp(X)) = X$, $\log(X)^r = r\log(X)$, **usw**

$$-\ln(p^{-1}) = \ln(p) = -\frac{hSt_1}{\rho cV} \quad \Rightarrow \quad t_1 = \frac{\rho cV}{hS}\ln\left(\frac{1}{p}\right)$$

   (b) **Stimmt mit Daten überein? Wenn es Schwingungen in Messdaten gibt, sind diese zufällige Messfehler oder systematische Abweichungen vom Modell?**

Schritte der Modellbildung

4. Vergleich mit dem physikalischen System

(a) Antwort zur Fragestellung:

$$T(t) = T_\infty + (T_0 - T_\infty) \exp[-hSt/(\rho c V)]$$

$T(t_1) - T_\infty = p[T_0 - T_\infty]$**:**

$$p[T_0 - T_\infty] = T(t_1) - T_\infty = [T_0 - T_\infty] \exp[-hSt_1/(\rho c V)]$$

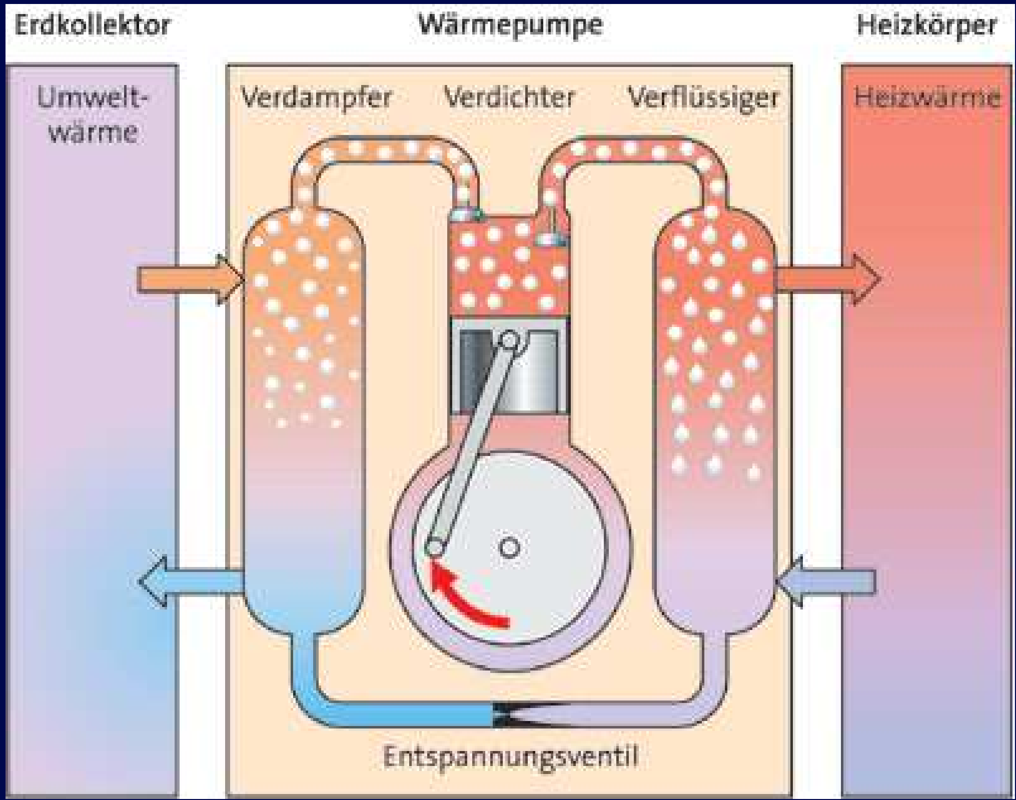
$\log(\exp(X)) = X$, $\log(X)^r = r \log(X)$, **usw**

$$-\ln(p^{-1}) = \ln(p) = -\frac{hSt_1}{\rho c V} \quad \Rightarrow \quad t_1 = \frac{\rho c V}{hS} \ln\left(\frac{1}{p}\right)$$

(b) Stimmt mit Daten überein? Wenn es Schwingungen in Messdaten gibt, sind diese zufällige Messfehler oder systematische Abweichungen vom Modell?

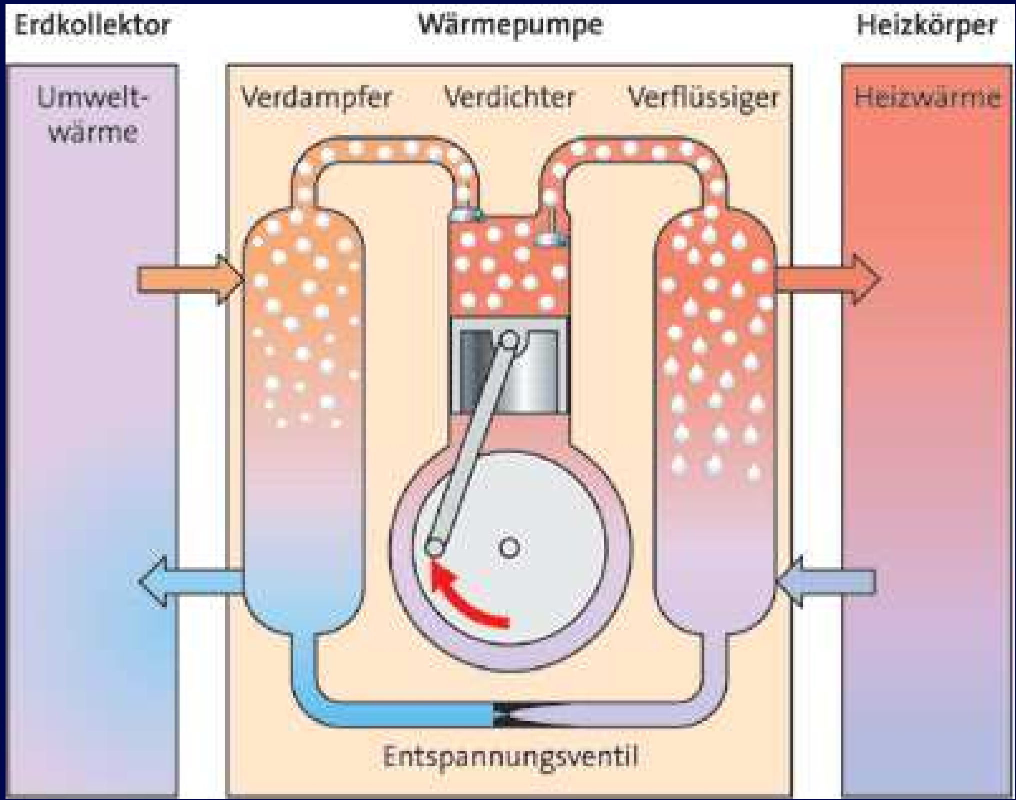
(c) Wenn es übereinstimmt, ist Modell vielleicht voraussagefähig. Sonst sind Verbesserungen notwendig, z.B. Verfeinungen der Kompartimente, Heizquellen, Heizsenken.

Wie funktioniert eine Erdwärmeheizung?



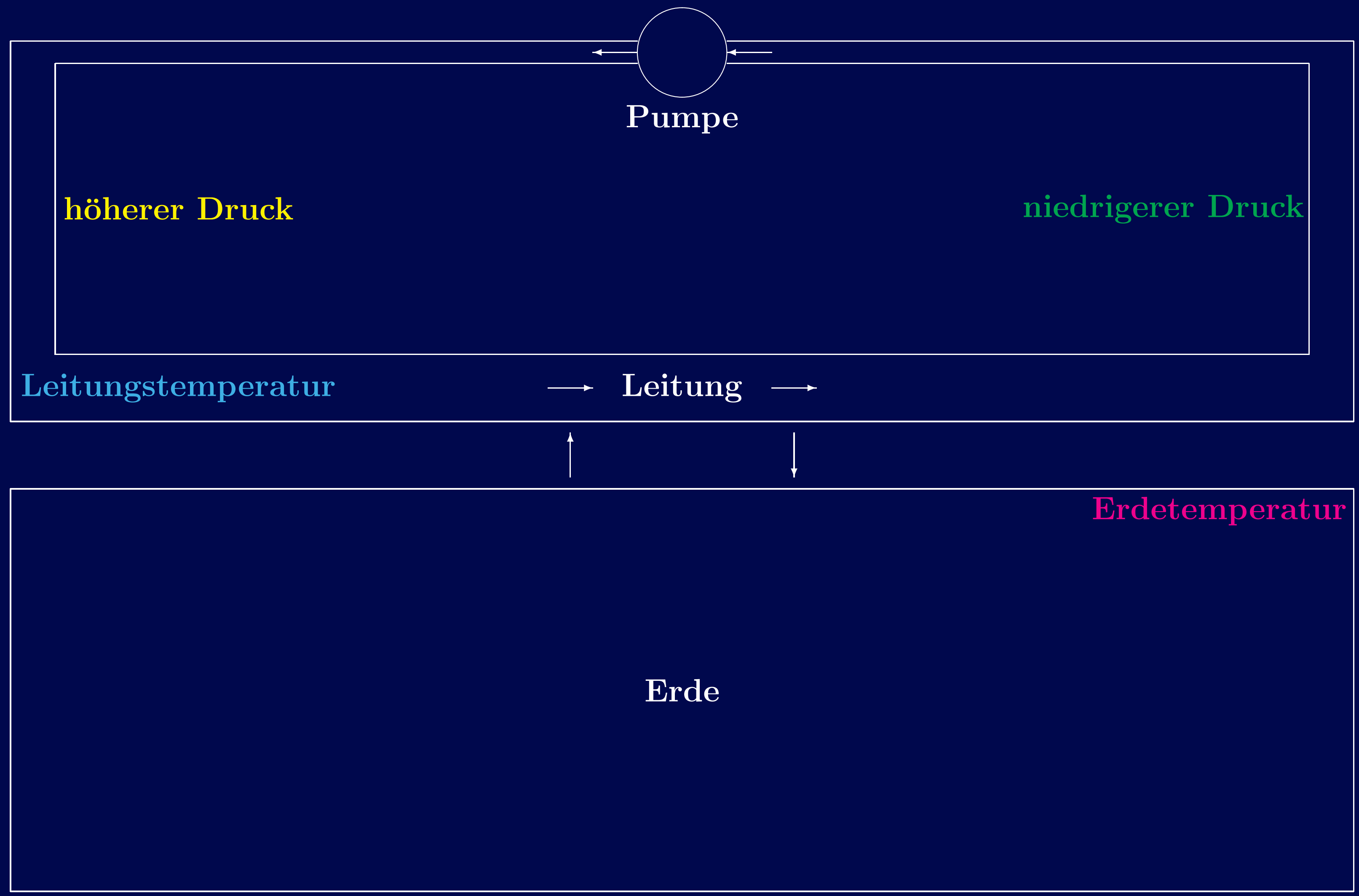
Wie funktioniert eine Erdwärmeheizung?

Mein System ist falsch installiert worden!

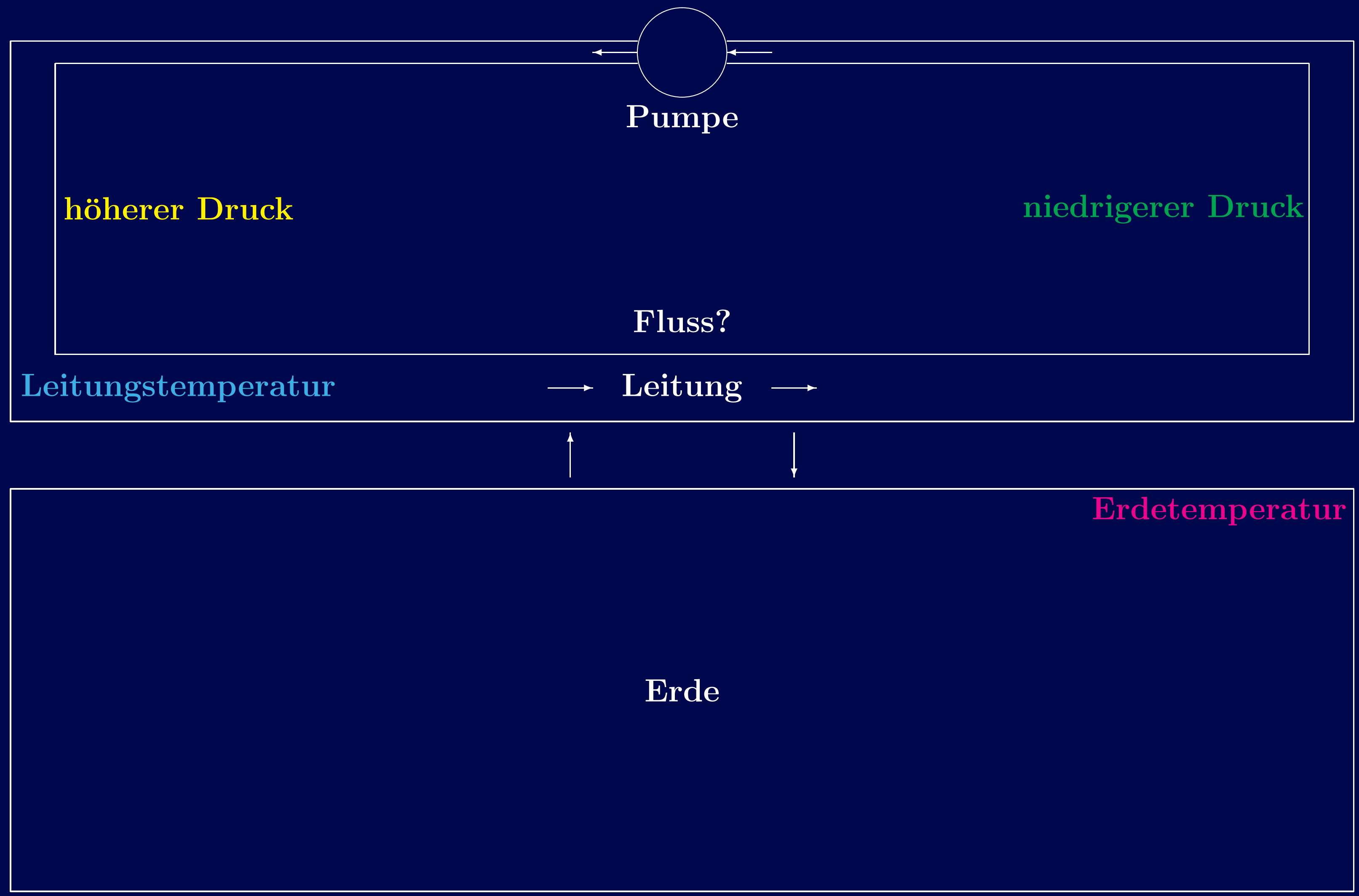


Wo liegt das Problem?
Baufirma?
Erdwärmefirma?

Wärmetransport: Diffusion *und* Konvektion



Wärmetransport: Diffusion *und* Konvektion



Grundfragen für eine Fehlersuche

- **Ist der Wärmetransport (*Wärme pro Zeiteinheit*) höher, wenn der Fluss höher oder niedriger ist?**

Grundfragen für eine Fehlersuche

- **Ist der Wärmetransport (*Wärme pro Zeiteinheit*) höher, wenn der Fluss höher oder niedriger ist?**
  Ohne Mathematik: Eiskaltes Wasser strömt aus dem Duschkopf. Hält die Körperwärme länger aus, wenn der Fluss höher oder niedriger ist?

Grundfragen für eine Fehlersuche

- **Ist der Wärmetransport (*Wärme pro Zeiteinheit*) höher, wenn der Fluss höher oder niedriger ist?**
  Ohne Mathematik: Eiskaltes Wasser strömt aus dem Duschkopf. Hält die Körperwärme länger aus, wenn der Fluss höher oder niedriger ist?

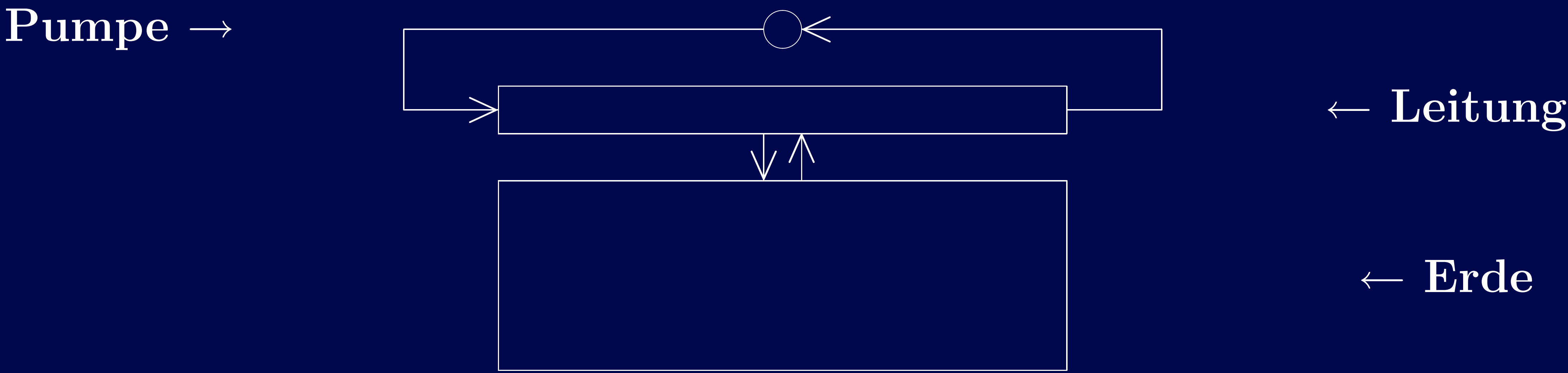
- **Ist der Fluss höher (*oder Widerstand niedriger*, $\Delta P = F \cdot W$), wenn die Erdkollektoren konfiguriert sind mit: 1 $\times$ 600m, 3 $\times$ 200m oder 6 $\times$ 100m?**

Grundfragen für eine Fehlersuche

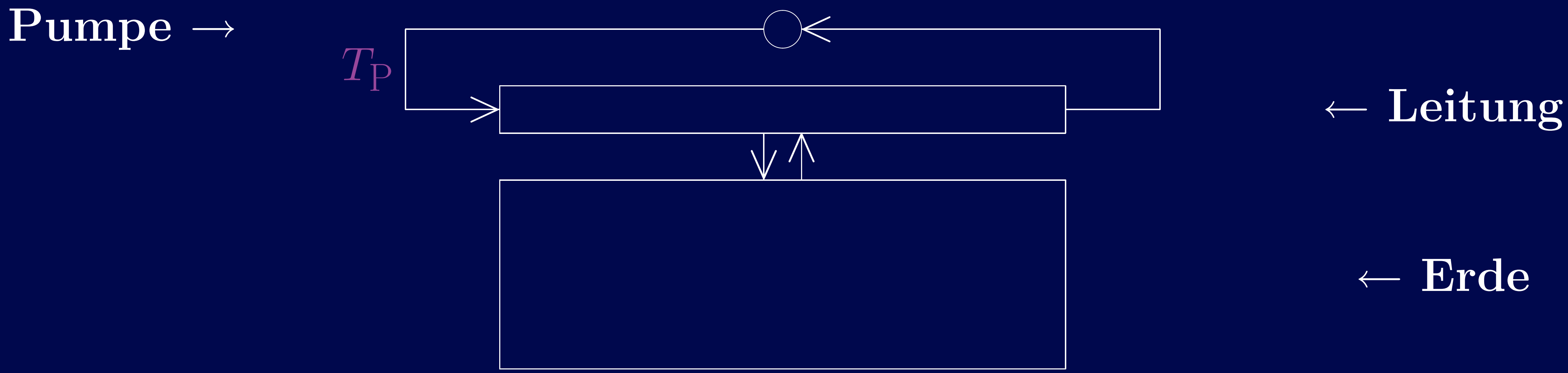
- **Ist der Wärmetransport (*Wärme pro Zeiteinheit*) höher, wenn der Fluss höher oder niedriger ist?**
  Ohne Mathematik: Eiskaltes Wasser strömt aus dem Duschkopf. Hält die Körperwärme länger aus, wenn der Fluss höher oder niedriger ist?

- **Ist der Fluss höher (*oder Widerstand niedriger*, $\Delta P = F \cdot W$), wenn die Erdkollektoren konfiguriert sind mit: 1 $\times$ 600m, 3 $\times$ 200m oder 6 $\times$ 100m?**
  Ohne Mathematik: Sie fahren durch Graz mit einem offenen Lastwagen, um Güter zu sammeln. Fahren Sie schneller (sammeln Sie mehr pro Zeiteinheit) mit: 1 6km Strasse, 3 2km Strassen oder 6 1km Strassen?

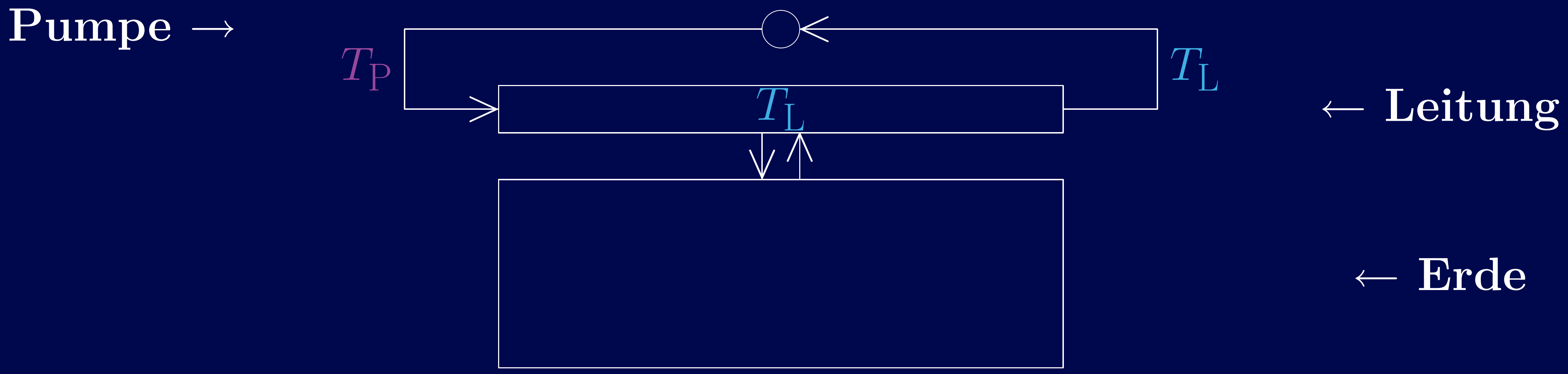
Wärmetransport steigt mit dem Fluss



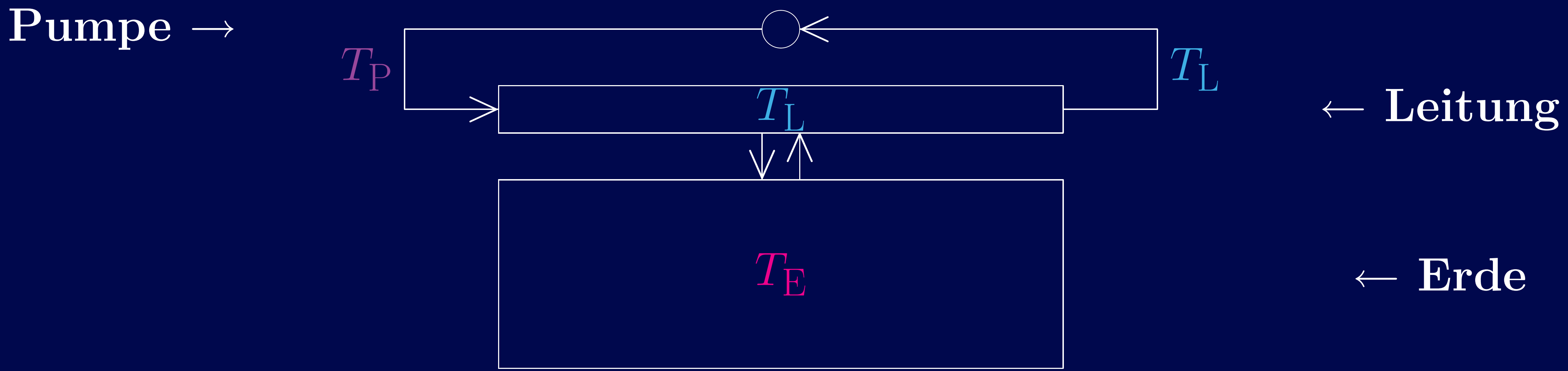
Wärmetransport steigt mit dem Fluss



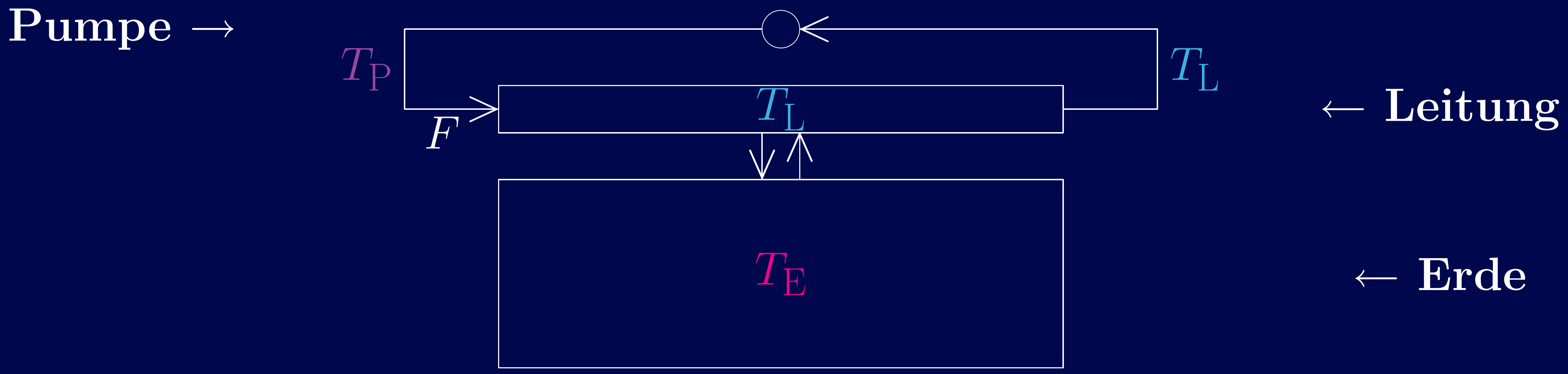
Wärmetransport steigt mit dem Fluss



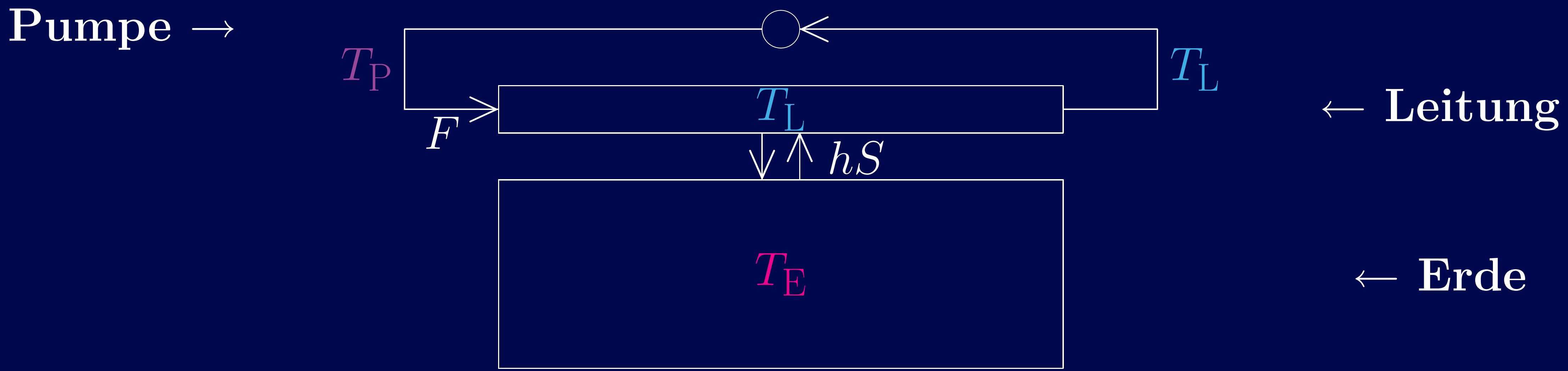
Wärmetransport steigt mit dem Fluss



Wärmetransport steigt mit dem Fluss

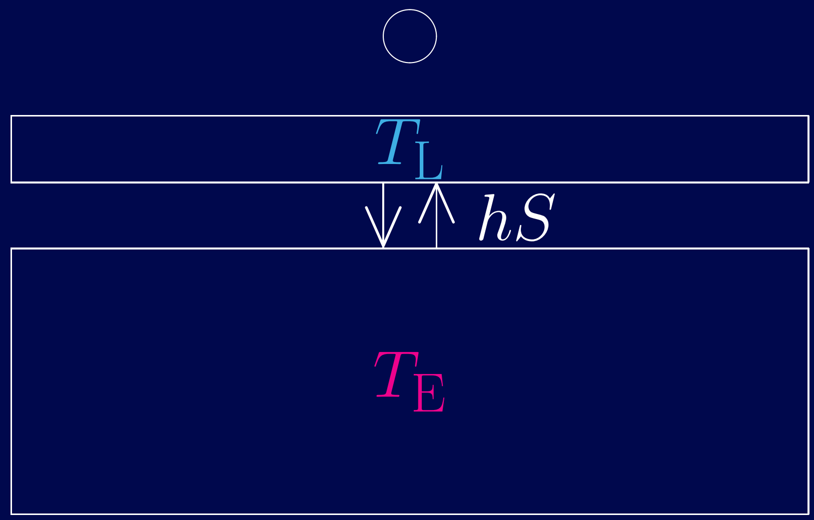


Wärmetransport steigt mit dem Fluss



Wärmetransport steigt mit dem Fluss

Pumpe →

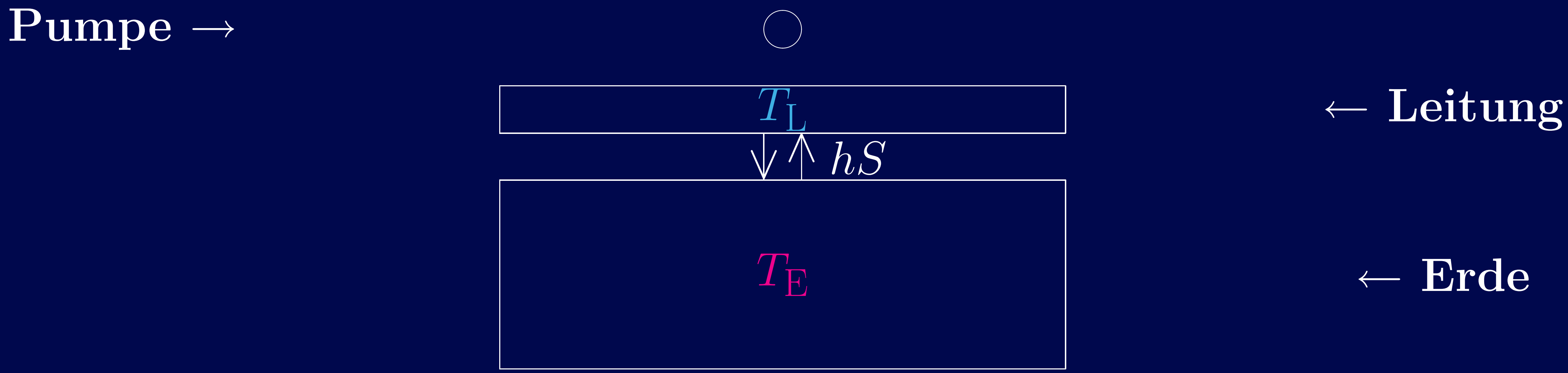


← Leitung

← Erde

Einfachster Fall: Fluss $F = 0$, Newtonsches Kühlungsgesetz ist

Wärmetransport steigt mit dem Fluss



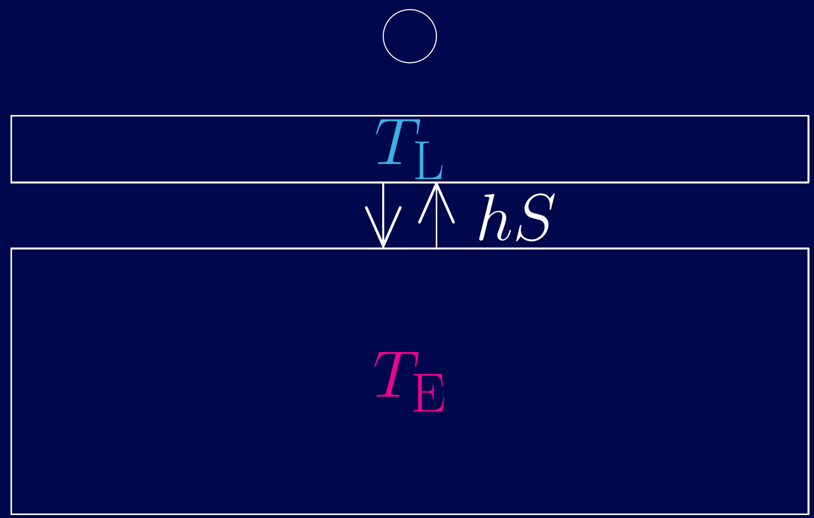
Einfachster Fall: Fluss $F = 0$, Newtonsches Kühlungsgesetz ist

$$E'_{\mathrm{L}} = hS(T_{\mathrm{E}} - T_{\mathrm{L}})$$

$$E'_{\mathrm{E}} = hS(T_{\mathrm{L}} - T_{\mathrm{E}})$$

Wärmetransport steigt mit dem Fluss

Pumpe $\rightarrow$



$\leftarrow$ **Leitung**

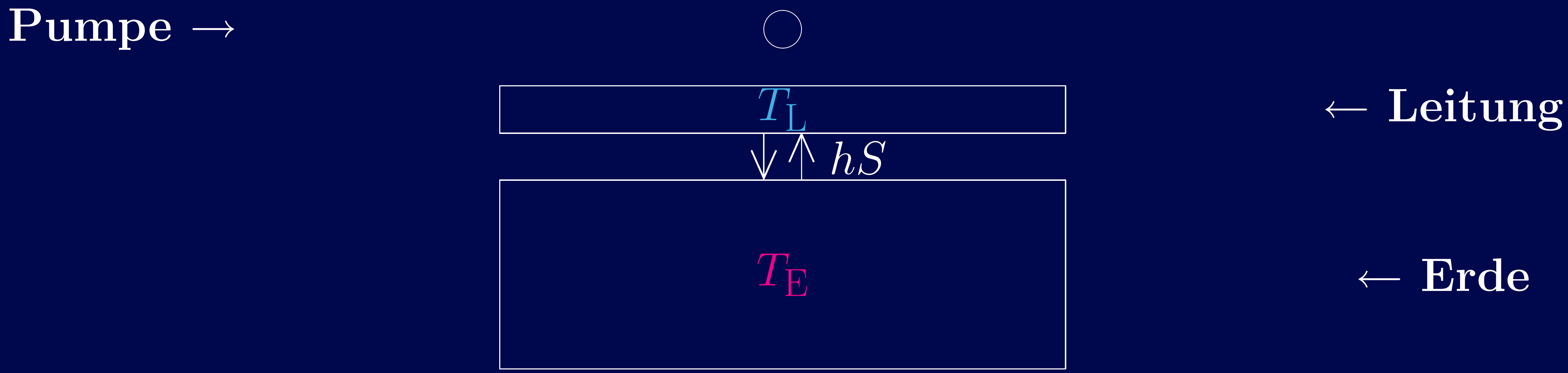
$\leftarrow$ **Erde**

Einfachster Fall: Fluss $F = 0$, Newtonsches Kühlungsgesetz ist

$$\rho_\mathrm{L} c_\mathrm{L} V_\mathrm{L} T'_\mathrm{L} \; = \; E'_\mathrm{L} \; = \; hS(T_\mathrm{E} - T_\mathrm{L})$$

$$\rho_\mathrm{E} c_\mathrm{E} V_\mathrm{E} T'_\mathrm{E} \; = \; E'_\mathrm{E} \; = \; hS(T_\mathrm{L} - T_\mathrm{E})$$

Wärmetransport steigt mit dem Fluss



Einfachster Fall: Fluss $F = 0$, Newtonsches Kühlungsgesetz ist

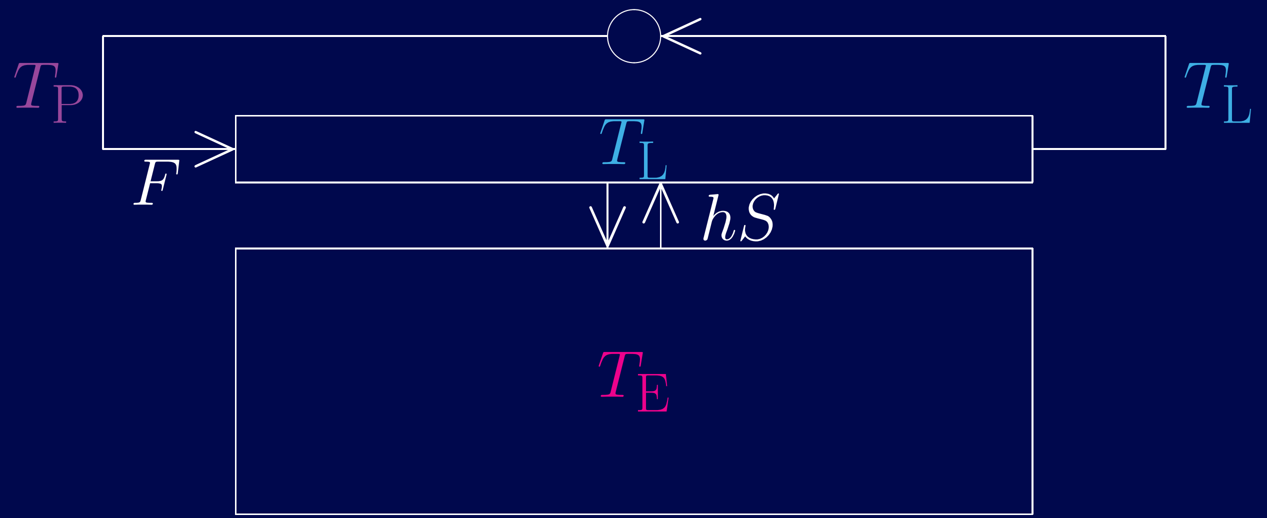
$$\rho_{\mathrm{L}} c_{\mathrm{L}} V_{\mathrm{L}} T'_{\mathrm{L}} = E'_{\mathrm{L}} = hS(T_{\mathrm{E}} - T_{\mathrm{L}})$$

$$\rho_{\mathrm{E}} c_{\mathrm{E}} V_{\mathrm{E}} T'_{\mathrm{E}} = E'_{\mathrm{E}} = hS(T_{\mathrm{L}} - T_{\mathrm{E}})$$

Ergebnis: $T_{\mathrm{L}}, T_{\mathrm{E}} \to T_\infty$ **zwischen** T_{L} **und** T_{E}**.**

Wärmetransport steigt mit dem Fluss

Pumpe →



← Leitung

← Erde

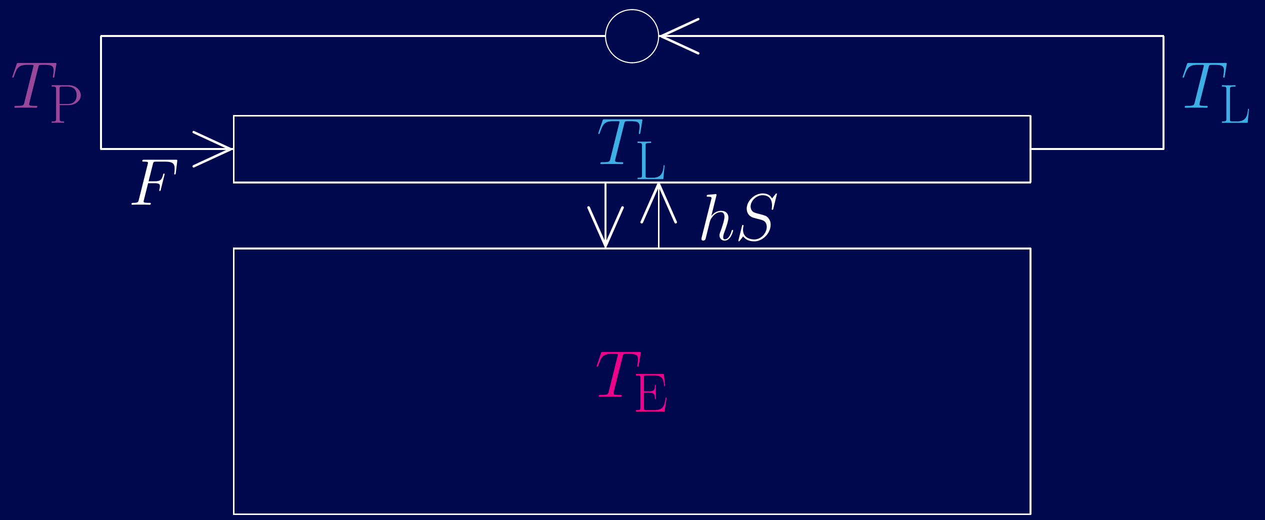
Vollständiger Fall: Fluss $F > 0$, Energiebilanz ist

$$\rho_{\mathrm{L}} c_{\mathrm{L}} V_{\mathrm{L}} T_{\mathrm{L}}' \;=\; E_{\mathrm{L}}' \;=\; hS(T_{\mathrm{E}} - T_{\mathrm{L}}) \;+\; \rho_{\mathrm{L}} c_{\mathrm{L}} F(T_{\mathrm{P}} - T_{\mathrm{L}})$$

$$\rho_{\mathrm{E}} c_{\mathrm{E}} V_{\mathrm{E}} T_{\mathrm{E}}' \;=\; E_{\mathrm{E}}' \;=\; hS(T_{\mathrm{L}} - T_{\mathrm{E}})$$

Wärmetransport steigt mit dem Fluss

Pumpe $\rightarrow$



$\leftarrow$ **Leitung**

$\leftarrow$ **Erde**

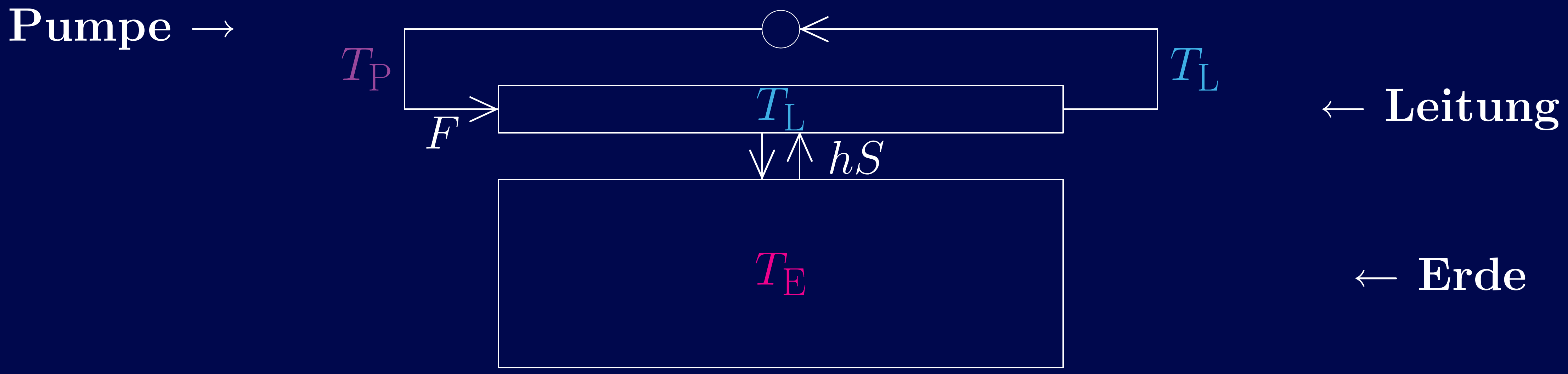
Vollständiger Fall: Fluss $F > 0$, Energiebilanz ist

$$\rho_\mathrm{L} c_\mathrm{L} V_\mathrm{L} T_\mathrm{L}' \;=\; E_\mathrm{L}' \;=\; hS(T_\mathrm{E} - T_\mathrm{L}) \;+\; \rho_\mathrm{L} c_\mathrm{L} F (T_\mathrm{P} - T_\mathrm{L})$$

$$\rho_\mathrm{E} c_\mathrm{E} V_\mathrm{E} T_\mathrm{E}' \;=\; E_\mathrm{E}' \;=\; hS(T_\mathrm{L} - T_\mathrm{E})$$

Ergebnis: $T_\mathrm{L}, T_\mathrm{E} \rightarrow T_\mathrm{P}$ **letztendlich.**

Wärmetransport steigt mit dem Fluss

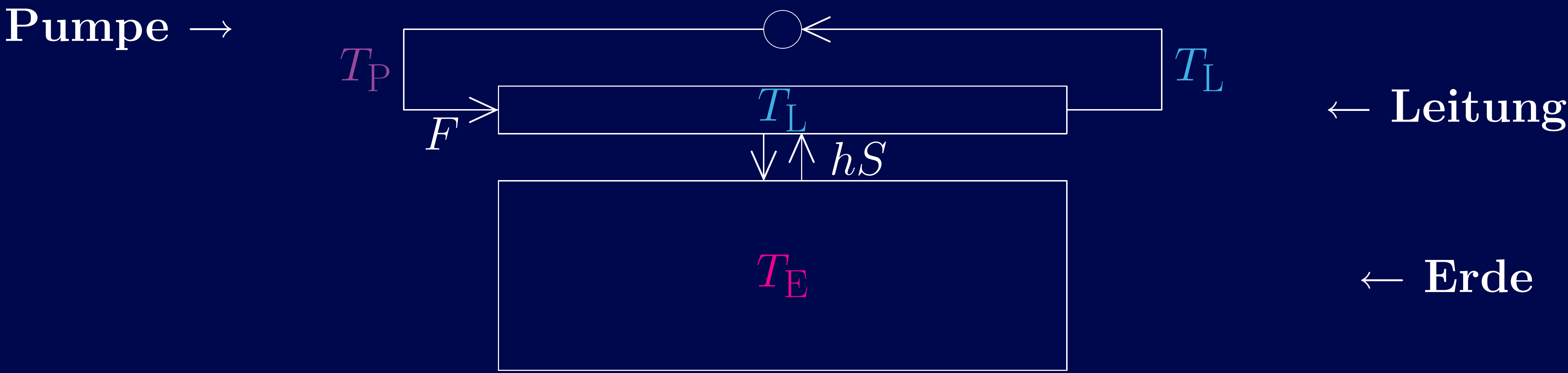


Extremer Fall: Fluss $F \to \infty$, Energiebilanz wird

$$\rho_\mathrm{L} c_\mathrm{L} V_\mathrm{L} T'_\mathrm{L} = E'_\mathrm{L} = hS(T_\mathrm{E} - T_\mathrm{L}) + \underbrace{\rho_\mathrm{L} c_\mathrm{L} F}_{(\to\infty)} \underbrace{(T_\mathrm{P} - T_\mathrm{L})}_{(\to 0)}$$

$$\rho_\mathrm{E} c_\mathrm{E} V_\mathrm{E} T'_\mathrm{E} = E'_\mathrm{E} = hS(T_\mathrm{L} - T_\mathrm{E})$$

Wärmetransport steigt mit dem Fluss



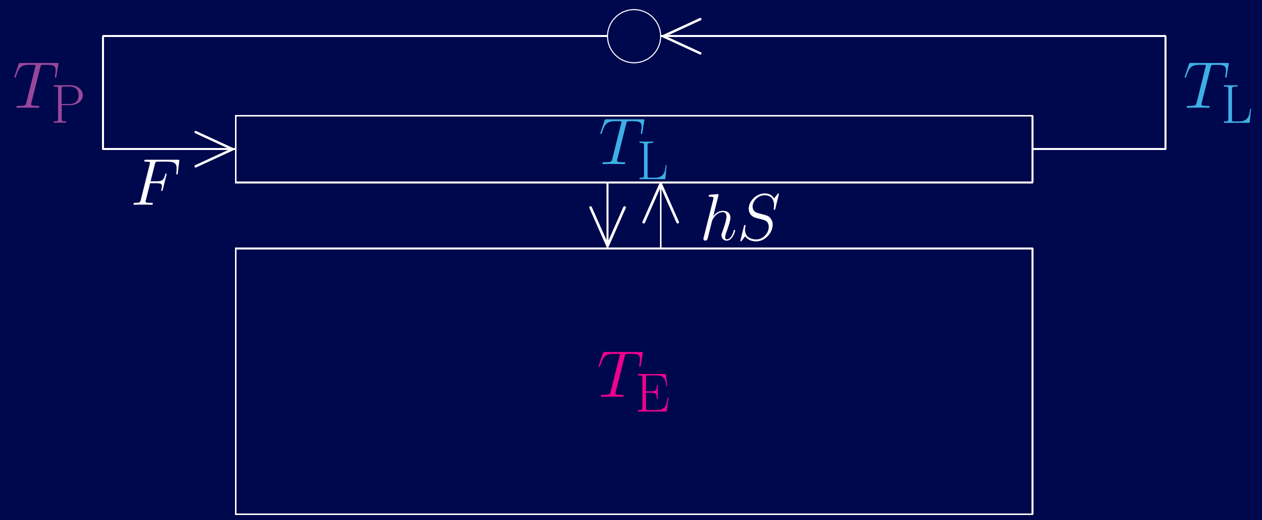
Extremer Fall: Fluss $F \to \infty$, Energiebilanz wird

$$\rho_{\mathrm{L}} c_{\mathrm{L}} V_{\mathrm{L}} T'_{\mathrm{L}} = E'_{\mathrm{L}} = hS(T_{\mathrm{E}} - T_{\mathrm{L}}) + \underset{(\to \infty)}{\rho_{\mathrm{L}} c_{\mathrm{L}} F} \underset{(\to 0)}{(T_{\mathrm{P}} - T_{\mathrm{L}})}$$

$$\rho_{\mathrm{E}} c_{\mathrm{E}} V_{\mathrm{E}} T'_{\mathrm{E}} = E'_{\mathrm{E}} = hS(T_{\mathrm{L}} - T_{\mathrm{E}}) \to hS(T_{\mathrm{P}} - T_{\mathrm{E}})$$

Wärmetransport steigt mit dem Fluss

Pumpe $\longrightarrow$



$\longleftarrow$ **Leitung**

$\longleftarrow$ **Erde**

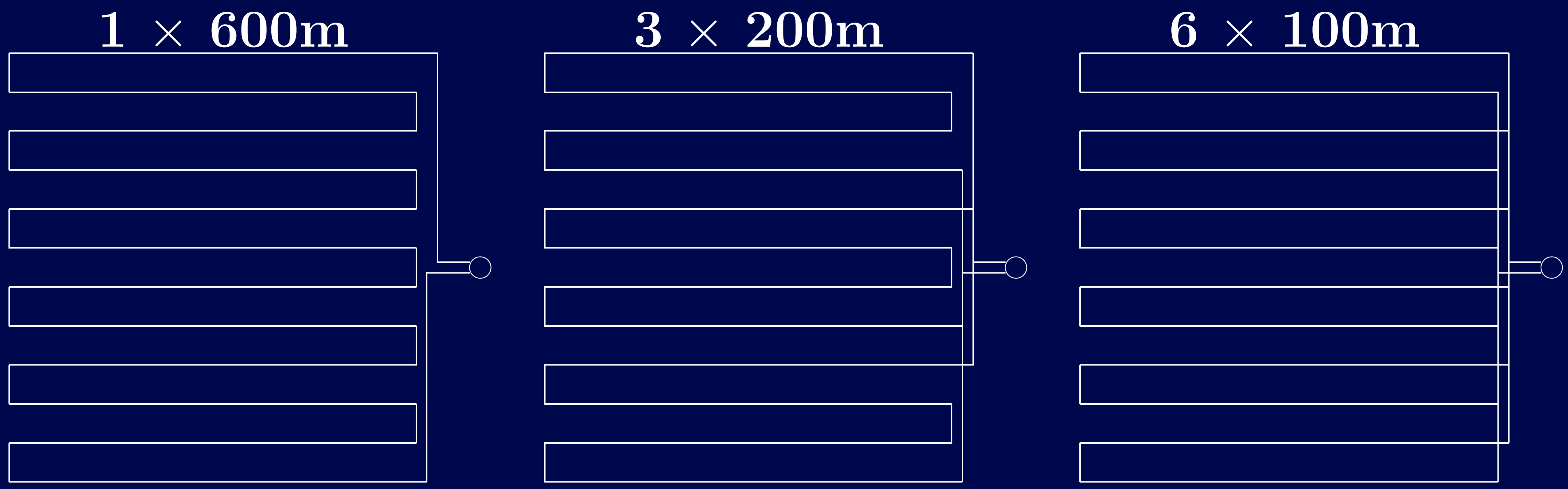
Extremer Fall: Fluss $F \longrightarrow \infty$, Energiebilanz wird

$$\rho_\mathrm{L} c_\mathrm{L} V_\mathrm{L} T'_\mathrm{L} \;=\; E'_\mathrm{L} \;=\; hS(T_\mathrm{E} - T_\mathrm{L}) \;+\; \underset{(\longrightarrow\, \infty)}{\rho_\mathrm{L} c_\mathrm{L} F}\,\underset{(\longrightarrow\, 0)}{(T_\mathrm{P} - T_\mathrm{L})}$$

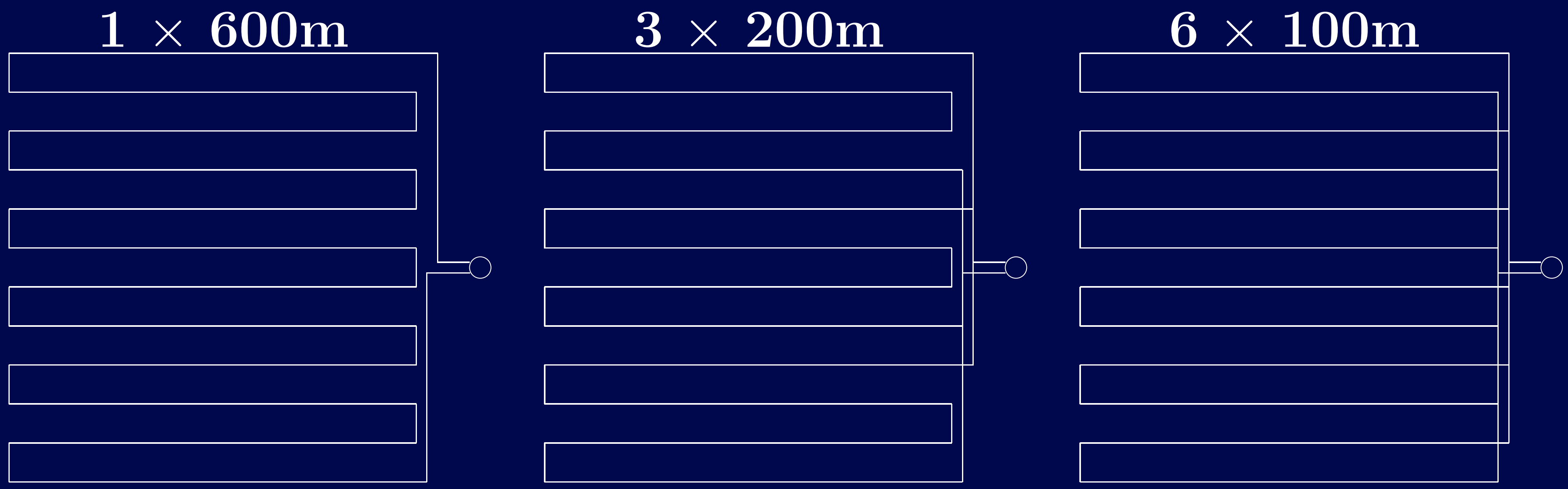
$$\rho_\mathrm{E} c_\mathrm{E} V_\mathrm{E} T'_\mathrm{E} \;=\; E'_\mathrm{E} \;=\; hS(T_\mathrm{L} - T_\mathrm{E}) \;\longrightarrow\; hS(T_\mathrm{P} - T_\mathrm{E})$$

Ergebnis: $T_\mathrm{E} \longrightarrow T_\mathrm{P} = T_\mathrm{L}$ **am schnellsten und Transport** $|E'_\mathrm{E}| = \max$

Fluss steigt mit der Anzahl von parallelen Erdkollektoren

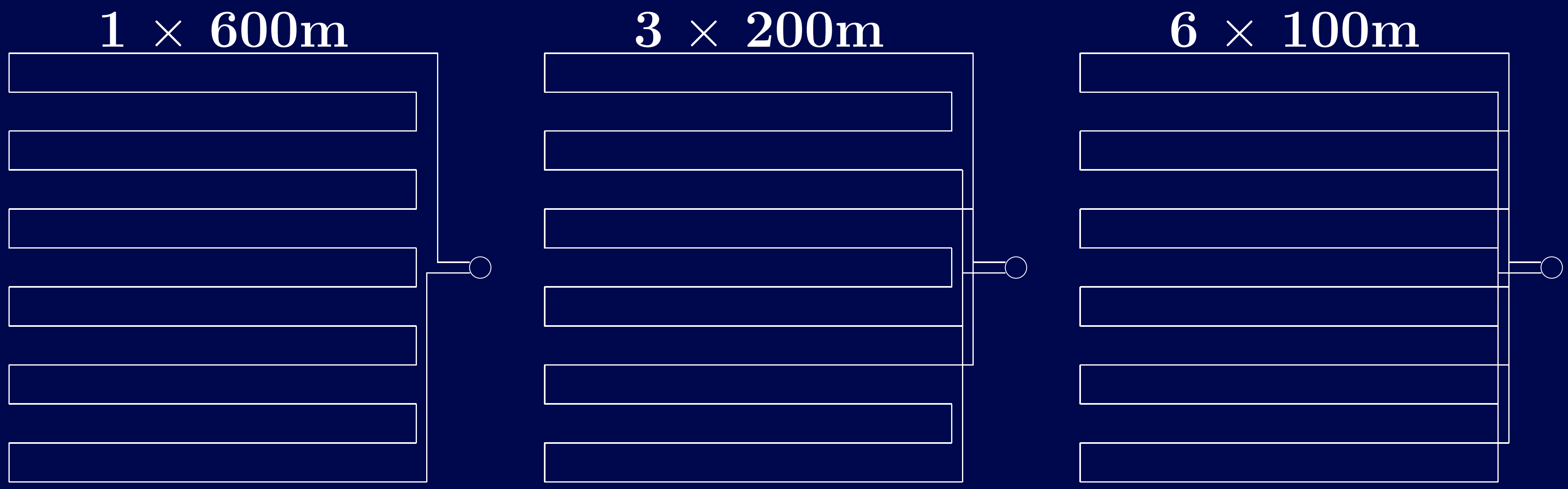


Fluss steigt mit der Anzahl von parallelen Erdkollektoren



Das Ohmsche Gesetz: $\Delta P = F_n \cdot W_n = f_i \cdot w_i$.

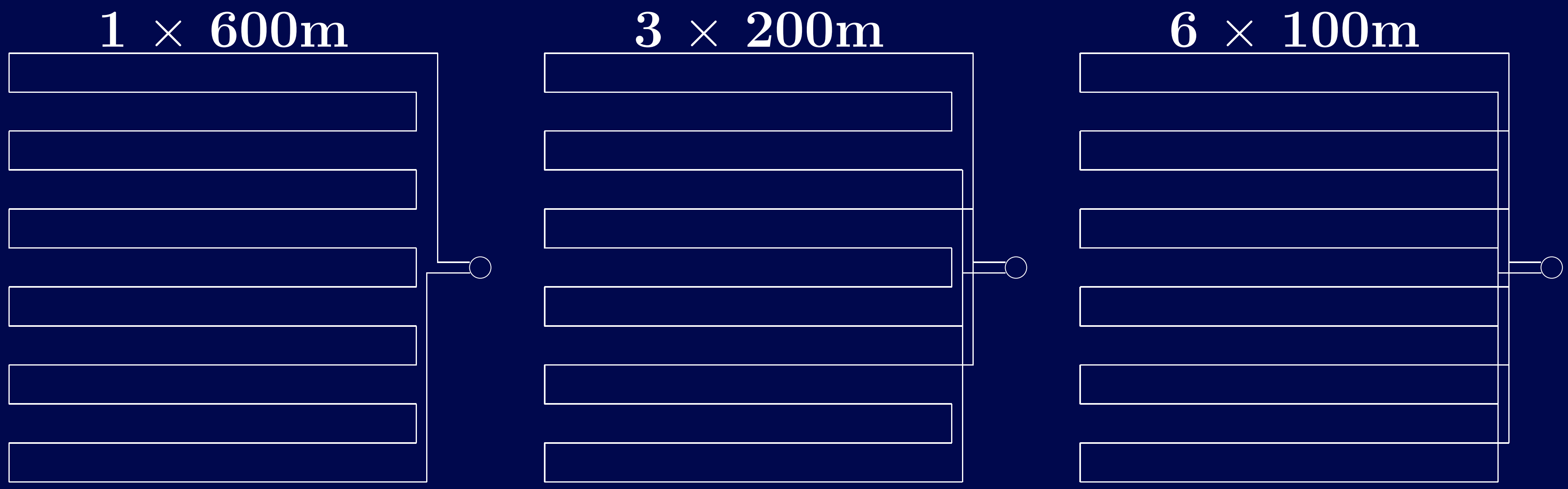
Fluss steigt mit der Anzahl von parallelen Erdkollektoren



Das Ohmsche Gesetz: $\Delta P = F_n \cdot W_n = f_i \cdot w_i$.

Das Kirchhoffsche Gesetz: $F_n = f_1 + f_2 + \cdots f_n$.

Fluss steigt mit der Anzahl von parallelen Erdkollektoren



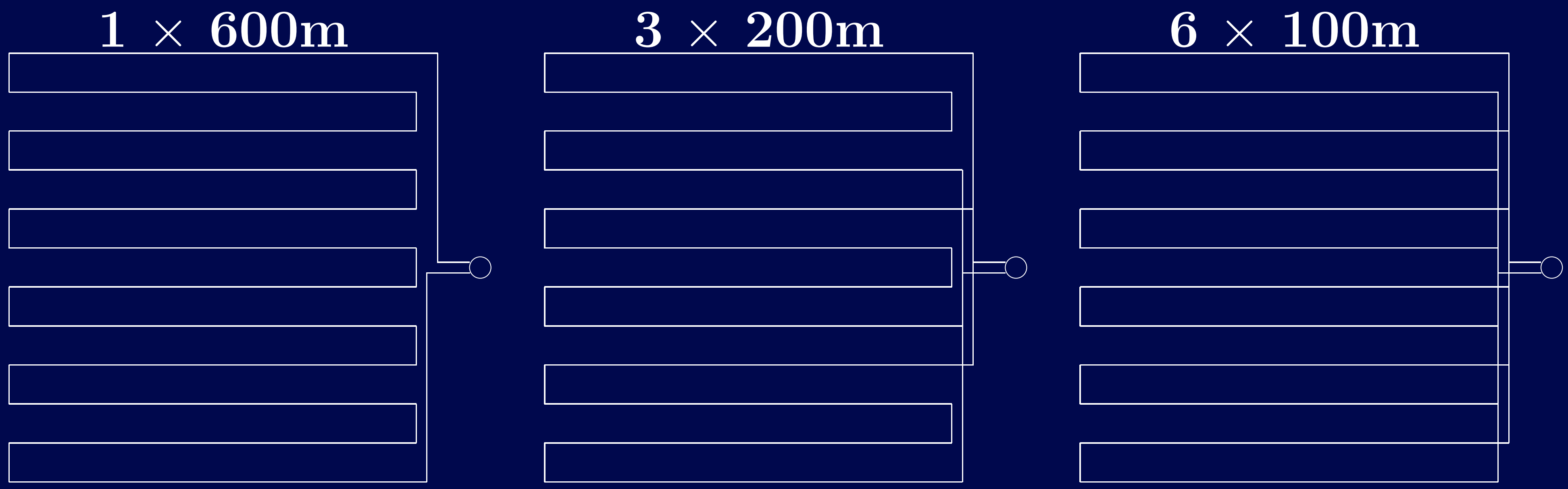
Das Ohmsche Gesetz: $\Delta P = F_n \cdot W_n = f_i \cdot w_i$.

Das Kirchhoffsche Gesetz: $F_n = f_1 + f_2 + \cdots f_n$.

Folglich:

$$\frac{1}{W_n} = \frac{F_n}{\Delta P} = \frac{f_1}{\Delta P} + \frac{f_2}{\Delta P} + \cdots \frac{f_n}{\Delta P} = \frac{1}{w_1} + \frac{1}{w_2} + \cdots \frac{1}{w_n}$$

Fluss steigt mit der Anzahl von parallelen Erdkollektoren



Das Ohmsche Gesetz: $\Delta P = F_n \cdot W_n = f_i \cdot w_i$.

Das Kirchhoffsche Gesetz: $F_n = f_1 + f_2 + \cdots f_n$.

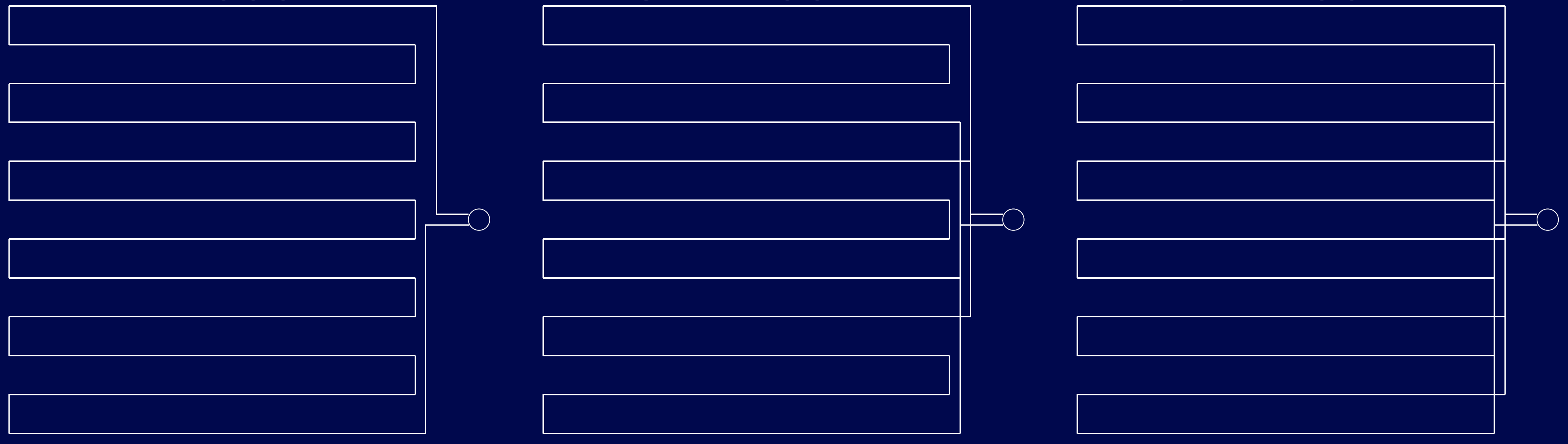
Folglich:

$$\frac{1}{W_n} = \frac{F_n}{\Delta P} = \frac{f_1}{\Delta P} + \frac{f_2}{\Delta P} + \cdots \frac{f_n}{\Delta P} = \frac{1}{w_1} + \frac{1}{w_2} + \cdots \frac{1}{w_n}$$

Mit n gleich langen parallelen Erdkollektoren, $w_1 = W_1/n$ **und:**

$$\frac{1}{W_n} = n \times \frac{1}{W_1/n}$$

Fluss steigt mit der Anzahl von parallelen Erdkollektoren



Das Ohmsche Gesetz: $\Delta P = F_n \cdot W_n = f_i \cdot w_i$.

Das Kirchhoffsche Gesetz: $F_n = f_1 + f_2 + \cdots f_n$.

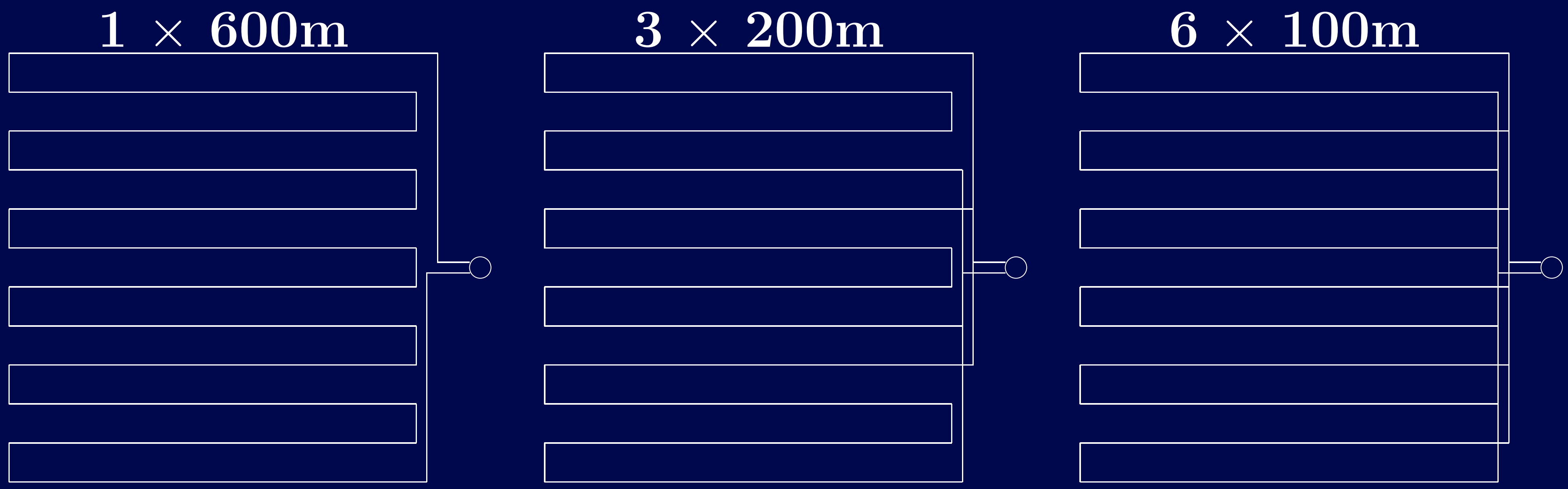
Folglich:

$$\frac{1}{W_n} = \frac{F_n}{\Delta P} = \frac{f_1}{\Delta P} + \frac{f_2}{\Delta P} + \cdots \frac{f_n}{\Delta P} = \frac{1}{w_1} + \frac{1}{w_2} + \cdots \frac{1}{w_n}$$

Mit n gleich langen parallelen Erdkollektoren, $w_1 = W_1/n$ **und:**

$$\frac{1}{W_n} = n \times \frac{1}{W_1/n} \quad \Rightarrow \quad W_n = \frac{W_1}{n^2},$$

Fluss steigt mit der Anzahl von parallelen Erdkollektoren



Das Ohmsche Gesetz: $\Delta P = F_n \cdot W_n = f_i \cdot w_i$.

Das Kirchhoffsche Gesetz: $F_n = f_1 + f_2 + \cdots f_n$.

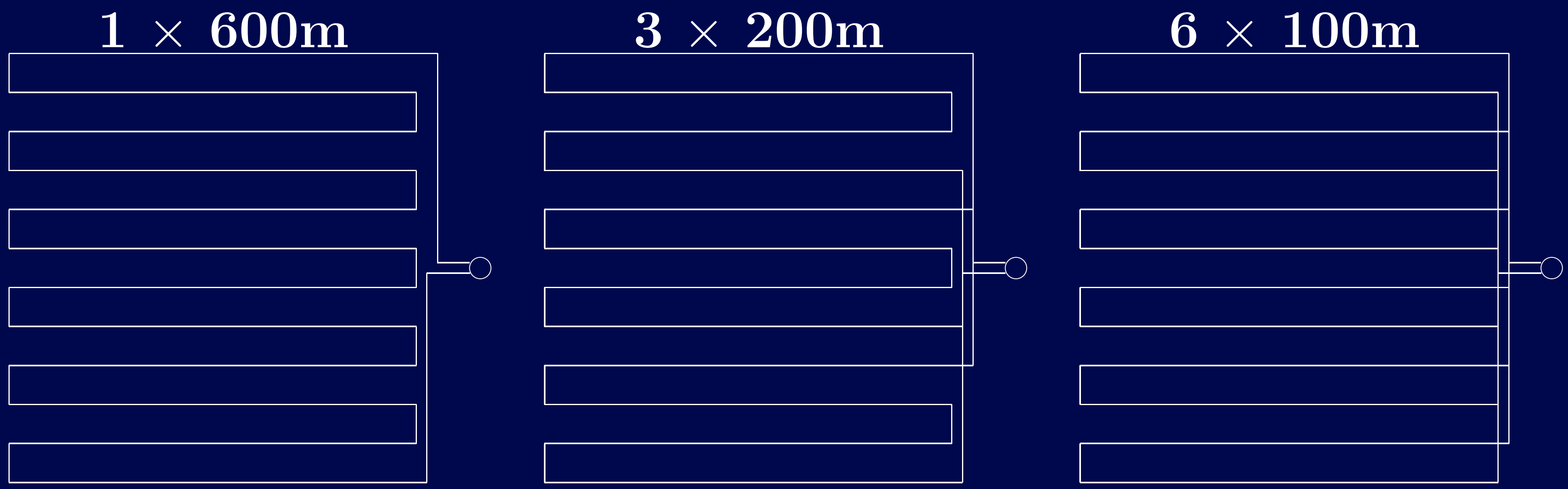
Folglich:

$$\frac{1}{W_n} = \frac{F_n}{\Delta P} = \frac{f_1}{\Delta P} + \frac{f_2}{\Delta P} + \cdots \frac{f_n}{\Delta P} = \frac{1}{w_1} + \frac{1}{w_2} + \cdots \frac{1}{w_n}$$

Mit n **gleich langen parallelen Erdkollektoren,** $w_1 = W_1/n$ **und:**

$$\frac{1}{W_n} = n \times \frac{1}{W_1/n} \quad \Rightarrow \quad W_n = \frac{W_1}{n^2}, \quad F_n = \frac{\Delta P}{W_n} = \frac{n^2 \Delta P}{W_1} = n^2 F_1$$

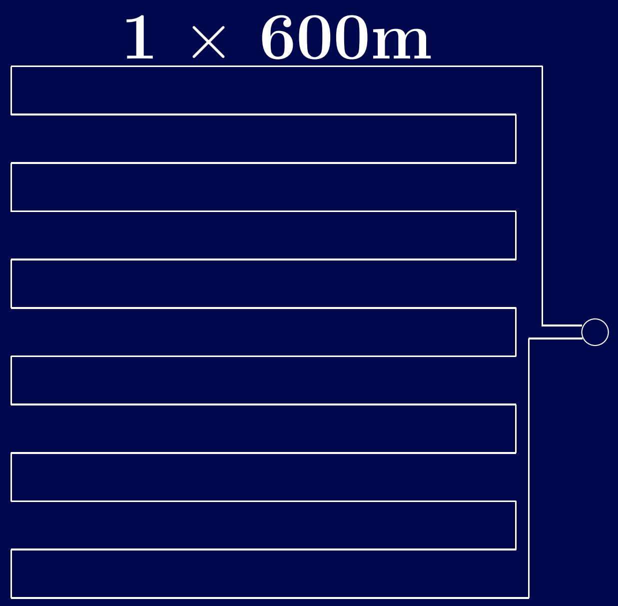
Fluss steigt mit der Anzahl von parallelen Erdkollektoren



Mit n gleich langen parallelen Erdkollektoren:

$$W_n = \frac{W_1}{n^2}, \qquad F_n = n^2 F_1$$

Fluss steigt mit der Anzahl von parallelen Erdkollektoren



Mit n gleich langen parallelen Erdkollektoren:

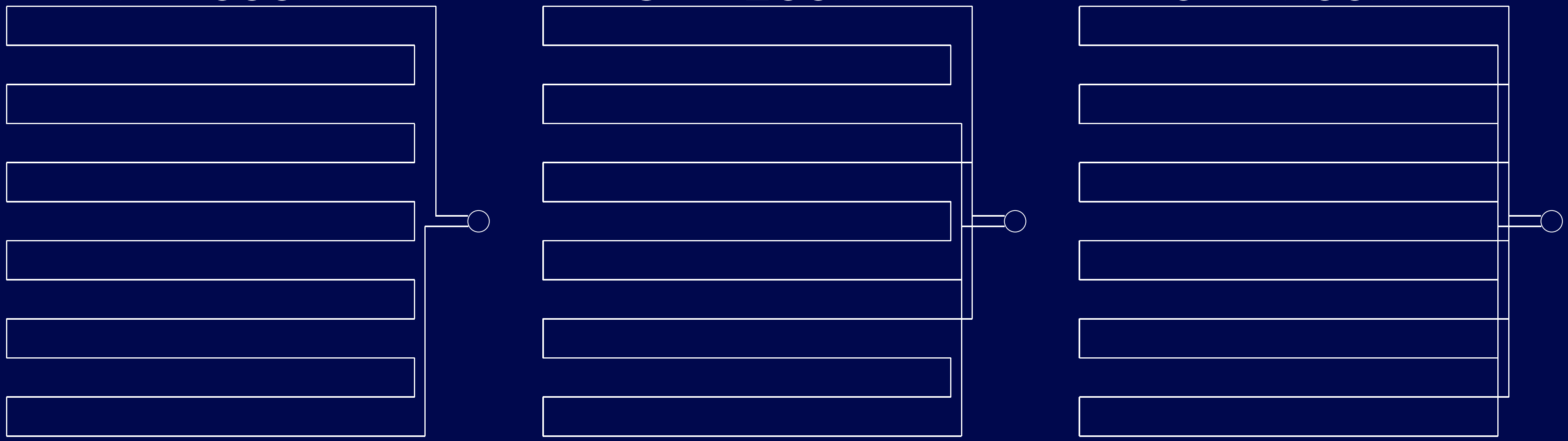
$$W_n = \frac{W_1}{n^2}, \qquad F_n = n^2 F_1$$

Also gelten:

$$W_1 = W_1$$
$$F_1 = F_1$$

Fluss steigt mit der Anzahl von parallelen Erdkollektoren

1 × 600m **3 × 200m** **6 × 100m**



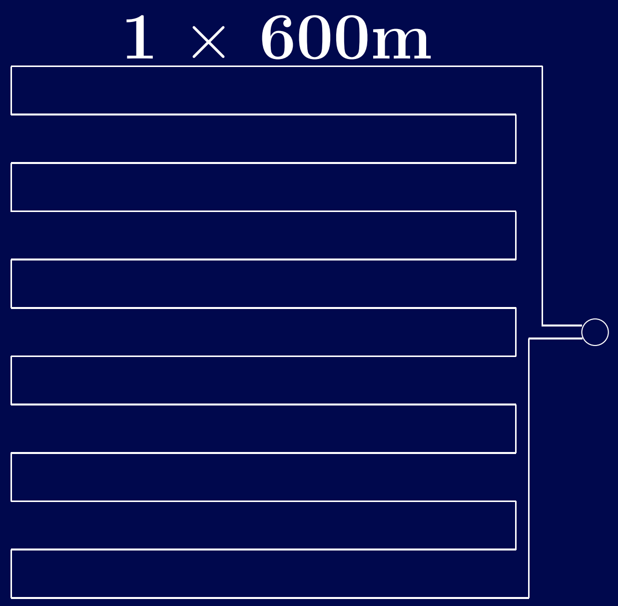
Mit n gleich langen parallelen Erdkollektoren:

$$W_n = \frac{W_1}{n^2}, \qquad F_n = n^2 F_1$$

Also gelten:

$$W_1 = W_1 \qquad W_3 = W_1/9$$
$$F_1 = F_1 \qquad F_3 = 9F_1$$

Fluss steigt mit der Anzahl von parallelen Erdkollektoren



Mit n gleich langen parallelen Erdkollektoren:

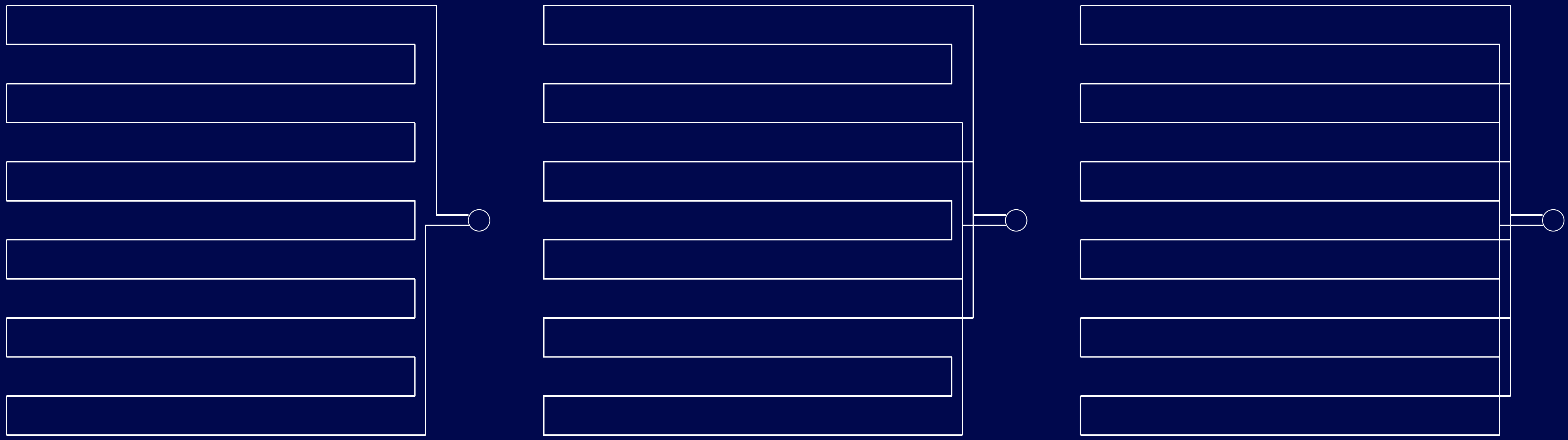
$$W_n = \frac{W_1}{n^2}, \qquad F_n = n^2 F_1$$

Also gelten:

$W_1 = W_1$	$W_3 = W_1/9$	$W_6 = W_1/36$
$F_1 = F_1$	$F_3 = 9F_1$	$F_6 = 36F_1$

Fluss steigt mit der Anzahl von parallelen Erdkollektoren

1 × 600m | **3 × 200m** | **6 × 100m**



Mit n gleich langen parallelen Erdkollektoren:

$$W_n = \frac{W_1}{n^2}, \qquad F_n = n^2 F_1$$

Also gelten:

$$W_1 = W_1 \qquad W_3 = W_1/9 \qquad W_6 = W_1/36$$

$$F_1 = F_1 \qquad F_3 = 9F_1 \qquad F_6 = 36F_1$$

Fluss mit 6 × 100m ist 36 × höher als mit 1 × 600m!

Weitere Installationsfehler

Erst 600m in einem Kreis, dann geteilt in 3 (statt 6) Kreise verschiedener Längen.

Kürzester Kreis ist gefroren, längster Kreis hat keine Leistung:

Abstand soll mindestens 60cm sein!

Mit nur 10cm Abstand wird die in einem Stück gewonnene Wärme im nächsten Stück verloren.

Weitere Installationsfehler

Keine Drainage für Grundwasser.

Unterirdische Plastikverbindungen.

Lecks sind entstanden.

Eisblase ist hier sichtbar.

System ist heuer neu installiert worden.