Klassische Partielle Differentialgleichungen

a.o.Univ.Prof. Mag.Dr. Stephen Keeling
`http://math.uni-graz.at/keeling/`

Literatur:
Partial Differential Equations von Lawrence C. Evans

Unterlagen:
`http://math.uni-graz.at/keeling/teaching.html`

Inhaltsverzeichnis I

Inhaltsverzeichnis II

Inhaltsverzeichnis III

Motivation: Beispiele der wohl bekannten PDG

Stofftransport:

- u bezeichnet eine erhaltene Größe, z.B.
  - Masse, vielleicht bezüglich einer Konzentration ($K = M/V$)
  - Energie, vielleicht bezüglich der Temperatur ($E = \rho c T$)
- Transport dieser Größe $u = u(\boldsymbol{x}, t)$ findet für $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ und $t \in (0, \infty)$ statt.
- $\boldsymbol{b} = (b_1, \ldots, b_n)$ ist ein (jetzt) konstantes Geschwindigkeitsfeld.
- Erhaltung wird so formuliert,

$$\partial_t \int_\Omega u(\boldsymbol{x}, t) d\boldsymbol{x} = - \int_{\partial\Omega} u(\boldsymbol{x}, t) \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{x}) dS(\boldsymbol{x}) \quad \forall \Omega \subset \mathbb{R}^n$$

  d.h. die Menge des Stoffes in Ω wird
  - erhöht, wenn er hineinströmt ($\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{x}) < 0$) und
  - reduziert wenn er herausströmt ($\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{x}) > 0$).

  Hier ist $\boldsymbol{\nu}$ ein auswärtsgerichteter normaler Einheitsvektor.

Transformation der Erhaltung in Differentialform

Def (Glattheit eines Randes): Sei $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^n$. Dann ist $\partial\Omega$ der Klasse C^k wenn er immer lokal als Graph einer C^k-Funktion dargestellt werden kann. D.h. $\forall \boldsymbol{x}^0 \in \partial\Omega$, $\exists r > 0$ und $C^k \ni \gamma : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$ sodass (nach einer geeigneten starren Verschiebung des Ursprungs falls notwendig) es gilt:

$$\Omega \cap B(\boldsymbol{x}^0, r) = \{\boldsymbol{x} \in B(\boldsymbol{x}^0, r) : x_n > \gamma(x_1, \ldots, x_{n-1})\}$$

Ähnlich ist $\partial\Omega$ der Klasse C^∞ wenn $\partial\Omega$ der Klasse C^k ist $\forall k = 1, 2, \ldots$. Wenn die Abbildung γ analytisch ist, ist $\partial\Omega$ analytisch.

Def: Wenn $\partial\Omega$ der Klasse C^1 ist, ist der auswärtsgerichtete normale Einheitsvektor auf $\partial\Omega$ wohl definiert:

$$\boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{x}) = (\nu^1, \ldots, \nu^n)(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} \in \partial\Omega.$$

Die auswärts normale Ableitung von $u \in C^1(\bar{\Omega})$ ist

$$\partial u / \partial \nu = \boldsymbol{\nu} \cdot \nabla u, \quad \boldsymbol{x} \in \partial\Omega, \quad \text{wobei } \nabla u = (u_{x_1}, \ldots, u_{x_n}).$$

Transformation der Erhaltung in Differentialform

Satz (Gauß): Für $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^n$ mit $\partial\Omega$ der Klasse C^1 sei $u \in C^1(\bar{\Omega})$. Dann gilt

$$\int_\Omega u_{x_i} d\boldsymbol{x} = \int_{\partial\Omega} u\nu^i dS(\boldsymbol{x}), \quad i = 1, \ldots, n$$

und für $u, v \in C^1(\bar{\Omega})$ gilt (Formel der partiellen Integration)

$$\int_\Omega u_{x_i} v d\boldsymbol{x} = -\int_\Omega u v_{x_i} d\boldsymbol{x} + \int_{\partial\Omega} uv\nu^i dS(\boldsymbol{x})$$

(Erste Formel auf uv angewendet)

Satz (Divergenz): Für $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^n$ mit $\partial\Omega$ der Klasse C^1 sei $\boldsymbol{F} \in C^1(\bar{\Omega}, \mathbb{R}^n)$. Dann gilt

$$\int_\Omega \nabla \cdot \boldsymbol{F} d\boldsymbol{x} = \int_{\partial\Omega} \boldsymbol{F} \cdot \nu dS(\boldsymbol{x})$$

Bemerkung: Ω ist eine *Domäne*, d.h. offen ($\Omega = \Omega^\circ$) und beschränkt ($\Omega \subset\subset \mathbb{R}^n$). Ausnahmen werden explizit erkärt.

Transformation der Erhaltung in Differentialform

Anwendung zu Stofftransport:

- Hausaufgabe: Zeige unter gewissen Bedingungen,

$$\partial_t \int_\Omega u(\boldsymbol{x},t)d\boldsymbol{x} = \int_\Omega \partial_t u(\boldsymbol{x},t)d\boldsymbol{x}$$

- Mit dem Divergenz Satz (mit $\boldsymbol{F} = u\boldsymbol{b}$),

$$\begin{aligned}\int_\Omega \partial_t u(\boldsymbol{x},t)d\boldsymbol{x} &= -\int_{\partial\Omega} u(\boldsymbol{x},t)\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{x})dS(\boldsymbol{x}) \\ &= -\int_\Omega \nabla\cdot(u(\boldsymbol{x},t)\boldsymbol{b})d\boldsymbol{x}\end{aligned}$$

- Hausaufgabe: Zeige unter gewissen Bedingungen, wenn $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^n$ beliebig ist, folgt

$$\partial_t u(\boldsymbol{x},t) + \nabla\cdot(u(\boldsymbol{x},t)\boldsymbol{b}) = 0, \quad \boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n, t > 0$$

Transformation der Erhaltung in Differentialform

- Da $\boldsymbol{b}$ (jetzt) konstant ist, folgt aus der Produktregel,

$$\nabla \cdot (u(\boldsymbol{x},t)\boldsymbol{b}) = \nabla u(\boldsymbol{x},t) \cdot \boldsymbol{b} + u(\boldsymbol{x},t)\nabla \cdot \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} \cdot \nabla u(\boldsymbol{x},t)$$

- Mit den Anfangswerten $u(\boldsymbol{x},0) = u_0(\boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$, $u_0 \in C^1(\mathbb{R}^n)$, ergibt sich das Anfangswertproblem:

$$\left\{ \begin{array}{rcll} \partial_t u + \boldsymbol{b} \cdot \nabla u & = & 0, & \text{in } \mathbb{R}^n \times (0,\infty) \\ u & = & u_0, & \text{auf } \mathbb{R}^n \times \{t=0\} \end{array} \right.$$

- Lösung? Die PDG bedeutet, mit $\boldsymbol{\beta} = (\boldsymbol{b}, 1)$
  $$\partial u / \partial \beta = \boldsymbol{\beta} \cdot (\nabla u, \partial_t u) = \boldsymbol{b} \cdot \nabla u + \partial_t u = 0.$$
  Definiere $z(s) = u(\boldsymbol{x} + s\boldsymbol{b}, t+s)$, $s \in \mathbb{R}$, so
  $$\dot{z}(s) = \nabla u(\boldsymbol{x} + s\boldsymbol{b}, t+s) \cdot \boldsymbol{b} + \partial_t u(\boldsymbol{x} + s\boldsymbol{b}, t+s) = 0.$$
  Konstante $= z(s) = u(\boldsymbol{x} + s\boldsymbol{b}, t+s) \Rightarrow$
  $$u(\boldsymbol{x},t)|_{s=0} = u(\boldsymbol{x} - t\boldsymbol{b}, t-t)|_{s=-t} = u_0(\boldsymbol{x} - t\boldsymbol{b}).$$

Transformation der Erhaltung in Differentialform

- Behauptung: u erfüllt

$$\begin{cases} \partial_t u + \boldsymbol{b} \cdot \nabla u = 0, & \text{in } \mathbb{R}^n \times (0, \infty) \\ u = u_0, & \text{auf } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\} \end{cases}$$

genau dann wenn

$$u(\boldsymbol{x}, t) = u_0(\boldsymbol{x} - t\boldsymbol{b})$$

- Geometrische Interpretierung: u gleibt konstant auf Geraden $\boldsymbol{x} - t\boldsymbol{b} =$ Konstante.
- Was passiert wenn u_0 nicht glatt ist? *Schwache* Lösung:
$$u(\boldsymbol{x}, t) = u_0(\boldsymbol{x} - t\boldsymbol{b})$$
und u gleibt konstant auf Geraden $\boldsymbol{x} - t\boldsymbol{b} =$ Konstante.
- Bemerkung: PDG ist in eine GDG umgewandelt worden. *Methode der Charakteristiken*.

Transformation der Erhaltung in Differentialform

- Für das nicht homogene Problem

$$\begin{cases} \partial_t u + \boldsymbol{b} \cdot \nabla u &= f, \quad \text{in } \mathbb{R}^n \times (0, \infty) \\ u &= u_0, \quad \text{auf } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\} \end{cases}$$

definiere wie vorher $z(s) = u(\boldsymbol{x} + s\boldsymbol{b}, t + s)$ und

$$\dot{z}(s) = \nabla u(\boldsymbol{x} + s\boldsymbol{b}, t + s) \cdot \boldsymbol{b} + \partial_t u(\boldsymbol{x} + s\boldsymbol{b}, t + s) = f(\boldsymbol{x} + s\boldsymbol{b}, t + s).$$

- Daher ist die Lösung gegeben durch:

$$u(\boldsymbol{x}, t) - u_0(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}t) = z(0) - z(-t) = \int_{-t}^{0} \dot{z}(s) ds =$$

$$\int_{-t}^{0} f(\boldsymbol{x} + s\boldsymbol{b}, t + s) ds = \int_{0}^{t} f(\boldsymbol{x} + (s - t)\boldsymbol{b}, s) ds$$

- Hausaufgabe: $\partial_t u + \boldsymbol{b} \cdot \nabla u + cu = f$.

Motivation: Beispiele der wohl bekannten PDG

Stofftransport mit *Konvektion* und *Diffusion*:

- Erhaltung wird so formuliert, $\forall \Omega \subset \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned}\partial_t \int_\Omega u(\boldsymbol{x},t)d\boldsymbol{x} \quad &+ \quad \int_{\partial\Omega} u(\boldsymbol{x},t)\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{x})dS(\boldsymbol{x}) \\ &= \quad \int_{\partial\Omega} a\nabla u(\boldsymbol{x},t)\cdot\boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{x})dS(\boldsymbol{x})\end{aligned}$$

  d.h. die Menge des Stoffes in Ω wird
  - erhöht wenn der Gradient herauszeigt ($\nabla u \cdot \boldsymbol{\nu} > 0$) und
  - reduziert wenn er hineinzeigt ($\nabla u \cdot \boldsymbol{\nu} < 0$).
- Hier ist $a > 0$ eine
  - Diffusionskonstante (Ficksches Gesetz)
  - Wärmeleitfähigkeit (Fouriersches Gesetz)
  - Elektrische Leitfähigkeit (Ohmsches Gesetz)

Motivation: Beispiele der wohl bekannten PDG

- Mit dem Divergenz Satz (mit $\boldsymbol{F} = a\nabla u$),

$$\int_{\partial\Omega} a\nabla u(\boldsymbol{x},t)\cdot\boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{x})dS(\boldsymbol{x}) = \int_{\Omega}\nabla\cdot(a\nabla u(\boldsymbol{x},t))d\boldsymbol{x}$$

- Wenn $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^n$ beliebig ist, folgt

$$\partial_t u(\boldsymbol{x},t) + \nabla\cdot(u(\boldsymbol{x},t)\boldsymbol{b}) = \nabla\cdot(a\nabla u(\boldsymbol{x},t))$$

  oder für a und $\boldsymbol{b}$ konstant,

$$\partial_t u(\boldsymbol{x},t) + \boldsymbol{b}\cdot\nabla u(\boldsymbol{x},t) = a\Delta u(\boldsymbol{x},t)$$

  wobei $\Delta u = u_{x_1x_1} + \cdots u_{x_nx_n}$.
- Anfangswertproblem:

$$\left\{\begin{array}{rcll} \partial_t u + \boldsymbol{b}\cdot\nabla u & = & a\Delta u, & \text{in } \mathbb{R}^n\times(0,\infty) \\ u & = & u_0, & \text{auf } \mathbb{R}^n\times\{t=0\} \end{array}\right.$$

Motivation: Beispiele der wohl bekannten PDG

- Das nicht homogenene Anfangswertproblem:

$$\begin{cases} \partial_t u + \boldsymbol{b} \cdot \nabla u = a\Delta u + f, & \text{in } \mathbb{R}^n \times (0, \infty) \\ u = u_0, & \text{auf } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\} \end{cases}$$

  wobei f Quellen oder Senken darstellt.

- Ohne Konvektion ($\boldsymbol{b} = 0$) bekommen wir die nicht homogene Diffusionsgleichung oder *Wärmegleichung*,

$$\begin{cases} \partial_t u = a\Delta u + f, & \text{in } \mathbb{R}^n \times (0, \infty) \\ u = u_0, & \text{auf } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\} \end{cases}$$

- Im Fließgleichgewicht ($t \to \infty$) bekommen wir die Poissonsche Gleichung

$$-a\Delta u = f \quad \text{in } \mathbb{R}^n$$

Motivation: Beispiele der wohl bekannten PDG

- Die homogene Wärmegleichung auf einem beschränkten Gebiet $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^n$:

$$\begin{cases} \partial_t u &= a\Delta u, & \text{in } \Omega \times (0,\infty) \\ u &= g, & \text{auf } \partial\Omega \times (0,\infty) \\ u &= u_0, & \text{auf } \Omega \times \{t = 0\} \end{cases}$$

  wobei eine Randbedingung, $u = g$ auf $\partial\Omega \times (0,\infty)$, jetzt notwendig ist. Vorher war ist implizit, dass $u \to 0$, $|\boldsymbol{x}| \to \infty$.

- Die Poissonsche Gleichung auf einem beschränkten Gebiet $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^n$:

$$\begin{cases} -a\Delta u &= f, & \text{in } \Omega \\ u &= g, & \text{auf } \partial\Omega \end{cases}$$

- Die Laplacesche Gleichung auf $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^n$:

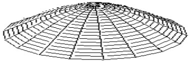
$$\begin{cases} \Delta u &= 0, & \text{in } \Omega \\ u &= g, & \text{auf } \partial\Omega \end{cases}$$

Variationaler Ansatz zur Herleitung einer PDG

Beispiel: Die Deformation einer geladenen Membran

- Zuerst eine Feder in 1D:

  - Eine Masse ist über eine Feder mit einer Wand verbunden.
  - Die Verschiebung nach rechts vom Stillstand ist u.
  - Die äussere Kraft nach rechts ist f.
  - Die Feder-innere Kraft ist $F = -ku$, d.h. $u > 0$ erzeugt eine zurückziehende Kraft, je nach Feder-Konstante k.
  - Die Summe der Kräfte ist $-ku + f = -P'(u)$.
  - Die zu minimierende potentielle Energie zur Bestimmung von u ist $P(u) = ku^2/2 - fu$.



- Nun eine Membran in 2D:
  - Die Deformation nach oben vom Stillstand ist u.
  - Die äussere Kraft nach oben ist f.
  - Die Membran-innere Kraft ist $F = -T\delta S$, wobei $T =$ Spannung und $\delta S =$ Flächeninhaltsänderung.
  - Zur Bestimmung von u soll minimiert werden:

$$J(u) = \int_\Omega T \left[\sqrt{1 + |\nabla u|^2} - 1 \right] d\boldsymbol{x} - \int_\Omega fu d\boldsymbol{x}$$

Variationaler Ansatz zur Herleitung einer PDG

- Das Funktional kann vereinfacht werden, wenn angenommen wird, dass die Deformation klein ist:
  $\sqrt{1+\epsilon^2}-1=[(1+\epsilon^2)-1]/[\sqrt{1+\epsilon^2}+1]\approx\epsilon^2/2$
- Das vereinfachte Funktional:

$$J(u)=\int_\Omega \tfrac{1}{2}T|\nabla u|^2 d\boldsymbol{x}-\int_\Omega fu d\boldsymbol{x}$$

- Für das minimierende Deformation u sollen alle Richtungsableitungen Null sein:

$$0=\frac{\delta J}{\delta u}(u;v)=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{d}{d\varepsilon}J(u+\varepsilon v)$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{d}{d\varepsilon}\int_\Omega\left[\tfrac{1}{2}T|\nabla u+\varepsilon\nabla v|^2-f(u+\varepsilon v)\right]d\boldsymbol{x}$$

Variationaler Ansatz zur Herleitung einer PDG

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \int_\Omega [T(\nabla u + \varepsilon \nabla v) \cdot \nabla v - fv]\, d\boldsymbol{x} = \int_\Omega [T \nabla u \cdot \nabla v - fv]\, d\boldsymbol{x}$$

Zur Vereinfachung:

Satz (Green): Für $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^n$ mit $\partial\Omega$ der Klasse C^1 seien $u, v \in C^1(\bar{\Omega})$. Dann gelten

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \Delta u d\boldsymbol{x} &= \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu} dS(\boldsymbol{x}) \\
\int_\Omega \nabla v \cdot \nabla u d\boldsymbol{x} &= -\int_\Omega v \Delta u d\boldsymbol{x} + \int_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial \nu} dS(\boldsymbol{x}) \\
\int_\Omega [u \Delta v - v \Delta u] d\boldsymbol{x} &= \int_{\partial\Omega} \left[u \frac{\partial v}{\partial \nu} - v \frac{\partial u}{\partial \nu} \right] dS(\boldsymbol{x})
\end{aligned}$$

Hausaufgabe: Herleiten mit dem Gauß-Green Satz.

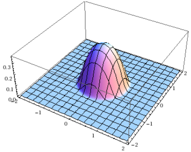
Variationaler Ansatz zur Herleitung einer PDG

- Für das minimierende Deformation u sollen alle Richtungsableitungen Null sein:

$$0 = \frac{\delta J}{\delta u}(u; v) = -\int_\Omega [T\Delta u + f]\, v d\boldsymbol{x} - \int_{\partial\Omega} Tv \frac{\partial u}{\partial \nu} dS(\boldsymbol{x})$$

- Da die Störung v beliebig ist, kann sie in einem Punkt $\hat{\boldsymbol{x}} \in \Omega^\circ$ konzentriert werden:

$$v(\boldsymbol{x}) = \frac{\eta((\boldsymbol{x} - \hat{\boldsymbol{x}})/\epsilon)}{\epsilon^n}, \quad \eta(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} C \exp\left[\frac{1}{|\boldsymbol{x}|^2 - 1}\right], & |\boldsymbol{x}| < 1 \\ 0, & |\boldsymbol{x}| \geq 1 \end{cases}$$



wobei C so bestimmt wird: $\int_{\mathbb{R}^n} \eta(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x} = 1$

- Dann ergibt sich die Optimalitätsbedingung:

$$0 = \frac{\delta J}{\delta u}(u; v) \stackrel{\epsilon \to 0}{\longrightarrow} -[T\Delta u + f](\hat{\boldsymbol{x}})$$

Variationaler Ansatz zur Herleitung einer PDG

- Wenn die Membran am Rand $\partial\Omega$ befestigt ist,
  - ist der Definitionsbereich vom J entsprechend eingeschränkt, und
  - $u = v = 0$ auf $\partial\Omega$ bedeutet, das Rand-Integral in der Richtungsableitung ist Null.
- Deformation u so bestimmt: (*Dirichlet* Randbedingung)

$$\begin{cases} -T\Delta u &= f, \quad \text{in } \Omega \\ u &= 0, \quad \text{auf } \partial\Omega \end{cases}$$

- Wenn die Membran am Rand $\partial\Omega$ nicht befestigt ist, dann wird die Störung v für $\hat{\boldsymbol{x}} \in \partial\Omega$ so bestimmt, dass $\int_{\partial\Omega} v(\boldsymbol{x}) dS(\boldsymbol{x}) = 1$ gilt. Dann ergibt sich die Optimalitätsbedingung:

$$0 = \frac{\delta J}{\delta u}(u; v) \xrightarrow{\epsilon \to 0} T \frac{\partial u}{\partial \nu}(\hat{\boldsymbol{x}})$$

- Deformation u so bestimmt: (*Neumann* Randbedingung)

$$\begin{cases} -T\Delta u &= f, \quad \text{in } \Omega \\ \partial u / \partial \nu &= 0, \quad \text{auf } \partial\Omega \end{cases}$$

Variationaler Ansatz zur Herleitung einer PDG

- Hausaufgabe: Die Herleitung der obigen Randwertprobleme mit Details vervollständigen.
- Hausaufgabe: Das nicht vereinfachte Funktional minimieren:

$$J(u) = \int_\Omega T\left[\sqrt{1+|\nabla u|^2} - 1\right] d\boldsymbol{x} - \int_\Omega f u d\boldsymbol{x}$$

  und das nicht lineare Randwertproblem (mit Randbedingungen) durch die Optimalitätsbedingung herleiten.
- Hausaufgabe: Das Funktional für Bildverarbeitung minimieren:

$$J(u) = \int_\Omega |u - \tilde{u}|^p d\boldsymbol{x} + \mu \int_\Omega |\nabla u|^q d\boldsymbol{x}, \quad 1 \leq p, q \leq 2$$

  und das nicht lineare Randwertproblem (mit Randbedingungen) durch die Optimalitätsbedingung herleiten.

Motivation: Beispiele der wohl bekannten PDG

Beispiel: Dynamische Deformation einer geladenen Membran

- Zuerst eine Feder in 1D: Nach dem Newtonschen Gesetz,

$$mu'' = -P'(u) = -ku + f$$

- Dann für eine Membran in 2D: Nach dem Newtonschen Gesetz, entsteht die *Wellengleichung*,

$$\partial_t^2 \int_\Omega \rho u v d\boldsymbol{x} = -\frac{\delta J}{\delta u}(u; v) \quad \Rightarrow \quad \rho \partial_t^2 u = T\Delta u + f$$

- Das entsprechende Anfangs- und Randwertproblem

$$\left\{ \begin{array}{rcll} \rho\partial_t^2 u - T\Delta u & = & f, & \text{in } \Omega \times (0, \infty) \\ u & = & 0, & \text{auf } \partial\Omega \times (0, \infty) \\ u & = & u_0, & \text{auf } \Omega \times \{t = 0\} \\ u_t & = & u_1, & \text{auf } \Omega \times \{t = 0\} \end{array} \right.$$

wobei nun zwei Anfangsbedingungen notwendig sind.

Motivation: Beispiele der wohl bekannten PDG

Ein System von PDG: die Eulerschen Gleichungen (hier in 1D)

- Massenerhaltung,

  $$\rho_t + (\rho u)_x = 0$$

  wobei $\rho =$ Dichte, $u =$ Geschwindigkeit.
- Impulserhaltung,

  $$(\rho u)_t + (\rho u^2 + p)_x = 0$$

  wobei $p =$ Druck.
- Energieerhaltung,

  $$(\rho e)_t + ((\rho e + p)u)_x = 0$$

  wobei $e =$ Energie und $p = \rho(\gamma - 1)(e - u^2/2)$ ist die *Zustandsgleichung*.
- Mit Diffusion: *Navier-Stokes Gleichungen*.

Motivation: Beispiele der wohl bekannten PDG

Weitere Systeme:

- Navier-Stokes für inkompressible viskose Strömung

$$\begin{cases} \partial_t \boldsymbol{u} + \boldsymbol{u} \cdot \nabla \boldsymbol{u} - \nu \Delta \boldsymbol{u} + \nabla p & = & 0 \\ \nabla \cdot \boldsymbol{u} & = & 0 \end{cases}$$

  wobei $\boldsymbol{u}$ ein Geschwindigkeitsfeld ist, p ist der Druck und ν ist die Viskosität.

- Evolutionsgleichungen der linearen Elastizität

$$\partial_{tt} \boldsymbol{u} = \mu \Delta \boldsymbol{u} + (\lambda + \mu) \nabla (\nabla \cdot \boldsymbol{u})$$

  wobei $\boldsymbol{u}$ ein Verschiebungsfeld ist. Die Láme Parameter λ und μ sind Materialeigenschaften.

- Maxwell Gleichungen der Elektrodynamik:

$$\begin{cases} \partial_t \boldsymbol{E} & = & \nabla \times \boldsymbol{B} \\ \partial_t \boldsymbol{B} & = & -\nabla \times \boldsymbol{E} \\ \nabla \cdot \boldsymbol{E} & = & \nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 \end{cases}$$

Grundlegende Phänomene der PDG

- Felder: *elliptische* PDG, z.B.

$$\begin{cases} -\Delta u &= f, & \Omega \\ u &= g, & \partial\Omega \end{cases}$$

  Die kleinste Störung in f oder in g erzeugt eine globale Störung in u.

- Diffusion: *parabolische* PDG, z.B.

$$\begin{cases} u_t - \Delta u &= f, & \Omega \times (0, T) \\ u &= g, & \partial\Omega \times (0, T) \\ u &= u_0, & \Omega \times \{t = 0\} \end{cases}$$

  Die kleinste Störung in f oder in g zu einer bestimmten Zeit erzeugt eine Störung in u mit unendlicher Geschwindigkeit aber nur *in der Zukunft*.

Grundlegende Phänomene der PDG

- Wellen: *hyperbolische* PDG, z.B.

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u &= f, & \Omega \times (0, T) \\ u &= g, & \partial\Omega \times (0, T) \\ u &= u_0, & \Omega \times \{t = 0\} \\ u_t &= u_1, & \Omega \times \{t = 0\} \end{cases}$$

  Die kleinste Störung in f oder in g zu einer bestimmten Zeit erzeugt eine Störung in u mit beschränkter Geschwindigkeit und nur *in der Zukunft*.

Wohl Gestellte Probleme

Randbedingungen? Kompatibilität der Daten?

- Ein *wohl gestelltes Problem*:
  - Eine Lösung existiert,
  - ist eindeutig, und
  - hängt stetig von den Daten ab.

  Die bisher gegebenen Anfangs- und Randwertprobleme sind wohl gestellt. (Bleibt noch zu beweisen.)

Beispiele von nicht wohl gestellten Problemen:

- Wenn u eine Lösung ist, ist auch $u+$Konstante ein Lösung:

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & \Omega \\ \partial u/\partial \nu = 0, & \partial\Omega \end{cases}$$

  Eindeutigkeit fehlt.

Wohl Gestellte Probleme

Beispiele von nicht wohl gestellten Problemen:

- Da das erste Problem für beliebiges f wohl gestellt ist,

$$\left\{\begin{array}{rcll} \Delta u & = & 0, & \Omega \\ u & = & f, & \partial\Omega \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rcll} \Delta u & = & 0, & \Omega \\ u & = & f, & \partial\Omega \\ \partial u/\partial\nu & = & g, & \partial\Omega \end{array}\right.$$

  ist das zweite Problem für beliebige f und g nicht wohl gestellt, d.h. die Lösung des ersten Problems erfüllt nicht notwendigerweise $\partial u/\partial\nu = g$, $\partial\Omega$. *Existenz fehlt.*

- Für $R > \rho$ und $\Omega = B(0, R)\backslash\overline{B(0, \rho)}$ (ringförmig), gibt es genau eine Lösung $u = 0$ des Problems,

$$\left\{\begin{array}{rcll} \Delta u & = & 0, & \Omega \\ u & = & g = 0, & \partial B(0, R) \\ \partial u/\partial\nu & = & 0, & \partial B(0, R) \end{array}\right.$$

  aber diese Lösung hängt nicht stetig von den Daten g ab:

Wohl Gestellte Probleme

- Details: In zylindrischen Koordinaten gilt $\Delta u = r u_{rr} + r u_r + u_{\theta\theta}$. Mit $g_n(\theta) = \cos(n\theta)/n$ ist die Lösung des obigen Problems

$$u_n(r,\theta) = \frac{1}{2n}\left[\left(\frac{r}{R}\right)^n + \left(\frac{R}{r}\right)^n\right]\cos(n\theta)$$

Die gestörten Daten konvergieren $g_n(\theta) = \cos(n\theta)/n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, aber die Lösung konvergiert nicht $|u(r,\theta)| \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$, $r < R$.

Stetige Abhängigkeit von den Daten fehlt.

Grundlegende Definitionen

- Im allgemeinen ist eine PDG eine Gleichung der Form ($k$ter Ordnung)

$$F(\nabla^k u(\boldsymbol{x}), \ldots, \nabla^1 u(\boldsymbol{x}), u(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{x}) = 0, \quad \boldsymbol{x} \in \Omega$$

wobei $F : \mathbb{R}^{n^k} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \Omega \to \mathbb{R}$ und $\nabla^k u = \{\partial^{\boldsymbol{\alpha}} u\}_{|\boldsymbol{\alpha}|=k}$ mit $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $\alpha_i \in \mathbb{N}$,

$$|\boldsymbol{\alpha}| = \sum_{i=1}^n \alpha_i, \quad \partial^{\boldsymbol{\alpha}} u = \partial_{x_1}^{\alpha_1} \cdots \partial_{x_n}^{\alpha_n} u$$

- Die PDG ist *linear* wenn sie so geschrieben werden kann:

$$\sum_{|\boldsymbol{\alpha}| \le k} a_{\boldsymbol{\alpha}}(\boldsymbol{x}) \partial^{\boldsymbol{\alpha}} u(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x})$$

z.B. $u_{xx} + u_{yy} = f$,

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\alpha} &= (2,0) \Rightarrow a_{\boldsymbol{\alpha}} = 1, \partial^{\boldsymbol{\alpha}} u = u_{xx}, \\
\boldsymbol{\alpha} &= (1,1) \Rightarrow a_{\boldsymbol{\alpha}} = 0, \partial^{\boldsymbol{\alpha}} u = u_{xy}, \\
\boldsymbol{\alpha} &= (0,2) \Rightarrow a_{\boldsymbol{\alpha}} = 1, \partial^{\boldsymbol{\alpha}} u = u_{yy}.
\end{aligned}$$

Grundlegende Definitionen

- Eine PDG ist *semilinear* wenn sie so geschrieben werden kann:

$$\sum_{|\boldsymbol{\alpha}|=k} a_{\boldsymbol{\alpha}}(\boldsymbol{x})\partial^{\boldsymbol{\alpha}} u(\boldsymbol{x}) + a_0(\nabla^{k-1} u, \ldots, \nabla u, u, \boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x})$$

- Eine PDG ist *quasilinear* wenn sie so geschrieben werden kann:

$$\sum_{|\boldsymbol{\alpha}|=k} a_{\boldsymbol{\alpha}}(\nabla^{k-1} u, \ldots, \nabla u, u, \boldsymbol{x})\partial^{\boldsymbol{\alpha}} u(\boldsymbol{x}) +$$

$$+ a_0(\nabla^{k-1} u, \ldots, \nabla u, u, \boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x})$$

- Eine *klassische* oder *starke* Lösung einer PDG hat stetige Ableitungen aller Ordnungen, die in der PDG erscheinen.
- Eine *schwache* Lösung einer PDG hat weniger Regularität.

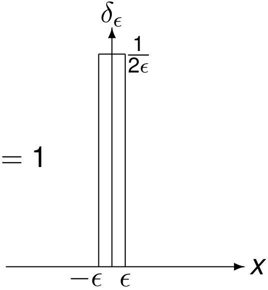
Schwache Lösung

- Eine Schnur ist schwer geladen in $y \in \Omega = (0,1)$,

$$\begin{cases} -u_\epsilon''(x) &= \delta_\epsilon(x-y), \quad x \in \Omega \\ u_\epsilon(x) &= 0, \quad x \in \partial\Omega \end{cases}$$

  Betrachte die Lösung für $\epsilon \to 0$,

$$\delta_\epsilon(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\epsilon}, & |x| \leq \epsilon \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \qquad \int_{\mathbb{R}} \delta_\epsilon(x)dx = 1$$



- Die Lösung erfüllt, $\forall v \in C_0^\infty(\Omega)$,

$$\int_\Omega u_\epsilon' v' dx - \underbrace{u_\epsilon' v\big|_{\partial\Omega}}_{=0} = -\int_\Omega u_\epsilon'' v dx = \int_\Omega \delta_\epsilon(x-y)v(x)dx \xrightarrow{\epsilon \to 0} v(y)$$

Schwache Lösung

- Hausaufgabe: Finde u_ϵ und zeige,

$$\lim_{\epsilon\to 0} u_\epsilon(x) = u_0(x) = \begin{cases} (1-y)x, & x \in [0,y] \\ y(1-x), & x \in [y,1] \end{cases}$$

  wobei

$$\int_\Omega u_0' v' dx = v(y), \quad \forall v \in C_0^\infty(\Omega)$$

- Man schreibt die Kraft mit der δ-Funktion,

$$\begin{cases} -u_0''(x) & = & \delta(x-y), & x \in \Omega \\ u_0(x) & = & 0, & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

  aber
  - die Integralformulierung ist die *schwache* Formulierung,
  - $v \in C_0^\infty(\Omega)$ ist eine *Test-Funktion* und
  - u_0 ist die *schwache* Lösung des Randwertproblems.

Fundamentallösung

- Die obige Formel (für u_0) nennt man Fundamentallösung

$$g(x,y) = \begin{cases} (1-y)x, & 0 \le x \le y \le 1 \\ y(1-x), & 0 \le y \le x \le 1 \end{cases}$$

- Die Integration über Daten f,

$$u(x) = \int_\Omega g(x,y) f(y) dy$$

definiert eine Funktion u die erfüllt: $u(0) = u(1) = 0$ und

$$-\frac{d^2}{dx^2} u(x) = -\int_\Omega \frac{d^2}{dx^2} g(x,y) f(y) dy = \int_\Omega \delta(x-y) f(y) dy = f(x)$$

- Hausaufgabe: u löst das Randwertproblem,

$$\begin{cases} -u''(x) & = & f(x), & x \in \Omega \\ u(x) & = & 0, & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

Laplace Gleichung

Def: Wenn $u \in C^2(\Omega)$ erfüllt $\Delta u = 0$ in Ω ist u *harmonisch* in Ω.

- Die Fundamentallösung der Gleichung $-\Delta\Phi(\boldsymbol{x}) = \delta(\boldsymbol{x})$ in $\mathbb{R}^n$ ist

$$\Phi_n(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} -\frac{1}{2}|x|, & n = 1 \\ -\frac{1}{2\pi}\log|\boldsymbol{x}|, & n = 2 \\ 1/[n(n-2)\alpha(n)|\boldsymbol{x}|^{n-2}], & n \geq 3 \end{cases}$$

wobei $\alpha(n) = |B^n(0,1)|$. (Maß oder *Hyper*-Volumen)

Satz (Coarea): Sei $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ Lipschitz stetig wobei die $(n-1)$-dimensionale Niveau Mengen $\{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n : u(\boldsymbol{x}) = r\}$ ausreichend glatt sind. Dann für $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ stetig gilt

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(\boldsymbol{x})|\nabla u|(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x} = \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{\{u(\boldsymbol{x})=r\}} f(\boldsymbol{x})dS(\boldsymbol{x})\right)dr$$

Lösungsformel der Poisson Gleichung in $\mathbb{R}^n$

Polar Koordinaten: Für den bestimmten Fall $u(\boldsymbol{x}) = |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^0|$,

$$\nabla u(\boldsymbol{x}) = \nabla[|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^0|^2]^{\frac{1}{2}} = \frac{\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^0}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^0|}, \quad |\nabla u(\boldsymbol{x})| = 1$$

bekommt man vom letzten Satz

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x} = \int_0^{+\infty} \left(\int_{\partial B(\boldsymbol{x}^0, r)} f(\boldsymbol{x}) dS(\boldsymbol{x}) \right) dr \quad \forall \boldsymbol{x}^0 \in \mathbb{R}^n$$

Es gilt auch:

$$\frac{d}{dr} \int_{B(\boldsymbol{x}^0, r)} f(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x} = \int_{\partial B(\boldsymbol{x}^0, r)} f(\boldsymbol{x}) dS(\boldsymbol{x}) \quad \forall r > 0$$

Satz: Für $f \in C_0^2(\mathbb{R}^n)$,

$$u(\boldsymbol{x}) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) f(\boldsymbol{y}) d\boldsymbol{y}$$

erfüllt $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$ und $-\Delta u = f$ in $\mathbb{R}^n$.

Lösungsformel der Poisson Gleichung in $\mathbb{R}^n$

Beweis: Durch eine Koordinatentransformation $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{z}$,

$$u(\boldsymbol{x}) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{z}) f(\boldsymbol{z}) d\boldsymbol{z} = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(\boldsymbol{y}) f(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) d\boldsymbol{y}$$

Lässt sich unter dem Integral ableiten,

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(\boldsymbol{y}) \left[\frac{f(\boldsymbol{x} + h\hat{\boldsymbol{e}}_i - \boldsymbol{y}) - f(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y})}{h} - \frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) \right] d\boldsymbol{y} \right|$$

$$\leq \sup_{\boldsymbol{z} \in B(0,R+h)} \left| \frac{f(\boldsymbol{z} + h\hat{\boldsymbol{e}}_i) - f(\boldsymbol{z})}{h} - \frac{\partial f}{\partial z_i}(\boldsymbol{z}) \right| \int_{B(\boldsymbol{x},R+h)} |\Phi(\boldsymbol{y})| d\boldsymbol{y}$$

wobei $\operatorname{supp}(f) \subset B(0, R)$. Nun $\forall \boldsymbol{z} \in B(\boldsymbol{x}, R + h)$, $\exists \gamma \in [0, h]$, $\ni$

$$\sup_{\boldsymbol{z} \in B(0,R+h)} \left| \frac{f(\boldsymbol{z} + h\hat{\boldsymbol{e}}_i) - f(\boldsymbol{z})}{h} - \frac{\partial f}{\partial z_i}(\boldsymbol{z}) \right| = \sup_{\boldsymbol{z} \in B(0,R+h)} \left| \frac{\partial f}{\partial z_i}(\boldsymbol{z} + \gamma\hat{\boldsymbol{e}}_i) - \frac{\partial f}{\partial z_i}(\boldsymbol{z}) \right| \xrightarrow{h \to 0} 0$$

weil $\partial f / \partial z_i$ gleichmäßig stetig auf kompakten Mengen ist.

Lösungsformel der Poisson Gleichung in $\mathbb{R}^n$

Weitere Abschätung,

$$\begin{aligned}\int_{B(\boldsymbol{x},R+h)} |\Phi(\boldsymbol{y})| d\boldsymbol{y} &= \int_{B(\boldsymbol{x},R+h)\setminus B(0,\epsilon_0)} |\Phi(\boldsymbol{y})| d\boldsymbol{y} + \int_{B(0,\epsilon_0)} |\Phi(\boldsymbol{y})| d\boldsymbol{y} \\ &\leq M_0 + \int_0^{\epsilon_0} \left[\int_{\partial B(0,r)} |\Phi(\boldsymbol{y})| dS(\boldsymbol{y}) \right] dr\end{aligned}$$

wobei auf Polarkoordinaten transformiert worden ist. Mit $|\partial B^n(0,r)| = 2\pi r, n = 2, n\alpha(n) r^{n-1}, n \geq 3$,

$$\int_{\partial B(0,r)} |\Phi(\boldsymbol{y})| dS(\boldsymbol{y}) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} |\log(r)| \cdot 2\pi r = -r\log(r), & n = 2 \\ \frac{n\alpha(n) r^{n-1}}{n(n-2)\alpha(n) r^{n-2}} = \frac{r}{n-2}, & n \geq 3 \end{cases}$$

Lösungsformel der Poisson Gleichung in $\mathbb{R}^n$

Explizite Rechnungen:

$$-\int_0^\epsilon r\log(r)dr = -\frac{r^2}{2}\log(r)\Big|_0^\epsilon + \int_0^\epsilon rdr = -\frac{\epsilon^2}{2}\log(\epsilon) + \frac{\epsilon^2}{4} \xrightarrow{\epsilon\to 0} 0$$

und

$$\int_0^\epsilon \frac{rdr}{n-2} = \frac{r^2}{2(n-2)}\Big|_0^\epsilon = \frac{\epsilon^2}{2(n-2)} \xrightarrow{\epsilon\to 0} 0.$$

Wegen der stetigen Abhängigkeit von ϵ gilt:

$$\left|\int_{\mathbb{R}^n}\Phi(\boldsymbol{y})\left[\frac{f(\boldsymbol{x}+h\hat{\boldsymbol{e}}_i-\boldsymbol{y})-f(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})}{h} - \frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\right]d\boldsymbol{y}\right| \xrightarrow{h\to 0} 0.$$

Es gelten:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x_i}(\boldsymbol{x}) &= \int_{\mathbb{R}^n}\Phi(\boldsymbol{y})\frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})d\boldsymbol{y} \\ \dots\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j}(\boldsymbol{x}) &= \int_{\mathbb{R}^n}\Phi(\boldsymbol{y})\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})d\boldsymbol{y} \end{aligned} \quad \& \ \therefore u\in C^2(\mathbb{R}^n)$$

Lösungsformel der Poisson Gleichung in $\mathbb{R}^n$

Nun kann $\Delta u(\boldsymbol{x})$ berechnet werden:

$$\Delta u(\boldsymbol{x}) = \underbrace{\int_{B(0,\epsilon)} \Phi(\boldsymbol{y}) \Delta_{\boldsymbol{x}} f(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) d\boldsymbol{y}}_{I_\epsilon} + \underbrace{\int_{\mathbb{R}^n \setminus B(0,\epsilon)} \Phi(\boldsymbol{y}) \Delta_{\boldsymbol{y}} f(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) d\boldsymbol{y}}_{J_\epsilon}$$

wobei $\Delta_{\boldsymbol{x}} f(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) = (-1)^2 \Delta_{\boldsymbol{y}} f(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})$. Abschätzung von I_ϵ:

$$|I_\epsilon| \leq c \|f\|_{C^2(\mathbb{R}^n)} \int_{B(0,\epsilon)} |\Phi(\boldsymbol{y})| d\boldsymbol{y} \leq \begin{cases} c\epsilon^2 |\log(\epsilon)|, & n = 2 \\ c\epsilon^2, & n \geq 3 \end{cases} \xrightarrow{\epsilon \to 0} 0.$$

Abschätzung von J_ϵ durch den Satz vom Green,

$$J_\epsilon = \underbrace{\int_{\partial B(0,\epsilon)} \Phi(\boldsymbol{y}) \frac{\partial f}{\partial \nu}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) dS(\boldsymbol{y})}_{K_\epsilon} - \underbrace{\int_{\mathbb{R}^n \setminus B(0,\epsilon)} \nabla_{\boldsymbol{y}} \Phi(\boldsymbol{y}) \cdot \nabla_{\boldsymbol{y}} f(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) d\boldsymbol{y}}_{L_\epsilon}$$

Lösungsformel der Poisson Gleichung in $\mathbb{R}^n$

Abschätzung von K_ϵ,

$$|K_\epsilon| \leq \|f\|_{C^1(\mathbb{R}^n)} \int_{\partial B(0,\epsilon)} |\Phi(\boldsymbol{y})| dS(\boldsymbol{y}) \leq \begin{cases} c\epsilon|\log(\epsilon)|, & n=2 \\ c\epsilon, & n \geq 2 \end{cases} \xrightarrow{\epsilon\to 0} 0.$$

Abschätzung von L_ϵ durch den Satz von Green,

$$L_\epsilon = \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(0,\epsilon)} \underbrace{\Delta_{\boldsymbol{y}} \Phi(\boldsymbol{y})}_{=0} f(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) d\boldsymbol{y} - \int_{\partial B(0,\epsilon)} \frac{\partial \Phi}{\partial \nu}(\boldsymbol{y}) f(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) dS(\boldsymbol{y})$$

Explizite Rechnung auf $\partial B(0,\epsilon)$,

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \nu}(\boldsymbol{y}) = \nabla \Phi(\boldsymbol{y}) \cdot \boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{y}) = \left[\frac{-1}{n\alpha(n)} \frac{\boldsymbol{y}}{|\boldsymbol{y}|^n}\right] \cdot \left[\frac{-\boldsymbol{y}}{|\boldsymbol{y}|}\right] = \frac{|\boldsymbol{y}|^2}{n\alpha(n)|\boldsymbol{y}|^{n+1}}$$

d.h.

$$\begin{aligned} -\frac{\nabla \log[|\boldsymbol{x}|^2]^{\frac{1}{2}}}{2\pi} &= \frac{-1}{2\pi} \frac{1}{2} \frac{2\boldsymbol{x}}{|\boldsymbol{x}|^2} = \frac{-\boldsymbol{x}}{n\alpha(n)|\boldsymbol{x}|^2}, & n=2 \\ \frac{\nabla [|\boldsymbol{x}|^2]^{-\frac{n-2}{2}}}{n(n-2)\alpha(n)} &= \frac{1}{n(n-2)\alpha(n)} \frac{-\frac{(n-2)}{2} 2\boldsymbol{x}}{[|\boldsymbol{x}|^2]^{\frac{n-2}{2}+1}} = \frac{-\boldsymbol{x}}{n\alpha(n)|\boldsymbol{x}|^n}, & n \geq 3 \end{aligned}$$

Lösungsformel der Poisson Gleichung in $\mathbb{R}^n$

Also

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \nu}(\boldsymbol{y}) = \frac{1}{n\alpha(n)|\boldsymbol{y}|^{n-1}} \overset{|\boldsymbol{y}|=\epsilon}{\longrightarrow} \frac{1}{n\alpha(n)\epsilon^{n-1}}$$

und

$$\begin{aligned} L_\epsilon &= -\int_{\partial B(0,\epsilon)} \frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{y}}(\boldsymbol{y}) f(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) dS(\boldsymbol{y}) \\ &= -\int_{\partial B(0,\epsilon)} \frac{f(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})}{n\alpha(n)\epsilon^{n-1}} dS(\boldsymbol{y}) = -\int_{\partial B(0,\epsilon)} \frac{f(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})}{|\partial B(0,\epsilon)|} dS(\boldsymbol{y}) \\ &= -\fint_{\partial B(0,\epsilon)} f(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) dS(\boldsymbol{y}) = -\fint_{\partial B(\boldsymbol{x},\epsilon)} f(\boldsymbol{z}) dS(\boldsymbol{z}) \\ &= -f(\boldsymbol{x}) + \underbrace{\fint_{\partial B(0,\epsilon)} [f(\boldsymbol{x}) - f(\boldsymbol{z})] dS(\boldsymbol{z})}_{\leq \max_{\boldsymbol{z}\in B(\boldsymbol{x},\epsilon)} |f(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{z})|} \overset{\epsilon \to 0}{\longrightarrow} -f(\boldsymbol{x}) \end{aligned}$$

Also gilt $-\Delta u(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x})$. ■

Mittelwertsatz

Satz (Mittelwert): Wenn $u \in C^2(\Omega)$ und $\Delta u = 0$ in Ω, dann gilt

$$u(\boldsymbol{x}) = \fint_{\partial B(\boldsymbol{x},r)} u(\boldsymbol{y})dS(\boldsymbol{y}) = \fint_{B(\boldsymbol{x},r)} u(\boldsymbol{y})d\boldsymbol{y}, \quad \forall B(\boldsymbol{x},r) \subset \Omega.$$

Beweis: Hausaufgabe. Hinweis:

$$\phi(r) = \fint_{\partial B(\boldsymbol{x},r)} u(\boldsymbol{y})dS(\boldsymbol{y})$$

erfüllt $\phi'(r) = 0$ und $\phi(r) = \lim_{t\to 0} \phi(t) = u(\boldsymbol{x})$. ■

Satz: Wenn $u \in C^2(\Omega)$ erfüllt

$$u(\boldsymbol{x}) = \fint_{\partial B(\boldsymbol{x},r)} u(\boldsymbol{y})dS(\boldsymbol{y}), \quad \forall B(\boldsymbol{x},r) \subset \Omega$$

dann gilt $\Delta u = 0$ in Ω.
Beweis: Hausaufgabe.

Maximum Prinzip

Satz (Starkes Maximum-Prinzip): Angenommen ist Ω eine Domäne und $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ ist harmonisch. Es gelten:

$$(i) \qquad \max_{\boldsymbol{x} \in \bar{\Omega}} u(\boldsymbol{x}) = \max_{\boldsymbol{x} \in \partial\Omega} u(\boldsymbol{x})$$

und

$$(ii) \qquad \left. \begin{array}{c} \Omega \text{ zusammenhängend, und} \\ \exists \boldsymbol{x}^0 \in \Omega \quad \ni \quad u(\boldsymbol{x}^0) = \max\limits_{\boldsymbol{x} \in \bar{\Omega}} u(\boldsymbol{x}) \end{array} \right\} \Rightarrow u = \text{Konstant in } \bar{\Omega}$$

Beweis: Mit $M = \max_{\boldsymbol{x} \in \bar{\Omega}} u(\boldsymbol{x})$ definiere

$$\Omega_1 = \{\boldsymbol{x} \in \Omega : u(\boldsymbol{x}) = M\} \quad \text{und} \quad \Omega_2 = \{\boldsymbol{x} \in \Omega : u(\boldsymbol{x}) < M\}.$$

Dann gilt $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ und $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$. Sei $\boldsymbol{x}^2 \in \Omega_2$ wenn $\Omega_2 \neq \emptyset$. Da $u \in C(\bar{\Omega})$, $\exists \epsilon > 0 \ni u(\boldsymbol{x}) < M$ für $\boldsymbol{x} \in B(\boldsymbol{x}^2, \epsilon)$. Also ist $B(\boldsymbol{x}^2, \epsilon) \subset \Omega_2 \Rightarrow \Omega_2$ offen.

Maximum Prinzip

Sei $\boldsymbol{x}^2 \in \Omega_1$ wenn $\Omega_1 \neq \emptyset$. Für $0 < r < \operatorname{dist}(\boldsymbol{x}^2, \partial\Omega)$ impliziert der Mittelwertsatz:

$$M = u(\boldsymbol{x}^2) = \fint_{B(\boldsymbol{x}^2,r)} u(\boldsymbol{y})\Big|_{\leq M} d\boldsymbol{y} \leq M$$

und $\fint_{B(\boldsymbol{x}^2,r)} [M - u(\boldsymbol{y})]_{\geq 0} d\boldsymbol{y} = 0 \Rightarrow u = M$ in $B(\boldsymbol{x}^2, r)$. Also ist $B(\boldsymbol{x}^2, \epsilon) \subset \Omega_1 \Rightarrow \Omega_1$ offen.

Wenn es zusammenhängend ist, kann Ω als Summe von 2 disjunkten offenen Mengen nicht dargestellt werden: Entweder $\Omega_1 = \emptyset$ oder $\Omega_2 = \emptyset$. Wenn $\boldsymbol{x}^0 \in \Omega_1$, folgt $\Omega_2 = \emptyset$ und somit (ii). Wenn Ω zusammenhängend ist, folgt aus (ii):

$$(\star) \qquad M = \max_{\boldsymbol{x} \in \bar{\Omega}} u(\boldsymbol{x}) = \max_{\boldsymbol{x} \in \partial\Omega} u(\boldsymbol{x})$$

weil M in Ω° nicht angenommen wird, ausser $u =$ Konstante, und in diesem Fall wird M sowieso am $\partial\Omega$ angenommen.

Eindeutigkeit für das Randwertproblem

Im allgemeinen gilt $\Omega = \cup_n \Omega_n$, wobei $\{\Omega_n\}$ disjunkt, zusammenhängend und offen sind. Nach $(\star)$ folgt

$$\max_{\boldsymbol{x}\in\bar{\Omega}} u(\boldsymbol{x}) = \max_n \max_{\boldsymbol{x}\in\bar{\Omega}_n} u(\boldsymbol{x}) = \max_n \max_{\boldsymbol{x}\in\partial\Omega_n} u(\boldsymbol{x}) = \max_{\boldsymbol{x}\in\partial\Omega} u(\boldsymbol{x})$$

und somit (i). ■

Satz (Eindeutigkeit): Für $g \in C(\partial\Omega)$ und $f \in C(\Omega)$ $\exists$ höchstens eine Lösung $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ des Randwertproblems,

$$\begin{cases} -\Delta u & = & f, & \Omega \\ u & = & g, & \partial\Omega \end{cases}$$

Beweis: Seien u_1 und u_2 zwei Lösungen. Dann erfüllen $w_1 = u_1 - u_2$ und $w_2 = u_2 - u_1$,

$$\begin{cases} -\Delta w_1 & = & 0, & \Omega \\ w_1 & = & 0, & \partial\Omega \end{cases} \quad \text{und} \quad \begin{cases} -\Delta w_2 & = & 0, & \Omega \\ w_2 & = & 0, & \partial\Omega \end{cases}$$

Regularität von Harmonischen Funktionen

Nach dem Maximum-Prinzip gilt

$$\max_{\boldsymbol{x}\in\bar{\Omega}} w_1(\boldsymbol{x}) = \max_{\boldsymbol{x}\in\partial\Omega} w_1(\boldsymbol{x}) = 0 = \max_{\boldsymbol{x}\in\partial\Omega} w_2(\boldsymbol{x}) = \max_{\boldsymbol{x}\in\bar{\Omega}} w_2(\boldsymbol{x})$$

Daher gilt

$$\max_{\boldsymbol{x}\in\bar{\Omega}}[u_1(\boldsymbol{x}) - u_2(\boldsymbol{x})] = \max_{\boldsymbol{x}\in\bar{\Omega}}[u_2(\boldsymbol{x}) - u_1(\boldsymbol{x})] = 0$$

und $u_1 = u_2$ in Ω. ■

Satz (Regularität): Wenn $u \in C(\Omega)$ erfüllt

$$u(\boldsymbol{x}) = \fint_{\partial B(\boldsymbol{x},r)} u(\boldsymbol{y})dS(\boldsymbol{y}) = \fint_{B(\boldsymbol{x},r)} u(\boldsymbol{y})d\boldsymbol{y}, \quad \forall B(\boldsymbol{x},r) \subset \Omega.$$

dann gilt $u \in C^\infty(\Omega)$.

Beweis: Mit $\eta_\epsilon(\boldsymbol{x}) = \eta(\boldsymbol{x}/\epsilon)/\epsilon^n$ definiere

$$u_\epsilon(\boldsymbol{x}) = [\eta_\epsilon \star u](\boldsymbol{x}) = \int_\Omega \eta_\epsilon(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})u(\boldsymbol{y})d\boldsymbol{y}$$

für $\boldsymbol{x} \in \Omega_\epsilon = \{\boldsymbol{x} \in \Omega : \mathrm{dist}(\boldsymbol{x}, \partial\Omega) > \epsilon\}$.

Regularität von Harmonischen Funktionen

Für $\boldsymbol{x} \in \Omega_{\epsilon+h}$,

$$\left|\frac{u_\epsilon(\boldsymbol{x}+h\hat{\boldsymbol{e}}_i)-u_\epsilon(\boldsymbol{x})}{h}-\int_\Omega \frac{\partial\eta_\epsilon}{\partial x_i}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})u(\boldsymbol{y})d\boldsymbol{y}\right| \qquad (\boldsymbol{z}=\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})$$

$$= \left|\int_{B(0,\epsilon+h)}\left[\frac{\eta_\epsilon(\boldsymbol{z}+h\hat{\boldsymbol{e}}_i)-\eta_\epsilon(\boldsymbol{z})}{h}-\frac{\partial\eta_\epsilon}{\partial z_i}(\boldsymbol{z})\right]u(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{z})d\boldsymbol{z}\right|$$

$$\leq \sup_{\boldsymbol{z}\in B(0,\epsilon+h)}\left|\frac{\eta_\epsilon(\boldsymbol{z}+h\hat{\boldsymbol{e}}_i)-\eta(\boldsymbol{z})}{h}-\frac{\partial\eta_\epsilon}{\partial z_i}(\boldsymbol{z})\right|\int_{B(\boldsymbol{x},\epsilon+h)}|u(\boldsymbol{z})|d\boldsymbol{z} \quad \stackrel{h\to 0}{\longrightarrow} 0$$

Es gelten für $x \in \Omega_\epsilon$:

$$\frac{\partial u_\epsilon}{\partial x_i}(\boldsymbol{x}) = \int_\Omega \frac{\partial\eta_\epsilon}{\partial x_i}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})u(\boldsymbol{y})d\boldsymbol{y}$$

$$\ldots\frac{\partial^\alpha u_\epsilon}{\partial \boldsymbol{x}^\alpha}(\boldsymbol{x}) = \int_\Omega \frac{\partial^\alpha\eta_\epsilon}{\partial \boldsymbol{x}^\alpha}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})u(\boldsymbol{y})d\boldsymbol{y}$$

& $\therefore u_\epsilon \in C^\infty(\Omega_\epsilon)$

Regularität von Harmonischen Funktionen

Noch zu zeigen: $u(\boldsymbol{x}) = u_\epsilon(\boldsymbol{x}),\ \forall \boldsymbol{x} \in \Omega_\epsilon,\ \forall \epsilon > 0 \Rightarrow u \in C^\infty(\Omega)$.

Für $\boldsymbol{x} \in \Omega_\epsilon$,

$$
\begin{aligned}
u_\epsilon(\boldsymbol{x}) &= \int_\Omega \eta_\epsilon(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})u(\boldsymbol{y})d\boldsymbol{y} = \int_0^\epsilon \left[\int_{\partial B(\boldsymbol{x},r)} \eta_\epsilon(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})u(\boldsymbol{y})dS(\boldsymbol{y})\right] dr \\
&= \int_0^\epsilon \eta_\epsilon(r) \underbrace{\left[\int_{\partial B(\boldsymbol{x},r)} u(\boldsymbol{y})dS(\boldsymbol{y})\right]}_{=u(\boldsymbol{x})|\partial B(\boldsymbol{x},r)|} dr = u(\boldsymbol{x}) \int_0^\epsilon \eta_\epsilon(r)|\partial B(\boldsymbol{x},r)|dr \\
&= u(\boldsymbol{x}) \int_0^\epsilon \eta_\epsilon(r) \underbrace{\left[\int_{\partial B(\boldsymbol{x},r)} dS(\boldsymbol{y})\right]}_{=|\partial B(\boldsymbol{x},r)|} dr \\
&= u(\boldsymbol{x}) \int_0^\epsilon \left[\int_{\partial B(\boldsymbol{x},r)} \eta_\epsilon(\boldsymbol{y})dS(\boldsymbol{y})\right] dr = u(\boldsymbol{x}) \underbrace{\int_{B(0,\epsilon)} \eta_\epsilon(\boldsymbol{y})d\boldsymbol{y}}_{=1} = u(\boldsymbol{x})
\end{aligned}
$$

■

Sätze von Liouville und Harnack

Satz: Ist u in Ω harmonisch, ist u in Ω analytisch, d.h. $\forall \boldsymbol{x}^0 \in \Omega$, $\exists \epsilon > 0 \ni$

$$u(\boldsymbol{x}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \sum_{|\alpha|=k} \partial^\alpha u(\boldsymbol{x}^0)(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^0)^\alpha, \quad \forall \boldsymbol{x} \in B(\boldsymbol{x}^0, \epsilon)$$

Satz (Liouville): Ist $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ harmonisch und beschränkt, ist u eine Konstante.

Satz (Harnack): Für jede zusammenhängende Menge $D \subset\subset \Omega$, $\exists c = c(D) > 0, \ni$

$$\sup_{\boldsymbol{x} \in D} u(\boldsymbol{x}) \leq c \inf_{\boldsymbol{x} \in D} u(\boldsymbol{x}), \quad \forall u \in \{u : u \geq 0, \Delta u = 0 \text{ in } \Omega\}$$

Greensche Funktionen

- Zu lösen ist
$$\begin{cases} -\Delta u &= f, \quad \Omega \\ u &= g, \quad \partial\Omega \end{cases}$$
- Mit der Greenschen Formel,
$$\int_\Omega \Big[\underbrace{u}_{\downarrow \atop u(\boldsymbol{x})} \underbrace{\Delta v}_{\downarrow \atop -\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})} - \underbrace{v}_{\downarrow \atop G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})} \underbrace{\Delta u}_{\downarrow \atop -f(\boldsymbol{y})} \Big] d\boldsymbol{y}$$
$$= \int_{\partial\Omega} \Big[\underbrace{u}_{\downarrow \atop g(\boldsymbol{y})} \frac{\partial v}{\partial \nu} - \underbrace{v}_{\downarrow \atop 0} \frac{\partial u}{\partial \nu} \Big] dS(\boldsymbol{y})$$
- Ergebnis mit $v(\boldsymbol{y}) \to G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$, fixiertes $\boldsymbol{x} \in \Omega$, $G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})|_{\boldsymbol{y}\in\partial\Omega} = 0$, $-\Delta_{\boldsymbol{y}} G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})$,
$$u(\boldsymbol{x}) = \int_\Omega G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) f(\boldsymbol{y}) d\boldsymbol{y} - \int_{\partial\Omega} g(\boldsymbol{y}) \frac{\partial G}{\partial \nu}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) dS(\boldsymbol{y})$$

Greensche Funktionen

- Dieses Ergebnis ist schrittweise zu zeigen.
- Zuerst nimm $v(\boldsymbol{y}) \to \Phi(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x})$,

$$
\begin{aligned}
&\int_{\Omega\setminus B(\boldsymbol{x},\epsilon)} \Big[u(\boldsymbol{y}) \underbrace{\Delta_{\boldsymbol{y}}\Phi(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x})}_{=0} - \Phi(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}) \underbrace{\Delta_{\boldsymbol{y}} u(\boldsymbol{y})}_{=-f(\boldsymbol{y})} \Big] \, d\boldsymbol{y} \\
= \quad &\int_{\partial B(\boldsymbol{x},\epsilon)} \Big[\underbrace{u(\boldsymbol{y}) \frac{\partial \Phi}{\partial \nu}(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x})}_{J_\epsilon \to u(\boldsymbol{x}), \epsilon \to 0} - \underbrace{\Phi(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}) \frac{\partial u}{\partial \nu}(\boldsymbol{y})}_{I_\epsilon \to 0, \epsilon \to 0} \Big] \, dS(\boldsymbol{y}) \\
+ \quad &\int_{\partial\Omega} \Big[g(\boldsymbol{y}) \frac{\partial \Phi}{\partial \nu}(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}) - \underbrace{\Phi(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}) \frac{\partial u}{\partial \nu}(\boldsymbol{y})}_{?} \Big] \, dS(\boldsymbol{y})
\end{aligned}
$$

- Wir suchen eine Lösungsformel mit $\epsilon \to 0$.
- Die Terme müssen abgeschätzt werden.

Greensche Funktionen

- Termweise abgeschätzt,

$$\underbrace{\left|\int_{\partial B(\boldsymbol{x},\epsilon)} \Phi(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x})\frac{\partial u}{\partial \nu}(\boldsymbol{y})dS(\boldsymbol{y})\right|}_{=I_\epsilon} = \frac{\overbrace{\Phi(\epsilon)|B(\boldsymbol{x},\epsilon)|}^{\to 0,\epsilon\to 0}}{|B(\boldsymbol{x},\epsilon)|}\left|\int_{\partial B(\boldsymbol{x},\epsilon)} \frac{\partial u}{\partial \nu}(\boldsymbol{y})dS(\boldsymbol{y})\right|$$

$$\frac{1}{|B(\boldsymbol{x},\epsilon)|}\left|\int_{\partial B(\boldsymbol{x},\epsilon)} \frac{\partial u}{\partial \nu}(\boldsymbol{y})dS(\boldsymbol{y})\right| = \frac{1}{|B(\boldsymbol{x},\epsilon)|}\left|\int_{B(\boldsymbol{x},\epsilon)} \Delta u(\boldsymbol{y})d\boldsymbol{y}\right|$$

$$= \left|⨍_{B(\boldsymbol{x},\epsilon)} f(\boldsymbol{y})d\boldsymbol{y}\right| \xrightarrow{\epsilon\to 0} |f(\boldsymbol{x})|$$

- Also $I_\epsilon \to 0$, $\epsilon \to 0$.

Greensche Funktionen

- Termweise abgeschätzt,

$$\underbrace{\int_{\partial B(\boldsymbol{x},\epsilon)} u(\boldsymbol{y}) \frac{\partial \Phi}{\partial \nu}(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}) dS(\boldsymbol{y})}_{J_\epsilon} = \int_{\partial B(\boldsymbol{x},\epsilon)} u(\boldsymbol{y}) \frac{1}{n\alpha(n)|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}|^{n-1}} dS(\boldsymbol{y})$$

$$= \fint_{\partial B(\boldsymbol{x},\epsilon)} u(\boldsymbol{y}) dS(\boldsymbol{y}) \stackrel{\epsilon\to 0}{\longrightarrow} u(\boldsymbol{x})$$

- Termweise abgeschätzt,

$$\left| \int_\Omega \Phi(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}) f(\boldsymbol{y}) d\boldsymbol{y} - \int_{\Omega\setminus B(\boldsymbol{x},\epsilon)} \Phi(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}) f(\boldsymbol{y}) d\boldsymbol{y} \right|$$

$$= \left| \int_{B(\boldsymbol{x},\epsilon)} \Phi(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}) f(\boldsymbol{y}) d\boldsymbol{y} \right| \le \sup_{\boldsymbol{y}\in\Omega} |f(\boldsymbol{y})| \int_{B(\boldsymbol{x},\epsilon)} |\Phi(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x})| d\boldsymbol{y} \stackrel{\epsilon\to 0}{\longrightarrow} 0$$

Greensche Funktionen

- Zusammengefasst,

$$\int_\Omega \Phi(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x})f(\boldsymbol{y})d\boldsymbol{y} = \lim_{\epsilon\to 0}\int_{\Omega\setminus B(\boldsymbol{x},\epsilon)} \Phi(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x})f(\boldsymbol{y})d\boldsymbol{y}$$

$$= u(\boldsymbol{x}) + \int_{\partial\Omega}\left[g(\boldsymbol{y})\frac{\partial\Phi}{\partial\nu}(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}) - \Phi(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x})\frac{\partial u}{\partial\nu}(\boldsymbol{y})\right] dS(\boldsymbol{y})$$

- Um eine Lösungsformel herzuleiten, muss Φ modifiziert werden, sodass der Term $\partial u/\partial\nu$ entfernt wird.
- Der Plan: $G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \Phi(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}) - \phi^{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{y})$ wobei

$$\begin{cases} \Delta_{\boldsymbol{y}}\phi^{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{y}) = 0, & \boldsymbol{y}\in\Omega \\ \phi^{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{y}) = \Phi(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}), & \boldsymbol{y}\in\partial\Omega \end{cases}$$

- Mit der Greenschen Formel und $v(\boldsymbol{y}) = \phi^{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{y})$

$$\int_\Omega \left[u\underbrace{\Delta\phi^{\boldsymbol{x}}}_{=0} - \phi^{\boldsymbol{x}}\underbrace{\Delta u}_{=-f(\boldsymbol{y})}\right](\boldsymbol{y})d\boldsymbol{y} = \int_{\partial\Omega}\left[g\frac{\partial\phi^{\boldsymbol{x}}}{\partial\nu} - \underbrace{\phi^{\boldsymbol{x}}}_{=\Phi(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x})}\frac{\partial u}{\partial\nu}\right](\boldsymbol{y})dS(\boldsymbol{y})$$

Lösungsformel mit Greenscher Funktion

- Subtrahieren vom früheren Ergebnis ($v(\boldsymbol{y}) \to \Phi(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x})$),

$$\int_\Omega \Bigg[\underbrace{\Phi(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}) - \phi^{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{y})}_{G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})} \Bigg] f(\boldsymbol{y})d\boldsymbol{y} = u(\boldsymbol{x})$$

$$+ \int_{\partial\Omega} \Bigg[g(\boldsymbol{y}) \frac{\partial}{\partial\nu} \Bigg[\underbrace{\Phi(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}) - \phi^{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{y})}_{G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})} \Bigg] - \Bigg[\underbrace{\Phi(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}) - \phi^{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{y})}_{G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=0,\boldsymbol{y}\in\partial\Omega} \Bigg] \frac{\partial u}{\partial\nu} dS(\boldsymbol{y})$$

- Somit bekommt man die gezielte Lösungsformel:

$$u(\boldsymbol{x}) = \int_\Omega G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) f(\boldsymbol{y}) d\boldsymbol{y} - \int_{\partial\Omega} g(\boldsymbol{y}) \frac{\partial G}{\partial\nu}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) dS(\boldsymbol{y})$$

Symmetrie einer Greenschen Funktion

- Die Greensche Funktion G löst formell,

$$\begin{cases} -\Delta_{\boldsymbol{y}} G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) &= \delta(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{y}\in\Omega \\ G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) &= 0, \quad \boldsymbol{y}\in\partial\Omega \end{cases}$$

sowie

$$\begin{cases} -\Delta_{\boldsymbol{x}} G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) &= \delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}), \quad \boldsymbol{x}\in\Omega \\ G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) &= 0, \quad \boldsymbol{x}\in\partial\Omega \end{cases}$$

Satz: $\forall \boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\Omega$, $\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{y}$, $G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = G(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})$.

Beweis: Hausaufgabe. Hinweis: Nimm $u(\boldsymbol{z}) = G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z})$ und $v(\boldsymbol{z}) = G(\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})$ und setze u und v in die Greensche Formel,

$$\int_{D_\epsilon(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})} [u\Delta v - v\Delta u] d\boldsymbol{z} = \int_{\partial D_\epsilon(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})} \left[u\frac{\partial v}{\partial\nu} - v\frac{\partial u}{\partial\nu}\right] dS(\boldsymbol{z})$$

für $D_\epsilon(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \Omega\backslash[B(\boldsymbol{x},\epsilon)\cup B(\boldsymbol{y},\epsilon)]$. Mit $\epsilon\to 0$, $u(\boldsymbol{y}) = v(\boldsymbol{x})$. $\blacksquare$

Greensche Funktion für einen Halbraum

- Für
$$\begin{array}{rclrcl} \tilde{\boldsymbol{x}} & = & (x_1,\ldots,x_{n-1}) & \boldsymbol{x} & = & (\tilde{\boldsymbol{x}},+x_n) \\ & & & \hat{\boldsymbol{x}} & = & (\tilde{\boldsymbol{x}},-x_n) \end{array}$$
definiere
$$G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \Phi(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}) - \Phi(\boldsymbol{y}-\hat{\boldsymbol{x}})$$
für den Halbraum,
$$\mathbb{R}^n_+ = \{\boldsymbol{x} = (x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n : x_n > 0\}$$
- Dann für $\boldsymbol{y} \in \partial\mathbb{R}^n_+ = \mathbb{R}^{n-1}$ gilt
$$\begin{array}{rcccc} G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) & = & \Phi(\tilde{\boldsymbol{y}}-\tilde{\boldsymbol{x}},-x_n) & - & \Phi(\tilde{\boldsymbol{y}}-\tilde{\boldsymbol{x}},+x_n) \\ & = & \phi(|\tilde{\boldsymbol{y}}-\tilde{\boldsymbol{x}}|^2+x_n^2) & - & \phi(|\tilde{\boldsymbol{y}}-\tilde{\boldsymbol{x}}|^2+x_n^2) \\ & = & 0 & & \end{array}$$
so $G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ erfüllt die homogene Dirichlet Randbedingung.

Greensche Funktion für einen Halbraum

- Die normale Ableitung auf $\partial\mathbb{R}^n_+ = \mathbb{R}^{n-1}$ ist $\forall n \geq 2$,

$$-\frac{\partial G}{\partial \nu}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \frac{\partial G}{\partial y_n}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \quad = \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y_n}(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}) - \frac{\partial \Phi}{\partial y_n}(\boldsymbol{y}-\hat{\boldsymbol{x}})$$

$$= \quad \frac{-1}{n\alpha(n)}\left[\frac{y_n - x_n}{|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}|^n} - \frac{y_n + x_n}{|\boldsymbol{y}-\hat{\boldsymbol{x}}|^n}\right] \quad \xrightarrow{y_n \to 0} \quad \frac{2x_n/[n\alpha(n)]}{[|\tilde{\boldsymbol{x}}-\tilde{\boldsymbol{y}}|^2 + x_n^2]^{n/2}} = K(\boldsymbol{x},\tilde{\boldsymbol{y}})$$

Satz: Mit $f \in C_0^2(\mathbb{R}^n_+)$ und $g \in C_0(\mathbb{R}^{n-1})$

$$u(\boldsymbol{x}) = \int_{\mathbb{R}^n_+} G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) f(\boldsymbol{y}) d\boldsymbol{y} + \int_{\mathbb{R}^{n-1}} K(\boldsymbol{x},\tilde{\boldsymbol{y}}) g(\tilde{\boldsymbol{y}}) d\hat{\boldsymbol{y}}$$

erfüllt:

1. $u \in C^2(\mathbb{R}^n_+) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n_+)$ und $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n_+)$ für $f = 0$,
2. $-\Delta u(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x})$, $\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n_+$,
3. $\lim\limits_{\mathbb{R}^n_+ \ni \boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x}^0} u(\boldsymbol{x}) = g(\tilde{\boldsymbol{x}}^0)$, $\forall \tilde{\boldsymbol{x}}^0 \in \partial\mathbb{R}^n_+ = \mathbb{R}^{n-1}$.

Greensche Funktion für einen Halbraum

Beweis: Es ist früher bewiesen worden,

$$-\Delta_{\boldsymbol{x}} \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}) f(\boldsymbol{y}) d\boldsymbol{y} = -\Delta_{\boldsymbol{x}} \int_{\mathbb{R}^n_+} \Phi(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}) f(\boldsymbol{y}) d\boldsymbol{y} = f(\boldsymbol{x}).$$

Wegen der Annahme $f \in C_0^2(\mathbb{R}^n_+)$ kann das Integral über $\mathbb{R}^n$ auf $\mathbb{R}^n_+$ hier reduziert werden. Es ist auch früher bewiesen worden, dass das Integral in $C^2(\mathbb{R}^n)$ liegt. Diese Resultate gelten auch insbesondere hier für $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n_+$. Auch $\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n_+$ gelten $\hat{\boldsymbol{x}} \notin \mathbb{R}^n_+$ und $\boldsymbol{x} \notin \partial\mathbb{R}^n_+$ und daher folgen:

$$\Delta_{\boldsymbol{x}} \int_{\mathbb{R}^n_+} \Phi(\boldsymbol{y}-\hat{\boldsymbol{x}}) f(\boldsymbol{y}) d\boldsymbol{y} = \Delta_{\boldsymbol{x}} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} K(\boldsymbol{x}, \tilde{\boldsymbol{y}}) g(\tilde{\boldsymbol{y}}) d\tilde{\boldsymbol{y}} = 0.$$

wobei $\Delta_{\boldsymbol{x}} K(\boldsymbol{x}, \tilde{\boldsymbol{y}}) = \frac{\partial}{\partial y_n} \Delta_{\boldsymbol{x}} G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})|_{y_n=0} = 0$ verwendet worden ist; bemerke, $\boldsymbol{y} \mapsto G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ ist harmonisch ausser bei $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}$, und wegen Symmetrie ist $\boldsymbol{x} \mapsto G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ harmonisch ausser bei $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$. Somit ist (2) bewiesen. Weiters liegen diese Integrale in $C^\infty(\mathbb{R}^n_+)$, da sie harmonisch in $\mathbb{R}^n_+$ sind.

Greensche Funktion für einen Halbraum

Beschränktheit von u wird termweise gezeigt. Für $\Phi(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x})$,

$$\left|\int_{\mathbb{R}^n_+}\Phi(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x})f(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{y}\right| \le \max_{\boldsymbol{z}\in B^n_\tau(0,R)}|f(\boldsymbol{z})|\int_{B^n_\tau(0,R)}|\Phi(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x})|d\boldsymbol{y}$$

$$\int_{B^n_\tau(0,R)}|\Phi(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x})|d\boldsymbol{z} \le M_0 + \int_{B(\boldsymbol{x},\epsilon_0)}|\Phi(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x})|d\boldsymbol{y}$$

wobei $f(\boldsymbol{z}) = 0$ für $\boldsymbol{z} \notin B^n_\tau(0,R) = B^n(0,R) \cap \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n_+ : x_n > \tau\}$.
Für $\Phi(\boldsymbol{y}-\hat{\boldsymbol{x}})$,

$$\left|\int_{\mathbb{R}^n_+}\Phi(\boldsymbol{y}-\hat{\boldsymbol{x}})f(\boldsymbol{y})d\boldsymbol{y}\right| \le \max_{\boldsymbol{z}\in B^n_\tau(0,R)}|f(\boldsymbol{z})|\int_{B^n_\tau(0,R)}|\Phi(\boldsymbol{y}-\hat{\boldsymbol{x}})|d\boldsymbol{y}$$

Für $K(\boldsymbol{x},\tilde{\boldsymbol{y}})$,

$$\left|\int_{\mathbb{R}^{n-1}}K(\boldsymbol{x},\tilde{\boldsymbol{y}})g(\tilde{\boldsymbol{y}})d\tilde{\boldsymbol{y}}\right| \le \max_{\boldsymbol{z}\in\mathbb{R}^{n-1}}|g(\boldsymbol{z})|\underbrace{\int_{\mathbb{R}^{n-1}}K(\boldsymbol{x},\tilde{\boldsymbol{y}})d\tilde{\boldsymbol{y}}}_{I_K}$$

Hausaufgabe: Zeige, $I_K = 1$. Somit ist (1) bewiesen.

Greensche Funktion für einen Halbraum

Für die Randbedingung, fixiere $(\tilde{\boldsymbol{x}}^0, 0) = \boldsymbol{x}^0 \in \partial\mathbb{R}^{n-1}$. Dann für $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n_+$ wird zerlegt,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^{n-1}} K(\boldsymbol{x}, \tilde{\boldsymbol{y}})|g(\tilde{\boldsymbol{y}}) - g(\tilde{\boldsymbol{x}}^0)|d\tilde{\boldsymbol{y}} &= \left.\int_{\mathbb{R}^{n-1}\cap B^{n-1}(\tilde{\boldsymbol{x}}^0,\epsilon)} K(\boldsymbol{x}, \tilde{\boldsymbol{y}})|g(\tilde{\boldsymbol{y}}) - g(\tilde{\boldsymbol{x}}^0)|d\tilde{\boldsymbol{y}}\right\} =: I_\epsilon \\ &+ \left.\int_{B^{n-1}(\tilde{\boldsymbol{x}}^0,\epsilon)} K(\boldsymbol{x}, \tilde{\boldsymbol{y}})|g(\tilde{\boldsymbol{y}}) - g(\tilde{\boldsymbol{x}}^0)|d\tilde{\boldsymbol{y}}\right\} =: J_\epsilon\end{aligned}$$

Termweise abgeschätzt,

$$I_\epsilon \le \sup_{\tilde{\boldsymbol{y}}\in B(\tilde{\boldsymbol{x}}^0,\epsilon)} |g(\tilde{\boldsymbol{y}}) - g(\tilde{\boldsymbol{x}}^0)| \underbrace{\int_{\mathbb{R}^{n-1}} K(\boldsymbol{x}, \tilde{\boldsymbol{y}})d\tilde{\boldsymbol{y}}}_{I_K=1} \xrightarrow{\epsilon\to 0} 0$$

Für $\boldsymbol{x} \in B^n(\boldsymbol{x}^0, \epsilon^2)$ und $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n \backslash B^n(\boldsymbol{x}^0, \epsilon)$ gilt

$$|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}^0| \le |\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}| + |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^0| \le |\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}| + \epsilon^2 \le |\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}| + \epsilon|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}^0|$$

Greensche Funktion für einen Halbraum

so $(1-\epsilon)|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}^0| \le |\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}| \Rightarrow$ für $(\tilde{\boldsymbol{y}},0)=\boldsymbol{y}\in\partial\mathbb{R}^n_+\backslash B^n(\boldsymbol{x}^0,\epsilon)$,

$$\frac{1}{[|\tilde{\boldsymbol{y}}-\tilde{\boldsymbol{x}}|^2+x_n^2]^{1/2}} = \frac{1}{|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}|} \le \frac{(1-\epsilon)^{-1}}{|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}^0|} = \frac{(1-\epsilon)^{-1}}{|\tilde{\boldsymbol{y}}-\tilde{\boldsymbol{x}}^0|}$$

Daher mit $\bar{g}=\max\limits_{\boldsymbol{z}\in B^{n-1}(0,R)}|g(\boldsymbol{z})|$ und $\boldsymbol{x}\in B^n(\boldsymbol{x}^0,\epsilon^2)$,

$$\begin{aligned}
J_\epsilon &\le 2\bar{g}\int_{\mathbb{R}^{n-1}\backslash B^{n-1}(\tilde{\boldsymbol{x}}^0,\epsilon)} \frac{2x_n}{n\alpha(n)[|\tilde{\boldsymbol{y}}-\tilde{\boldsymbol{x}}|^2+x_n^2]^{n/2}}d\tilde{\boldsymbol{y}} \\
&\le x_n\frac{4\bar{g}}{n\alpha(n)(1-\epsilon)^n}\int_{\mathbb{R}^{n-1}\backslash B^{n-1}(\tilde{\boldsymbol{x}}^0,\epsilon)} \frac{1}{|\tilde{\boldsymbol{y}}-\tilde{\boldsymbol{x}}^0|^n}d\tilde{\boldsymbol{y}} \\
&\le \epsilon^2\frac{4\bar{g}}{n\alpha(n)(1-\epsilon)^n}\int_\epsilon^\infty\left[\int_{\partial B^{n-1}(\tilde{\boldsymbol{x}}^0,r)}\frac{dS(\tilde{\boldsymbol{y}})}{|\tilde{\boldsymbol{y}}-\tilde{\boldsymbol{x}}^0|^n}\right]dr \\
&= \epsilon^2\frac{4\bar{g}}{n\alpha(n)(1-\epsilon)^n}\int_\epsilon^\infty\frac{(n-1)\alpha(n-1)r^{n-2}}{r^n}dr \\
&= \frac{4\epsilon\bar{g}(n-1)\alpha(n-1)}{n\alpha(n)(1-\epsilon)^n} \xrightarrow{\epsilon\to 0} 0
\end{aligned}$$

Greensche Funktion für einen Halbraum

Schliesslich für $\boldsymbol{x} \in B(\boldsymbol{x}^0, \epsilon^2)$ und $B(\boldsymbol{x}^0, \epsilon^2) \cap B_\tau(0, R) = \emptyset$ ist $\boldsymbol{y} \mapsto G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ (gleichmäßig) stetig auf $B_\tau(0, R)$. Es folgt:

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n_+} G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) f(\boldsymbol{y}) d\boldsymbol{y} \right| = \left| \int_{B^n_\tau(0,R)} G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) f(\boldsymbol{y}) d\boldsymbol{y} \right| \leq$$

$$\underbrace{\sup_{\boldsymbol{y} \in B^n_\tau(0,R)} |\Phi(\tilde{\boldsymbol{y}} - \tilde{\boldsymbol{x}}, y_n - x_n) - \Phi(\tilde{\boldsymbol{y}} - \tilde{\boldsymbol{x}}, y_n + x_n)|}_{\to 0 \text{ für } x_n < \delta^2 \to 0} \int_{B^n_\tau(0,R)} |f(\boldsymbol{y})| d\boldsymbol{y}$$

Somit ist (3) bewiesen. ■

- Greensche Funktion für eine Kugel $B^n(0, r)$,

$$G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \Phi(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}) - \Phi(|\boldsymbol{x}|(\boldsymbol{y} - \check{\boldsymbol{x}}))$$

  wobei für $\boldsymbol{x} \in B^n(0, r)$, $\check{\boldsymbol{x}} = r\boldsymbol{x}/|\boldsymbol{x}|^2 \in \mathbb{R}^n \backslash B^n(0, r)$.

Greensche Funktion für eine Kugel

- Definiere

$$K(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = -\frac{\partial}{\partial \nu} G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \nabla_{\boldsymbol{y}} G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \cdot \frac{\boldsymbol{y}}{r} = \frac{1}{n\alpha(n)r} \frac{r^2 - |\boldsymbol{x}|^2}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|^n}$$

Satz: Mit $f \in C_0^2(B^n(0,r))$ und $g \in C(\partial B^n(0,r))$

$$u(\boldsymbol{x}) = \int_{B^n(0,r)} G(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) f(\boldsymbol{y}) d\boldsymbol{y} + \int_{\partial B^n(0,r)} K(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) g(\boldsymbol{y}) d\boldsymbol{y}$$

erfüllt:

1. $u \in C^2(B(0,r))$
2. $-\Delta u(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}),\ \forall \boldsymbol{x} \in B(0,r)$
3. $\lim\limits_{B(0,r) \ni \boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x}^0} u(\boldsymbol{x}) = g(\boldsymbol{x}^0),\ \forall \boldsymbol{x}^0 \in \partial B(0,r)$

Beweis: Hausaufgabe.

Energie Methoden - Eindeutigkeit

Satz (Eindeutigkeit): Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine Domäne der Klasse C^1. $\exists$ höchstens eine Lösung $u \in C^2(\bar{\Omega})$ des Randwertproblems,

$$\begin{cases} -\Delta u &= f, \quad \Omega \\ u &= g, \quad \partial\Omega \end{cases}$$

Beweis: Wenn u_1 und u_2 Lösungen sind, erfüllt $w = u_1 - u_2$

$$\begin{cases} -\Delta w &= 0, \quad \Omega \\ w &= 0, \quad \partial\Omega \end{cases}$$

Wegen dem Satz von Green,

$$\int_\Omega w \underbrace{\Delta w}_{=0} d\boldsymbol{x} = \int_{\partial\Omega} \underbrace{w}_{=0} \frac{\partial w}{\partial \nu} dS(\boldsymbol{x}) - \int_\Omega |\nabla w|^2 d\boldsymbol{x}$$

gilt $w =$Konstante, aber $w|_{\partial\Omega} = 0 \Rightarrow w = 0$ in $\bar{\Omega}$. ■

Energie Methoden - Existenz

Statt der Dirichlet Randbedingung betrachte die Neumann Randbedingung,

$$\begin{cases} -\Delta u &= f, & \Omega \\ \partial u/\partial \nu &= g, & \partial\Omega \end{cases}$$

Wegen der obigen Energie-Abschätzung gilt $u_1 - u_2 = w =$Konstante für Lösungen u_1 und u_2, aber diese Konstante ist nicht notwendigerweise Null.

Kann eine Lösung existieren? Wegen dem Satz von Green,

$$\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu}(\boldsymbol{x}) dS(\boldsymbol{x}) = \int_{\partial\Omega} g(\boldsymbol{x}) dS(\boldsymbol{x}) = \int_{\Omega} \Delta u(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x} = -\int_{\Omega} f(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x}$$

muss diese Kompatibilitätsbedingung erfüllt werden.

Dirichlet's Prinzip

Satz: Für $u \in C^2(\Omega)$,

$$\begin{cases} -\Delta u & = & f, & \Omega \\ u & = & g, & \partial\Omega \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad u = \arg\min_{v \in A} J(v)$$

wobei

$$J(v) = \frac{1}{2}\int_\Omega \left[|\nabla v|^2 - vf \right] d\boldsymbol{x}, \qquad A = \{v \in C^2(\Omega) : v|_{\partial\Omega} = g\}$$

Beweis: $(\Rightarrow)$ Für $v \in A$,

$$0 = \int_\Omega (-\Delta u - f)(u - v) d\boldsymbol{x} = -\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu} \underbrace{(u - v)}_{=0} dS(\boldsymbol{x})$$
$$+ \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla(u - v) d\boldsymbol{x} - \int_\Omega f(u - v) d\boldsymbol{x}$$

Dirichlet's Prinzip

Es folgt,

$$\int_\Omega [|\nabla u|^2 - uf] d\boldsymbol{x} = \int_\Omega [\nabla u \cdot \nabla v - vf] d\boldsymbol{x}$$

$$\leq \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla u|^2 d\boldsymbol{x} + \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla v|^2 d\boldsymbol{x} - \int_\Omega vf d\boldsymbol{x}$$

und daher

$$\frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla u|^2 d\boldsymbol{x} - \int_\Omega uf d\boldsymbol{x} \leq \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla v|^2 d\boldsymbol{x} - \int_\Omega vf d\boldsymbol{x}$$

($\Leftarrow$) Die Richtungsableitungen sind:

$$0 = \frac{\delta J}{\delta u}(u; v) = \int_\Omega [\nabla u \cdot \nabla v - vf] d\boldsymbol{x}$$

$$= \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu} \underbrace{v}_{=0} dS(\boldsymbol{x}) + \int_\Omega (-\Delta u - f) v d\boldsymbol{x}, \quad \forall v \in C_0^\infty(\bar{\Omega})$$

und daher gilt $-\Delta u = f$, und $u \in A \Rightarrow u|_{\partial\Omega} = g$. ∎

Wärmegleichung

Zielproblem:

$$\begin{cases} \partial u_t - \Delta u &= f, \quad \mathbb{R}^n \times (0,\infty) \\ u &= u_0, \quad \mathbb{R}^n \times \{t=0\} \end{cases}$$

- Die Fundamentallösung der Gleichung $\Phi_t(\boldsymbol{x},t) - \Delta\Phi_t(\boldsymbol{x},t) = \delta(\boldsymbol{x},t)$ in $\mathbb{R}^n \times (0,\infty)$ ist

$$\Phi(\boldsymbol{x},t) = \begin{cases} \dfrac{\exp\left(-\dfrac{|\boldsymbol{x}|^2}{4t}\right)}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}}, & \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n, t \geq 0 \\ 0, & \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n, t < 0 \end{cases}$$

Satz: Φ erfüllt

$$\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(\boldsymbol{x},t) d\boldsymbol{x} = 1$$

Beweis: Mit $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z_i^2} dz_i = \sqrt{\pi}$,

$$I_\Phi = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(\boldsymbol{x},t) d\boldsymbol{x} = \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|\boldsymbol{x}|^2}{4t}} d\boldsymbol{x} = \frac{1}{\pi^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|\boldsymbol{z}|^2} d\boldsymbol{z} = 1 \quad \blacksquare$$

- Zuerst wird angenommen, es gilt $f = 0$.

Lösungsformel - homogenes Problem in $\mathbb{R}^n \times (0, \infty)$

Satz: Für $u_0 \in C_0(\mathbb{R}^n)$ und

$$u(\boldsymbol{x}, t) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}, t) u_0(\boldsymbol{y}) d\boldsymbol{y}$$

gelten:

1. $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times (0, \infty))$,
2. $u_t = \Delta u$ in $\mathbb{R}^n \times (0, \infty)$,
3. $\lim_{\mathbb{R}^n \times (0,\infty) \ni (\boldsymbol{x},t) \to (\boldsymbol{x}^0, 0)} u(\boldsymbol{x}, t) = u_0(\boldsymbol{x}^0), \forall \boldsymbol{x}^0 \in \mathbb{R}^n$

Beweis: Für die räumlichen Ableitungen sei $(\boldsymbol{x}, t) \in \mathbb{R}^n \times (0, \infty)$ und

$$\left| \frac{u(\boldsymbol{x} + h\hat{\boldsymbol{e}}_i, t) - u(\boldsymbol{x}, t)}{h} - \int_{B(0,R)} \frac{\partial}{\partial x_i} \Phi(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}, t) u_0(\boldsymbol{y}) d\boldsymbol{y} \right|$$

$$\leq \sup_{\boldsymbol{z} \in B(\boldsymbol{x},R)} \left| \underbrace{\frac{\Phi(\boldsymbol{z} + h\hat{\boldsymbol{e}}_i, t) - \Phi(\boldsymbol{z}, t)}{h} - \frac{\partial}{\partial z_i} \Phi(\boldsymbol{z}, t)}_{\Phi_{z_i}(\boldsymbol{z}+\gamma\hat{\boldsymbol{e}}_i, t) - \Phi_{z_i}(\boldsymbol{z}, t), |\gamma| < |h|} \right| \int_{B(0,R)} |u_0(\boldsymbol{y})| d\boldsymbol{y} \xrightarrow{h \to 0} 0$$

Lösungsformel - homogenes Problem in $\mathbb{R}^n \times (0, \infty)$

Für die Zeitlichen Ableitungen sei $(\boldsymbol{x}, t) \in \mathbb{R}^n \times (\tau, \infty)$ und

$$\left| \frac{u(\boldsymbol{x}, t+\tau) - u(\boldsymbol{x}, t)}{\tau} - \int_{B(0,R)} \frac{\partial}{\partial t} \Phi(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}, t) u_0(\boldsymbol{y}) d\boldsymbol{y} \right|$$

$$\leq \sup_{\boldsymbol{z} \in B(\boldsymbol{x}, R)} \left| \underbrace{\frac{\Phi(\boldsymbol{z}, t+\tau) - \Phi(\boldsymbol{z}, t)}{\tau} - \frac{\partial}{\partial t} \Phi(\boldsymbol{z}, t)}_{\Phi_t(\boldsymbol{z}, t+\theta) - \Phi_t(\boldsymbol{z}, t), |\theta| < |\tau|} \right| \int_{B(0,R)} |u_0(\boldsymbol{y})| d\boldsymbol{y} \xrightarrow{\tau \to 0} 0$$

Es gelten für $(\boldsymbol{x}, t) \in \mathbb{R}^n \times (0, \infty)$ und $|\beta| \geq 1$,

$$\frac{\partial^\beta u}{\partial(\boldsymbol{x}, t)^\beta}(\boldsymbol{x}, t) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial^\beta \Phi}{\partial(\boldsymbol{x}, t)^\beta}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}, t) u_0(\boldsymbol{y}) d\boldsymbol{y}$$

und somit ist (1) bewiesen. Also für $(\boldsymbol{x}, t) \in \mathbb{R}^n \times (0, \infty)$,

$$u_t(\boldsymbol{x}, t) - \Delta u(\boldsymbol{x}, t) = \int_{\mathbb{R}^n} \left[\Phi_t(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}, t) - \Delta_{\boldsymbol{x}} \Phi(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}, t)\right] u_0(\boldsymbol{y}) d\boldsymbol{y} = 0$$

und somit ist (2) bewiesen.

Lösungsformel - homogenes Problem in $\mathbb{R}^n \times (0,\infty)$

Für die Randbedingung fixiere $\boldsymbol{x}^0 \in \mathbb{R}^n$. Dann für $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$, $t > 0$, wird zerlegt,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y},t)|u_0(\boldsymbol{y})-u_0(\boldsymbol{x}^0)|d\boldsymbol{y} &= \left.\int_{\mathbb{R}^n\cap B(\boldsymbol{x}^0,\epsilon)} \Phi(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y},t)|u_0(\boldsymbol{y})-u_0(\boldsymbol{x}^0)|d\boldsymbol{y}\right\} =: I_\epsilon \\ &+ \left.\int_{\mathbb{R}^n\setminus B(\boldsymbol{x}^0,\epsilon)} \Phi(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y},t)|u_0(\boldsymbol{y})-u_0(\boldsymbol{x}^0)|d\boldsymbol{y}\right\} =: J_\epsilon\end{aligned}$$

Termweise abgeschätzt,

$$I_\epsilon \le \sup_{\boldsymbol{y}\in B(\boldsymbol{x}^0,\epsilon)} |u_0(\boldsymbol{y}) - u_0(\boldsymbol{x}^0)| \underbrace{\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y},t)d\boldsymbol{y}}_{I_\Phi=1} \stackrel{\epsilon\to 0}{\longrightarrow} 0$$

Für $\boldsymbol{x} \in B(\boldsymbol{x}^0,\epsilon/2)$ und $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n\setminus B(\boldsymbol{x}^0,\epsilon)$ gilt

$$|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}^0| \le |\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}| + |\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^0| \le |\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}| + \epsilon/2 \le |\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}| + \tfrac{1}{2}|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}^0|$$

Lösungsformel - homogenes Problem in $\mathbb{R}^n \times (0, \infty)$

so $\frac{1}{2}|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}^0| \leq |\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}| \Rightarrow$ für $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n \backslash B(\boldsymbol{x}^0, \epsilon)$,

$$\exp\left(-\frac{|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}|^2}{4t}\right) \leq \exp\left(-\frac{|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}^0|^2}{16t}\right)$$

Daher mit $\bar{u}_0 = \max\limits_{\boldsymbol{z} \in B(0,R)} |u_0(\boldsymbol{z})|$ und $\boldsymbol{x} \in B(\boldsymbol{x}^0, \frac{\epsilon}{2})$,

$$J_\epsilon \leq \frac{2\bar{u}_0}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n \backslash B(\boldsymbol{x}^0, \epsilon)} \exp\left(-\frac{|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}|^2}{4t}\right) d\boldsymbol{y} \leq \frac{2\bar{u}_0}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n \backslash B(\boldsymbol{x}^0, \epsilon)} \exp\left(-\frac{|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}^0|^2}{16t}\right) d\boldsymbol{y}$$

$$= \frac{2\bar{u}_0}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} \int_\epsilon^\infty \left[\int_{\partial B(\boldsymbol{x}^0, r)} \exp\left(-\frac{|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}^0|^2}{16t}\right) dS(\boldsymbol{y})\right] dr = \frac{2n\alpha(n)\bar{u}_0}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} \int_\epsilon^\infty e^{-\frac{r^2}{16t}} r^{n-1} dr$$

$$= \frac{2n\alpha(n)\bar{u}_0}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} [16t]^{\frac{n}{2}} \int_{\frac{\epsilon}{4\sqrt{t}}}^\infty e^{-s^2} s^{n-1} ds = \frac{2^{n+1} n\alpha(n)\bar{u}_0}{\pi^{\frac{n}{2}}} \int_{\frac{\epsilon}{4\sqrt{t}}}^\infty e^{-s^2} s^{n-1} ds \overset{\sqrt[4]{t} = \epsilon \to 0}{\longrightarrow} 0$$

und somit ist (3) bewiesen. ∎

Lösungsformel - inhomogenes Problem in $\mathbb{R}^n \times (0, \infty)$

Bemerkung: Für $u_0 \in C_0(\boldsymbol{R}^n)$ und $u_0(\boldsymbol{x}) \geq 0$ hat u kompakten Träger in $t = 0$, aber $u(\boldsymbol{x}, t) > 0$ gilt $\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ und $\forall t > 0$! Daher fliesst Information weg vom Anfangsträger mit unendlicher Geschwindigkeit!

- Nun wird angenommen, es gelten $u_0 \neq 0$ und $f \neq 0$.

Satz: Für $u_0 \in C_0(\boldsymbol{R}^n)$, $f \in C_0^{(2,1)}(\boldsymbol{R}^n \times (-\infty, \infty))$ und

$$u(\boldsymbol{x}, t) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}, t) u_0(\boldsymbol{y}) d\boldsymbol{y} + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}, t-s) f(\boldsymbol{y}, s) d\boldsymbol{y} ds$$

gelten:

1. $u \in C_0^{(2,1)}(\mathbb{R}^n \times (0, \infty))$,
2. $u_t - \Delta u = f$ in $\mathbb{R}^n \times (0, \infty)$,
3. $\lim\limits_{\mathbb{R}^n \times (0,\infty) \ni (\boldsymbol{x},t) \to (\boldsymbol{x}^0, 0)} u(\boldsymbol{x}, t) = u_0(\boldsymbol{x}^0)$, $\forall \boldsymbol{x}^0 \in \mathbb{R}^n$

Lösungsformel - inhomogenes Problem in $\mathbb{R}^n \times (0,\infty)$

Beweis: Durch die Transformationen $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}$, $r = t - s$,

$$\int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{z}, t-r) f(\boldsymbol{z}, r) d\boldsymbol{z} dr = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(\boldsymbol{y}, s) f(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}, t-s) d\boldsymbol{y} ds$$

Für die räumlichen Ableitungen sei $(\boldsymbol{x}, t) \in \mathbb{R}^n \times (0,\infty)$ und

$$\left| \int_0^t \int_{B(\boldsymbol{x},R+h)} \Phi(\boldsymbol{y}, s) \left[\frac{f(\boldsymbol{x}+h\hat{\boldsymbol{e}}_i-\boldsymbol{y}, t-s) - f(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}, t-s)}{h} - \frac{\partial}{\partial x_i} f(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}, t-s) \right] d\boldsymbol{y} ds \right|$$

$$\leq \sup_{\substack{\boldsymbol{z} \in B(0,R+h) \\ 0 \leq r \leq t}} \Bigg| \underbrace{\frac{f(\boldsymbol{z}+h\hat{\boldsymbol{e}}_i, r) - f(\boldsymbol{z}, r)}{h} - \frac{\partial}{\partial z_i} f(\boldsymbol{z}, r)}_{f_{z_i}(\boldsymbol{z}+\gamma\hat{\boldsymbol{e}}_i, r) - f_{z_i}(\boldsymbol{z}, r), |\gamma| < |h|} \Bigg| \underbrace{\int_0^t \int_{B(\boldsymbol{x},R+h)} |\Phi(\boldsymbol{y}, s)| d\boldsymbol{y}\, ds}_{\leq 1} \xrightarrow{h \to 0} 0$$

Es gelten für $(\boldsymbol{x}, t) \in \mathbb{R}^n \times (0,\infty)$ und $|\alpha| \leq 2$,

$$\frac{\partial^\alpha}{\partial \boldsymbol{x}^\alpha} \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{z}, t-r) f(\boldsymbol{z}, r) d\boldsymbol{z} dr = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(\boldsymbol{z}, s) \frac{\partial^\alpha f}{\partial \boldsymbol{x}^\alpha}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{z}, t-s) d\boldsymbol{z} ds$$

Lösungsformel - inhomogenes Problem in $\mathbb{R}^n \times (0,\infty)$

Für die zeitliche Ableitung sei $(\boldsymbol{x}, t) \in \mathbb{R}^n \times (|\tau|, \infty)$ und

$$\left| \int_0^t \int_{B(\boldsymbol{x},R)} \Phi(\boldsymbol{y}, s) \left[\frac{f(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}, t+\tau-s) - f(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}, t-s)}{\tau} - \frac{\partial}{\partial t} f(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}, t-s) \right] d\boldsymbol{y} ds \right|$$

$$\leq \sup_{\substack{\boldsymbol{z} \in B(0,R) \\ 0 \leq r \leq t}} \left| \underbrace{\frac{f(\boldsymbol{z}, r+\tau) - f(\boldsymbol{z}, r)}{\tau} - \frac{\partial}{\partial r} f(\boldsymbol{z}, r)}_{f_t(\boldsymbol{z}, r+\theta) - f_t(\boldsymbol{z}, r),\, |\theta| < |\tau|} \right| \int_0^t \underbrace{\int_{B(\boldsymbol{x},R)} |\Phi(\boldsymbol{y}, s)| d\boldsymbol{y}}_{\leq 1} ds \overset{\tau \to 0}{\longrightarrow} 0$$

und

$$\left| \frac{1}{\tau} \int_t^{t+\tau} \int_{B(\boldsymbol{x},R)} \left[\Phi(\boldsymbol{y}, s) f(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}, t+\tau-s) - \Phi(\boldsymbol{y}, t) f(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}, 0) \right] d\boldsymbol{y} ds \right|$$

$$\leq \sup_{\substack{\boldsymbol{y} \in B(\boldsymbol{x},R) \\ t \leq s \leq t+\tau}} |\Phi(\boldsymbol{y}, s) f(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}, t+\tau-s) - \Phi(\boldsymbol{y}, t) f(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}, 0)| \underbrace{\int_0^\tau \int_{B(0,R)} \tau^{-1} d\boldsymbol{z} dr}_{|B(0,R)|} \overset{\tau \to 0}{\longrightarrow} 0$$

wobei

$$\frac{1}{\tau} \int_t^{t+\tau} \int_{B(\boldsymbol{x},R)} \Phi(\boldsymbol{y}, t) f(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}, 0) d\boldsymbol{y} ds = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}, t) f(\boldsymbol{y}, 0) d\boldsymbol{y}$$

Lösungsformel - inhomogenes Problem in $\mathbb{R}^n \times (0,\infty)$

und somit ist (1) bewiesen. Daher mit dem letzten Satz folgt:

$$
\begin{aligned}
(\partial_t - \Delta)u(\boldsymbol{x},t) &= \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(\boldsymbol{z},s)(\partial_t - \Delta_{\boldsymbol{x}}) f(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{z}, t-s)\, d\boldsymbol{z}\, ds \\
&\quad + \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}, t) f(\boldsymbol{y}, 0)\, d\boldsymbol{y} \\
&= \left.\int_0^\epsilon \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(\boldsymbol{z},s)(-\partial_s - \Delta_{\boldsymbol{z}}) f(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{z}, t-s)\, d\boldsymbol{z}\, ds \quad \right\} = I_\epsilon \\
&\quad + \left.\int_\epsilon^t \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(\boldsymbol{z},s)(-\partial_s - \Delta_{\boldsymbol{z}}) f(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{z}, t-s)\, d\boldsymbol{z}\, ds \quad \right\} = J_\epsilon \\
&\quad + \left.\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}, t) f(\boldsymbol{y}, 0)\, d\boldsymbol{y} \quad \right\} = K_\epsilon
\end{aligned}
$$

wobei $t > \epsilon > 0$. Durch partielle Integration,

$$
J_\epsilon = \int_\epsilon^t \int_{\mathbb{R}^n} \underbrace{(\partial_s - \Delta_{\boldsymbol{z}})\Phi(\boldsymbol{z},s)}_{=0} f(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{z}, t-s)\, d\boldsymbol{z}\, ds
$$

$$
+ \underbrace{\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(\boldsymbol{z},\epsilon) f(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{z}, t-\epsilon)\, d\boldsymbol{z}}_{L_\epsilon} - \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(\boldsymbol{z},t) f(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{z}, 0)\, d\boldsymbol{z} = L_\epsilon - K_\epsilon
$$

Lösungsformel - inhomogenes Problem in $\mathbb{R}^n \times (0, \infty)$

Termweise abgeschätzt,

$$
\begin{aligned}
I_\epsilon &= \int_0^\epsilon \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(\boldsymbol{z}, s)(-\partial_s - \Delta_{\boldsymbol{z}}) f(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{z}, t - s) d\boldsymbol{z} ds \\
&\leq \|f\|_{C^{(2,1)}(\mathbb{R}^n \times (-\infty, \infty))} \underbrace{\int_0^\epsilon \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(\boldsymbol{z}, s) d\boldsymbol{z} ds}_{=\epsilon} \xrightarrow{\epsilon \to 0} 0
\end{aligned}
$$

Für die Abschätzung von $L_\epsilon - f(\boldsymbol{x}, t)$ wird die Zerlegung verwendet,

$$
\begin{aligned}
|L_\epsilon - f(\boldsymbol{x}, t)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} \underbrace{\Phi(\boldsymbol{z}, \epsilon)[f(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{z}, t - \epsilon) - f(\boldsymbol{x}, t)]}_{=:\Phi df(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}, t, \epsilon)} d\boldsymbol{z} \right| \\
\leq & \underbrace{\int_{B(0, \sqrt[4]{\epsilon})} |\Phi df(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}, t, \epsilon)| d\boldsymbol{z}}_{M_\epsilon} + \underbrace{\int_{\mathbb{R}^n \setminus B(0, \sqrt[4]{\epsilon})} |\Phi df(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}, t, \epsilon)| d\boldsymbol{z}}_{N_\epsilon}
\end{aligned}
$$

Lösungsformel - inhomogenes Problem in $\mathbb{R}^n \times (0, \infty)$

Termweise abgeschätzt,

$$|M_\epsilon| \leq \sup_{\boldsymbol{z} \in B(0, \sqrt[4]{\epsilon})} |f(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{z}, t - \epsilon) - f(\boldsymbol{x}, t)| \underbrace{\int_{B(0, \sqrt[4]{\epsilon})} \Phi(\boldsymbol{z}, \epsilon) d\boldsymbol{z}}_{\leq 1} \overset{\epsilon \to 0}{\longrightarrow} 0$$

Mit $\bar{f} = \max_{\mathbb{R}^n \times (-\infty, \infty)} |f|$ wird schliesslich N_ϵ so abgeschätzt,

$$|N_\epsilon| \leq 2\bar{f} \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(0, \sqrt[4]{\epsilon})} \Phi(\boldsymbol{z}, \epsilon) d\boldsymbol{z} = \frac{2\bar{f}}{(4\pi\epsilon)^{\frac{n}{2}}} \int_{\sqrt[4]{\epsilon}}^{\infty} \left[\int_{\partial B(0,r)} \exp\left(-\frac{|\boldsymbol{z}|^2}{4\epsilon} \right) dS(\boldsymbol{z}) \right] dr$$

$$= \frac{2n\alpha(n)\bar{f}}{(4\pi\epsilon)^{\frac{n}{2}}} \int_{\sqrt[4]{\epsilon}}^{\infty} e^{-\frac{r^2}{4\epsilon}} r^{n-1} dr = \frac{2n\alpha(n)\bar{f}}{\pi^{\frac{n}{2}}} \int_{\frac{1}{2\sqrt[4]{\epsilon}}}^{\infty} e^{-s^2} s^{n-1} ds \overset{\epsilon \to 0}{\longrightarrow} 0$$

und somit ist (2) bewiesen.

Lösungsformel - inhomogenes Problem in $\mathbb{R}^n \times (0, \infty)$

Für die Randbedingung ist schon im letzten Satz bewiesen worden:

$$\lim_{\mathbb{R}^n \times (0,\infty) \ni (\boldsymbol{x},t) \to (\boldsymbol{x}^0, 0)} \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}, t) u_0(\boldsymbol{y}) d\boldsymbol{y} = u_0(\boldsymbol{x}^0), \quad \forall \boldsymbol{x}^0 \in \mathbb{R}^n$$

Für das zweite Integral in der Lösungsformel,

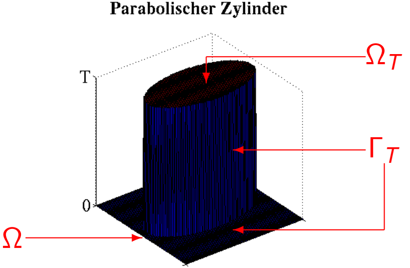
$$\begin{aligned} &\left| \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}, t - s) f(\boldsymbol{y}, s) d\boldsymbol{y} ds \right| \\ &\sup_{\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n, 0 \leq s \leq t} |f(\boldsymbol{y}, s)| \int_0^t \underbrace{\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}, t - s) d\boldsymbol{y}}_{=1} ds \\ &\leq t \|f\|_{C(\mathbb{R}^{n+1})} \xrightarrow{t \to 0} 0 \end{aligned}$$

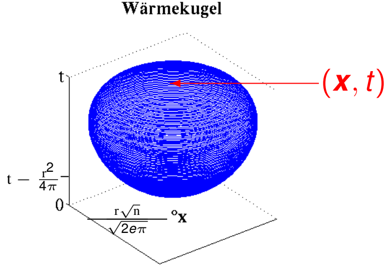
und somit ist (3) bewiesen. ∎

Mittelwertformeln

Def: Für eine gegebene Domäne $\Omega \subset \mathbb{R}^n$,

- $\Omega_T = \Omega \times (0, T]$ ist der parabolische Zylinder, d.h. die Menge vom Wasser, und
- $\Gamma_T = \bar{\Omega}_T \backslash \Omega_T$ ist der parabolische Rand, d.h. der Behälter:





Def: Für $(\boldsymbol{x}, t) \in \mathbb{R}^{n+1}$ und $r > 0$ die Wärmekugel ist die Menge,

$$E(\boldsymbol{x}, t; r) = \{(\boldsymbol{y}, s) \in \mathbb{R}^{n+1} : s \leq t, \Phi(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}, t - s) \geq r^{-n}\}$$

Mittelwertsatz

Satz (Mittelwert): Wenn $u \in C^{(2,1)}(\Omega_T)$ erfüllt $[\partial_t - \Delta]u = 0$, dann gilt

$$u(\boldsymbol{x}, t) = \frac{1}{4r^n} \int\int_{E(\boldsymbol{x},t;r)} u(\boldsymbol{y}, s) \frac{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}|^2}{(t-s)^2} d\boldsymbol{y} ds, \quad \forall E(\boldsymbol{x}, t; r) \subset \Omega_T$$

Beweis: Zuerst eine günstige Koordinatenverschiebung: $\boldsymbol{x} = 0$, $t = 0$, $E(r) = E(0, 0; r)$. Der Plan: Zeige, $\phi'(r) = 0$ und $\phi(r) = 4u(0, 0)$ wobei

$$\phi(r) = \frac{1}{r^n} \int\int_{E(r)} u(\boldsymbol{y}, s) \frac{|\boldsymbol{y}|^2}{s^2} d\boldsymbol{y} ds$$

Explizite Rechnung,

$$\begin{aligned}
\phi'(r) &= \frac{d}{dr} \int\int_{E(1)} u(r\mathbf{y}, r^2 \mathrm{s}) \frac{|\mathbf{y}|^2}{\mathrm{s}^2} d\mathbf{y} d\mathrm{s} \quad (\boldsymbol{y} = r\mathbf{y}, s = r^2 \mathrm{s}) \\
&= \int\int_{E(1)} \left[\nabla_{\mathbf{y}} u(r\mathbf{y}, r^2\mathrm{s}) \cdot \mathbf{y} + u_s(r\mathbf{y}, r^2\mathrm{s}) 2r\mathrm{s} \right] \frac{|\mathbf{y}|^2}{\mathrm{s}^2} d\mathbf{y} d\mathrm{s} \\
&= \frac{1}{r^{n+1}} \int\int_{E(r)} \left[\nabla u \cdot \boldsymbol{y} \frac{|\boldsymbol{y}|^2}{s^2} + 2u_s \frac{|\boldsymbol{y}|^2}{s} \right] d\boldsymbol{y} ds \quad =: A + B
\end{aligned}$$

Mittelwertsatz

Es gelten $\nabla\psi = \boldsymbol{y}/(2s)$ in $E(r)$ und $\psi = 0$ auf $\partial E(r)$ für

$$\psi(\boldsymbol{y}, s) = \log \Phi(\boldsymbol{y}, -s) - \log r^{-n} = -\frac{n}{2}\log(-4\pi s) + \frac{|\boldsymbol{y}|^2}{4s} + n\log r$$

und so kann B umgeschrieben werden:

$$\begin{aligned}
B &= \frac{1}{r^{n+1}}\int\int_{E(r)}(4u_s\boldsymbol{y})\cdot\nabla\psi\, d\boldsymbol{y}ds = -\frac{1}{r^{n+1}}\int\int_{E(r)} \underbrace{\nabla\cdot(4u_s\boldsymbol{y})\psi}_{4\nabla u_s\cdot\boldsymbol{y}\psi + 4nu_s\psi}\, d\boldsymbol{y}ds \\
&\qquad + \frac{1}{r^{n+1}}\int\int_{\partial E(r)} \boldsymbol{\nu}\cdot(4u_s\boldsymbol{y})\psi|_{=0}\, dS(\boldsymbol{y}, s) \\
&= \frac{1}{r^{n+1}}\int_{|\boldsymbol{y}|^2 \le \frac{nr^2}{2e\pi}}\left[\int_{\Phi(\boldsymbol{y},-s)\ge r^{-n}} 4\nabla u\cdot\boldsymbol{y}\psi_s ds - 4\nabla u\cdot\boldsymbol{y}\psi|_{=0}\Big|_{\Phi(\boldsymbol{y},-s)=r^{-n}}\right] d\boldsymbol{y} \\
&\qquad \left(\psi_s = -\frac{n}{2s} - \underbrace{\frac{|\boldsymbol{y}|^2}{4s^2}}_{\to A}\right) \qquad - \frac{1}{r^{n+1}}\int\int_{E(r)} 4nu_s\psi\, d\boldsymbol{y}ds \\
&= -\frac{2n}{r^{n+1}}\int\int_{E(r)}\frac{\nabla u\cdot\boldsymbol{y}}{s}\, d\boldsymbol{y}ds - \frac{4n}{r^{n+1}}\int\int_{E(r)}(u_s = \Delta u)\psi\, d\boldsymbol{y}ds - A
\end{aligned}$$

Mittelwertsatz

Schliesslich folgt $\phi'(r) = 0$ aus

$$
\begin{aligned}
B &= -\frac{2n}{r^{n+1}} \int_{-\frac{r^2}{4\pi}}^{0} \int_{\Phi(\boldsymbol{y},-s)\geq r^{-n}} \Bigg[\frac{\nabla u \cdot \boldsymbol{y}}{s} - 2 \underbrace{\nabla \psi}_{=\boldsymbol{y}/(2s)} \cdot \nabla u \Bigg]_{=0} d\boldsymbol{y} ds \\
&- \frac{4n}{r^{n+1}} \int_{-\frac{r^2}{4\pi}}^{0} \Bigg[\int_{\Phi(\boldsymbol{y},-s)=r^{-n}} \psi|_{=0} \nabla u \cdot \boldsymbol{\nu} dS(\boldsymbol{y}) \Bigg] ds - A = -A
\end{aligned}
$$

Um $\phi(r) = 4u(0,0)$ zu zeigen,

$$
\phi(r) = \lim_{\rho \to 0} \phi(\rho) = \lim_{\rho \to 0} \frac{1}{\rho^n} \int \int_{E(\rho)} u(\boldsymbol{y}, s) \frac{|\boldsymbol{y}|^2}{s^2} d\boldsymbol{y} ds =
$$

$$
\lim_{\rho \to 0} \left\{ \frac{1}{\rho^n} \int \int_{E(\rho)} [u(\boldsymbol{y}, s) - u(0,0)] \frac{|\boldsymbol{y}|^2}{s^2} d\boldsymbol{y} ds + u(0,0) \underbrace{\int \int_{E(\rho)} \frac{|\boldsymbol{y}|^2}{\rho^n s^2} d\boldsymbol{y} ds}_{=4} \right\}
$$

Hausaufgabe: Zeige =4. Dann gilt:

$$
|\phi(r) - 4u(0,0)| \leq \underbrace{\sup_{(\boldsymbol{y},s)\in E(\rho)} |u(\boldsymbol{y}, s) - u(0,0)|}_{\to 0, \rho \to 0} \overbrace{\int \int_{E(\rho)} \frac{|\boldsymbol{y}|^2}{\rho^n s^2} d\boldsymbol{y} ds}
$$

■

Maximum Prinzip

Satz (Starkes Maximum-Prinzip): Angenommen ist Ω eine Domäne und $u \in C^{(2,1)}(\Omega_T) \cap C(\bar{\Omega}_T)$ erfüllt $u_t = \Delta u$. Es gelten:

$$(i) \qquad \max_{\boldsymbol{x} \in \bar{\Omega}_T} u(\boldsymbol{x}) = \max_{\boldsymbol{x} \in \Gamma_T} u(\boldsymbol{x})$$

und

$$(ii) \quad \left.\begin{array}{c} \Omega \text{ zusammenhängend, und} \\ \exists(\boldsymbol{x}^0, t^0) \in \Omega_T \ni \\ u(\boldsymbol{x}^0, t^0) = \displaystyle\max_{(\boldsymbol{x},t) \in \bar{\Omega}_T} u(\boldsymbol{x}) \end{array}\right\} \Rightarrow u = \text{Konstant in } \bar{\Omega}_{t^0}$$

Beweis: Um (*ii*) zu beweisen, nimm an, $\exists(\boldsymbol{x}^0, t^0) \in \Omega_T \ni M = u(\boldsymbol{x}^0, t^0)$. Dann $\forall r > 0$ klein genug, $E(\boldsymbol{x}^0, t^0; r) \subset \Omega_T$. Mit dem Mittelwertsatz,

$$M = u(\boldsymbol{x}^0, t^0) = \frac{1}{4r^n} \int\int_{E(\boldsymbol{x}^0, t^0; r)} u(\boldsymbol{y}, s)\Big|_{\leq M} \frac{|\boldsymbol{x}^0 - \boldsymbol{y}|^2}{(t^0 - s)^2} d\boldsymbol{y} ds \leq M$$

und $\int\int_{E(\boldsymbol{x}^0, t^0; r)} [M - u(\boldsymbol{y}, s)]_{\geq 0} \frac{|\boldsymbol{x}^0 - \boldsymbol{y}|^2}{(t^0 - s)^2} d\boldsymbol{y} ds = 0 \Rightarrow u = M$ in $E(\boldsymbol{x}^0, t^0; r)$.

Maximum Prinzip

Mit $s_0 < t_0$ sei $L = \{(\boldsymbol{x}^0, t^0)\lambda + (1-\lambda)(\boldsymbol{y}^0, s^0) : \lambda \in [0,1]\} \subset \Omega_T$ eine beliebige Strecke. Definiere

$$\lambda^0 = \min\{\lambda \in [0,1] : u(\boldsymbol{x}^0\lambda + (1-\lambda)\boldsymbol{y}^0, t^0\lambda + (1-\lambda)s^0) = M\}$$

Wegen $u \in C(\bar{\Omega}_T)$ wird das Minimum angenommen, und mit $(\boldsymbol{z}^0, r^0) = (\boldsymbol{x}^0, t^0)\lambda^0 + (1-\lambda^0)(\boldsymbol{y}^0, s^0)$ gilt $u(\boldsymbol{z}^0, r^0) = M$. Da $u = M$ in $E(\boldsymbol{z}^0, r^0; \rho)$, $\forall \rho > 0$ klein genug gelten muss, folgen $\lambda^0 = 0$, $r^0 = s^0$ und $u = M$ auf L.

Nun sei $(\boldsymbol{x}, t) \in \Omega_{t^0}$ beliebig. Wenn Ω zusammenhängend ist, $\exists \{\boldsymbol{x}^k\}_{k=0}^m$, $\boldsymbol{x}^m = \boldsymbol{x}$, wobei $\{\boldsymbol{x}^k\lambda + (1-\lambda)\boldsymbol{x}^{k+1} : \lambda \in [0,1]\} \subset \Omega$ gilt. Wähle $\{t^k\}_{k=0}^m$ so aus, dass $t^m = t$ und $t^{k+1} < t^k$ gelten. Dann gilt $L_k = \{(\boldsymbol{x}^k, t^k)\lambda + (1-\lambda)(\boldsymbol{x}^{k+1}, t^{k+1}) : \lambda \in [0,1]\} \subset \Omega_T$. Wie mit der Strecke L folgt $u = M$ auf L_0 dann L_1 usw. Somit ist (*ii*) bewiesen.

Maximum Prinzip

Wenn Ω zusammenhängend ist, folgt aus (*ii*):

$$(\star) \qquad M = \max_{\boldsymbol{x}\in\bar{\Omega}_T} u(\boldsymbol{x}) = \max_{\boldsymbol{x}\in\Gamma_T} u(\boldsymbol{x})$$

weil M in Ω_T° nicht angenommen wird, ausser $u =$ Konstante, und in diesem Fall wird M sowieso am Γ_T angenommen.

Im allgemeinen gilt $\Omega = \cup_n \Omega_n$, wobei $\{\Omega_n\}$ disjunkt, zusammenhängend und offen sind. Nach $(\star)$ folgt

$$\max_{\boldsymbol{x}\in\bar{\Omega}_T} u(\boldsymbol{x}) = \max_n \max_{\boldsymbol{x}\in\bar{\Omega}_{n,T}} u(\boldsymbol{x}) = \max_n \max_{\boldsymbol{x}\in\partial\Gamma_{n,T}} u(\boldsymbol{x}) = \max_{\boldsymbol{x}\in\partial\Gamma_T} u(\boldsymbol{x})$$

und somit (*i*). ∎

Satz (Eindeutigkeit): Für $g \in C(\Gamma_T)$ und $f \in C(\Omega_T)$ $\exists$ höchstens eine Lösung $u \in C^{(2,1)}(\Omega_T) \cap C(\bar{\Omega}_T)$ des Anfangs- und Randwertproblems,

$$\left\{ \begin{array}{rcll} \partial_t u - \Delta u & = & f, & \Omega_T \\ u & = & g, & \Gamma_T \end{array} \right.$$

Maximum Prinzip

Beweis: Seien u_1 und u_2 zwei Lösungen. Dann erfüllen $w_1 = u_1 - u_2$ und $w_2 = u_2 - u_1$,

$$\left\{\begin{array}{rcll} \partial_t w_1 - \Delta w_1 & = & 0, & \Omega_T \\ w_1 & = & 0, & \Gamma_T \end{array}\right. \quad \text{und} \quad \left\{\begin{array}{rcll} \partial_t w_2 - \Delta w_2 & = & 0, & \Omega_T \\ w_2 & = & 0, & \Gamma_T \end{array}\right.$$

Nach dem Maximum-Prinzip gilt

$$\max_{\boldsymbol{x}\in\bar{\Omega}_T} w_1(\boldsymbol{x}) = \max_{\boldsymbol{x}\in\Gamma_T} w_1(\boldsymbol{x}) = 0 = \max_{\boldsymbol{x}\in\Gamma_T} w_2(\boldsymbol{x}) = \max_{\boldsymbol{x}\in\bar{\Omega}_T} w_2(\boldsymbol{x})$$

Daher gilt

$$\max_{\boldsymbol{x}\in\bar{\Omega}_T}[u_1(\boldsymbol{x}) - u_2(\boldsymbol{x})] = \max_{\boldsymbol{x}\in\bar{\Omega}_T}[u_2(\boldsymbol{x}) - u_1(\boldsymbol{x})] = 0$$

und $u_1 = u_2$ in Ω_T. ■

Def: Das *Cauchy Problem*:

$$\left\{\begin{array}{rcll} \partial_t u - \Delta u & = & 0, & \mathbb{R}^n \times (0, T] \\ u & = & u_0, & \mathbb{R}^n \times \{t = 0\} \end{array}\right.$$

Maximum Prinzip

Satz (Maximum Prinzip): Wenn $u \in C^{(2,1)}(\mathbb{R}^n \times (0,T]) \cap C(\mathbb{R} \times [0,T])$ das Cauchy Problem löst und erfüllt

$$u(x,t) \leq Ae^{a|\boldsymbol{x}|^2}, \quad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n, t \in [0,T]$$

für Konstanten $A, a > 0$, dann folgt $\sup\limits_{\mathbb{R}^n \times [0,T]} u = \sup\limits_{\mathbb{R}^n \times \{t=0\}} u_0$. ■

Satz (Eindeutigkeit): Für $u_0 \in C(\mathbb{R}^n)$ und $f \in C(\mathbb{R}^n \times [0,T])$ $\exists$ höchstens eine Lösung $u \in C^{(2,1)}(\mathbb{R}^n \times (0,T]) \cap C(\mathbb{R}^n \times [0,T])$ des Anfangswertproblems,

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u &= f, & \mathbb{R}^n \times (0,T] \\ u &= u_0, & \mathbb{R}^n \times \{t=0\} \end{cases}$$

die erfüllt

$$|u(x,t)| \leq Ae^{a|\boldsymbol{x}|^2}, \quad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n, t \in [0,T]$$

für Konstanten $A, a > 0$.

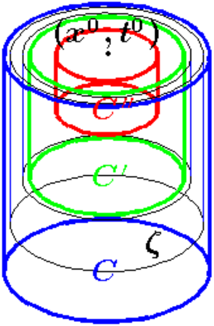
Beweis: Wenn u_1 und u_2 zwei Lösungen sind, folgt $w_1 = u_1 - u_2 = 0 = u_2 - u_1 = w_2$ aus dem letzten Satz. ■

Regularität

Satz (Regularität): Wenn $u \in C^{(2,1)}(\Omega_T)$ die Wärmegleichung in Ω_T löst, gilt $u \in C^\infty(\Omega_T)$.

Beweis: Fixiere $(\boldsymbol{x}^0, t^0) \in \Omega_T$. Definiere

$$\mathcal{C}(\boldsymbol{x}, t; r) := \{(\boldsymbol{y}, s) : |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}| \leq r, t - r^2 \leq s \leq t\}$$



Wähle $r > 0$ sodass

$$C := \mathcal{C}(\boldsymbol{x}^0, t^0; r) \subset \Omega_T.$$

Dann definiere

$$C' = \mathcal{C}(\boldsymbol{x}^0, t^0; \tfrac{3}{4} r) \subset C, \quad C'' = \mathcal{C}(\boldsymbol{x}^0, t^0; \tfrac{1}{2} r) \subset C'$$

und eine *cut-off* Funktion $\zeta \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$

$$\begin{cases} 0 \leq \zeta \leq 1, \quad \zeta \equiv 1 \text{ in } C' \\ \zeta \equiv 0 \text{ auf } \{(\boldsymbol{y}, s) \in \partial C : s < t^0\} \\ \zeta \equiv 0 \text{ in } (\mathbb{R}^n \times [0, t^0]) \setminus C \end{cases}$$

Regularität

Dann $v = \zeta u$ erfüllt

$$\begin{array}{rclclcl} v_t & = & \zeta u_t & + & u\zeta_t & & \\ \Delta v & = & \zeta \Delta u & + & 2\nabla\zeta\cdot\nabla u & + & u\Delta\zeta \\ \hline v_t - \Delta v & = & & - & 2\nabla\zeta\cdot\nabla u & + & u(\zeta_t - \Delta\zeta) \quad =: \quad \tilde{f} \end{array}$$

sowohl $v = 0, t \leq t^0 - r^2$ und insbesondere

$$v = 0, \quad \mathbb{R}^n \times \{t = 0\}$$

Nun definiere

$$\tilde{v}(\boldsymbol{x}, t) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}, t - s)\tilde{f}(\boldsymbol{y}, s) d\boldsymbol{y} ds$$

Wegen der Schranke,

$$|\tilde{v}(\boldsymbol{x}, t)| \leq \sup_{(\boldsymbol{y},s)\in C} |\tilde{f}(\boldsymbol{y}, s)| \underbrace{\int_0^{t^0} \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}, t - s) d\boldsymbol{y} ds}_{=t^0}$$

folgt $\tilde{v} = v$ vom letzten Satz. Auch $\zeta = 1$ in $C' \Rightarrow u = v$ in C'.

Regularität

Nun sei $(\boldsymbol{x}, t) \in C'' \subset C'$. Dann gilt

$$u(\boldsymbol{x},t) = v(\boldsymbol{x},t) = \int\int_C \{\underbrace{\Phi(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}, t-s)}_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}, t=s \text{ vermieden:}}[\underbrace{\zeta_s(\boldsymbol{y},s) - \Delta\zeta(\boldsymbol{y},s)}_{=0 \text{ in } C'} u(\boldsymbol{y},s) - 2\underbrace{\nabla\zeta(\boldsymbol{y},s)}_{=0 \text{ in } C'} \cdot \nabla u(\boldsymbol{y},s)]\} d\boldsymbol{y} ds$$

Durch partielle Integration des letzten Terms,

$$u(\boldsymbol{x},t) = v(\boldsymbol{x},t) = \int\int_{C\setminus C'} \{\Phi(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}, t-s)[\zeta_s(\boldsymbol{y},s) - \Delta\zeta(\boldsymbol{y},s)] + 2\nabla \cdot [\Phi(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}, t-s)\nabla\zeta(\boldsymbol{y},s)]\} u(\boldsymbol{y},s) d\boldsymbol{y} ds$$

Diese Formel hat die Form

$$u(\boldsymbol{x},t) = \int\int_C K(\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y},s) u(\boldsymbol{y},s) d\boldsymbol{y} ds, \quad (\boldsymbol{x},t) \in C''$$

wobei $K(\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y},s) = 0$, $\forall(\boldsymbol{x},t) \in C''$, $\forall(\boldsymbol{y},s) \in C'$, da $\zeta = 1$ in C'. Bemerke, $K(\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y},s)$ is glatt $\forall(\boldsymbol{x},t) \in C''$, $\forall(\boldsymbol{y},s) \in C\setminus C'$. Wegen dieser Formel für u gilt $u \in \mathcal{C}^\infty$ in C''. ■

Energie Methoden

Satz (Eindeutigkeit): Für $g \in C(\Gamma_T)$ und $f \in C(\Omega_T)$ $\exists$ höchstens eine Lösung $u \in \mathcal{C}^{(2,1)}(\bar{\Omega}_T)$ des Anfangs- und Randwertproblems,

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u &= f, \quad \Omega_T \\ u &= g, \quad \Gamma_T \end{cases}$$

Beweis: Seien u_1 und u_2 zwei Lösungen. Dann löst $w = u_1 - u_2$ das Anfangs- und Randwertproblem,

$$\begin{cases} \partial_t w - \Delta w &= 0, \quad \Omega_T \\ w &= 0, \quad \Gamma_T \end{cases}$$

und

$$e(t) = \int_\Omega w^2(\boldsymbol{x}, t) d\boldsymbol{x}$$

erfüllt:

Energie Methoden

$$\begin{aligned}
\dot{e}(t) &= 2\int_\Omega w(\boldsymbol{x},t)w_t(\boldsymbol{x},t)d\boldsymbol{x} = 2\int_\Omega w(\boldsymbol{x},t)\Delta w(\boldsymbol{x},t)d\boldsymbol{x} \\
&= -2\int_\Omega |\nabla w(\boldsymbol{x},t)|d\boldsymbol{x} \le 0
\end{aligned}$$

Dann $0 \le e(t) \le e(0) = 0 \Rightarrow u_1 = u_2$. ■

Satz: Für

$$\Sigma_T = \{(\boldsymbol{x},t) \in \partial\Omega_T : t \neq 0\},$$

$g \in C(\Sigma_T)$ und $f \in C(\Omega_T)$ $\exists$ höchstens eine Lösung $u \in \mathcal{C}^{(2,1)}(\bar{\Omega}_T)$ des End- und Randwertproblems,

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u &= f, \quad \Omega_T \\ u &= g, \quad \Sigma_T \end{cases}$$

Beweis: Hausaufgabe.

Wellengleichung

- Start in $\mathbb{R}^1$:
$$0 = \partial_t^2 u - \partial_x^2 u = (\partial_t - \partial_x)(\partial_t + \partial_x)u$$
Also erfüllt u die zwei Transportgleichungen
$$(\partial_t - \partial_x)u = 0 \text{ und } (\partial_t + \partial_x)u = 0.$$
- Daher hat die Lösung u die Form
$$u(x,t) = f_{\mathrm{L}}(x+t) + f_{\mathrm{R}}(x-t)$$
wobei die Wellen f_{L} und f_{R} nach links beziehungsweise nach rechts fahren.
- Für eine Lösungsformel für das Anfangswertproblem,
$$\begin{cases} \partial_t^2 u + \partial_x^2 u & = & 0, & \mathbb{R}^1 \times (0,\infty) \\ u & = & u_0, & \mathbb{R}^1 \times \{t=0\} \\ \partial_t u & = & u_1, & \mathbb{R}^1 \times \{t=0\} \end{cases}$$
merkt man, es gelten
$$u_0(x) = u(x,0) = f_{\mathrm{L}}(x) + f_{\mathrm{R}}(x)$$
$$u_1(x) = u_t(x,0) = f'_{\mathrm{L}}(x) - f'_{\mathrm{R}}(x)$$

d'Alembert's Formel

- Weiters
$$u_0'(x) = f_{\mathrm{L}}'(x) + f_{\mathrm{R}}'(x)$$
$$u_1(x) = f_{\mathrm{L}}'(x) - f_{\mathrm{R}}'(x)$$
und daher
$$u_0'(x) + u_1(x) = 2f_{\mathrm{L}}'(x)$$
$$u_0'(x) - u_1(x) = 2f_{\mathrm{R}}'(x)$$
- Setze
$$f_{\mathrm{L}}(x) = \frac{1}{2}\left[u_0(x) + \int_0^x u_1(y)dy\right]$$
und
$$f_{\mathrm{R}}(x) = \frac{1}{2}\left[u_0(x) - \int_0^x u_1(y)dy\right]$$
- Die Rechnungen führen zu *d'Alembert's* Formel:
$$\begin{aligned} u(x,t) &= f_{\mathrm{L}}(x+t) + f_{\mathrm{R}}(x-t) \\ &= \tfrac{1}{2}[u_0(x+t) + u_0(x-t)] + \tfrac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} u_1(y)dy \end{aligned}$$

d'Alembert's Formel

Satz: Für $u_0 \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ und $u_1 \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$,

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[u_0(x+t) + u_0(x-t)] + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} u_1(y)dy$$

erfüllt:

1. $u \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^1 \times [0,\infty))$
2. $\partial_t^2 u - \partial_x^2 u = 0$ in $\mathbb{R}^1 \times (0,\infty)$
3. $\lim\limits_{(x,t)\to(x^0,0^+)} u(x,t) = u_0(x^0)$, $\lim\limits_{(x,t)\to(x^0,0^+)} u_t(x,t) = u_1(x^0)$, $\forall x^0 \in \mathbb{R}^1$

Beweis: Hausaufgabe.

- Nun für $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$,

$$\begin{cases} \partial_t^2 u + \Delta u &= 0, & \mathbb{R}^n \times (0,\infty) \\ u &= u_0, & \mathbb{R}^n \times \{t=0\} \\ \partial_t u &= u_1, & \mathbb{R}^n \times \{t=0\} \end{cases}$$

Methode der Kugelmittelwerte

- Methode der Kugelmittelwerte,

$$U(\boldsymbol{x};r,t)=⨍_{\partial B(\boldsymbol{x},r)} u(\boldsymbol{y},t)dS(\boldsymbol{y}) \xrightarrow{r\to 0} u(\boldsymbol{x},t)$$

$$U_0(\boldsymbol{x};r)=⨍_{\partial B(\boldsymbol{x},r)} u_0(\boldsymbol{y})dS(\boldsymbol{y}),\quad U_1(\boldsymbol{x};r)=⨍_{\partial B(\boldsymbol{x},r)} u_1(\boldsymbol{y})dS(\boldsymbol{y})$$

Satz: Wenn $u\in\mathcal{C}^m(\mathbb{R}^n\times[0,\infty))$, $m\geq 2$, das obige Anfangswertproblem löst, dann löst $U\in\mathcal{C}^m(\mathbb{R}^1_+\times[0,\infty))$ das folgende Anfangswertproblem:

$$\left\{\begin{array}{rcll} \partial_t^2 U-\partial_r(r^{n-1}\partial_r U)/r^{n-1} & = & 0, & \mathbb{R}^n_+\times(0,\infty) \\ U & = & U_0, & \mathbb{R}^n_+\times\{t=0\} \\ \partial_t U & = & U_1, & \mathbb{R}^n_+\times\{t=0\} \end{array}\right.$$

Diese ist die *Euler-Poisson-Darboux Gleichung*.

Methode der Kugelmittelwerte

Beweis: Durch eine Koordinatentransformation, $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x} + r\boldsymbol{z}$,

$$U(\boldsymbol{x}; r, t) = \fint_{\partial B(\boldsymbol{x},r)} u(\boldsymbol{y}, t) dS(\boldsymbol{y}) = \frac{1}{n\alpha(n) r^{n-1}} \int_{\partial B(\boldsymbol{x},r)} u(\boldsymbol{y}, t) \frac{\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}}{r} \cdot \boldsymbol{\nu} dS(\boldsymbol{y})$$
$$= \frac{1}{\alpha(n) r^{n-1}} \int_{B(\boldsymbol{x},r)} \nabla_{\boldsymbol{y}} \cdot \left[u(\boldsymbol{y}, t) \frac{\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}}{r} \right] d\boldsymbol{y}$$
$$= \frac{1}{\alpha(n) r^{n-1}} \int_{B(0,1)} r^{-1} \nabla_{\boldsymbol{z}} \cdot [u(\boldsymbol{x} + r\boldsymbol{z}, t)\boldsymbol{z}] r^n d\boldsymbol{z} = \frac{1}{n\alpha(n)} \int_{\partial B(0,1)} u(\boldsymbol{x} + r\boldsymbol{z}, t) dS(\boldsymbol{z})$$

und $U(\boldsymbol{x}; 0, t) = u(\boldsymbol{x}, t)$. Für die *räumlichen* Ableitungen, $r > 0$,

$$\partial_r U(\boldsymbol{x}; r, t) = \frac{1}{n\alpha(n)} \int_{\partial B(0,1)} \nabla_{\boldsymbol{x}} u(\boldsymbol{x} + r\boldsymbol{z}, t) \cdot \boldsymbol{z} dS(\boldsymbol{z})$$
$$= \frac{1}{n\alpha(n)} \int_{\partial B(0,1)} r^{-1} \nabla_{\boldsymbol{z}} u(\boldsymbol{x} + r\boldsymbol{z}, t) \cdot \boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{z}) dS(\boldsymbol{z})$$
$$= \frac{r^{-1}}{n\alpha(n)} \int_{\partial B(0,1)} \frac{\partial}{\partial \nu(\boldsymbol{z})} u(\boldsymbol{x} + r\boldsymbol{z}, t) dS(\boldsymbol{z})$$

Methode der Kugelmittelwerte

$$
\begin{aligned}
&= \frac{r^{-1}}{n\alpha(n)} \int_{B(0,1)} \Delta_{\boldsymbol{z}} u(\boldsymbol{x} + r\boldsymbol{z}, t) d\boldsymbol{z} = \frac{r^{-1}}{n\alpha(n)} \int_{B(0,1)} r^2 \Delta_{\boldsymbol{x}} u(\boldsymbol{x} + r\boldsymbol{z}, t) d\boldsymbol{z} \\
&= \frac{r^{1-n}}{n\alpha(n)} \int_{B(\boldsymbol{x},r)} \Delta_{\boldsymbol{y}} u(\boldsymbol{y}, t) d\boldsymbol{y} \\
&= \frac{r}{n} \frac{1}{\alpha(n) r^n} \int_{B(\boldsymbol{x},r)} \Delta u(\boldsymbol{y}, t) d\boldsymbol{y} = \frac{r}{n} \fint_{B(\boldsymbol{x},r)} \Delta u(\boldsymbol{y}, t) d\boldsymbol{y}
\end{aligned}
$$

Mit der folgenden Rechung folgt $U_r(\boldsymbol{x}; r, t) \xrightarrow{r \to 0} 0 = U_r(\boldsymbol{x}; 0, t)$,

$$
\begin{aligned}
U_r(\boldsymbol{x}; 0, t) &= \lim_{\rho \to 0^+} \frac{1}{\rho} \left[\frac{1}{n\alpha(n)} \int_{\partial B(0,1)} u(\boldsymbol{x} + \rho\boldsymbol{z}, t) dS(\boldsymbol{z}) - u(\boldsymbol{x}, t) \right] \\
&= \lim_{\rho \to 0^+} \frac{1}{\rho n\alpha(n)} \int_{\partial B(0,1)} [u(\boldsymbol{x} + \rho\boldsymbol{z}, t) - u(\boldsymbol{x}, t)] dS(\boldsymbol{z}) \\
&= \lim_{\rho \to 0^+} \frac{1}{n\alpha(n)} \int_{\partial B(0,1)} [\nabla_{\boldsymbol{x}} u(\boldsymbol{x}, t) \cdot \boldsymbol{z} \frac{\rho}{\rho} + \frac{1}{2} \frac{\rho^2}{\rho} \boldsymbol{z}^{\mathrm{T}} \nabla^2 u(\boldsymbol{x} + \xi\boldsymbol{z}, t) \boldsymbol{z})] dS(\boldsymbol{z}) \\
&= \frac{1}{n\alpha(n)} \int_{\partial B(0,1)} \nabla_{\boldsymbol{x}} u(\boldsymbol{x}, t) \cdot \boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{z}) dS(\boldsymbol{z}) = \frac{1}{n\alpha(n)} \int_{B(0,1)} \nabla_{\boldsymbol{z}} \cdot [\nabla_{\boldsymbol{x}} u(\boldsymbol{x}, t)] dS(\boldsymbol{z}) = 0.
\end{aligned}
$$

Methode der Kugelmittelwerte

Wenn die obige Formel für U_r abgeleitet wird,

$$\partial_r^2 U(\boldsymbol{x}; r, t) = \frac{1}{n} \fint_{B(\boldsymbol{x},r)} \Delta u(\boldsymbol{y}, t) d\boldsymbol{y} + \frac{r}{n} \frac{\partial}{\partial r} \fint_{B(\boldsymbol{x},r)} \Delta u(\boldsymbol{y}, t) d\boldsymbol{y}$$

und

$$\frac{\partial}{\partial r} \fint_{B(\boldsymbol{x},r)} \Delta_{\boldsymbol{y}} u(\boldsymbol{y}, t) d\boldsymbol{y} = \frac{\partial}{\partial r} \frac{r^n}{\alpha(n) r^n} \int_{B(0,1)} \Delta_{\boldsymbol{x}} u(\boldsymbol{x} + r\boldsymbol{z}, t) d\boldsymbol{z} =$$

$$\frac{1}{\alpha(n)} \int_{B(0,1)} \boldsymbol{z} \cdot \nabla_{\boldsymbol{x}} \left[\Delta_{\boldsymbol{x}} u(\boldsymbol{x}+r\boldsymbol{z}, t)\right] d\boldsymbol{z} = \frac{1}{\alpha(n) r^{n+1}} \int_{B(\boldsymbol{x},r)} (\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}) \cdot \nabla_{\boldsymbol{y}} \left[\Delta_{\boldsymbol{y}} u(\boldsymbol{y}, t)\right] d\boldsymbol{y}$$

$$= \frac{1}{\alpha(n) r^{n+1}} \int_{B(\boldsymbol{x},r)} \left[\nabla_{\boldsymbol{y}} \cdot [(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}) \Delta_{\boldsymbol{y}} u(\boldsymbol{y}, t)] - \Delta_{\boldsymbol{y}} u(\boldsymbol{y}, t) \underbrace{\nabla_{\boldsymbol{y}} \cdot (\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x})}_{=n} \right] d\boldsymbol{y} =$$

$$\frac{n/r}{n\alpha(n) r^{n-1}} \int_{\partial B(\boldsymbol{x},r)} r^{-1} \underbrace{(\boldsymbol{\nu} \cdot (\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}))}_{\|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}\|^2/r = r} \Delta_{\boldsymbol{y}} u(\boldsymbol{y}, t) dS(\boldsymbol{y}) - \frac{n/r}{\alpha(n) r^n} \int_{B(\boldsymbol{x},r)} \Delta_{\boldsymbol{y}} u(\boldsymbol{y}, t) d\boldsymbol{y}$$

$$= \frac{n}{r} \fint_{\partial B(\boldsymbol{x},r)} \Delta_{\boldsymbol{y}} u(\boldsymbol{y}, t) dS(\boldsymbol{y}) - \frac{n}{r} \fint_{B(\boldsymbol{x},r)} \Delta_{\boldsymbol{y}} u(\boldsymbol{y}, t) d\boldsymbol{y}$$

Methode der Kugelmittelwerte

Zusammengefasst,

$$\partial_r^2 U(\boldsymbol{x}; r, t) = \left(\frac{1}{n} - 1\right) ⨍_{B(\boldsymbol{x},r)} \Delta u(\boldsymbol{y}, t) d\boldsymbol{y} + ⨍_{\partial B(\boldsymbol{x},r)} \Delta u(\boldsymbol{y}, t) dS(\boldsymbol{y})$$

Mit der folgenden Rechnung,

$$\begin{aligned} \partial_r^2 U(\boldsymbol{x}; 0, t) &= \lim_{\rho \to 0^+} \frac{1}{\rho} \left[U_r(\boldsymbol{x}; \rho, t) - U_r(\boldsymbol{x}; 0, t) \right] \\ &= \lim_{\rho \to 0} \frac{1}{\rho} \left[\frac{\rho}{n} ⨍_{B(\boldsymbol{x},\rho)} \Delta u(\boldsymbol{y}, t) d\boldsymbol{y} - 0 \right] = \frac{1}{n} \Delta u(\boldsymbol{x}, t) \end{aligned}$$

folgt $U_{rr}(\boldsymbol{x}; r, t) \xrightarrow{r \to 0} \frac{1}{n} \Delta u(\boldsymbol{x}, t) = U_{rr}(\boldsymbol{x}; 0, t)$.
Mit ähnlichen Rechungen folgt,

$$\partial_t^2 U(\boldsymbol{x}; r, t) = ⨍_{\partial B(\boldsymbol{x},r)} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(\boldsymbol{y}, t) dS(\boldsymbol{y})$$

Nach ähnlichen Abschätzungen gilt $U \in \mathcal{C}^m(\mathbb{R}_+^1 \times [0, \infty))$.

Methode der Kugelmittelwerte

Mit der obigen Formel für U_r,

$$\begin{aligned} U_r &= \frac{r}{n} \fint_{B(\boldsymbol{x},r)} \Delta u(\boldsymbol{y},t)d\boldsymbol{y} = \frac{r}{n} \fint_{B(\boldsymbol{x},r)} \partial_t^2 u(\boldsymbol{y},t)d\boldsymbol{y} \\ &= \frac{r}{n\alpha(n)r^n} \int_0^r \left[\int_{\partial B(\boldsymbol{x},s)} \partial_t^2 u(\boldsymbol{y},t)dS(\boldsymbol{y}) \right] ds \end{aligned}$$

folgt

$$\begin{aligned} (r^{n-1}U_r)_r &= \frac{1}{n\alpha(n)} \frac{\partial}{\partial r} \int_0^r \left[\int_{\partial B(\boldsymbol{x},s)} \partial_t^2 u(\boldsymbol{y},t)dS(\boldsymbol{y}) \right] ds \\ &= \frac{r^{n-1}}{n\alpha(n)r^{n-1}} \int_{\partial B(\boldsymbol{x},r)} \partial_t^2 u(\boldsymbol{y},t)dS(\boldsymbol{y}) \\ &= r^{n-1} \fint_{\partial B(\boldsymbol{x},r)} \partial_t^2 u(\boldsymbol{y},t)dS(\boldsymbol{y}) = r^{n-1}U_{tt} \end{aligned}$$

und die Gleichung $U_{tt} - (r^{n-1}U_r)_r/r^{n-1} = 0$ ist erfüllt. ■

Wellengleichung in $\mathbb{R}^3 \times [0, \infty)$

Für eine Lösung $u \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^3 \times [0, \infty)$ des obigen Anfangswertproblems für die Wellengleichung definiere

$$\tilde{U} = rU, \quad \tilde{U}_0 = rU_0, \quad \tilde{U}_1 = rU_1$$

Wegen der Gleichung $U_{tt} = (r^{n-1}U_r)_r/r^{n-1} = (r^2U_r)_r/r^2$ folgt

$$\begin{aligned}\tilde{U}_{tt} &= rU_{tt} = r[(r^2U_r)_r/r^2] = r[U_{rr} + \tfrac{2}{r}U_r] \\ &= rU_{rr} + 2U_r = (U + rU_r)_r = ((rU)_r)_r = \tilde{U}_{rr}\end{aligned}$$

und $\tilde{U}$ erfüllt das Anfangs- und Randwertproblems,

$$\begin{cases} \tilde{U}_{tt} - \tilde{U}_{rr} = 0, & \mathbb{R}^1_+ \times (0, \infty) \\ \tilde{U} = 0, & \{r = 0\} \times (0, \infty) \\ \tilde{U} = \tilde{U}_0, & \mathbb{R}^1_+ \times \{t = 0\} \\ \tilde{U}_t = \tilde{U}_1, & \mathbb{R}^1_+ \times \{t = 0\} \end{cases}$$

wobei die Nebenbedingungen vom letzten Satz folgen.

Wellengleichung in $\mathbb{R}^3 \times [0, \infty)$

Dieses Problem kann durch d'Alembert's Formel gelöst werden, nachdem es auf $\mathbb{R}^1 \times [0, \infty)$ durch ungerade Reflektion der Anfangsbedingungen so transformiert wird:

$$\hat{U}(r,t) = \begin{cases} \tilde{U}(r,t), & r \geq 0, t \geq 0 \\ -\tilde{U}(-r,t), & r \leq 0, t \geq 0 \end{cases}$$

$$\hat{U}_0(r) = \begin{cases} \tilde{U}_0(r), & r \geq 0 \\ -\tilde{U}_0(-r), & r \leq 0 \end{cases} \qquad \hat{U}_1(r) = \begin{cases} \tilde{U}_1(r), & r \geq 0 \\ -\tilde{U}_1(-r), & r \leq 0 \end{cases}$$

Dann erfüllt $\hat{U}$ das Anfangswertproblem:

$$\begin{cases} \hat{U}_{tt} - \hat{U}_{rr} = 0, & \mathbb{R}^1 \times (0, \infty) \\ \hat{U} = \hat{U}_0, & \mathbb{R}^1 \times \{t = 0\} \\ \hat{U}_t = \hat{U}_1, & \mathbb{R}^1 \times \{t = 0\} \end{cases}$$

Die Lösung ist durch d'Alembert's Formel gegeben,

$$\hat{U}(r,t) = \frac{1}{2}[\hat{U}_0(r+t) + \hat{U}_0(r-t)] + \frac{1}{2}\int_{r-t}^{r+t} \hat{U}_1(y)dy$$

Wellengleichung in $\mathbb{R}^3 \times [0, \infty)$

Für $r \geq t \geq 0$ können $\hat{U}$, $\hat{U}_0$ und $\hat{U}_1$ einfach mit $\tilde{U}$, $\tilde{U}_0$ und $\tilde{U}_1$ ersetzt werden, da die räumlichen Argumente sowieso nicht negativ sind.

Aber wir wollen den Limus $r \to 0$.

Für $0 \leq r \leq t$ gelten

$$\hat{U}_0(r+t) = \tilde{U}_0(t+r), \quad \hat{U}_0(r-t) = -\tilde{U}_0(t-r)$$

$$\int_0^{r+t} \hat{U}_1(y)dy = \int_0^{t+r} \tilde{U}_1(y)dy$$

$$\int_{r-t}^{0} \hat{U}_1(y)dy = -\int_{t-r}^{0} \hat{U}_1(-y)dy = \int_{t-r}^{0} \tilde{U}_1(y)dy$$

und schliesslich,

$$\tilde{U}(r,t) = \tfrac{1}{2}[\tilde{U}_0(t+r) - \tilde{U}_0(t-r)] + \tfrac{1}{2}\int_{t-r}^{t+r} \tilde{U}_1(y)dy$$

Wellengleichung in $\mathbb{R}^3 \times [0,\infty)$

Die Nützlichkeit dieser Formeln zeigt sich schliesslich durch die Rechnungen,

$$
\begin{aligned}
u(\boldsymbol{x},t) &= \lim_{r\to 0} U(\boldsymbol{x};r,t) = \lim_{r\to 0} \tilde{U}(\boldsymbol{x};r,t)/r \\
&= \lim_{r\to 0} \frac{1}{r}\left\{\tfrac{1}{2}[\tilde{U}_0(t+r) - \tilde{U}_0(t-r)] + \tfrac{1}{2}\int_{t-r}^{t+r} \tilde{U}_1(y)dy\right\} \\
&= \partial_t \tilde{U}_0(t) + \tilde{U}_1(t) \\
&= \partial_t\left[t \fint_{\partial B(\boldsymbol{x},t)} u_0(\boldsymbol{y})dS(\boldsymbol{y})\right] + t\fint_{\partial B(\boldsymbol{x},t)} u_1(\boldsymbol{y})dS(\boldsymbol{y})
\end{aligned}
$$

Das erste Integral kann so vereinfacht werden:

$$
t\partial_t \fint_{\partial B(0,1)} u_0(\boldsymbol{x}+t\boldsymbol{z})dS(\boldsymbol{z}) = t\fint_{\partial B(0,1)} \nabla_{\boldsymbol{x}} u_0(\boldsymbol{x}+t\boldsymbol{z})\cdot \boldsymbol{z}dS(\boldsymbol{z})
$$

$$
= t\fint_{\partial B(\boldsymbol{x},t)} \nabla_{\boldsymbol{y}} u_0(\boldsymbol{y})\cdot \frac{(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x})}{t} dS(\boldsymbol{z}) = \fint_{\partial B(\boldsymbol{x},t)} \nabla_{\boldsymbol{y}} u_0(\boldsymbol{y})\cdot(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x})dS(\boldsymbol{z})
$$

Kirchhoff's Formel in $\mathbb{R}^3 \times [0, \infty)$

Also ist die Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{cases} \partial_t^2 u + \Delta u &= 0, \quad \mathbb{R}^3 \times (0, \infty) \\ u &= u_0, \quad \mathbb{R}^3 \times \{t = 0\} \\ \partial_t u &= u_1, \quad \mathbb{R}^3 \times \{t = 0\} \end{cases}$$

durch *Kirchhoff's Formel* gegeben:

$$u(\boldsymbol{x}, t) = \fint_{\partial B(\boldsymbol{x},t)} [u_0(\boldsymbol{y}) + \nabla u_0(\boldsymbol{y}) \cdot (\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}) + t u_1(\boldsymbol{y})] \, dS(\boldsymbol{y})$$

Physikalische Interpretation: Wenn Wellenquellen u_0 und u_1 einen kompakten Träger K haben (d.h. eine Störung wird lokal gemacht), dann gilt $\partial B(\boldsymbol{x}, T) \cap K = \emptyset$ für T groß genug. Es folgt, $u(\boldsymbol{x}, t) = 0$ für $t > T$:

In $\mathbb{R}^3$ nimmt man die Quellen eine Weile wahr, dann nie mehr.

Wellengleichung in $\mathbb{R}^2 \times [0, \infty)$

Wellengleichung in $\mathbb{R}^2 \times [0, \infty)$

Eine Lösung des Anfangswertproblems für die Wellengleichung in $\mathbb{R}^2 \times [0, \infty)$ wird von der Lösung in $\mathbb{R}^3 \times [0, \infty)$ mit der *Absteigemethode* hergeleitet.

Der Trick ist, $\mathbb{R}^3$-Funktionen $\bar{u}$, $\bar{u}_0$ und $\bar{u}_1$ so zu formulieren, dass es keine Abhängigkeit in der dritten Dimension gibt:

$$\bar{\boldsymbol{x}} = (\boldsymbol{x}, 0) \quad \bar{u}(\bar{\boldsymbol{x}}, t) = u(\boldsymbol{x}, t) \quad \bar{u}_0(\bar{\boldsymbol{x}}) = u_0(\boldsymbol{x}) \quad \bar{u}_1(\bar{\boldsymbol{x}}) = u_1(\boldsymbol{x})$$

wobei $\bar{\boldsymbol{x}} \in \mathbb{R}^3$ und $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2$. Aus der Herleitung von Kirchhoff's Formel,

$$u(\boldsymbol{x}, t) = \bar{u}(\bar{\boldsymbol{x}}, t) = \partial_t \left[t \fint_{\partial \bar{B}(\bar{\boldsymbol{x}}, t)} \bar{u}_0(\boldsymbol{y}) d\bar{S}(\boldsymbol{y}) \right] + t \fint_{\partial \bar{B}(\bar{\boldsymbol{x}}, t)} \bar{u}_1(\boldsymbol{y}) d\bar{S}(\boldsymbol{y})$$

wobei $\boldsymbol{y} \in \partial \bar{B}(\bar{\boldsymbol{x}}, t), d\bar{S}(\boldsymbol{y}) \subset \mathbb{R}^3$.

Wellengleichung in $\mathbb{R}^2 \times [0, \infty)$

Das erste Integral kann so vereinfacht werden:

$$
\begin{aligned}
&\fint_{\partial \bar{B}(\bar{\boldsymbol{x}},t)} \bar{u}_0(\boldsymbol{y}) d\bar{S}(\boldsymbol{y}) \quad (\boldsymbol{y} \in \partial \bar{B}(\bar{\boldsymbol{x}}, t) \subset \mathbb{R}^3) \\
&= \frac{1}{4\pi t^2} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} u_0(t\cos(\theta)\sin(\phi), t\sin(\theta)\sin(\phi)) t^2 \sin(\phi) d\theta d\phi \\
&= \frac{2}{4\pi t^2} \int_0^{t} \int_0^{2\pi} u_0(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) \frac{t}{\sqrt{t^2 - r^2}} r d\theta dr \quad (r = t\sin(\phi)) \\
&= \frac{1}{2\pi t} \int_{B(\boldsymbol{x},t)} \frac{u_0(\boldsymbol{y})}{\sqrt{t^2 - |\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}|^2}} d\boldsymbol{y} \quad (\boldsymbol{y} \in \bar{B}(\boldsymbol{x}, t) \subset \mathbb{R}^2) \\
&= \frac{t}{2} \fint_{B(\boldsymbol{x},t)} \frac{u_0(\boldsymbol{y})}{\sqrt{t^2 - |\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}|^2}} d\boldsymbol{y}
\end{aligned}
$$

Daher gilt

$$
u(\boldsymbol{x}, t) = \partial_t \left[\frac{t^2}{2} \fint_{B(\boldsymbol{x},t)} \frac{u_0(\boldsymbol{y})}{\sqrt{t^2 - |\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}|^2}} d\boldsymbol{y} \right] + \frac{t^2}{2} \fint_{B(\boldsymbol{x},t)} \frac{u_1(\boldsymbol{y})}{\sqrt{t^2 - |\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}|^2}} d\boldsymbol{y}
$$

Kirchhoff's Formel in $\mathbb{R}^2 \times [0, \infty)$

Das erste Integral kann so vereinfacht werden,

$$\partial_t \left[\frac{t^2}{2} \fint_{B(\boldsymbol{x},t)} \frac{u_0(\boldsymbol{y})}{\sqrt{t^2 - |\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}|^2}} d\boldsymbol{y} \right] = \partial_t \left[\frac{t}{2} \fint_{B(0,1)} \frac{u_0(\boldsymbol{x} + t\boldsymbol{z})}{\sqrt{1 - |\boldsymbol{z}|^2}} d\boldsymbol{z} \right]$$

$$= \frac{1}{2} \fint_{B(0,1)} \frac{u_0(\boldsymbol{x} + t\boldsymbol{z})}{\sqrt{1 - |\boldsymbol{z}|^2}} d\boldsymbol{z} + \frac{t}{2} \fint_{B(0,1)} \frac{\nabla u_0(\boldsymbol{x} + t\boldsymbol{z}) \cdot \boldsymbol{z}}{\sqrt{1 - |\boldsymbol{z}|^2}} d\boldsymbol{z}$$

$$= \frac{t}{2} \fint_{B(\boldsymbol{x},t)} \frac{u_0(\boldsymbol{y})}{\sqrt{t^2 - |\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}|^2}} d\boldsymbol{y} + \frac{t}{2} \fint_{B(\boldsymbol{x},t)} \frac{\nabla u_0(\boldsymbol{y}) \cdot (\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x})}{\sqrt{t^2 - |\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}|^2}} d\boldsymbol{y}$$

Die Lösung des Randwertproblems in $\mathbb{R}^2 \times [0, \infty)$:

$$u(\boldsymbol{x}, t) = \frac{1}{2} \fint_{B(\boldsymbol{x},t)} \frac{t u_0(\boldsymbol{y}) + t^2 u_1(\boldsymbol{y}) + t \nabla u_0(\boldsymbol{y}) \cdot (\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x})}{\sqrt{t^2 - |\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}|^2}} d\boldsymbol{y}$$

Physikalische Interpretation: Sei der Träger K von den Wellenquellen u_0 und u_1 kompakt in $\mathbb{R}^2$. (Aber nicht in $\mathbb{R}^3$!)
Es gilt $B(\boldsymbol{x}, t) \cap K \neq \emptyset$, $\forall t$ groß genug:

In $\mathbb{R}^2$ nimmt man die Quellen ewig lang wahr.

Lösung in ungeraden Dimensionen

Satz: Sei $n \geq 3$ ungerade. Für $m = (n+1)/2$, $u_0 \in \mathcal{C}^{m+1}(\mathbb{R}^n)$ und $u_1 \in \mathcal{C}^m(\mathbb{R}^n)$ die Funktion

$$u(\boldsymbol{x}, t) = \frac{1}{(n-2)!!}\left[\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)\left(\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\right)^{\frac{n-3}{2}}\left(t^{n-2}\fint_{\partial B(\boldsymbol{x},t)} u_0(\boldsymbol{y})dS(\boldsymbol{y})\right)\right.$$
$$\left. + \left(\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\right)^{\frac{n-3}{2}}\left(t^{n-2}\fint_{\partial B(\boldsymbol{x},t)} u_1(\boldsymbol{y})dS(\boldsymbol{y})\right)\right] \quad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n, \quad t > 0$$

erfüllt:

1. $u \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n \times [0, \infty))$
2. $\partial_t^2 u - \Delta u = 0$ in $\mathbb{R}^n \times (0, \infty)$
3. $\lim\limits_{(\boldsymbol{x},t)\to(\boldsymbol{x}^0,0^+)} u(\boldsymbol{x}, t) = u_0(\boldsymbol{x}^0)$, $\lim\limits_{(\boldsymbol{x},t)\to(\boldsymbol{x}^0,0^+)} u_t(\boldsymbol{x}, t) = u_1(\boldsymbol{x}^0)$, $\forall \boldsymbol{x}^0 \in \mathbb{R}^n$

Huygen's Prinzip: In $\mathbb{R}^n$, n ungerade, nimmt man die Quellen eine Weile wahr, dann nie mehr.

Lösung in geraden Dimensionen

Satz: Sei $n \geq 2$ gerade. Für $m = (n+2)/2$, $u_0 \in \mathcal{C}^{m+1}(\mathbb{R}^n)$ und $u_1 \in \mathcal{C}^m(\mathbb{R}^n)$ die Funktion

$$u(\boldsymbol{x},t) = \frac{1}{n!!}\left[\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)\left(\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\right)^{\frac{n-2}{2}}\left(t^n \fint_{B(\boldsymbol{x},t)} \frac{u_0(\boldsymbol{y})}{\sqrt{t^2-|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}|^2}} dS(\boldsymbol{y})\right)\right] + \left(\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\right)^{\frac{n-2}{2}}\left(t^n \fint_{B(\boldsymbol{x},t)} \frac{u_1(\boldsymbol{y})}{\sqrt{t^2-|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}|^2}} dS(\boldsymbol{y})\right) \quad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n, \quad t > 0$$

erfüllt:

1. $u \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n \times [0,\infty))$
2. $\partial_t^2 u - \Delta u = 0$ in $\mathbb{R}^n \times (0,\infty)$
3. $\lim\limits_{(\boldsymbol{x},t)\to(\boldsymbol{x}^0,0^+)} u(\boldsymbol{x},t) = u_0(\boldsymbol{x}^0)$, $\lim\limits_{(\boldsymbol{x},t)\to(\boldsymbol{x}^0,0^+)} u_t(\boldsymbol{x},t) = u_1(\boldsymbol{x}^0)$, $\forall \boldsymbol{x}^0 \in \mathbb{R}^n$

Huygen's Prinzip: In $\mathbb{R}^n$, n gerade, nimmt man die Quellen ewig lang wahr.

Nicht Homogenes Problem

Nicht Homogenes Problem: Zu lösen ist

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - \Delta u = f, & \mathbb{R}^n \times (0,\infty) \\ \partial_t u = u = 0, & \mathbb{R}^n \times \{t=0\} \end{cases}$$

Nach *Duhamel's Prinzip* ist die Lösung gegeben durch

$$u(\boldsymbol{x},t) = \int_0^t u(\boldsymbol{x},t;s)ds \quad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \quad t > 0$$

wobei $u(\boldsymbol{x},t;s)$ das folgende Problem löst:

$$\begin{cases} \partial_t^2 u(\boldsymbol{x},t;s) - \Delta u(\boldsymbol{x},t;s) = 0, & \mathbb{R}^n \times (s,\infty) \\ u(\boldsymbol{x},s;s) = 0, & \mathbb{R}^n \times \{t=s\} \\ \partial_t u(\boldsymbol{x},s;s) = f(\boldsymbol{x},s), & \mathbb{R}^n \times \{t=s\} \end{cases}$$

Satz: Sei $n \geq 2$ und $f \in \mathcal{C}^{[n/2]+1}(\mathbb{R}^n \times [0,\infty))$. Das obige u erfüllt:

1. $u \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n \times [0,\infty))$
2. $\partial_t^2 u - \Delta u = f$ in $\mathbb{R}^n \times (0,\infty)$
3. $\lim\limits_{(\boldsymbol{x},t)\to(\boldsymbol{x}^0,0^+)} u(\boldsymbol{x},t) = 0, \quad \lim\limits_{(\boldsymbol{x},t)\to(\boldsymbol{x}^0,0^+)} u_t(\boldsymbol{x},t) = 0, \forall \boldsymbol{x}^0 \in \mathbb{R}^n$

Nicht Homogenes Problem

Beweis: Wenn n ungerade ist, gilt $[n/2]+1=(n+1)/2$. Nach dem vorletzten Satz gilt $u(\boldsymbol{x},t;s)\in\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n\times[s,\infty))$, $\forall s\geq 0$, so $u\in\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n\times[0,\infty))$. Wenn n gerade ist, gilt $[n/2]+1=(n+2)/2$. Nach dem letzten Satz gilt $u(\boldsymbol{x},t;s)\in\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n\times[s,\infty))$, $\forall s\geq 0$, so $u\in\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n\times[0,\infty))$. Die zeitlichen Ableitungen sind:

$$\begin{aligned}
\partial_t u(\boldsymbol{x},t) &= \underbrace{u(\boldsymbol{x},t;t)}_{=0}+\int_0^t \partial_t u(\boldsymbol{x},t;s)ds \\
\partial_t^2 u(\boldsymbol{x},t) &= \underbrace{\partial_t u(\boldsymbol{x},t;t)}_{=f(\boldsymbol{x},t)}+\int_0^t \partial_t^2 u(\boldsymbol{x},t;s)ds
\end{aligned}$$

Die räumlichen Ableitungen sind:

$$\Delta u(\boldsymbol{x},t)=\int_0^t \Delta u(\boldsymbol{x},t;s)ds=\int_0^t \partial_t^2 u(\boldsymbol{x},t;s)ds$$

Es folgt $\partial_t^2 u-\Delta u=f$. Es gilt auch $u(\boldsymbol{x},0)=\partial_t u(\boldsymbol{x},0)=0$. $\blacksquare$

Das Verzögerte Potential

- Beispiel: Die Lösung des nicht homogenen Problems für $n = 1$. Mit d'Alembert's Formel:

$$u(x,t;s) = \frac{1}{2}\int_{x-(t-s)}^{x+(t-s)} f(y,s)dy, \quad u(x,t) = \frac{1}{2}\int_0^t \int_{x-t+s}^{x+t-s} f(y,s)dyds$$

- Beispiel: Die Lösung des nicht homogenen Problems für $n = 3$. Mit Kirchhoff's Formel:

$$u(\boldsymbol{x},t;s) = (t-s)\fint_{\partial B(\boldsymbol{x},t-s)} f(\boldsymbol{y},s)dS(\boldsymbol{y})$$

und

$$u(\boldsymbol{x},t) = \int_0^t \frac{(t-s)}{n\alpha(n)(t-s)^{n-1}}\left(\int_{\partial B(\boldsymbol{x},t-s)} f(\boldsymbol{y},s)\right)ds$$

$$= \frac{1}{4\pi}\int_0^t \int_{\partial B(\boldsymbol{x},t-s)} \frac{f(\boldsymbol{y},s)}{(t-s)}dS(\boldsymbol{y})ds = \frac{1}{4\pi}\int_0^t \int_{\partial B(\boldsymbol{x},r)} \frac{f(\boldsymbol{y},t-r)}{r}dS(\boldsymbol{y})dr$$

so u ist durch das *Verzögerte Potential* gegeben:

$$u(\boldsymbol{x},t) = \frac{1}{4\pi}\int_{B(\boldsymbol{x},t)} \frac{f(\boldsymbol{y},t-|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}|)}{|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}|}d\boldsymbol{y}$$

Energie Methoden

Satz (Eindeutigkeit): $\exists$ höchstens eine Lösung des Randwertproblems

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - \Delta u &= f, & \Omega_T \\ u &= u_0, & \Gamma_T \\ \partial_t u &= u_1, & \Omega \times \{t=0\} \end{cases}$$

Beweis: Sei u_1 und u_2 zwei Lösungen. Dann erfüllt $w = u_1 - u_2$

$$\begin{cases} \partial_t^2 w - \Delta w &= 0, & \Omega_T \\ w &= 0, & \Gamma_T \\ \partial_t w &= 0, & \Omega \times \{t=0\} \end{cases}$$

Daher

$$e(t) = \frac{1}{2}\int_\Omega \left[w_t^2 + |\nabla w|^2\right] d\boldsymbol{x}$$

erfüllt

$$\dot{e}(t) = \int_\Omega [w_t w_{tt} + \nabla w \cdot \nabla w_t]\, d\boldsymbol{x} = \int_\Omega w_t \underbrace{(w_{tt} - \Delta w)}_{=0} d\boldsymbol{x} + \int_{\partial\Omega} \underbrace{w_t}_{=0} \frac{\partial w}{\partial \nu} dS(\boldsymbol{x})$$

Gebiet der Abhängigkeit

Mit $\dot{e}(t) = 0$ folgt $e(t) = 0$ aus $e(0) = 0$. Da $w_t = |\nabla w| = 0$ in Ω_T gilt, gilt $w =$ Konstante in Ω_T. Da $w = 0$ in $\Omega \times \{t = 0\}$ gilt, folgt $w = 0$ in Ω_T. ∎

Gebiet der Abhängigkeit

Satz: Wenn $u \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n \times (0, \infty))$ erfüllt $\partial_t^2 u = \Delta u$ und $u(\boldsymbol{x}, 0) = u_t(\boldsymbol{x}, 0) = 0$ in $B(\boldsymbol{x}^0, t^0)$, dann gilt $u = 0$ in dem Kegel

$$C(\boldsymbol{x}^0, t^0) = \{(\boldsymbol{x}, t) : |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^0| \leq t^0 - t, 0 \leq t \leq t^0\}$$

Beweis: Für $0 \leq t \leq t^0$ die Energie

$$e(t) = \frac{1}{2} \int_{B(\boldsymbol{x}^0, t^0 - t)} (u_t^2 + |\nabla u|^2) d\boldsymbol{x} = \frac{1}{2} \int_0^{t^0 - t} \left[\int_{\partial B(\boldsymbol{x}^0, s)} (u_t^2 + |\nabla u|^2) dS(\boldsymbol{x}) \right] ds$$

erfüllt

$$\dot{e}(t) = \int_{B(\boldsymbol{x}^0, t^0 - t)} (u_t u_{tt} + \nabla u \cdot \nabla u_t) d\boldsymbol{x} - \frac{1}{2} \int_{\partial B(\boldsymbol{x}^0, t^0 - t)} (u_t^2 + |\nabla u|^2) dS(\boldsymbol{x})$$

Gebiet der Abhängigkeit

Das erste Integral kann so vereinfacht werden:

$$\begin{aligned}
\int_{B(\boldsymbol{x}^0,t^0-t)} (u_t u_{tt} + \nabla u \cdot \nabla u_t) d\boldsymbol{x} &= \int_{B(\boldsymbol{x}^0,t^0-t)} u_t \underbrace{(u_{tt} - \Delta u)}_{=0} d\boldsymbol{x} \\
&- \int_{\partial B(\boldsymbol{x}^0,t^0-t)} \frac{\partial u}{\partial \nu} u_t dS(\boldsymbol{x}) \\
= \int_{\partial B(\boldsymbol{x}^0,t^0-t)} u_t \ \frac{\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}^0}{t - t^0} \cdot \nabla u dS(\boldsymbol{x}) &\leq \int_{\partial B(\boldsymbol{x}^0,t^0-t)} |u_t||\nabla u| dS(\boldsymbol{x}) \\
&\leq \frac{1}{2} \int_{\partial B(\boldsymbol{x}^0,t^0-t)} (|u_t|^2 + |\nabla u|^2) dS(\boldsymbol{x})
\end{aligned}$$

Es folgt $\dot{e}(t) \leq 0$. Da $u(\boldsymbol{x}, 0) = 0$ in $B(\boldsymbol{x}^0, t^0)$ gilt, folgt $|\nabla u(\boldsymbol{x}, 0)| = 0$ in $B(\boldsymbol{x}^0, t^0)$. Da $u_t(\boldsymbol{x}, 0) = 0$ in $B(\boldsymbol{x}^0, t^0)$ gilt, folgt $e(0) = 0$ und daher $0 \leq e(t) \leq e(0) = 0$, $0 \leq t \leq t^0$. Dann $e(t) = 0 \Rightarrow u_t = |\nabla u| = 0$ in $C(\boldsymbol{x}^0, t^0)$, und daher gilt $u =$ Konstante. Aus $u = 0$ in $B(\boldsymbol{x}^0, t^0)$ folgt $u = 0$ in $C(\boldsymbol{x}^0, t^0)$. ■

Charakteristiken und Nicht Lineare PDG

In Wörtern: *Charakteristiken* sind eine Art von *Eigenraum* für eine PDG. Wenn genug Randbedingungen niedrigerer Ordnung vorgegeben werden, kann die PDG rein auf einer Charakteristik umgeschrieben werden, und Information verläßt sie nicht.

Die Details:

- Sei eine PDG in quasilinearer Form gegeben:

$$\sum_{|\boldsymbol{\alpha}|=m} A_{\boldsymbol{\alpha}}(\boldsymbol{U}, \boldsymbol{x}) \partial^{\boldsymbol{\alpha}} \boldsymbol{u} + A_0(\boldsymbol{U}, \boldsymbol{x}) =: L(\boldsymbol{u}) = B$$

$$\boldsymbol{u} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k, \quad \boldsymbol{U} = \{\nabla^l \boldsymbol{u}\}_{l=0}^{m-1}$$

  Sonst linearisiere so $0 = F(\boldsymbol{U}, \boldsymbol{x}) \approx \nabla_{\boldsymbol{U}} F(\boldsymbol{U}_0, \boldsymbol{x})(\boldsymbol{U} - \boldsymbol{U}_0)$.

- Das *Charakteristische Symbol* ist

$$\Lambda(\boldsymbol{y}; \boldsymbol{U}, \boldsymbol{x}) = \sum_{|\boldsymbol{\alpha}|=m} A_{\boldsymbol{\alpha}}(\boldsymbol{U}, \boldsymbol{x}) \boldsymbol{y}^{\boldsymbol{\alpha}}.$$

- Die *Charakteristische Form* ist

$$Q(\boldsymbol{y}; \boldsymbol{U}, \boldsymbol{x}) = \det\{\Lambda(\boldsymbol{y}; \boldsymbol{U}, \boldsymbol{x})\}.$$

Definition einer Charakteristik

- Für eine gegebene Lösung der PDG $\boldsymbol{u}$ mit $\boldsymbol{U} = \{\nabla_{\boldsymbol{x}}^l \boldsymbol{u}\}_{l=0}^{m-1}$ ist eine *Charakteristik* eine Niveau Menge

$$\varphi(\boldsymbol{x}) = 0$$

einer Funktion φ, die erfüllt

$$Q(\nabla\varphi(\boldsymbol{x}); \boldsymbol{U}, \boldsymbol{x}) = 0.$$

- Bezüglich einer Charakteristik definiere das kurvilineare Koordinatensystem, $\boldsymbol{\xi}(\boldsymbol{x}) = (\xi_1(\boldsymbol{x}), \ldots, \xi_n(\boldsymbol{x}))$, wobei

$$\xi_n(\boldsymbol{x}) = \varphi(\boldsymbol{x}) \quad \text{und} \quad \{\xi_i(\boldsymbol{x})\}_{i=1}^{n-1} \text{ sind beliebig}$$
$$\text{solang } \partial\boldsymbol{\xi}/\partial\boldsymbol{x} \text{ invertierbar ist.}$$

Daher ist $\{\xi_i\}_{i=1}^{n-1}$ eine Parameterisierung der Charakteristik.

- Dann kann die PDG in das neue Koordinatensystem transformiert werden.

Reduktion einer PDG auf eine Charakteristik

- Beispielsweise für $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1$, $\partial_{x_i} u = \sum_{j=1}^{n} \partial_{x_i}\xi_j \partial_{\xi_j} u$,

$$\partial^2_{x_i} u = \sum_{j=1}^{n} \left[\partial^2_{x_i}\xi_j \partial_{\xi_j} u + \partial_{x_i}\xi_j \sum_{k=1}^{n} \partial_{x_i}\xi_k \partial^2_{\xi_k\xi_j} u \right] = F(\{\partial^{\boldsymbol{\beta}}_{\boldsymbol{\xi}} u\}^{\beta_n \le 1}_{|\boldsymbol{\beta}| \le 2}, \boldsymbol{x}) + (\partial_{x_i}\xi_n)^2 \partial^2_{\xi_n} u$$

- Ähnlich mit $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}(\{\partial^{\boldsymbol{\beta}}_{\boldsymbol{\xi}} \boldsymbol{u}\}^{\beta_n \le m-1}_{|\boldsymbol{\beta}| \le m}, \boldsymbol{x})$ und $\nabla\varphi = \nabla\xi_n$ gilt,

$$\sum_{|\boldsymbol{\alpha}|=m} A_{\boldsymbol{\alpha}}(\boldsymbol{U}, \boldsymbol{x}) \partial^{\boldsymbol{\alpha}} \boldsymbol{u} = \boldsymbol{F} + \underbrace{\sum_{|\boldsymbol{\alpha}|=m} A_{\boldsymbol{\alpha}}(\boldsymbol{U}, \boldsymbol{x}) (\nabla\xi_n)^{\boldsymbol{\alpha}}}_{\Lambda(\nabla\varphi; \boldsymbol{U}, \boldsymbol{x})} \partial^m_{\xi_n} \boldsymbol{u}$$

- Da $Q(\nabla\varphi; \boldsymbol{U}, \boldsymbol{x}) = \det\{\Lambda(\nabla\varphi; \boldsymbol{U}, \boldsymbol{x})\} = 0$ gilt, gibt es einen linken Eigenvektor $\boldsymbol{\eta}$ mit $\boldsymbol{\eta}^{\mathrm{T}} \Lambda(\nabla\varphi; \boldsymbol{U}, \boldsymbol{x}) = 0$.
- Falls $\{\partial^l_{\xi_n} \boldsymbol{u} = \boldsymbol{g}_l\}^{m-1}_{l=0}$ vorgegeben sind, läßt sich die PDG rein innerhalb der Charakteristik so umschreiben,

$$\boldsymbol{\eta}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{B} = \boldsymbol{\eta}^{\mathrm{T}} L(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{\eta}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{G}(\{\partial^{\boldsymbol{\beta}}_{\boldsymbol{\xi}} u\}^{\beta_n = 0}_{|\boldsymbol{\beta}| \le m}, \boldsymbol{x}) \quad \text{wobei}$$

$$\boldsymbol{F}(\{\partial^{\boldsymbol{\beta}}_{\boldsymbol{\xi}} \boldsymbol{u}\}^{\beta_n \le m-1}_{|\boldsymbol{\beta}| \le m}, \boldsymbol{x}) \to \boldsymbol{G}(\{\partial^{\boldsymbol{\beta}}_{\boldsymbol{\xi}} u\}^{\beta_n = 0}_{|\boldsymbol{\beta}| \le m}, \boldsymbol{x}), \; \{\partial^l_{\xi_n} \boldsymbol{u}\}^{m-1}_{l=0} \to \{\boldsymbol{g}_l\}^{m-1}_{l=0}.$$

Transportgleichung für $(x, t) \in \mathbb{R}^2$

- Beispiel: Transportgleichung für $\boldsymbol{x} = (x, t) \in \mathbb{R}^2, n = 2,$

$$Lu := (b, 1) \cdot \nabla u = b\partial_x u + \partial_t u = c \quad b, c \in \mathbb{R}^1$$

Dann mit PDG-Ordnung $m{=}1$ hängt Q von $\boldsymbol{U}{=}\{\nabla^l u\}_{l=0}^{m-1}{=}\{u\}$ nicht ab. Das Symbol und die Form sind gleich:

$$Q(\boldsymbol{y}; \boldsymbol{U}, \boldsymbol{x}) = Q(\boldsymbol{y}) = \det\{\Lambda(\boldsymbol{y})\} = \Lambda(\boldsymbol{y}) = by_1 + y_2$$

Charakteristik $0 = \varphi(x, t) = \varphi(0, 0)$ ist gegeben durch:

$$0 = Q(\nabla\varphi) = b\varphi_x + \varphi_t \quad \text{oder} \quad \varphi(x, t) = x - bt$$

Ein geeignetes kurvilineares Koordinatensystem ist:

$$\begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & b \\ 1 & -b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ t \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} x \\ t \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ b^{-1} & -b^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix}$$

Die PDG kann ohne $\partial_{\xi_2} u$ so umgeschrieben werden:

$$\partial_{\xi_1} u = \partial_{\xi_1} x \partial_x u + \partial_{\xi_1} t \partial_t u = \frac{1}{2}\partial_x u + \frac{1}{2b}\partial_t u = \frac{c}{2b}$$

Also $u(\xi_1, \xi_2) = \frac{c}{2b}\xi_1 + f(\xi_2)$ oder $u(x, t) = \frac{c}{2b}(x + bt) + f(x - bt)$.

System der Akustischen Wellengleichungen

- Beispiel: Akustische Wellen in einem Rohr:

$$\begin{cases} u_t + \rho^{-1} p_x = 0 & u = \text{Geschwindigkeit}, \ \rho = \text{Dichte} \\ p_t + \rho a^2 u_x = 0 & p = \text{Druck}, \ a = \text{Schallgeschwindigkeit} \end{cases}$$

Umgeschrieben in Vektorform, $\boldsymbol{u} = (u, p)$,

$$L(\boldsymbol{u}) = \partial_t \begin{bmatrix} u \\ p \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & \rho^{-1} \\ \rho a^2 & 0 \end{bmatrix}}_{=:A} \partial_x \begin{bmatrix} u \\ p \end{bmatrix} = \partial_t \boldsymbol{u} + A \partial_x \boldsymbol{u} = 0$$

Definiere $\boldsymbol{x} = (x, t) \in \mathbb{R}^2$. Mit PDG-Ordnung $m = 1$ hängt Q von $\boldsymbol{U} = \{\nabla^l \boldsymbol{u}\}_{l=0}^{m-1} = \{\boldsymbol{u}\}$ nicht ab. Das Symbol und die Form sind:

$$Q(\boldsymbol{y}; \boldsymbol{U}, \boldsymbol{x}) = Q(\boldsymbol{y}) = \det\{\Lambda(\boldsymbol{y})\} = \det\{y_2 I + y_1 A\} = y_2^2 - a^2 y_1^2$$

Charakteristiken $0 = \varphi(x, t) = \varphi(x^0, t^0)$ sind gegeben durch

$$0 = Q(\nabla\varphi) = \varphi_t^2 - a^2 \varphi_x^2 \quad \text{oder} \quad \varphi_\pm(x, t) = a(t - t^0) \mp (x - x^0)$$

Ein linker Eigenvektor von $\Lambda(\nabla\varphi_\pm) = aI \mp A$ ist $\boldsymbol{\eta}_\pm = (\pm\rho a, 1)$.

System der Akustischen Wellengleichungen

Ein kurvilineares Koordinatensystem durch (x^0, t^0) ist:

$$\begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & a \\ +1 & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x - x^0 \\ t - t^0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} x - x^0 \\ t - t^0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 & +1 \\ a^{-1} & a^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix}$$

Die PDG kann ohne $\partial_{\xi_1} \boldsymbol{u}$ so umgeschrieben werden:

$$0 = \boldsymbol{\eta}_+^{\mathrm{T}}[\partial_t \boldsymbol{u} + A\partial_x \boldsymbol{u}] = (\partial_t + a\partial_x)(p + \rho a u) = 2a\partial_{\xi_2}(p + \rho a u)$$

oder ohne $\partial_{\xi_2} \boldsymbol{u}$ so:

$$0 = \boldsymbol{\eta}_-^{\mathrm{T}}[\partial_t \boldsymbol{u} + A\partial_x \boldsymbol{u}] = (\partial_t - a\partial_x)(p - \rho a u) = 2a\partial_{\xi_1}(p - \rho a u)$$

Es folgen

$$p + \rho a u = f(\xi_1), \quad p - \rho a u = g(\xi_2)$$

oder

$$\begin{aligned} 2p(x,t) &= f(a(t - t^0) - (x - x^0)) + g(a(t - t^0) + (x - x^0)) \\ 2\rho a u(x,t) &= f(a(t - t^0) - (x - x^0)) - g(a(t - t^0) + (x - x^0)) \end{aligned}$$

PDG höherer Ordnung als System erster Ordnung

- Bemerke: Das System der akustischen Wellengleichungen lässt sich bezüglich Wellengleichungen zweiter Ordnung so umschreiben:

$$u_{tt} = -\rho^{-1} p_{xt} = -\rho^{-1}[-\rho a^2 u_x]_x = a^2 u_{xx}$$

und

$$p_{tt} = -\rho a^2 u_{xt} = -\rho a^2[-\rho^{-1} p_x]_x = a^2 p_{xx}$$

- Ähnlich lässt sich die Wellengleichung $\partial_t^2 u = a^2 \Delta u$ bezüglich eines Systems erster Ordnung umschreiben:

$$\partial_t \boldsymbol{u} - \sum_{i=1}^{n} A_i \partial_{x_i} \boldsymbol{u} = 0 \quad \text{wobei} \quad \boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} a\nabla u \\ u_t \end{bmatrix}, A_i = \begin{bmatrix} 0 & a\hat{\boldsymbol{e}}_i \\ a\hat{\boldsymbol{e}}_i^{\mathrm{T}} & 0 \end{bmatrix}$$

und diese Umformulierung kann für das nächste Beispiel ausgenützt werden.

- Alle PDG höherer Ordnung können bezüglich eines Systems erster Ordnung ähnlich umgeschrieben werden.

Wellengleichung: Hyperbolische PDG

- Beispiel: Wellengleichung für $(\boldsymbol{x}, t) \in \mathbb{R}^{n+1}$, $n \geq 1$,

$$Lu := \partial_t^2 u - a^2 \Delta u = 0, \quad a \in \mathbb{R}^1$$

Mit PDG-Ordnung $m = 2$ hängt Q von $\boldsymbol{U} = \{\nabla^l u\}_{l=0}^{m-1} = \{u, \nabla u\}$ nicht ab. Das Symbol und die Form sind gleich:

$$Q(\boldsymbol{y}, s; \boldsymbol{U}, \boldsymbol{x}) = Q(\boldsymbol{y}, s) = \det\{\Lambda(\boldsymbol{y}, s)\} = \Lambda(\boldsymbol{y}, s) = s^2 - a^2|\boldsymbol{y}|^2$$

Charakteristische Lösungen der Gleichungen,

$$0 = Q(\nabla\varphi, \varphi_t) = \varphi_t^2 - a^2|\nabla\varphi|^2, \quad \varphi(\boldsymbol{x}, t) = \varphi(0, 0) = 0$$

sind

$$\varphi_{\boldsymbol{c}}(\boldsymbol{x}, t) = at - \boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{x}, \quad \boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^n, |\boldsymbol{c}| = 1, \quad \text{sowohl } \varphi_\circ(\boldsymbol{x}, t) = at - |\boldsymbol{x}|$$

Bemerke: jede Ebene $\varphi_{\boldsymbol{c}}(\boldsymbol{x}, t) = 0$ ist tangential an den Kegel $\varphi_\circ(\boldsymbol{x}, t) = 0$.

Wellengleichung: Hyperbolische PDG

Sei $Q = [\tilde{Q}, \boldsymbol{c}] \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine orthogonale Matrix mit $\boldsymbol{c}$ in der letzten Spalte. Mit dem Koordinatensystem,

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ t \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} aQ & -a\boldsymbol{c} \\ \hline \hat{\boldsymbol{e}}_n^{\mathrm{T}} & 1 \end{array}\right] \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \\ \xi_{n+1} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \\ \xi_{n+1} \end{bmatrix} = \frac{1}{2a} \left[\begin{array}{c|c} 2Q^{\mathrm{T}} - \hat{\boldsymbol{e}}_n \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}} & a\hat{\boldsymbol{e}}_n \\ \hline -\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}} & a \end{array}\right] \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ t \end{bmatrix}$$

folgen $\xi_{n+1}(\boldsymbol{x}, t) = \varphi_{\boldsymbol{c}}(\boldsymbol{x}, t)/(2a)$ und

$$\frac{\partial u}{\partial \xi_{n+1}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial x_i}{\partial \xi_{n+1}} \frac{\partial u}{\partial x_i} + \frac{\partial t}{\partial \xi_{n+1}} \frac{\partial u}{\partial t} = (\partial_t - a\boldsymbol{c} \cdot \nabla) u$$

Ähnlich gilt $\dfrac{\partial u}{\partial \xi_n} = (\partial_t + a\boldsymbol{c} \cdot \nabla) u$. Es folgt daher

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi_n \partial \xi_{n+1}} = (\partial_t - a\boldsymbol{c} \cdot \nabla)(\partial_t + a\boldsymbol{c} \cdot \nabla) u = \partial_t^2 u - a^2 (\boldsymbol{c} \cdot \nabla)^2 u$$

Diese sind Richtungsableitungen entlang des Schnitts zwischen der Ebene $\varphi_{\pm\boldsymbol{c}}(\boldsymbol{x}, t) = 0$ und dem Kegel $\varphi_{\circ}(\boldsymbol{x}, t) = 0$.

Wellengleichung: Hyperbolische PDG

Hausaufgabe: der Laplace Operator ist Drehungsinvariant,

$$\Delta_{\boldsymbol{y}} u(\boldsymbol{y}) = \Delta_{\boldsymbol{x}} u(Q\boldsymbol{x}), \quad Q^{\mathrm{T}} Q = I$$

Insbesondere für u gilt

$$\sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi_i^2} + a^2 (\boldsymbol{c} \cdot \nabla)^2 u = a^2 \sum_{k,l=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_l} \underbrace{\left[\sum_{i=1}^{n} Q_{ki} Q_{li} \right]}_{=\delta_{kl}} = a^2 \Delta u$$

Zusammen mit der obigen Formel für $\frac{\partial^2 u}{\partial_{\xi_n} \partial_{\xi_{n+1}}}$ folgt

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi_n \partial \xi_{n+1}} - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi_i^2} = \partial_t^2 u - a^2 \Delta u$$

Insbesondere für $n = 1$ gilt $\partial_{\xi_1} \partial_{\xi_2} u = \partial_t^2 u - a^2 \partial_x^2 u$.

Für $n \geq 2$ ist $\sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi_i^2}$ der Laplace Operator in der räumlichen Ebene tangential an den Schnitt zwischen $\varphi_{\boldsymbol{c}}(\boldsymbol{x}, t) = 0$ und $\varphi_{\circ}(\boldsymbol{x}, t) = 0$.

- Das charakteristische Polynom hat den gleichen Grad in jeder Variable, und es gibt nicht triviale charakteristische Lösungen. Eine solche PDG nennt man *hyperbolisch*.

Poisson Gleichung: Elliptische PDG

- Beispiel: Poisson Gleichung für $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$,

  $$Lu := \Delta u = f$$

  Mit PDG-Ordnung $m = 2$ hängt Q von $\boldsymbol{U} = \{\nabla^l u\}_{l=0}^{m-1} = \{u, \nabla u\}$ nicht ab. Das Symbol und die Form sind gleich:

  $$Q(\boldsymbol{y}; \boldsymbol{U}, \boldsymbol{x}) = Q(\boldsymbol{y}) = \det\{\Lambda(\boldsymbol{y})\} = \Lambda(\boldsymbol{y}) = |\boldsymbol{y}|^2$$

  Da eine charakteristische Lösung

  $$0 = Q(\nabla\varphi) = |\nabla\varphi|^2, \quad \varphi(0) = 0$$

  notwendigerweise trivial ist, $\varphi(x) = 0$, kann die PDG auf keine Teilmenge vom $\mathbb{R}^n$ reduziert werden. Alle Werte der Lösung $u(\boldsymbol{x})$ hängen zusammen.
- Das charakteristische Polynom hat den gleichen Grad in jeder Variable, aber es gibt keine nicht trivialen charakteristischen Lösungen. Eine PDG mit diesen Eigenschaften nennt man *elliptisch*.

Wärmegleichung: Parabolische PDG

- Beispiel: Wärmegleichung für $(\boldsymbol{x}, t) \in \mathbb{R}^{n+1}$, $n \geq 1$,
$$Lu = \partial_t u - \Delta u = f$$
Mit PDG-Ordnung $m = 2$ hängt Q von $\boldsymbol{U} = \{\nabla^l u\}_{l=0}^{m-1} = \{u, \nabla u, \partial_t u\}$ nicht ab. Das Symbol und die Form sind gleich:
$$Q(\boldsymbol{y}, s; \boldsymbol{U}, \boldsymbol{x}) = Q(\boldsymbol{y}, s) = \det\{\Lambda(\boldsymbol{y}, s)\} = \Lambda(\boldsymbol{y}, s) = -|\boldsymbol{y}|^2$$
Eine charakteristische Lösung der Gleichungen,
$$0 = Q(\nabla\varphi, \varphi_t) = -|\nabla\varphi|^2, \quad \varphi(\boldsymbol{x}^0, t^0) = 0$$
ist $\varphi(\boldsymbol{x}, t) = t - t^0$. Wenn die normalen Ableitungen $\{\partial_t^l u = g_l\}_{l=0}^{m-1}$ vorgegeben sind, lässt sich die PDG innerhalb der Charakteristik als $\Delta u = f - g_1$ umschreiben. Für fixierte Zeit t^0 hängen alle Werte der Lösung $u(\boldsymbol{x}, t^0)$ (mit unendlicher Geschwindigkeit) zusammen.
- Es gibt nicht triviale charakteristische Lösungen, aber die PDG ist ausgeartet im Sinne, dass das charakteristische Polynom nicht den gleichen Grad in jeder Variable hat. Eine PDG mit diesen Eigenschaften nennt man *parabolisch*.

Transportgleichung für $(\boldsymbol{x}, t) \in \mathbb{R}^{n+1}$

- Beispiel: Transportgleichung für $(\boldsymbol{x}, t) \in \mathbb{R}^{n+1}$, $n \geq 1$,

$$Lu := \boldsymbol{b} \cdot \nabla u + \partial_t u = c, \quad \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n, c \in \mathbb{R}^1$$

Mit PDG-Ordnung $m = 1$ hängt Q von $\boldsymbol{U} = \{\nabla^l u\}_{l=0}^{m-1} = \{u\}$ nicht ab. Das Symbol und die Form sind gleich:

$$Q(\boldsymbol{y}, s; \boldsymbol{U}, \boldsymbol{x}) = Q(\boldsymbol{y}, s) = \det\{\Lambda(\boldsymbol{y}, s)\} = \Lambda(\boldsymbol{y}, s) = \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{y} + s$$

Charakteristische Lösungen der Gleichungen,

$$0 = Q(\nabla\varphi, \varphi_t) = \boldsymbol{b} \cdot \nabla\varphi + \varphi_t, \quad \varphi(\boldsymbol{x}, t) = \varphi(0, 0) = 0$$

sind

$$\varphi_i(\boldsymbol{x}, t) = x_i - b_i t, \quad i = 1, \ldots, n$$

Mit $\xi_i(\boldsymbol{x}, t) = \varphi_i(\boldsymbol{x}, t)$ und $\xi_{n+1}(\boldsymbol{x}, t) = t$ folgt

$$\begin{bmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \\ \xi_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & & -b_1 \\ & \ddots & & \vdots \\ & & 1 & -b_n \\ & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ t \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & & b_1 \\ & \ddots & & \vdots \\ & & 1 & b_n \\ & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_n \\ \xi_{n+1} \end{bmatrix}$$

Transportgleichung für $(\boldsymbol{x}, t) \in \mathbb{R}^{n+1}$

Auf der ξ_{n+1}-Achse gelten $\xi_i = x_i - b_i t = 0$, $i = 1, \ldots, n$, oder

$$t = \frac{x_1}{b_1} = \cdots = \frac{x_i}{b_i} \Rightarrow \xi_{n+1}\text{-Achse} = \{s \times (\boldsymbol{b}, 1) : s \in \mathbb{R}^1\}$$

Vom Punkt $(\boldsymbol{x}, t) = (0, 0)$ weg ist die Ableitung von u entlang der ξ_{n+1}-Achse gegeben durch:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial \xi_{n+1}} = \frac{\partial}{\partial s} u(\boldsymbol{x} + s\boldsymbol{b}, t + s) &= \nabla u(\boldsymbol{x} + s\boldsymbol{b}, t + s) \cdot \boldsymbol{b} \\ &+ \partial_t u(\boldsymbol{x} + s\boldsymbol{b}, t + s) \end{aligned}$$

Vergleiche mit $z(s) = u(\boldsymbol{x} + s\boldsymbol{b}, t + s)$ in der Einführung!

Die PDG kann ohne $\partial_{\xi_i} u$, $i = 1, \ldots, n$, so umgeschrieben werden:

$$\frac{\partial u}{\partial \xi_{n+1}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial x_i}{\partial \xi_{n+1}} \frac{\partial u}{\partial x_i} + \frac{\partial t}{\partial \xi_{n+1}} \frac{\partial u}{\partial t} = \boldsymbol{b} \cdot \nabla u + \partial_t u = c$$

Also $u(\xi_1, \ldots, \xi_{n+1}) = c\xi_{n+1} + f(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ oder

$$u(\boldsymbol{x}, t) = ct + f(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}t)$$

Quasilineare Gleichung erster Ordnung

- Beispiel: Quasilineare Gleichung erster Ordnung,

$$L(u) := \boldsymbol{a}(\boldsymbol{x}, u)\cdot\nabla u = c(\boldsymbol{x}, u), \quad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n, \boldsymbol{a} : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n, \boldsymbol{c} : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^1$$

Mit PDG-Ordnung $m = 1$ hängt Q von $\boldsymbol{U} = \{\nabla^l u\}_{l=0}^{m-1} = \{u\}$ ab. Das Symbol und die Form sind gleich:

$$Q(\boldsymbol{y}; u, \boldsymbol{x}) = \det\{\Lambda(\boldsymbol{y}; u, \boldsymbol{x})\} = \Lambda(\boldsymbol{y}; u, \boldsymbol{x}) = \boldsymbol{a}(\boldsymbol{x}, u) \cdot \boldsymbol{y}$$

Definiere charakteristische Lösungen der Gleichungen

$$0 = Q(\nabla\varphi; u, \boldsymbol{x}) = \boldsymbol{a}(\boldsymbol{x}, u) \cdot \nabla\varphi, \quad 0 = \varphi(x, t) = \varphi(0, 0)$$

durch $n - 1$ linear unabhängige Vektoren senkrecht auf $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{x}, u)$,

$$\nabla\varphi_i = a_n(\boldsymbol{x}, u)\hat{\boldsymbol{e}}_i - a_i(\boldsymbol{x}, u)\hat{\boldsymbol{e}}_n, \quad i = 1, \ldots, n - 1$$

wobei $a_n(\boldsymbol{x}, u) \neq 0$ angenommen wird. Deswegen definieren wir das Koordinatensystem

$$\xi_i(\boldsymbol{x}) = \varphi_i(\boldsymbol{x}), \quad i = 1, \ldots, n - 1, \quad \xi_n(\boldsymbol{x}) = x_n$$

Quasilineare Gleichung erster Ordnung

Analog zum letzten Beispiel sieht man, auf der ξ_n-Achse gelten $\xi_i(\boldsymbol{x}) = 0$, $i = 1, \ldots, n-1$, oder $\varphi(\boldsymbol{x}) = 0$ wobei $\boldsymbol{\varphi} = (\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1})$. Es gelten

$$[\nabla\varphi_1, \ldots, \nabla\varphi_{n-1}] = \begin{bmatrix} a_n & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \\ -a_1 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(n+1)\times n}$$

und

$$\left|\frac{\partial(\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1})}{\partial(x_1, \ldots, x_{n-1})}\right| = a_n^{n-1} \neq 0$$

Nach dem Satz der Impliziten Funktion $\exists \boldsymbol{y}(x_n) : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^{n-1}$ $\ni \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{y}(x_n), x_n) = 0$. Sei $\boldsymbol{x}(s) = (\boldsymbol{y}(x_n(s)), x_n(s))$ eine beliebige Parameterisierung der

$$\xi_n\text{-Achse} = \{\boldsymbol{x}(s) : s \in \mathbb{R}^1\}$$

Hier entlang gelten $\varphi_i(\boldsymbol{x}(s)) = 0$ und

$$0 = \frac{d}{ds}\varphi_i(\boldsymbol{x}(s)) = \dot{\boldsymbol{x}}(s) \cdot \nabla\varphi_i(\boldsymbol{x}(s))$$

Quasilineare Gleichung erster Ordnung

Aus

$$\begin{aligned} 0 = \dot{\boldsymbol{x}}(s) \cdot \nabla\varphi_i(\boldsymbol{x}(s)) &= \dot{x}_i(s) a_n(\boldsymbol{x}(s), u(\boldsymbol{x}(s))) \\ &- \dot{x}_n(s) a_i(\boldsymbol{x}(s), u(\boldsymbol{x}(s))) \\ &\quad i = 1, \dots, n-1 \end{aligned}$$

bekommt man das System von gewöhnlichen Differentialgleichungen für $\boldsymbol{x}(s)$,

$$\dot{\boldsymbol{x}}(s) = \boldsymbol{a}(\boldsymbol{x}(s), u(\boldsymbol{x}(s)))$$

wobei $u(\boldsymbol{x})$ immer noch unbekannt ist, aber u lässt sich durch folgende Ergänzung des GDG-Systems bestimmen:

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} u(\boldsymbol{x}(s)) &= \dot{\boldsymbol{x}}(s) \cdot \nabla u(\boldsymbol{x}(s)) \\ &= \boldsymbol{a}(\boldsymbol{x}(s), u(\boldsymbol{x}(s))) \cdot \nabla u(\boldsymbol{x}(s)) \\ &= c(\boldsymbol{x}(s), u(\boldsymbol{x}(s))) \end{aligned}$$

Zusammengefasst, $\boldsymbol{x}$ und u werden durch die Lösung vom folgenden GDG-System bestimmt:

$$\dot{\boldsymbol{x}}(s) = \boldsymbol{a}(\boldsymbol{x}(s), u(\boldsymbol{x}(s))) \quad \dot{u}(\boldsymbol{x}(s)) = c(\boldsymbol{x}(s), u(\boldsymbol{x}(s)))$$

Charakteristiken für nicht lineare PDG erster Ordnung

- Zu lösen ist

$$\begin{cases} F(\nabla u, u, \boldsymbol{x}) &= 0, \quad \Omega \subset \mathbb{R}^n \\ u &= g, \quad \Gamma \subseteq \partial\Omega \end{cases}$$

- Konstruiere $\{\xi_i\}_{i=1}^n$ sodass $\nabla\xi_i(\boldsymbol{x}^0) \cdot \nabla\xi_j(\boldsymbol{x}^0) = \delta_{ij}$ gilt, wobei für $\boldsymbol{x}^0 \in \Gamma$ und $R > 0$ gilt $\Gamma \cap B(\boldsymbol{x}^0, R) = \{\boldsymbol{x} \in B(\boldsymbol{x}^0, R) : \xi_n(\boldsymbol{x}) = 0\}$.
- Bezeichne mit $z^0 = g(\boldsymbol{x}^0)$ den Wert von u in $\boldsymbol{x}^0$.
- Bezeichne mit $\boldsymbol{p}^0$ ein möglicher Gradient ∇u in $\boldsymbol{x}^0$, d.h. eine mögliche Lösung der Gleichung,
$$F(\boldsymbol{p}^0, z^0, \boldsymbol{x}^0) = 0.$$
- $\boldsymbol{p}^0$ muss auch mit g übereinstimmen:
$$\boldsymbol{p}^0 \cdot \nabla\xi_i = \nabla g(\boldsymbol{x}^0) \cdot \nabla\xi_i, \quad i = 1, \ldots, n-1.$$
- Die letzten 2 Gleichungen sind *Kompatibilitätsbedingungen* zwischen $\boldsymbol{p}^0$ und g. Existiert $\boldsymbol{p}^0$? Ist $\boldsymbol{p}^0$ eindeutig?
- Wie kann der Punkt $(\boldsymbol{p}^0, z^0, \boldsymbol{x}^0)$ fortgesetzt werden?

Charakteristiken für nicht lineare PDG erster Ordnung

- Definiere $\boldsymbol{G} : \mathbb{R}^{2n+1} \to \mathbb{R}^n$ durch

  $$\left\{ \begin{array}{rcll} G_i(\boldsymbol{p}, z, \boldsymbol{x}) & = & [\boldsymbol{p} - \nabla g(\boldsymbol{x})] \cdot \nabla \xi_i(\boldsymbol{x}), & i = 1, \ldots, n-1 \\ G_n(\boldsymbol{p}, z, \boldsymbol{x}) & = & F(\boldsymbol{p}, z, \boldsymbol{x}) & \end{array} \right.$$

  Nimm an, es gilt $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{p}^0, z^0, \boldsymbol{x}^0) = 0$.
- Um eine Funktion $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}(z, \boldsymbol{x})$ konstruieren zu können, die $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{p}(z, \boldsymbol{x}), z, \boldsymbol{x}) = 0$ und $\boldsymbol{p}(z^0, \boldsymbol{x}^0) = \boldsymbol{p}^0$ erfüllt, verlangt der Satz der Impliziten Funktion die Bedingung:

  $$\left| \frac{\partial \boldsymbol{G}}{\partial \boldsymbol{p}}(\boldsymbol{p}^0, z^0, \boldsymbol{x}^0) \right| \neq 0 \quad \text{wobei} \quad \frac{\partial \boldsymbol{G}}{\partial \boldsymbol{p}} = \begin{bmatrix} \partial_{x_1} \xi_1 & \ldots & \partial_{x_n} \xi_1 \\ \vdots & & \vdots \\ \partial_{x_1} \xi_{n-1} & \ldots & \partial_{x_n} \xi_{n-1} \\ \partial_{p_1} F & \ldots & \partial_{p_n} F \end{bmatrix}$$

  Aus $\nabla \xi_i(\boldsymbol{x}^0) \cdot \nabla \xi_j(\boldsymbol{x}^0) = \delta_{ij}$ folgt die Bedingung,

  $$\nabla_{\boldsymbol{p}} F(\boldsymbol{p}^0, z^0, \boldsymbol{x}^0) \cdot \nabla \xi_n(\boldsymbol{x}^0) \neq 0.$$
- Somit ergibt sich die Bedingung einer Charakteristik,

  $$\nabla_{\boldsymbol{p}} F(\boldsymbol{p}^0, z^0, \boldsymbol{x}^0) \cdot \nabla \varphi(\boldsymbol{x}^0) = 0.$$

Charakteristiken für nicht lineare PDG erster Ordnung

- Beispiel: Für die PDG $F(\nabla u, u, \boldsymbol{x}) = 0$, $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2$, sei
$$F(\nabla u) = (\partial_{x_1} u)^2 \quad \text{oder} \quad F(\boldsymbol{p}) = p_1^2.$$
Eine Charakteristik $\varphi(\boldsymbol{x}) = 0$ ist gegeben durch
$$\nabla_{\boldsymbol{p}} F(\boldsymbol{p}^0) \cdot \nabla\varphi(\boldsymbol{x}^0) = 0 \quad \text{oder} \quad \varphi(\boldsymbol{x}) = x_2 - x_2^0.$$
und u kann nicht so beliebig vorgegeben werden
$$u(x_1, x_2^0) = g(x_1), \quad \text{auf} \quad \varphi(\boldsymbol{x}) = 0,$$
da im allgemeinen
$$F(\nabla g) = (\partial_{x_1} g)^2 \neq 0.$$
Auf der anderen Seite ist dieses Problem
$$F(\nabla u) = 0, \quad u(0, x_2) = g(x_2) \quad \text{auf} \quad x_1 = 0$$
mit $u(x_1, x_2) = g(x_2)$ lösbar.
- Wie löst man die PDG im allgemeinen, wenn die Daten auf nicht charakteristischen Mengen vorgegeben sind?

Lösung einer nicht linearen PDG erster Ordnung

- Zu lösen ist

$$\begin{cases} F(\nabla u, u, \boldsymbol{x}) & = & 0, & \Omega \subset \mathbb{R}^n \\ u & = & g, & \Gamma \subseteq \partial\Omega \end{cases}$$

  wobei Γ nicht charakteristisch ist.
- Der Plan: Wir bauen ein Netzwerk von Charakteristiken auf, die vom Γ stahlen, und die Lösung entlang einer Charakteristik lässt sich von den Daten g auf Γ bestimmen.
- Die obige Bedingung einer Charakteristik,

$$\nabla_{\boldsymbol{p}} F(\boldsymbol{p}^0, z^0, \boldsymbol{x}^0) \cdot \nabla\varphi(\boldsymbol{x}^0) = 0.$$

- Analog wird eine charakteristische Kurve $\boldsymbol{x}(s)$, $\varphi(\boldsymbol{x}(s)) = 0$,

$$D_s\varphi(\boldsymbol{x}(s)) = \dot{\boldsymbol{x}}(s) \cdot \nabla\varphi(\boldsymbol{x}(s)) = 0$$

  durch die Differentialgleichung konstruiert,

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{ds}(s) = \nabla_{\boldsymbol{p}} F(\boldsymbol{p}(s), z(s), \boldsymbol{x}(s))$$

Lösung einer nicht linearen PDG erster Ordnung

- Die u-Werte auf der charakteristischen Kurve $\boldsymbol{x}(s)$ werden mit $z(s) = u(\boldsymbol{x}(s))$ bezeichnet. Es folgt

$$\begin{aligned} \frac{dz}{ds} &= D_s u(\boldsymbol{x}(s)) = \nabla u(\boldsymbol{x}(s)) \cdot \dot{\boldsymbol{x}}(s) \\ &= \boldsymbol{p}(s) \cdot \nabla_{\boldsymbol{p}} F(\boldsymbol{p}(s), z(s), \boldsymbol{x}(s)) \end{aligned}$$

  wobei $\boldsymbol{p}(s) = \nabla u(\boldsymbol{x}(s))$ die ∇u-Werte auf der charakteristischen Kurve $\boldsymbol{x}(s)$ bezeichnet, und $\dot{\boldsymbol{x}}(s)$ ist durch die letzte Differentialgleichung ersetzt worden.
- Aus $F(\nabla u, u, \boldsymbol{x}) = 0$ folgt

$$0 = \nabla_{\boldsymbol{x}} F(\nabla u(\boldsymbol{x}), u(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{x}) = \nabla^2 u \nabla_{\boldsymbol{p}} F + \nabla u D_z F + \nabla_{\boldsymbol{x}} F$$

  oder mit $d\boldsymbol{p}/ds = \nabla^2 u(\boldsymbol{x}(s))\dot{\boldsymbol{x}}(s)$

$$\begin{aligned} 0 &= \nabla^2 u(\boldsymbol{x}(s)) \nabla_{\boldsymbol{p}} F(\boldsymbol{p}(s), z(s), \boldsymbol{x}(s)) & & \nabla^2 u(\boldsymbol{x}(s))\dot{\boldsymbol{x}}(s) + \\ &+ \nabla u(\boldsymbol{x}(s)) D_z F(\boldsymbol{p}(s), z(s), \boldsymbol{x}(s)) &= & \boldsymbol{p}(s) D_z F(\boldsymbol{p}(s), z(s), \boldsymbol{x}(s)) \\ &+ \nabla_{\boldsymbol{x}} F(\boldsymbol{p}(s), z(s), \boldsymbol{x}(s)) & & + \nabla_{\boldsymbol{x}} F(\boldsymbol{p}(s), z(s), \boldsymbol{x}(s)) \end{aligned}$$

Lösung einer nicht linearen PDG erster Ordnung

- Zusammenfassung: die Lösung des Problems,

$$\begin{cases} F(\nabla u, u, \boldsymbol{x}) &=& 0, & \Omega \subset \mathbb{R}^n \\ u &=& g, & \Gamma \subseteq \partial\Omega \end{cases}$$

ist durch $u(\boldsymbol{x}(s)) = z(s)$ und die Lösung des charakteristichen Systems gegeben:

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}}(s) &=& \nabla_{\boldsymbol{p}} F(\boldsymbol{p}(s), z(s), \boldsymbol{x}(s)) \\ \dot{z}(s) &=& \boldsymbol{p}(s) \nabla_{\boldsymbol{p}} F(\boldsymbol{p}(s), z(s), \boldsymbol{x}(s)) \\ \dot{\boldsymbol{p}}(s) &=& -\boldsymbol{p}(s) D_z F(\boldsymbol{p}(s), z(s), \boldsymbol{x}(s)) - \nabla_{\boldsymbol{x}} F(\boldsymbol{p}(s), z(s), \boldsymbol{x}(s)) \end{cases}$$

wobei

$$\boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}^0 \in \Gamma, \quad z(0) = z^0 = g(\boldsymbol{x}^0), \quad \boldsymbol{p}(0) = \boldsymbol{p}^0$$

und $\boldsymbol{p}^0$ ist durch die Kompatibilitätsbedingungen gegeben:

$$F(\boldsymbol{p}^0, z^0, \boldsymbol{x}^0) = 0, \quad \boldsymbol{p}^0 \cdot \nabla \xi_i = \nabla g(\boldsymbol{x}^0) \cdot \nabla \xi_i, \quad i = 1, \ldots, n-1.$$

Lösung einer nicht linearen PDG erster Ordnung

- Beispiel: $F(\nabla u, u, \boldsymbol{x}) = \boldsymbol{b} \cdot \nabla u + cu$, $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$, $c \in \mathbb{R}$,

$$\begin{cases} F(\nabla u, u, \boldsymbol{x}) & = & 0, & \Omega \subset \mathbb{R}^n \\ u & = & g, & \Gamma \subseteq \partial\Omega \end{cases}$$

  $\Gamma = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n : x_n = 0\}$ nicht charakteristisch: $b_n \neq 0$.
- $\boldsymbol{x}$-Gleichung:

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{ds} = \nabla_{\boldsymbol{p}} F = \boldsymbol{b}, \quad \boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}^0 \in \Gamma$$

- z-Gleichung: $z(0) = g(\boldsymbol{x}^0)$,

$$\frac{dz}{ds} = \boldsymbol{p}(s) \cdot \nabla_{\boldsymbol{p}} F = \nabla u(\boldsymbol{x}(s)) \cdot \boldsymbol{b} = -cu(\boldsymbol{x}(s)) = -cz(s)$$

- Lösung des Systems: $\boldsymbol{x}(s) = \boldsymbol{x}^0 + s\boldsymbol{b}$, $z(s) = e^{-cs} g(\boldsymbol{x}^0)$.
- Fixiere $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{x} \notin \Gamma$. Finde $\boldsymbol{x}^0 \in \Gamma$ und $\hat{s}$, wobei $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^0 + \hat{s}\boldsymbol{b}$, d.h.

$$\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{b} = \boldsymbol{x}^0 \cdot \boldsymbol{b} + s\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{b} \Rightarrow \hat{s} = (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^0) \cdot \boldsymbol{b} / |\boldsymbol{b}|^2$$

  und es folgt:

$$u(\boldsymbol{x}) = z(\hat{s}) = e^{-c(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}^0)\cdot\boldsymbol{b}/|\boldsymbol{b}|^2} g(\boldsymbol{x}^0)$$

Lösung einer nicht linearen PDG erster Ordnung

- $\boldsymbol{p}$-Gleichung? $d\boldsymbol{p}/ds = -\boldsymbol{p}(s)D_zF - \nabla_{\boldsymbol{x}}F = -c\boldsymbol{p}(s)$. War hier nicht notwendig, um die Lösung explizit zu bestimmen, aber wird für die allgemeine Existenz verwendet:
- *Lokale Lösung*: $\Gamma = \{\xi_n(\boldsymbol{x}) = 0\}$ ist nicht charakteristisch:
$$\nabla_{\boldsymbol{p}}F(\boldsymbol{p}^0, z^0, \boldsymbol{x}^0) \cdot \nabla\xi_n(\boldsymbol{x}^0) \neq 0.$$
Nach dem Satz der Impliziten Funktion $\exists \boldsymbol{h}(\boldsymbol{y})$ wobei
  - $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}^0) = \boldsymbol{p}^0$,
  - $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{y}) \cdot \nabla\xi_i(\boldsymbol{y}) = \nabla g(\boldsymbol{y}) \cdot \nabla\xi_i(\boldsymbol{y})$, $i = 1, \dots, n-1$, und
  - $F(\boldsymbol{h}(\boldsymbol{y}), g(\boldsymbol{y}), \boldsymbol{y}) = 0$, $\boldsymbol{y} \in \Gamma$, $|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}^0|$ klein genug.

  Sei $(\boldsymbol{p}(s;\boldsymbol{y}), z(s;\boldsymbol{y}), \boldsymbol{x}(s;\boldsymbol{y}))$ die Lösung des charakteristischen Systems mit Anfangswerten,
$$\boldsymbol{p}(0;\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{h}(\boldsymbol{y}), \quad z(0;\boldsymbol{y}) = g(\boldsymbol{y}), \quad \boldsymbol{x}(0;\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{y}$$
Dann $\exists V \subset \mathbb{R}^n$, $I \subset \mathbb{R}$, $W \subset \Gamma$ mit $\boldsymbol{x}^0 \in V$, $0 \in I$, $\boldsymbol{x}^0 \in W$ wobei
$$\forall \hat{\boldsymbol{x}} \in V, \exists! \hat{s} = s(\hat{\boldsymbol{x}}) \in I, \exists! \hat{\boldsymbol{y}} = \boldsymbol{y}(\hat{\boldsymbol{x}}) \in W \ni \hat{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{x}(\hat{s};\hat{\boldsymbol{y}}).$$
Definiere die Lösung $u(\boldsymbol{x}) = z(s(\boldsymbol{x}); \boldsymbol{y}(\boldsymbol{x}))$.

Satz: $u \in C^2(V, \mathbb{R})$ und u löst $F(\nabla u, u, \boldsymbol{x}) = 0$; $u = g$, Γ.

Nicht viskose Burgersche Gleichung

Eine Skalare Erhaltungsgleichung als Modell der Eulerschen Gleichungen:

$$\begin{cases} u_t + \frac{1}{2}(u^2)_x &= 0, \quad \mathbb{R}\times(0,\infty) \\ u &= u_0, \quad \mathbb{R}\times\{t=0\} \end{cases}$$

Betrachte die zwei Fälle: $u_0(x) = \sigma \mathrm{sign}(x)$, $\sigma = \pm 1$.

Bemerke:

$$u_t + \frac{1}{2}(u^2)_x = u_t + u u_x$$

und mit

$$\boldsymbol{x} = (x,t)^{\mathrm{T}}, \quad F(\boldsymbol{p}, z, \boldsymbol{x}) = \boldsymbol{p}\cdot(z,1)$$

es gilt

$$F((u_x,u_t)^{\mathrm{T}}, u, (x,t)^{\mathrm{T}}) = 0.$$

Die charakteristischen Gleichungen für $\Gamma = \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}' &= \nabla_{\boldsymbol{p}} F = (z,1)^{\mathrm{T}}, & x(0) = x^0 \in \mathbb{R} \\ z' &= \boldsymbol{p}\cdot\nabla_{\boldsymbol{p}} F = \boldsymbol{p}\cdot(z,1) = 0, & z(0) = u_0(x^0) \end{cases}$$

Nicht viskose Burgersche Gleichung

Die vereinfachten charakteristischen Gleichungen für die gegebenen Randbedingungen: $z(s) = \sigma \mathrm{sign}(x^0)$,

$$t'(s) = 1, \quad t(0) = 0; \qquad x'(s) = \sigma \mathrm{sign}(x^0), \quad x(0) = x^0$$

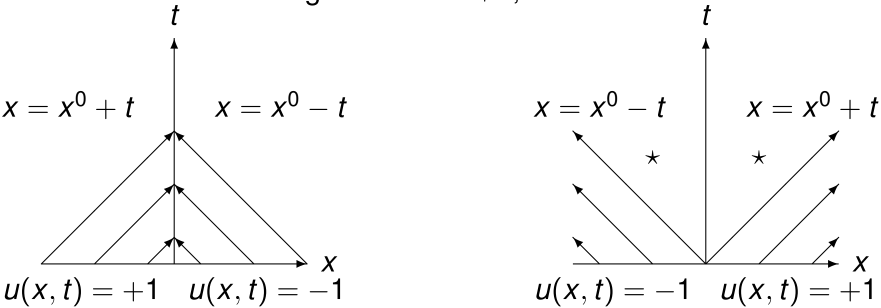
und

$$t(s) = s, \quad x(s) = x^0 + \sigma \mathrm{sign}(x^0) s \quad \Rightarrow \quad x = x^0 + \sigma \mathrm{sign}(x^0) t$$

Also gilt

$$u(x,t) = \sigma \mathrm{sign}(x^0) \quad \text{auf} \quad x = x^0 + t\sigma \mathrm{sign}(x^0)$$

Für $\sigma = -1$ beziehungsweise $\sigma = +1$,



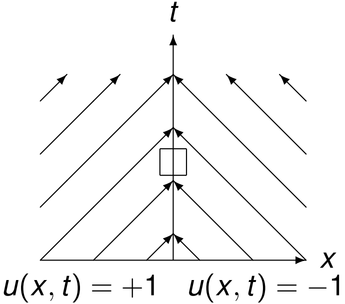
Nicht viskose Burgersche Gleichung

Wo liegt ein Shock? Welche Werte für die $\star$-Gebiete?

Dafür überlegen wir die schwache Form: Integriere $u_t + \frac{1}{2}(u^2)_x = 0$ über eine beliebige Zelle $[x_1, x_2] \times [t_1, t_2]$:

$$\int_{x_1}^{x_2} [u(x, t_2) - u(x, t_1)]dx + \frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2} [u^2(x_2, t) - u^2(x_1, t)]dt = 0$$

Für $\sigma = -1$, probe mit der Testzelle $[-\varepsilon, +\varepsilon] \times [t_1, t_2]$:



$$0 = \int_{-\varepsilon}^{0} [u(x, t_2)_{=+1} - u(x, t_1)_{=+1}]dx +$$

$$\int_{0}^{+\varepsilon} [u(x, t_2)_{=-1} - u(x, t_1)_{=-1}]dx +$$

$$\frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2} [u^2(+\varepsilon, t)_{=(-1)^2} - u^2(-\varepsilon, t)_{=(+1)^2}]dt$$

und andere Testzellen sind noch einfacher: Shock richtig.

Nicht viskose Burgersche Gleichung

Im zweiten Fall, überlegen wir folgende einfache Lösung: Integriere $u_t + \frac{1}{2}(u^2)_x = 0$ über eine beliebige Zelle $[x_1, x_2] \times [t_1, t_2]$:

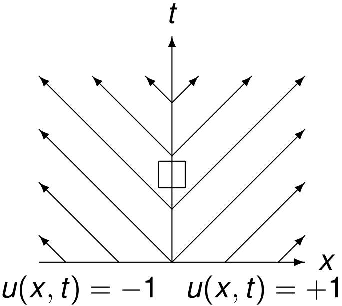
$$\int_{x_1}^{x_2} [u(x, t_2) - u(x, t_1)]dx + \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} [u^2(x_2, t) - u^2(x_1, t)]dt = 0$$

Für $\sigma = +1$, probe mit der Testzelle $[-\varepsilon, +\varepsilon] \times [t_1, t_2]$:

$$0 = \int_{-\varepsilon}^{0} [u(x, t_2)_{=-1} - u(x, t_1)_{=-1}]dx +$$

$$\int_{0}^{\varepsilon} [u(x, t_2)_{=+1} - u(x, t_1)_{=+1}]dx +$$

$$\frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} [u^2(+\varepsilon, t)_{=(+1)^2} - u^2(-\varepsilon, t)_{=(-1)^2}]dt$$

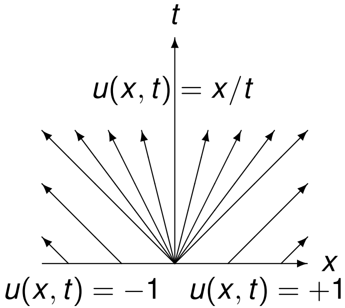


und andere Testzellen sind noch einfacher: Shock richtig.

Viskose Burgersche Gleichung

Die folgende Lösung ist aber *physikalisch* natürlicher:

$$u(x,t) = \begin{cases} -1, & x \le -t \\ x/t, & -t \le x \le t \\ +1, & t \le x \end{cases}$$



Diese findet man durch die Lösung der Burgerschen Gleichung mit Viskosität ν:

$$(\star) \qquad \begin{cases} u_t + \frac{1}{2}(u^2)_x = \nu u_{xx}, & \mathbb{R} \times (0,\infty) \\ u = u_0, & \mathbb{R} \times \{t = 0\} \end{cases}$$

und den Limus $\nu \to 0$. Die obige Lösung nennt man die *Lösung der verschwindenden Viskosität*.

Haufaufgabe: Löse $(\star)$ und leite die obige Lösung für $\nu \to 0$ her.

Hamilton-Jacobi Gleichung

Für eine Hamiltonsche Funktion,

$$H(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{x}) = \underbrace{\frac{\boldsymbol{p}}{2m}}_{\substack{\text{kinetische}\\ \text{Energie}}} + \underbrace{\phi(\boldsymbol{x})}_{\substack{\text{potentielle}\\ \text{Energie}}}$$

soll das Randwertproblem gelöst werden:

$$\begin{cases} u_t + H(\nabla u, \boldsymbol{x}) & = & 0, & \mathbb{R}^n \times (0, \infty) \\ u & = & g, & \mathbb{R}^n \times \{t = 0\} \end{cases}$$

Um die charakteristischen Gleichungen herzuleiten, definiere $\boldsymbol{q} = (\boldsymbol{p}, r)$, $\boldsymbol{y} = (\boldsymbol{x}, t)$ und $G(\boldsymbol{q}, z, \boldsymbol{y}) = r + H(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{x})$. Es gelten:

$$\nabla_{\boldsymbol{q}} G = \begin{pmatrix} \nabla_{\boldsymbol{p}} H(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{x}) \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \nabla_{\boldsymbol{y}} G = \begin{pmatrix} \nabla_{\boldsymbol{x}} H(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{x}) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad D_z G = 0$$

Die erste charakteristische Gleichungen ist $d\boldsymbol{y}/ds = \nabla_{\boldsymbol{q}} G$ oder:

$$\frac{d}{ds} \begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nabla_{\boldsymbol{p}} H(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{x}) \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \frac{d\boldsymbol{x}}{ds} = \nabla_{\boldsymbol{p}} H(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{x}), \quad t = s$$

Hamiltonsche Gleichungen

Die zweite charakteristische Gleichungen ist $d\boldsymbol{q}/ds = -\boldsymbol{q}D_zG - \nabla_{\boldsymbol{y}}G$ oder mit $D_zG = 0$,

$$\frac{d}{ds}\begin{pmatrix}\boldsymbol{p}\\ r\end{pmatrix} = -\begin{pmatrix}\nabla_{\boldsymbol{x}}H(\boldsymbol{p},\boldsymbol{x})\\ 0\end{pmatrix} \quad\Rightarrow\quad \frac{d\boldsymbol{p}}{ds} = -\nabla_{\boldsymbol{x}}H(\boldsymbol{p},\boldsymbol{x}),\quad r = -H(\boldsymbol{p}^0,\boldsymbol{x}^0)$$

Satz: $H(\boldsymbol{p}(s),\boldsymbol{x}(s)) = H(\boldsymbol{p}^0,\boldsymbol{x}^0)$ (Energie-Erhaltung)!
Die dritte charakteristische Gleichungen ist $dz/ds = \boldsymbol{q}\cdot\nabla_{\boldsymbol{q}}G$ oder mit $G(\boldsymbol{q},z,\boldsymbol{y}) = r + H(\boldsymbol{p},\boldsymbol{x}) = 0$,

$$\frac{dz}{ds} = \begin{pmatrix}\boldsymbol{p}\\ r\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\nabla_{\boldsymbol{p}}H(\boldsymbol{p},\boldsymbol{x})\\ 1\end{pmatrix} = \boldsymbol{p}\cdot\nabla_{\boldsymbol{p}}H(\boldsymbol{p},\boldsymbol{x}) - H(\boldsymbol{p},\boldsymbol{x})$$

die von z nicht abhängt und daher:

$$z(s) = g(\boldsymbol{x}^0) + \int_0^s \left[\boldsymbol{p}(\sigma)\cdot\nabla_{\boldsymbol{p}}H(\boldsymbol{p}(\sigma),\boldsymbol{x}(\sigma)) - H(\boldsymbol{p}(\sigma),\boldsymbol{x}(\sigma))\right] d\sigma$$

nachdem $\boldsymbol{x}$ und $\boldsymbol{p}$ von den Hamiltonschen Gleichungen bestimmt werden:

$$\begin{cases}\dot{\boldsymbol{x}}(s) &= +\nabla_{\boldsymbol{p}}H(\boldsymbol{p}(s),\boldsymbol{x}(s)), \quad \boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}^0,\\ \dot{\boldsymbol{p}}(s) &= -\nabla_{\boldsymbol{x}}H(\boldsymbol{p}(s),\boldsymbol{x}(s)), \quad \boldsymbol{p}(0) = \boldsymbol{p}^0\end{cases}$$

Spektrale Methoden

Auf dem Gebiet $\Omega = \{(x,y) : 0 < x, y < 1\}$ soll gelöst werden:

$$\begin{cases} \Delta u &=& 0, & \Omega \\ u(x,0) &=& g(x), & x \in (0,1) \\ \partial_y u(x,1) &=& 0, & x \in (0,1) \\ \partial_x u(0,y) = \partial_x u(1,y) &=& 0, & y \in (0,1) \end{cases}$$

Da das Gebiet eine besondere viereckige Form hat, sucht man eine Lösung der Form $u = \sum_n \gamma_n u_n$, $u_n(x,y) = X(x)Y(y)$, $\gamma_n \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$\Delta u_n(x,y) = X''(x)Y(y) + X(x)Y''(y) = 0$$

oder

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)} = \lambda$$

wobei λ eine Konstante ist, weil eine reine Funktion von x und eine reine Funktion von y gleich sein können, nur wenn die beiden konstant sind.

Separationsansatz für ein Elliptisches Problem

Die allgemeine Lösung von $X''(x) = \lambda X(x)$ ist

$$X(x) = a \exp(\sqrt{\lambda} x) + b \exp(-\sqrt{\lambda} x)$$

Wegen der Randbedingungen $\partial_x u(0, y) = \partial_x u(1, y) = 0$ gelten

$$X'(0) = X'(1) = 0$$

oder:

$$\begin{aligned} X'(0) &= \sqrt{\lambda}(a - b) = 0 \Rightarrow a = b \\ \\ X'(1) &= a\sqrt{\lambda} \exp(\sqrt{\lambda}) - b\sqrt{\lambda} \exp(-\sqrt{\lambda}) \\ &= 2a\sqrt{\lambda} \sinh(\sqrt{\lambda}) = -2a\sqrt{-\lambda} \sin(\sqrt{-\lambda}) = 0 \end{aligned}$$

Die möglichen λ sind:

$$\lambda_n = -n^2\pi^2, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Mit $a = \frac{1}{2}$ definiere:

$$X_n(x) = \cos(n\pi x), \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Separationsansatz für ein Elliptisches Problem

Mit $\lambda = \lambda_n$, die allgemeine Lösung von $Y''(y) = n^2\pi^2 Y$ ist:

$$Y(y) = c \sinh[n\pi y] + d \cosh[-n\pi y]$$

Wegen der Randbedingungen $u(x,0) = g(x)$, $\partial_x u(x,1) = 0$ nimm:

$$Y(0) = 1, \quad Y'(1) = 0$$

oder:

$$\begin{aligned} Y(0) &= d = 1 \Rightarrow d = 1 \\ \\ Y'(1) &= n\pi c \cosh[n\pi] - n\pi d \sinh[-n\pi] \\ &= n\pi(c \cosh[n\pi] - \sinh[-n\pi]) = 0 \\ \Rightarrow c_n &= \sinh[-n\pi]/\cosh[n\pi] = -\tanh[n\pi] \end{aligned}$$

Wegen $\cosh(A)\cosh(B) \pm \sinh(A)\sinh(B) = \cosh(A \pm B)$ gilt
$-\tanh[n\pi]\sinh[n\pi y] + \cosh[-n\pi y] = \cosh[n\pi(y-1)]/\cosh[n\pi]$
Also definiere:

$$Y_n(x) = \cosh(n\pi(y-1))/\cosh[n\pi], \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Separationsansatz für ein Elliptisches Problem

Sei

$$g(x) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [\alpha_n \cos(n\pi x) + \beta_n \sin(n\pi x)]$$

die Fourier-Reihe Darstellung für g, wobei

$$\alpha_n = 2 \int_0^1 g(x) \cos[n\pi x] dx, \quad \beta_n = 2 \int_0^1 g(x) \sin[n\pi x] dx$$

Wegen der Kompatibilitätsbedingungen

$$\partial_x u(0,0) = g'(0) = 0, \quad \partial_x u(1,0) = g'(1) = 0$$

gelten $\beta_n = 0$, $n = 1, 2, \ldots$ Damit die verbliebene Randbedingung erfüllt ist, gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n \cos(n\pi x) = \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n X_n(x) Y_n(0) = u(x,0) = g(x) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cos(n\pi x)$$

oder

$$u(x,y) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cos(n\pi x) \cosh(n\pi(y-1)) / \cosh(n\pi)$$

Separationsansatz für ein Parabolisches Problem

Auf dem Gebiet $\Omega \times [0, \infty)$, $\Omega = (0, 1)$ soll gelöst werden:

$$\begin{cases} u_t - \Delta u &= 0, \quad \Omega \times (0, \infty) \\ u &= 0, \quad x \in \partial\Omega \times (0, \infty) \\ u &= u_0, \quad x \in \Omega \times \{t = 0\} \end{cases}$$

Da das Gebiet eine besondere viereckige Form hat, sucht man eine Lösung der Form $u = \sum_n \gamma_n u_n$, $u_n(x, y) = X(x)T(t)$, $\gamma_n \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$\partial_t u_n - \Delta u_n(x, y) = X(x)T'(t) - X''(x)T(t) = 0$$

oder

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T'(t)}{T(t)} = \lambda$$

wobei λ eine Konstante ist, weil eine reine Funktion von x und eine reine Funktion von t gleich sein können, nur wenn die beiden konstant sind.

Separationsansatz für ein Parabolisches Problem

Die allgemeine Lösung von $X''(x) = \lambda X(x)$ ist

$$X(x) = a\exp(\sqrt{\lambda}x) + b\exp(-\sqrt{\lambda}x)$$

Wegen der Randbedingungen $u = 0$, $\partial\Omega$ gelten

$$X(0) = X(1) = 0$$

oder:

$$\begin{aligned} X(0) &= (a+b) = 0 \Rightarrow a = -b \\ \\ X(1) &= a\exp(\sqrt{\lambda}) - a\exp(-\sqrt{\lambda}) \\ &= 2a\sinh(\sqrt{\lambda}) = 2ai\sin(\sqrt{-\lambda}) = 0 \end{aligned}$$

Die möglichen λ sind:

$$\lambda_n = -n^2\pi^2, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Mit $a = \frac{1}{2i}$ definiere:

$$X_n(x) = \sin(n\pi x), \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Separationsansatz für ein Parabolisches Problem

Mit $\lambda = \lambda_n$, die allgemeine Lösung von $T'(t) = n^2\pi^2 T$ ist:

$$T(t) = c\exp(-n^2\pi^2 t)$$

Wegen der Randbedingungen $u = u_0$, Ω, nimm $T(0) = 1$ oder $c = 1$ und definiere:

$$T_n(x) = \exp(-n^2\pi^2 t), \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Die Fourier-Reihe Darstellung für u_0 sei

$$u_0(x) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}[\alpha_n \cos(n\pi x) + \beta_n \sin(n\pi x)]$$

wobei $\alpha_n = 0$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ wegen der Kompatibilitätsbedingung $u_0(x) = u(x, 0) = 0$, $x \in \partial\Omega$. Nun muss gelten:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\gamma_n \sin(n\pi x) = \sum_{n=1}^{\infty}\gamma_n X_n(x) T_n(0) = u(x, 0) = u_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\beta_n \sin(n\pi x)$$

oder

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty}\beta_n \sin(n\pi x)\exp(-n^2\pi^2 t)$$

Eigenfunktionsansatz für Evolutionsgleichungen

Analog zu einem System von GDG, $\boldsymbol{u} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$,

$$\boldsymbol{u}' = A\boldsymbol{u}, \quad \boldsymbol{u}(0) = \boldsymbol{u}_0$$

kann die Lösung einer Evolutions-PDG ähnlich entwickelt werden.

Nimm an, A hat verschiedene Eigenwerte $\{\lambda_i\}_{i=1}^n$ mit entsprechenden Eigenvektoren $\{\boldsymbol{v}_i\}_{i=1}^n$, die eine Basis für $\mathbb{R}^n$ bilden. Also insbesondere $\exists\{\alpha_i\}_{i=1}^n$ sodass

$$\boldsymbol{u}_0 = \sum_{i=1}^n \alpha_i \boldsymbol{v}_i$$

Dann ist die Lösung der GDG gegeben durch:

$$\boldsymbol{u}(t) = \sum_{i=1}^n \alpha_i e^{\lambda_i t} \boldsymbol{v}_i$$

Probe:

$$\boldsymbol{u}'(t) = \sum_{i=1}^n \alpha_i e^{\lambda_i t} \lambda_i \boldsymbol{v}_i = \sum_{i=1}^n \alpha_i e^{\lambda_i t} A\boldsymbol{v}_i = A\boldsymbol{u}(t), \quad \boldsymbol{u}(0) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{u}_0$$

Eigenfunktionsansatz für Evolutionsgleichungen

Nun in der PDG sei A ein Differential-Operator:

$$u_t = Au, \quad u(0) = u_0$$

Nimm an, A hat verschiedene Eigenwerte $\{\lambda_i\}_{i=1}^{\infty}$ mit entsprechenden Eigenfunktionen $\{v_i\}_{i=1}^{\infty}$, d.h.

$$Av_i = \lambda_i v_i, \quad i = 1, 2, \ldots$$

Nimm weiters an, die Eigenfunktionen bilden eine Basis für einen gewissen Funktionenraum, in dem u_0 sich befindet:

$$u_0(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i v_i(\boldsymbol{x})$$

Dann ist die Lösung der PDG gegeben durch:

$$u(\boldsymbol{x}, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i e^{\lambda_i t} v_i(\boldsymbol{x})$$

Probe:

$$u_t(\boldsymbol{x}, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i e^{\lambda_i t} \lambda_i v_i(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i e^{\lambda_i t} A v_i(\boldsymbol{x}) = Au(\boldsymbol{x}, t)$$

$$u(\boldsymbol{x}, 0) = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i v_i(\boldsymbol{x}) = u_0(\boldsymbol{x})$$

Eigenfunktionsansatz für eine Wärmegleichung

Beispiel: $Au = u_{xx} \quad , \Omega = (0,1),$

$$\mathrm{Dom}(A) = \{u \in L^2(\Omega) : u_{xx} \in L^2(\Omega), u = 0, \partial\Omega\}$$

Man definiert den vollständigen Funktionenraum:

$$L^p(\Omega) = \left\{ v : (\Omega, \mathcal{L}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}) : \int_\Omega |v(\boldsymbol{x})|^p < \infty \right\}, p \geq 1$$

wobei $\mathcal{B}$ die Borel Mengen in $\mathbb{R}$ und $\mathcal{L}$ die Lebesgue messbaren Mengen in Ω sind.

Die Evolutions-PDG kann so umgeschrieben werden:

$$u_t = Au, \quad u(0) = u_0$$

Die Eigenfunktionen $\{v_n\}_{n=1}^\infty$ und Eigenwerte $\{\lambda_n\}_{n=1}^\infty$ sind

$$v_n(x) = \sin(n\pi x), \quad \lambda_n = -n^2\pi^2, \quad n = 1, 2, \ldots$$

und u_0 lässt sich bezüglich der Eigenfunktionen so darstellen:

$$u_0(x) = \sum_{n=1}^\infty \beta_n \sin(n\pi x)$$

Die Lösung der PDG ist gegeben durch:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^\infty \beta_n \sin(n\pi x) \exp(-n^2\pi^2 t)$$

Eigenfunktionsansatz für eine Wellengleichung

Beispiel: Mit $\Omega = (0, 1)$ soll gelöst werden,

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx}, & \Omega \times (0, \infty) \\ u = 0, & \partial\Omega \times (0, \infty) \\ u = u_0, & \Omega \times \{t = 0\} \\ u_t = u_1, & \Omega \times \{t = 0\} \end{cases}$$

Das Problem kann in erste Ordnung so umgeschrieben werden:

$$\begin{pmatrix} u \\ u_t \end{pmatrix}_t = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \partial_x^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ u_t \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} u \\ u_t \end{pmatrix}(0) = \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix}$$

Definiere

$$U = \begin{pmatrix} u \\ u_t \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \partial_x^2 & 0 \end{pmatrix}, \quad U_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix}$$

mit

$$\mathrm{Dom}(A) = \left\{ (u, v)^{\mathrm{T}} \in L^2(\Omega) \times L^2(\Omega) : u_{xx} \in L^2(\Omega), u = v = 0, \partial\Omega \right\}$$

Die Evolutionsgleichung hat nun die folgende Form:

$$U_t = AU, \quad U(0) = U_0$$

Eigenfunktionsansatz für eine Wellengleichung

Die Eigenfunktionen $\{V_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ und Eigenwerten $\{\lambda_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ von A sind

$$V_n(x) = \begin{bmatrix} \sin(n\pi x) \\ in\pi \sin(n\pi x) \end{bmatrix}, \quad \lambda_n = in\pi, \quad n = \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Probe:

$$AV_n(x) = \begin{bmatrix} in\pi \sin(n\pi x) \\ (in\pi)^2 \sin(n\pi x) \end{bmatrix} = in\pi \begin{bmatrix} \sin(n\pi x) \\ in\pi \sin(n\pi x) \end{bmatrix} = \lambda_n V_n(x)$$

Die Lösung der PDG lässt sich so darstellen:

$$U(x,t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \gamma_n \begin{bmatrix} \sin(n\pi x) \\ in\pi \sin(n\pi x) \end{bmatrix} \exp(in\pi t)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \sin(n\pi x) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & in\pi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_n & -\gamma_{-n} \\ \gamma_n & \gamma_{-n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{in\pi t} \\ e^{-in\pi t} \end{bmatrix}$$

Eigenfunktionsansatz für eine Wellengleichung

Zur Zeit $t = 0$ gilt:

$$U(0) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin(n\pi x) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & in\pi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_n - \gamma_{-n} \\ \gamma_n + \gamma_{-n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_0(x) \\ u_1(x) \end{bmatrix}$$

Wenn u_0 und u_1 folgende Fourier Reihen haben,

$$u_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \sin(n\pi x), \quad u_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \sin(n\pi x)$$

muss gelten:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ in\pi & in\pi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_n \\ \gamma_{-n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & in\pi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_n - \gamma_{-n} \\ \gamma_n + \gamma_{-n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_n \\ \beta_n \end{bmatrix}$$

oder:

$$\begin{bmatrix} \gamma_n \\ \gamma_{-n} \end{bmatrix} = \frac{1}{2in\pi} \begin{bmatrix} in\pi & 1 \\ -in\pi & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_n \\ \beta_n \end{bmatrix}$$

Also

$$\gamma_n = \frac{\beta_n + in\pi\alpha_n}{2in\pi} \quad \gamma_{-n} = \frac{\beta_n - in\pi\alpha_n}{2in\pi}$$

Eigenfunktionsansatz für eine Wellengleichung

Mit diesen Werten für γ_n und γ_{-n} ergibt sich

$$U(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin(n\pi x) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & in\pi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\beta_n + in\pi\alpha_n}{2in\pi} & \frac{in\pi\alpha_n - \beta_n}{2in\pi} \\ \frac{\beta_n + in\pi\alpha_n}{2in\pi} & \frac{\beta_n - in\pi\alpha_n}{2in\pi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{in\pi t} \\ e^{-in\pi t} \end{bmatrix}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \sin(n\pi x) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & in\pi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_n/(n\pi)\sin(n\pi t) + \alpha_n \cos(n\pi t) \\ \beta_n/(in\pi)\cos(n\pi t) + i\alpha_n \sin(n\pi t) \end{bmatrix}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \sin(n\pi x) \begin{bmatrix} \beta_n/(n\pi)\sin(n\pi t) + \alpha_n \cos(n\pi t) \\ \beta_n \cos(n\pi t) - n\pi\alpha_n \sin(n\pi t) \end{bmatrix}$$

Die erste Komponente von U ist:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin(n\pi x)[\beta_n/(n\pi)\sin(n\pi t) + \alpha_n \cos(n\pi t)]$$

Probe: $u(0,t) = u(1,t) = 0,$

$$u_{tt}(x,t) = -\sum_{n=1}^{\infty} \sin(n\pi x)(n\pi)^2[\beta_n/(n\pi)\sin(n\pi t) + \alpha_n \cos(n\pi t)] = u_{xx}$$

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin(n\pi x)\alpha_n = u_0, \quad u_t(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin(n\pi x)\beta_n = u_1$$

Methoden der Fourier Transformierten

Beispielsweise soll für $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ gelöst werden:

$$-\Delta u + u = f, \quad u \in L^2(\mathbb{R}^n)$$

Die PDG wird in eine algebraische Gleichung durch die Fourier Transformierte transformiert.

Def: Die Fourier Transformierte von $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$ ist

$$\hat{u}(\boldsymbol{\omega}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{\omega}} u(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x}, \quad \boldsymbol{\omega} \in \mathbb{R}^n$$

und ihre Inverse Fourier Transformierte ist

$$\check{u}(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{\omega}} \hat{u}(\boldsymbol{\omega}) d\boldsymbol{\omega}, \quad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$$

Satz (Plancherel): Sei $u \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$. Dann gelten $\hat{u}, \check{u} \in L^2(\mathbb{R})$ und

$$\|u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \|\hat{u}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \|\check{u}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}.$$

Methoden der Fourier Transformierten

Def: Um die Fourier Transformierten von $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$ zu definieren, sei $\{u_k\} \subset L^2(\mathbb{R}^n) \cap L^1(\mathbb{R}^n)$ eine approximierende Folge:

$$\lim_{k\to\infty} u_k = u \text{ in } L^2(\mathbb{R}^n).$$

Wegen Plancherel gelten

$$\|\hat{u}_k - \hat{u}_l\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \|\check{u}_k - \check{u}_l\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \|u_k - u_l\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \xrightarrow{k,l\to\infty} 0$$

Seien $\hat{u}$ und $\check{u}$ die Limiten in $L^2(\mathbb{R}^n)$:

$$\hat{u} = \lim_{k\to\infty} \hat{u}_k \text{ in } L^2(\mathbb{R}^n), \qquad \check{u} = \lim_{k\to\infty} \check{u}_k \text{ in } L^2(\mathbb{R}^n).$$

Satz: Seien $u, v \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Dann gelten:

- $\int_{\mathbb{R}^n} u^* v d\boldsymbol{x} = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{u}^* \hat{v} d\omega$,
- $\widehat{\partial^{\boldsymbol{\alpha}} u} = (i\boldsymbol{\omega})^{\boldsymbol{\alpha}} \hat{u}$, $\forall \boldsymbol{\alpha} \ni \partial^{\boldsymbol{\alpha}} u \in L^2(\mathbb{R}^n)$,
- $u, v \in L^1(\mathbb{R}^n) \Rightarrow \widehat{u \star v} = (2\pi)^{\frac{n}{2}} \hat{u}\hat{v}$ und
- $u = (\hat{u})^{\check{}}$.

Fourier Transformierte für ein Elliptisches Problem

Zu lösen ist . Da $-\Delta u$ so umgeschrieben werden kann:

$$-\Delta u = \sum_{|\boldsymbol{\alpha}|=2} a_{\boldsymbol{\alpha}} \partial^{\boldsymbol{\alpha}} u \quad \text{mit} \quad a_{\boldsymbol{\alpha}} = -1, \alpha_i = 2; \text{ sonst } a_{\boldsymbol{\alpha}} = 0$$

folgt mit dem letzten Satz,

$$-\widehat{\Delta u} = \sum_{|\boldsymbol{\alpha}|=2} a_{\boldsymbol{\alpha}} \widehat{\partial^{\boldsymbol{\alpha}} u} = \sum_{|\boldsymbol{\alpha}|=2} a_{\boldsymbol{\alpha}} (i\boldsymbol{\omega})^{\boldsymbol{\alpha}} \hat{u} = -\sum_{i=1}^{n} (i^2) \omega_i^2 \hat{u} = |\boldsymbol{\omega}|^2 \hat{u}$$

Also durch die Fourier Transformierte ergibt sich folgende algebraische Gleichung für $\hat{u}$:

$$(|\boldsymbol{\omega}|^2 + 1)\hat{u}(\boldsymbol{\omega}) = \hat{f}(\boldsymbol{\omega}) \quad \Rightarrow \quad \hat{u} = \hat{f}\hat{B}, \quad \hat{B}(\boldsymbol{\omega}) = \frac{1}{1 + |\boldsymbol{\omega}|^2}$$

Unten wird gezeigt, $B(\boldsymbol{x}) = 2^{-\frac{n}{2}} \int_0^\infty t^{-\frac{n}{2}} e^{-t-\frac{|\boldsymbol{x}|^2}{4t}} dt$. Mit dem letzten Satz folgt

$$u(\boldsymbol{x}) = \frac{f \star B}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} f(\boldsymbol{y}) B(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}) d\boldsymbol{y}$$

Fourier Transformierte für ein Elliptisches Problem

Für diese Formel für das *Besselsche Potential B* schreibt man,

$$\frac{1}{1+|\boldsymbol{\omega}|^2} = \int_0^\infty e^{-t(1+|\boldsymbol{\omega}|^2)} dt$$

und daher

$$\left(\frac{1}{1+|\boldsymbol{\omega}|^2}\right)^{\vee}(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_0^\infty e^{-t} \left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{i\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{\omega} - t|\boldsymbol{\omega}|^2} d\boldsymbol{\omega} \right) dt$$

Fourier Transformierte Gaußsche Funktionen sind Gaußsche:

$$(e^{-t\omega^2})^{\vee}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\omega - t\omega^2} d\omega = \left(\frac{\pi}{t}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{x^2}{4t}}$$

Es folgt

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{i\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{\omega} - t|\boldsymbol{\omega}|^2} d\boldsymbol{\omega} = \prod_{j=1}^{n} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix_i\omega_i - t\omega_i^2} = \left(\frac{\pi}{t}\right)^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{|\boldsymbol{x}|^2}{4t}}$$

und schliesslich

$$\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_0^\infty e^{-t} \left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{i\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{\omega} - t|\boldsymbol{\omega}|^2} d\boldsymbol{\omega} \right) dt = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}} \int_0^\infty t^{-\frac{n}{2}} e^{-t-\frac{|\boldsymbol{x}|^2}{4t}} dt$$

Fourier Transformierte für ein Parabolisches Problem

Zu lösen ist:

$$\begin{cases} u_t - \Delta u &= 0, & \mathbb{R}^n \times (0,\infty) \\ u &= u_0, & \mathbb{R}^n \times \{t=0\} \end{cases}$$

Das Fourier transformierte Problem ist:

$$\begin{cases} \hat{u}_t + |\omega|^2 \hat{u} &= 0, & \mathbb{R}^n \times (0,\infty) \\ \hat{u} &= \hat{u}_0, & \mathbb{R}^n \times \{t=0\} \end{cases}$$

Die Lösung jeder ω-GDG ist:

$$\hat{u}(\omega,t) = \underbrace{e^{-t|\omega|^2}}_{\hat{k}(\omega,t)} \hat{u}_0(\omega) \quad \Rightarrow \quad u = \frac{k \star u_0}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}$$

Der Faltungskern k ist gegeben durch:

$$k(\boldsymbol{x},t) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{\omega} - t|\boldsymbol{\omega}|^2} d\boldsymbol{y} = (2t)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{|\boldsymbol{x}|^2}{4t}}$$

und daher gilt: (Siehe ▸)

$$u(\boldsymbol{x},t) = \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|^2}{4t}} u_0(\boldsymbol{y}) d\boldsymbol{y}$$

Fourier Transformierte für ein Hyperbolisches Problem

Zu lösen ist:

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = 0, & \mathbb{R}^n \times (0, \infty) \\ u = u_0, & \mathbb{R}^n \times \{t = 0\} \\ u_t = 0, & \mathbb{R}^n \times \{t = 0\} \end{cases}$$

Das Fourier transformierte Problem ist:

$$\begin{cases} \hat{u}_{tt} + |\omega|^2 \hat{u} = 0, & \mathbb{R}^n \times (0, \infty) \\ \hat{u} = \hat{u}_0, & \mathbb{R}^n \times \{t = 0\} \\ \hat{u}_t = 0, & \mathbb{R}^n \times \{t = 0\} \end{cases}$$

Die Lösung jeder ω-GDG ist:

$$\hat{u}(\omega, t) = \frac{1}{2} \hat{u}_0(\omega)[e^{it|\omega|} + e^{-it|\omega|}] = \hat{u}_0(\omega) \cos(t|\omega|)$$

Die Inverse Fourier Transformierte ist:

$$\begin{aligned} u(\boldsymbol{x}, t) &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{u}_0(\omega) \cos(t|\omega|) e^{i\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{\omega}} d\omega \\ &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \left[\int_{\mathbb{R}^n} e^{i(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\cdot\boldsymbol{\omega}} \cos(t|\omega|) d\omega \right] u_0(\boldsymbol{y}) d\boldsymbol{y} \end{aligned}$$

Methode der Laplace Transformierten

Def: Die Laplace Transformierte von $u \in L^1(\mathbb{R}^1_+)$ ist

$$U(s) = \int_0^\infty e^{-st} u(t) dt, \quad s \geq 0$$

und ihre Inverse Laplace Transformierte ist

$$u(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} e^{st} U(s) ds, \quad t \geq 0$$

wobei alle Singularitäten σ von $U(s)$ erfüllen $\Re(\sigma) < \gamma$.

Beispiel: Zu lösen ist

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = 0, & \mathbb{R}^n \times (0, \infty) \\ u = u_0, & \mathbb{R}^n \times \{t = 0\} \end{cases}$$

Die Lösung ist gegeben durch

$$u(\boldsymbol{x}, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma - i\infty}^{\gamma + i\infty} e^{st} U(\boldsymbol{x}, s) ds, \quad t \geq 0$$

Laplace Transformierte für ein Parabolisches Problem

wobei die Laplace Transformierte $U(\boldsymbol{x}, s)$ erfüllt

$$
\begin{aligned}
\Delta_{\boldsymbol{x}} U(\boldsymbol{x}, s) &= \int_0^\infty e^{-st} \Delta_{\boldsymbol{x}} u(\boldsymbol{x}, t) dt \\
&= \int_0^\infty e^{-st} u_t(\boldsymbol{x}, t) dt \\
&= s \int_0^\infty e^{-st} u(\boldsymbol{x}, t) dt + e^{-st} u(\boldsymbol{x}, t)\Big|_{t=0}^{t=\infty} \\
&= sU(\boldsymbol{x}, s) - u_0(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n
\end{aligned}
$$

Hier ist partielle Integration zeitlich durchgeführt worden.
Analog zum obigen Problem ist die Lösung so gegeben:

$$
U(\boldsymbol{x}, s) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} u_0(\boldsymbol{y}) B(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}, s) d\boldsymbol{y}
$$

wobei

$$
B(\boldsymbol{x}, s) = \left(\frac{1}{s + |\omega|^2} \right)^{\check{}} (\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}} \int_0^\infty t^{-\frac{n}{2}} e^{-st - \frac{|\boldsymbol{x}|^2}{4t}} dt
$$